7ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 3.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{x+1}{2}-\frac{3x-1}{6}$$

2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1}{2}(x+1)=x-\frac{1}{4}(2x+3)$$

3. Να λύσετε την εξίσωση:

$$3-5x-2(4-5x)=-4(x-1)+3(3x-2)-3$$

4. Δίνεται η εξίσωση:

$$\frac{4-5x}{12}-\frac{3x-\alpha}{2}=2(x+\alpha)$$

Να βρείτε τον αριθμό α, ώστε η παραπάνω εξίσωση να έχει λύση τον αριθμό 2.

6. Να λύσετε την εξίσωση $x^3=10-2(x-1)^2$.

7. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x}{x^2-9}+\frac{2}{3x-x^2}=\frac{2}{x^2+3x}$.

8. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{4x}{x^2-x}=\frac{4}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}$.

9. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x-14}{x^2-4}+\frac{3}{x-2}=\frac{4}{x+2}$$

10. Να λύσετε τον τύπο $\alpha=\frac{\upsilon_2-\upsilon_1}{t_2-t_1}$ ως προς t_2.

11. Σήμερα ο Κώστας έχει τριπλάσια ηλικία από τον Αναστάση. Σε 15 χρόνια ο Κώστας θα έχει διπλάσια ηλικία από τον Αναστάση. Να βρείτε τις σημερινές ηλικίες του Κώστα και του Αναστάση.

12. Ένα διάλυμα Α έχει περιεκτικότητα 16% σε οινόπνευμα και ένα διάλυμα Β έχει περιεκτικότητα 40% σε οινόπνευμα. Πόσα mL διαλύματος Α και πόσα mL διαλύματος Β πρέπει να αναμείξουμε, ώστε να πάρουμε 400 mL διαλύματος Γ με περιεκτικότητα 25% σε οινόπνευμα;

13. Μια δεξαμενή μπορεί να γεμίσει νερό από τρεις βρύσες. Η πρώτη βρύση μόνη της γεμίζει τη δεξαμενή σε 4 ώρες, η δεύτερη βρύση μόνη της τη γεμίζει σε 6 ώρες και η τρίτη βρύση μόνη της τη γεμίζει σε 12 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή και με τις τρεις βρύσες μαζί;

14. Να λύσετε την εξίσωση $\lambda^2(x-1) = 4(x-\lambda+1)$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

15. Δίνεται η εξίσωση $3(x+3) - \lambda^2(1-x) = -3x(\lambda-1)$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση είναι:

α) ταυτότητα, β) αδύνατη.

16. Δίνεται η εξίσωση $\lambda(x+3\lambda) = 4(\lambda-1)(\lambda+1) - 2x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση έχει:

α) λύση το -2, β) μοναδική λύση το -2.

17. Να λύσετε την εξίσωση:

$$|x^2+1| + |4x - x^2 - 4| = 5$$

18. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|2x-1| = 5$ β) $|x+3| + 2 = 0$

γ) $|x^2+5x| = 0$ δ) $\dfrac{3|x-2|-1}{2} = 4$

19. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{4-5|x-3|}{12} - \frac{|3x-9|-3}{2} = |6-2x| - 6$$

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|2x+3| = |x+9|$ β) $2|3-x| - |2x+5| = 0$

21. Να λύσετε την εξίσωση $|x-4| = 5-2x$.

22. Να λύσετε την εξίσωση:

$$|x+3| - |2-x| = x+5$$

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x-3| = x-3$ β) $|2x-5| = 5-2x$

24. Να λύσετε την εξίσωση $|x^2-9| + |x^2+3x| = 0$.

25. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\big||x+1|-2\big| = 3$$

26. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 2|x| + 1 = 0$ β) $|x|^3 - 4x^2 = 0$

γ) $|x-2| - x^2 + 4x - 4 = 0$

27. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2-6x+9} = 2x-1$.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Επίλυση εξισώσεων 1ου βαθμού

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $9+(x-3)\cdot 2-(x+4)\cdot 3=2x$

β) $(5-x)\cdot 4-(x-3)\cdot 2=(4-x)(-1)-(x+2)\cdot 3$

γ) $15-(x+1)\cdot 9=(2-3x)\cdot 3$

δ) $5-(x-3)\cdot 3=-x-(x-2)\cdot 2$

2. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $24-7\left[3(x-2)-2(x-4)\right]=-\left[9-4(1-x)\right]$

β) $3\left[4(x-1)+2\right]=4-2\left[1-3(x-2)\right]$

γ) $-12+2\left[9x-5(x-1)\right]=-3\left[4(x-5)-6(x-4)\right]$

δ) $2\left[2(x-1)-(x-2)\right]=-\left[x-3-3(x-1)\right]$

ε) $4(x+3)=6-2\left[1-2(x-1)\right]$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $5-\frac{10x+1}{27}-\frac{x}{8}=\frac{13x+4}{18}-\frac{5(x-4)}{4}$

β) $\frac{x+6}{21}+5-\frac{x-12}{3}=\frac{x+1}{2}-\frac{5x+9}{28}$

γ) $\frac{5x-4}{5}-\frac{7x-10}{7}=\frac{22}{35}$

δ) $\frac{3}{4}(x-1)-\frac{5}{3}(x-4)=\frac{8}{5}(x-6)+\frac{5}{12}$

ε) $\frac{4x-1}{6}=-\frac{4}{3}\left(-1-\frac{9x+1}{18}\right)$

στ) $\frac{3}{5}(x-4)-\frac{2x-9}{3}=0{,}25(x-1)-2$

Β. Επίλυση εξισώσεων με παραγοντοποίηση

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2(x-4)+2x(x-4)+x-4=0$

β) $x(x^2-1)-x^3+x^2=0$

γ) $(x^2-4)(x-1)=(x^2-1)(x-2)$

δ) $x^3-2x^2-(2x-1)(x-2)=0$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x^2+4)^2-x\left[(x+3)^2-(x+6)\right]=16$

β) $(x+2)^3-13(x+1)=1$

γ) $x^3+(x-1)^2=1$

δ) $(x-1)^3-(10x-7)=-3(x-2)(x+2)$

Γ. Κλασματικές εξισώσεις

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{4}{x+2}-\frac{3x}{2-x}=\frac{3x^2-8}{x^2-4}$

β) $\frac{1}{2x-3}+\frac{3}{3x-2x^2}=\frac{5}{x}$

γ) $\frac{2}{x}=\frac{x-8}{x^2-4x}-\frac{1}{4-x}$

δ) $\frac{1}{x}-\frac{5}{5x-x^2}=\frac{1}{x-5}$

7. Δίνεται η παράσταση:

$$A=\frac{\frac{3}{2x-1}-\frac{2}{2x+1}-\frac{10}{4x^2-1}}{\frac{2x-5}{(2x+1)(3x+5)}}$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι:

$$A^2=8A$$

Δ. Επίλυση τύπου

8. Να λύσετε τον τύπο $F=\frac{p_2-p_1}{t_2-t_1}$ ως προς:

α) p_1 **β)** t_1

9. Δίνονται οι τύποι:

$$S=\upsilon_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (1) \quad \text{και} \quad \upsilon=\upsilon_0+\alpha t \quad (2)$$

α) Να λύσετε τον τύπο (2) ως προς α.

β) Να αποδείξετε ότι $S=\frac{\upsilon+\upsilon_0}{2}t$.

10. Δίνονται οι τύποι $h=\frac{1}{2}gt^2$ και $\upsilon=gt$. Να αποδείξετε ότι $h=\frac{\upsilon^2}{2g}$.

Ε. Προσδιορισμός παραμέτρου

11. Οι εξισώσεις:

$$3-\frac{x-4}{2}=\frac{3}{4}-2(x-1)$$

και:

$$(2\mu-6)x-5=1-\mu(-4x-2)$$

έχουν κοινή λύση.

α) Να βρείτε τον αριθμό μ.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1}{\omega}+\frac{\mu(\omega-1)}{\omega^2+\mu\omega}=-\frac{2}{\omega+\mu}$$

12. Δίνονται οι εξισώσεις:

$$x^3-3=x(1-3x) \quad (1)$$

και:

$$(x^2-2\alpha)(x-1)=\alpha(x-2)^2+(x-11)(\alpha-x) \quad (2)$$

Η μικρότερη λύση της εξίσωσης (1) είναι λύση και της εξίσωσης (2).

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Να λύσετε την εξίσωση (2).

Ζ. Προβλήματα

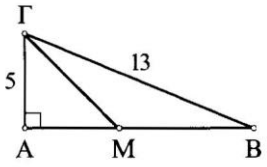
13. Η Σοφία έχει σήμερα διπλάσια ηλικία από την Άννα. Πριν από 5 χρόνια η Σοφία είχε τριπλάσια ηλικία από την Άννα. Να βρείτε τις σημερινές ηλικίες της Σοφίας και της Άννας.

14. Ο Δημήτρης στα 3 διαγωνίσματα Μαθηματικών που έγραψε στο σχολείο είχε μέσο όρο 15. Ο βαθμός του 2ου διαγωνίσματος ήταν κατά 4 μεγαλύτερος από τον βαθμό του 1ου διαγωνίσματος και

κατά 1 μικρότερος από τον βαθμό του 3ου διαγωνίσματος. Να βρείτε τους βαθμούς των τριών διαγωνισμάτων.

15. Σε μια γιορτή αρχικά οι άντρες ήταν διπλάσιοι από τις γυναίκες. Μετά από λίγο έφυγαν δέκα ζευγάρια και οι άντρες που έμειναν ήταν τριπλάσιοι από τις γυναίκες. Να βρείτε πόσοι άντρες και πόσες γυναίκες υπήρχαν αρχικά.

16. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{A} = 90^\circ$ και ισχύουν $A\Gamma = 5\,cm$ και $B\Gamma = 13\,cm$. Να βρείτε τη θέση σημείου Μ πάνω στην πλευρά ΑΒ, το οποίο ισαπέχει από τις κορυφές Β και Γ.



17. Ένας ποδηλάτης ξεκινά από την πόλη Α και κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο προς την πόλη Β με μέση ταχύτητα 16 km/h. Μια ώρα αργότερα μια φίλη του ξεκινά με το ποδήλατό της από την πόλη Β και με μέση ταχύτητα 12 km/h κινείται προς την πόλη Α για να τον συναντήσει. Αν η απόσταση των δύο πόλεων είναι 44 km, σε πόσες ώρες από την εκκίνηση του ποδηλάτη θα συναντηθούν;

18. Ένας γιατρός γράφει στη συνταγή του ένα φαρμακευτικό διάλυμα 20 γραμμαρίων περιεκτικότητας 52% σε κάποια ουσία. Ο φαρμακοποιός διαθέτει από αυτή την ουσία διαλύματα περιεκτικότητας 40% και 70%. Πόσα γραμμάρια από κάθε διάλυμα της ουσίας πρέπει να αναμείξει ο φαρμακοποιός, ώστε να παρασκευάσει το φάρμακο που γράφει στη συνταγή του ο γιατρός;

19. Έχουμε ορισμένα γραμμάρια ενός κράματος μετάλλων περιεκτικότητας 60% σε χρυσό. Προσθέτουμε 100 g καθαρό χρυσό και προκύπτει ένα νέο κράμα περιεκτικότητας 70% σε χρυσό. Να βρείτε πόσα γραμμάρια ήταν το αρχικό κράμα.

20. Μια βρύση γεμίζει μια άδεια δεξαμενή σε 4 ώρες, ενώ μια άλλη βρύση γεμίζει την ίδια δεξαμενή σε 12 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσουν τη δεξαμενή και οι δύο βρύσες μαζί;

21. Ο εργάτης Α βάφει μόνος του ένα αυτοκίνητο σε 8 ώρες, ενώ ο εργάτης Β βάφει μόνος του το ίδιο αυτοκίνητο σε 6 ώρες. Αρχίζουν και βάφουν μαζί το αυτοκίνητο και μετά από 2 ώρες ο εργάτης Α σταματά για φαγητό, ενώ ο εργάτης Β τελειώνει το βάψιμο μόνος του. Να υπολογίσετε τον χρόνο που χρειάστηκε προκειμένου να τελειώσει το βάψιμο ο εργάτης Β.

22. Αν όλοι οι μαθητές της Α′ Λυκείου ενός σχολείου τοποθετηθούν ανά τρεις στα θρανία, παραμένουν όρθιοι 5 μαθητές. Αν τοποθετηθούν ανά τέσσερις, χρειάζονται ακόμη 19 μαθητές για να συμπληρωθούν οι κενές θέσεις των θρανίων. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών, καθώς και το πλήθος των θρανίων.

Η. Συνδυαστικά θέματα

23. Δίνεται ο αριθμός:

$$\alpha = \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2^4\sqrt{2}}} \cdot \left(\sqrt{72} + \sqrt{18} - \sqrt{50}\right)$$

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Για την τιμή του α που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x-3}{\alpha^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{3} - \left(x - \frac{\alpha^{\frac{1}{3}}x}{3}\right) = 0$$

24. Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (°C) σε βαθμούς Φαρενάιτ (°F), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (°C) σε βαθμούς Κέλβιν (°K), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου (°C) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν (°K) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (°F) είναι η:

$$K = \frac{F-32}{1,8} + 273$$

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278 °K μέχρι 283 °K. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε °F.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

25. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{x^2 - 9 - (x+3)^2 + (x+3)(x+4)}{x^2-4} \quad \text{και}$$

$$B = \frac{(x+1)^3 - 2x^2 + 2}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις Α και Β και στη συνέχεια να τις απλοποιήσετε.

β) Να βρείτε για ποια τιμή του x ισχύει ότι:

$$A + B = \frac{x^2 + 6x - 4}{x^2 - 4}$$

26. Η εξίσωση:

$$\frac{(\alpha^2 + \beta^2 + 25)x}{4} = \alpha(x+1) + \beta(x+2)$$

έχει ρίζα τον αριθμό:

$$\rho = \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5} - \sqrt[5]{3\sqrt[4]{3\sqrt{3}}} \cdot \sqrt[40]{3^{29}}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\rho = 2$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

γ) Για την τιμή των α και β που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{12x+1}{\alpha} - x = \frac{15x+\beta}{\alpha} - \left(\beta^{\frac{1}{2}}x + 1\right)$$

27. **α)** Να λύσετε την εξίσωση:

$$(x-2)^3 + (x+1)^3 + (1-2x)^3 = 0$$

β) Αν α είναι η μεγαλύτερη ρίζα της προηγούμενης εξίσωσης, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3-10x}{2\alpha x^2 - 1} - \frac{4x}{\alpha x + 1} = \frac{4x}{1-\alpha x}$$

28. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $\omega^3 + \omega^2 - 4\omega - 4 = 0$

β) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^3 - 4 = \frac{4x}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-2x+1}$

Θ. Επίλυση παραμετρικών εξισώσεων

29. Για τις διάφορες τιμές του λ να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\lambda^2(x+1) = -(-1-\lambda x)$

β) $\frac{x+1}{2} - \frac{\lambda^2 x - \lambda^2}{18} = \frac{\lambda}{3}$

γ) $\lambda(2x+1) - 4(1+\lambda x) = \lambda^2(x-1) + \lambda$

δ) $2(\lambda^2 + 2x) - \lambda(4+\lambda x) = 0$

30. Για τις διάφορες τιμές του λ να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $\lambda^2(\lambda x - \lambda + 2) - \lambda(x+1) = 0$

β) $2\lambda^2 x - \lambda^2(\lambda^2 x - 1) = -2\lambda(\lambda x - 1)$

γ) $\frac{\lambda^3}{12}(x-1) - \frac{\lambda}{2}(x+\lambda) = \frac{\lambda}{4}(x-3\lambda)$

δ) $(\lambda^2 x - 2)(\lambda - 2) + \lambda x - (\lambda - 1)^2 = 2$

31. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x(y-1)}{2} = \frac{y(x+1)}{3} - 1$$

α) με άγνωστο τον x,

β) με άγνωστο τον y.

32. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1}{x+\lambda} = \frac{2}{x-\lambda} - \frac{1}{x-5}$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ι. Προσδιορισμός Παραμέτρων

33. Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda^2(x+4) - 5\lambda(x+\lambda) = -25$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση είναι:

α) ταυτότητα, **β)** αδύνατη.

35. Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda(x+2\lambda) - 3(\lambda^2 - x - 3) = 0$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση έχει:

α) λύση το -3,

β) μοναδική λύση το -3.

36. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ να γράψετε τρεις εξισώσεις.

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

37. Δίνεται η εξίσωση:

$$\alpha x - 6 - 2(2x - \beta) = 0$$

Να βρείτε για ποιες τιμές των α και β η παραπάνω εξίσωση:

α) έχει ακριβώς μία λύση,

β) είναι αδύνατη,

γ) είναι ταυτότητα,

δ) έχει τουλάχιστον μία λύση,

ε) έχει το πολύ μία λύση.

38. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda-2)^2 - 6(1+x) =$$

$$= (2-2x)(\lambda-1)(\lambda+1) - 2\lambda$$

Αν η προηγούμενη εξίσωση είναι ταυτότητα, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\lambda^2(x+1) = 2(x+\lambda) - (1-2x)$$

είναι αδύνατη.

39. Η εξίσωση $2(x+\beta) - \alpha(x-1) = 0$ έχει λύσεις τους αριθμούς 2017 και 2018. Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

40. Να βρείτε για ποια τιμή του λ οι εξισώσεις:

$$(\lambda+3)(x-1) = 8x$$

και:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{x-\lambda}{3} - \frac{\lambda x - 3\lambda}{6}$$

είναι ισοδύναμες.

41. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί μ, x_1 και x_2, με $x_1 \neq x_2$, για τους οποίους ισχύουν:

$\mu^2 x_1 - 6 = \mu(2x_1 - 3)$ και $\mu(\mu x_2 + 3) = 2(\mu x_2 + 3)$

Να βρείτε τον αριθμό μ.

Κ. Συνδυαστικά θέματα

34. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\alpha+3)x=\alpha^2-9$$

με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν:

i) $\alpha=1$ **ii)** $\alpha=-3$

β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

42. Δίνονται οι εξισώσεις:

$$\lambda^2(x+1)=2\left[(\lambda-1)^2-1+8x\right] \quad (1)$$

και:

$$\mu^2(x-1)(\mu-10)=5\mu\left[5(3\mu+x)-2(5x+6\mu)\right] \quad (2)$$

Αν η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα και η εξίσωση (2) είναι αδύνατη, τότε:

α) να βρείτε τις τιμές των λ και μ,

β) να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3x+\lambda^{\frac{1}{2}}}{\mu}-\frac{\lambda x-1}{10}+\frac{\mu x-2}{\lambda^{\frac{3}{2}}}=\frac{x+1}{4}$$

43. Η εξίσωση:

$$\alpha(x+\beta)-\beta(2\alpha-x)=-(1-3x)$$

είναι ταυτότητα. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A=\alpha^2+\beta^2$ **β)** $B=\alpha^3+\beta^3$

γ) $\Gamma=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ **δ)** $\Delta=(\alpha-\beta)^2$

44. Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda^2(\lambda x-1)+2x(\lambda-1)^2=2(5x-\lambda)$$

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση, να αποδείξετε ότι αυτή είναι μικρότερη από το $\frac{1}{8}$.

45. Δίνονται οι εξισώσεις:

$$\lambda^2(x-1)=2(\lambda x+3)-5\lambda \quad (1)$$

και:

$$y(3-\lambda)(\lambda+3)=5y-(2y+1)(\lambda-2) \quad (2)$$

Να βρείτε για ποια τιμή του λ οι εξισώσεις (1) και (2) έχουν μοναδικές λύσεις x_0 και y_0 αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει:

$$x_0+y_0=1-\frac{1}{2y_0}$$

Λ. Εξισώσεις με απόλυτα

46. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $\frac{|x+3|}{2}=5-\frac{|x+3|}{3}$

β) $\frac{|4-x|-2}{2}=5-\frac{|4-x|+10}{9}$

49. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x^2-3x+2|=|x^2+3x-20|$

β) $|x^2+5x|=|3x-x^2|$

γ) $|x-2||x+2|=|7x-4|$

δ) $|x-4||x+3|=|x-2||x-6|$

50. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x^2+19|-|x^2+16|=|2x-7|$

β) $\big||x|+7\big|-\big||x|+5\big|+|x-3|=|2x+9|+2$

51. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $|x-3|=2x-7$ **β)** $|x+2|=x+6$

γ) $|x+5|=3x-1$ **δ)** $2|x-4|=2-x$

ε) $x-\frac{|x-1|}{2}=0$

στ) $2|x-4|-x+3=0$ **ζ)** $|1-3x|-3=2x$

η) $x-2|x+2|-4=0$

52. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|2x-8|=2x-8$ **β)** $|3x-6|=6-3x$

γ) $|7-x|=7-x$ **δ)** $|12-4x|=4x-12$

ε) $5-|x-5|=x$ **στ)** $x-|x-13|=13$

53. Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει:

$$d(2x,\,3)=3-2x$$

α) Να αποδείξετε ότι $x\le\frac{3}{2}$.

β) Αν $x\le\frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$K=|2x-3|-2|3-x|$$

είναι ανεξάρτητη του x.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

54. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\big||x+2|-5\big|+\big||1-x|-2\big|=0$

β) $\big||x-2|-|2x-1|\big|+\big||3x+2|-|x|\big|=0$

55. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{x^2-10x+25}=1-2x$

β) $5+\sqrt{x^2-6x+9}=3x$

56. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\big||x|-3\big|=1$ **β)** $\big||x|-2\big|=5$

γ) $\big||x+3|-2\big|=4$ **δ)** $\big||5-x|-6\big|=2$

ε) $\big|5-|2x-1|\big|=4$ **στ)** $\big|1-|3-2x|\big|=6$

γ) $1-\frac{1+3|x-7|}{4}=\frac{4-|7-x|}{10}+\frac{1}{2}$

δ) $\frac{3|x-3|}{4}=2+\frac{|3-x|}{2}$

47. Δίνεται η παράσταση:

$$A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

α) Να αποδείξετε ότι $A=4$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x+A|=1$.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

48. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $|2x-4|-7=8-|x-2|$

β) $5-|2x+2|=7-|3x+3|$

γ) $3-|3x-9|=31+|3-x|$

δ) $|5x-20|-14=|12-3x|$

ε) $30-|5-5x|=|4x-4|+|6-6x|$

στ) $\frac{|x-3|}{2}+\frac{|6-2x|}{3}=8-\frac{|3-x|}{6}$

57. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2-10|x|+25=0$ β) $x^2-8|x|=0$

γ) $\frac{x^2}{3}=\frac{|x|}{2}$ δ) $|x|^3-5x^2=0$

ε) $|x|^3-6x^2+9|x|=0$

στ) $|2x^3|-|x|^3-4x^2=0$

Μ. Πίνακας προσήμων

58. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $\sqrt{x^2-6x+9}+2\sqrt{x^2+2x+1}=4$

β) $|x|-\sqrt{x^2-4x+4}=2$

59. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $d(x,1)+d(2,x)=2x+1$

β) $d(x,1)-d(0,x)-4=2x-d(2x,-3)$

Ν. Σύνθετες εξισώσεις

60. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $|x-5|-(x-5)^2=0$

β) $x^2+6x+9-|x+3|=0$

γ) $|x-2|=x^2-4x+4$

δ) $|3-3x|-x^2+2x-1=0$

ε) $2x^2-16x+32=|x-4|$

61. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{|2x-1|-3}{|x-2|-1}=3$ β) $\frac{4-|x-5|}{|3-2x|-1}=-4$

γ) $\frac{x^2-3}{|x|-2}=6$ δ) $\frac{x^2+2|x|-15}{|x|-3}=5$

62. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x^2-9}{|x|-3}=x-|x|+6$

β) $\frac{x^2-5|x|}{|x|-5}=|2x+15|$

γ) $\frac{|x||x-3|-4|x|+2|x-3|-8}{|x|+2}=|2x-9|-4$

63. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $||x|+2|=x+2$

β) $|3+|x||+|-x|=15-|2x|$

γ) $||x-2|+3|+|5x-10|=|4-2x|+11$

δ) $||2x-5|+8|+|x-10|=2||2x-20|+4|$

67. α) Να αποδείξετε ότι:

$$||\alpha|-|\beta||=|\alpha-\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta\geq 0$$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$||x+8|-3|=|x+5|$$

68. Δίνεται η παράσταση:

$$A=\frac{|x^2-9|}{|x^2+3x|+|3x+9|}$$

α) Για ποια x ορίζεται η παράσταση A;

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A=1$.

64. Να λύσετε την εξίσωση:

$$|x^{10} - 13x + 7| + 13x = 0$$

65. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\big||x| + x\big| + \big|x - |x|\big| = |x + 3|$$

Ξ. Συνδυαστικά θέματα

66. **α)** Να αποδείξετε ότι:

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \geq 0$$

β) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $|x + 3| = |x| + 3$

ii) $|x + 4029| = |x + 2015| + 2014$

69. Σε έναν άξονα τα σημεία Α, Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$.

β) Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$:

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Με χρήση του άξονα να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

70. Δίνεται η εξίσωση:

$$|\lambda + 1|x - |\lambda - 8| = 3(x - 2) \quad (1)$$

με άγνωστο τον x.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση.

β) Αν η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα, να λύσετε την εξίσωση:

$$|y|^{\lambda+1} = \lambda y^{\lambda}$$

γ) Αν $\lambda \in (-1, 2) \cup (2, 8)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει σταθερή λύση (ανεξάρτητη του λ).

δ) Αν $\lambda > 8$ και ρ είναι λύση της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει ότι:

$$|6 - 4\rho| = |\rho - 3| + \sqrt{4\rho^2 - 12\rho + 9}$$

8ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 3.2 Η εξίσωση $x^v=α$**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3 = 64$ β) $x^4 = 81$ γ) $x^6 = -21$ δ) $x^5 = -32$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $25x^5 = 16x^3$ β) $x^7 - 8 = x^3 - 8x^4$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x^2 - 5)^4 - 256 = 0$ β) $(3x - 1)^4 = |8 - 24x|$

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $8x^5 = 2^{18}$ **β)** $25x^6 - 5^{14} = 0$

γ) $49x^8 = 7^{18}$ **δ)** $x^{12} + 3^{12} = 0$

ε) $25^3x^{11} + 5^{28} = 0$ **στ)** $3^{12}x^8 - 9^{10} = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x^3 + 27)(x^4 - 5^4) = 0$

β) $(x^4 - 81)(x^5 + 2^{10}) = 0$

γ) $(x^{12} - 16^6)(x^9 + 8^3) = 0$

δ) $(3x^{10} - 3^{31})(4x^9 - 2^{20}) = 0$

3. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $2x^5 + 5x^2 = x^5 - 3x^2$

β) $x^3(x^3 + 30) = 3x^3$

γ) $2x^2(2x^2 + 3) = 3x^4 - 2x^2$

δ) $5x(x^3 - 5) = 2x(2x^3 + 1)$

ε) $(x^3 - 5)(x^3 + 5) = 39$

στ) $x^6 + 16x^3 + 64 = 0$

Β. Σύνθετες εξισώσεις

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $4^{12}x^4 - 8^9x = 0$ **β)** $(64x)^6 - 16^{10}x^2 = 0$

γ) $27^5x^4 + 9^6x = 0$ **δ)** $6^3x^6 + 27^2x^3 = 0$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(|x - 2| - 3)^3 = 8$

β) $(|2x - 1| - 6)^3 + 27 = 0$

γ) $(|3 - x| - 5)^4 = 16$

δ) $(|2x + 5| - 1)^4 - 81 = 0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x + 1)^4 - 8x = 8$

β) $(x - 1)^5 + 81 = 81x$

γ) $27 - (2x - 1)^4 = 54x$

δ) $(x + 3)^5 - 16x = 48$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^9 - 16x^5 - x^4 + 16 = 0$

β) $x^7 + 2x^3 = 8x^4 + 16$

γ) $x^8 - 27 = 27x^5 - x^3$

δ) $x^{10} + 81 - x^4 = 81x^6$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x + 2)^4 = |8x + 16|$

β) $2(3x - 1)^8 - 16^5|4 - 12x| = 0$

9. Να λύσετε την εξίσωση:

$$|x - 2|^7 - 27(x^2 - 4x + 4)^2 =$$

$$= |x^3 - 6x^2 + 12x - 8| - 27$$

10. Να λύσετε την εξίσωση:

$$(x^3 + 27)^3 + (4x^3 - 32)^3 + (5 - 5x^3)^3 = 0$$

Γ. Συνδυαστικά θέματα

11. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει ότι:

$$\alpha^{10} + \beta^6 + 65 = 2[\alpha^5 - (2\beta)^3]$$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$(|\beta x + 3| - \alpha)^4 = (2\alpha - 3\beta)^{\frac{4}{3}}$$

12. Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda^4(x - \lambda^2) - 8x = 8(x - 4\lambda) \qquad (1)$$

Αν η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα, τότε:

α) να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ,

β) να λύσετε την εξίσωση:

$$\lambda^2(x^3 + 3)(x^3 - 3) - (\lambda x^3 + 1)^2 = -5$$

9ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 3.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $2x^2 + x - 6 = 0$ β) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ γ) $2x^2 - 5x + 4 = 0$

2. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - (\sqrt{3} + 2)x + \sqrt{12} = 0$.

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $9x^2 - 16 = 0$ β) $2x^2 + 8 = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $3x^2 + 12x = 0$ β) $x^2 - 5x = 0$

5. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$(\lambda + 8)x^2 + (\lambda + 2)x + \frac{\lambda}{4} = 0$$

για τις διάφορες τιμές του λ.

6. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$(\lambda^2 + 1)x^2 + (\lambda^5 - 2)x - |\lambda| - 3 = 0$$

7. Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2 + (4\lambda + 1)x + 3\lambda^2 + \lambda = 0$$

για τις διάφορες τιμές του λ.

8. Να λύσετε την εξίσωση $(\lambda + 4)x^2 + (\lambda + 2)x - 2 = 0$ για τις διάφορες τιμές του λ.

9. Η εξίσωση $\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ (1) έχει ρίζα τον αριθμό 2. Να βρείτε:
α) την παράμετρο λ,
β) την άλλη ρίζα (αν υπάρχει) της εξίσωσης (1).

10. Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η εξίσωση:

$$x^2 + (\mu + 1)x + \mu + 4 = 0$$

έχει μία διπλή ρίζα. Στη συνέχεια να βρείτε τη διπλή ρίζα.

11. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση:

$$(\lambda + 3)x^2 - 2(\lambda + 2)x + \lambda = 0$$

έχει δύο ρίζες άνισες.

12. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση:

$$(\lambda - 1)x^2 - (2\lambda - 2)x + \lambda = 0$$

είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

13. Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών των εξισώσεων:

α) $2x^2 - 5x - 9 = 0$ β) $3x^2 - 2x + 7 = 0$

14. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 3x - 5 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 πραγματικές και άνισες.

β) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $x_1 + x_2$ ii) x_1x_2 iii) $x_1^2 + x_2^2$

iv) $x_1^3 + x_2^3$ v) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ vi) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

15. Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού η οποία να έχει ρίζες τους αριθμούς:

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

16. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 5 = 0$. Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

17. Δίνεται η εξίσωση $3x^2 + (\lambda + 2)x + \lambda - 1 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

β) Να βρείτε το λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει:

i) ρίζες αντίθετες, ii) ρίζες αντίστροφες.

18. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 4x + \lambda - 6 = 0$ (1).

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες ομόσημες.

β) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες ετερόσημες, τότε:

i) να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο αριθμός λ,

ii) να εξετάσετε αν η θετική ή η αρνητική ρίζα της εξίσωσης (1) έχει μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

19. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + (\lambda - 4)x - \lambda + 2 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει:

i) θετικές ρίζες, ii) αρνητικές ρίζες.

20. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 + 3\lambda + 6 = 0$ (1). Να βρείτε για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1 και x_2 για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 = 26$$

21. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$ (1). Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες, από τις οποίες η μία είναι διπλάσια της άλλης.

22. Να λύσετε την εξίσωση $(x^2 - 2x)^2 - 11x^2 + 22x + 24 = 0$.

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x^2 - |x| - 6 = 0$ β) $(x-2)^2 - 4\sqrt{x^2 - 4x + 4} + 3 = 0$

24. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ β) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

25. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x}{x+2} - \frac{x-10}{x^2-4} = \frac{2}{x-2}$$

26. Ένας οδηγός κινούμενος με το αυτοκίνητό του με σταθερή ταχύτητα υ, διήνυσε μια απόσταση 240 km. Αν η ταχύτητά του ήταν κατά 20 km/h μεγαλύτερη, θα διήνυε την απόσταση σε χρόνο λιγότερο κατά 1 ώρα. Να βρείτε την ταχύτητα υ.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2+(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0$

β) $2x^2+(2-\sqrt{3})x-\sqrt{3}=0$

γ) $5x^2-(\sqrt{2}-10)x-\sqrt{8}=0$

δ) $x^2-(3-2\sqrt{2})x+2-3\sqrt{2}=0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x^2+4x)(x^2-7x+6)=0$

β) $(3x^2-48)(-x^2-4x+32)=0$

γ) $(x^2-9x+8)(-x^2+5x-7)=0$

δ) $(x^2-2x+4)\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)=0$

3. α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$|2x-1|=3$$

β) Αν α, β, με $\alpha<\beta$, είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), να λύσετε την εξίσωση:

$$\alpha x^2+\beta x+3=0$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(2x-1)^2-(3-x)^2=(x+1)(2x-1)-1$

β) $(3x+2)^2-(x-2)(3-x)=6-4(x-1)^2$

γ) $(x-2)^2-(x-1)(x+1)=(x+3)^2-6x$

δ) $(x+2)^3-x(x-3)^2=15-(3x+1)(1-3x)$

5. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $-\frac{(x+1)(x-1)}{2}=\frac{2-x}{3}-\frac{(x-4)^2+5}{6}$

β) $\frac{x(3x-2)}{3}-\frac{(2x-1)^2+2}{6}=1-\frac{x-6}{2}$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x^2-5x+5|=1$

β) $|x^2+2x-9|=6$

γ) $|x^2+3x-5|=|2x^2-4x+5|$

δ) $|2x^2+5x-3|+|2x^2-5x+2|=0$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x-3|=x^2-x-6$

β) $3x|x-2|=7x-4$

Β. Επίλυση παραμετρικών εξισώσεων

8. Για τις διάφορες τιμές του λ να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\lambda x^2-(\lambda-2)x-2=0$

β) $(\lambda-2)x^2-2(\lambda+1)x+\lambda+4=0$

9. Αν η εξίσωση $x^2+\lambda x+\mu=0$ έχει μία διπλή ρίζα, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^2+(\mu+1)x+\frac{\lambda^2}{4}=0$$

έχει πραγματικές ρίζες.

10. Αν η εξίσωση $x^2+2x+\lambda-1=0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2+(2\lambda+1)x+\lambda^2+\frac{9}{4}=0$ είναι αδύνατη.

11. Αν η εξίσωση:

$$x^2+\beta x+\gamma=0$$

έχει πραγματικές ρίζες, να αποδείξετε ότι και η εξίσωση:

$$x^2+\beta x+\gamma+(x+\alpha)(2x+\beta)=0$$

έχει πραγματικές ρίζες.

12. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2+(\lambda^2+\lambda-1)x+\lambda^3-\lambda=0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1) ως συνάρτηση του λ.

Γ. Προσδιορισμός παραμέτρου

13. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2-(\lambda-1)x+6=0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Αν η εξίσωση (1) έχει λύση το 1, να βρείτε το λ.

β) Για $\lambda=2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

14. Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda x^2-(\lambda-1)x-1=0$$

με παράμετρο $\lambda\neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\neq 0$.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

15. Η εξίσωση:

$$3x^2-(\lambda+6)x+\lambda+2=0 \quad (1)$$

έχει ρίζα τον αριθμό λ.

α) Να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο λ.

β) Για την ακέραια τιμή του λ που βρήκατε να λύσετε την εξίσωση (1).

16. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2-2\lambda x+\lambda^2-\lambda+2=0 \quad (1)$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1):

α) έχει δύο ρίζες άνισες,

β) έχει μία διπλή ρίζα,

γ) είναι αδύνατη,

δ) έχει λύση.

17. Η εξίσωση:

$$x^2+\lambda x-2\lambda-5=0 \quad (1)$$

έχει δύο πραγματικές ρίζες και για τη διακρίνουσά της Δ ισχύει ότι:

$$\Delta^2=2(\Delta+4)$$

Να βρείτε το λ και τις ρίζες της εξίσωσης (1).

18. Η εξίσωση:

$$2x^2 + 2(\alpha + \beta)x + (\alpha - 2)(\beta + 4) - 2 = 0$$

έχει μία διπλή ρίζα. Να βρείτε:

α) τους αριθμούς α και β,

β) τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.

19. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + (4\lambda - 2)x + (2\lambda - 1)^2 = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει μία διπλή ρίζα για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

β) Αν $|\lambda| < 2$, να αποδείξετε ότι η διπλή ρίζα της εξίσωσης (1) ανήκει στο διάστημα $(-3, 5)$.

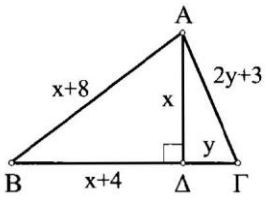
20. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \text{με } \alpha \neq 0$$

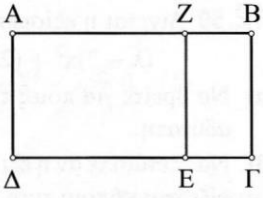
να αποδείξετε ότι ο αριθμός 2ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + 2\beta x + 4\gamma = 0$.

Δ. Προβλήματα

21. Στο διπλανό σχήμα το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ. Να βρείτε τα x και y, καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

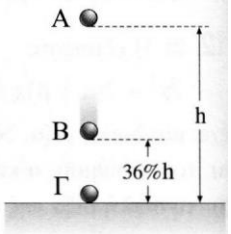


22. Ένας κηπουρός θέλει να περιφράξει με σύρμα έναν κήπο ΑΒΓΔ που έχει σχήμα ορθογωνίου και εμβαδόν $576\,m^2$. Στη συνέχεια θέλει να χωρίσει τον ορθογώνιο αυτόν κήπο, σε δύο μικρότερους σχήματος ορθογωνίου, τους ΑΖΕΔ και ΖΒΓΕ. Αν το σύρμα έχει συνολικό μήκος 132 m, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του κήπου αυτού.



23. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς, των οποίων το άθροισμα ισούται με το γινόμενο των δύο από τους τρεις αυτούς αριθμούς.

24. Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος h. Στο τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησής του το σώμα διανύει το 36% του h. Να βρείτε τον συνολικό χρόνο κίνησης t και το ύψος h. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\,m/s^2$.



Ε. Συνδυαστικά θέματα

25. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + \sqrt{\lambda + 3} \cdot x + \lambda = 0 \quad (1)$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

β) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (α), να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$A = \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda + 9} + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 1}$ είναι σταθερή.

26. **α)** Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad (1)$$

και:

$$8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2)$$

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3)$$

και:

$$\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4)$$

με $\alpha\gamma \neq 0$. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό του μαθητή αποδεικνύοντας ότι: Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha\gamma \neq 0$, τότε:

i) $\rho \neq 0$ και

ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

27. **α)** Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad (1)$$

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει ότι $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

28. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $\alpha \in (2, 4)$ και $\beta \in (8, 12)$ και η εξίσωση:

$$\alpha x^2 - 3(\alpha + \beta)x + 9\beta = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, από τις οποίες η μία είναι ανεξάρτητη των α και β.

β) Αν ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης (1) που εξαρτάται από τα α και β, να αποδείξετε ότι $\rho \in (6, 18)$.

29. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες.

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ οι δύο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2, 4)$.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

30. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + 2(\sqrt{3} - 1) = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι $\Delta = (\sqrt{3} - 3)^2$.

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

γ) Αν ρ είναι η άρρητη ρίζα της εξίσωσης (1), να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$\alpha = \frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{2}$$

είναι ακέραιος.

31. Δίνεται η εξίσωση:

$$\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$$

με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$\rho_1 = \alpha \quad \text{και} \quad \rho_2 = -\frac{1}{\alpha}$$

γ) Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε:

$$|\rho_1 - \rho_2| = 2$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

32. Μια υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι, ώστε όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \quad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος;

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;

γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή:

$$4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$$

και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5,

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

33. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + (\Delta - 2)x + \frac{\Delta - 5}{4} = 0 \quad (1)$$

όπου Δ είναι η διακρίνουσά της.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ.

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

γ) Αν $\rho_1 < \rho_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{2\rho_1^2}$$

34. Δίνονται οι εξισώσεις:

$$x^2 - (2\lambda - 1)x - 3 = 0 \quad (1)$$

και:

$$x^2 - (\lambda - 2)x + 3\lambda = 0 \quad (2)$$

με $\lambda \neq -1$. Αν οι εξισώσεις (1) και (2) έχουν κοινή ρίζα τον αριθμό ρ, τότε:

α) να βρείτε τους αριθμούς ρ και λ,

β) να λύσετε τις εξισώσεις (1) και (2),

γ) να λύσετε την εξίσωση:

$$|x + \rho| = x^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\lambda} x + \rho$$

35. Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

36. Δίνεται η εξίσωση:

$$\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$$

όπου α και β δύο θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι $\Delta = (\alpha^2 - \beta^2)^2$.

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α και β, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε ως συνάρτηση των αριθμών α και β.

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_1 = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$$

να αποδείξετε ότι:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

37. Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda x^2 - (\lambda^2 - 1)x - \lambda = 0 \quad (1)$$

με $\lambda \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \neq 0$.

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1) συναρτήσει του λ.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της απόστασης των ριζών της εξίσωσης (1) στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι 2.

Ζ. Τύποι Vieta

38. Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών των παρακάτω εξισώσεων:

α) $x^2 + 3x - 2 = 0$ **β)** $x^2 - 5x + 7 = 0$

γ) $-\sqrt{3} \cdot x^2 - \sqrt{27} \cdot x + \sqrt{12} = 0$

δ) $-\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot x^2 + \sqrt{15} \cdot x - \frac{1}{\sqrt{15}} = 0$

39. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 8 = 0$ (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 για τους οποίους ισχύει $x_1 + x_2 = 6$ και $x_1 x_2 = 4$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

40. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$$

με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε το λ ώστε $x_1 x_2 = -3$.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

41. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$$

με παράμετρο $\lambda \neq -2$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α) η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες,

β) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

42. Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης:

$$(\lambda^2+1)x^2+2(\lambda-4)x+1=0$$

είναι $\frac{1}{5}$.

Να βρείτε:

α) τον αριθμό λ,

β) το γινόμενο των ριζών της προηγούμενης εξίσωσης.

Η. Παραστάσεις ριζών εξίσωσης 2ου βαθμού

43. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-3x+1=0$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) x_1+x_2 **β)** x_1x_2 **γ)** $x_1^2+x_2^2$

δ) $x_1^3+x_2^3$ **ε)** $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ **στ)** $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$

44. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+5x-4=0$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) x_1+x_2 **β)** x_1x_2 **γ)** $x_1^2+x_2^2$

δ) $x_1^3x_2+x_1x_2^3$ **ε)** $(x_1-x_2)^2$ **στ)** $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$

45. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2+3x-4=0$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ **β)** $(2x_1-3)(2x_2-3)$

γ) $(x_1+1)^2+(x_2+1)^2$ **δ)** $(x_1^2-x_1x_2)(x_1x_2-x_2^2)$

46. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $-x^2+7x-9=0$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $x_1^4+x_2^4$ **β)** $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$

γ) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ **δ)** $|x_1-x_2|$

47. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2x-1=0$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=x_1^{10}+x_2^{10}$.

Θ. Κατασκευή εξίσωσης 2ου βαθμού

48. Δίνονται οι αριθμοί:

$$A=\frac{1}{3-\sqrt{7}} \quad \text{και} \quad B=\frac{1}{3+\sqrt{7}}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$A+B=3 \quad \text{και} \quad A\cdot B=\frac{1}{2}$$

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

49. Δίνονται οι αριθμοί:

$$A=\frac{1}{5+\sqrt{5}} \quad \text{και} \quad B=\frac{1}{5-\sqrt{5}}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $A+B=\frac{1}{2}$ **ii)** $A\cdot B=\frac{1}{20}$

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

50. α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$|x-2|=\sqrt{3}$$

β) Να σχηματίσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α).

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

51. Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi=20\,\text{cm}$ και εμβαδόν $E=24\,\text{cm}^2$.

α) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου.

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

52. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+5x-1$.

α) Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1 και x_2.

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$x_1+x_2, \quad x_1x_2 \quad \text{και} \quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$$

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

53. Δίνεται το τριώνυμο:

$$x^2-\kappa x-2 \quad \text{με } \kappa\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta>0$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2-3x-2=0 \quad (1)$$

i) να βρείτε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1x_2$ των ριζών της (1),

ii) να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1 και ρ_2, όπου:

$$\rho_1=2x_1 \quad \text{και} \quad \rho_2=2x_2$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

54. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2-3x-1=0 \quad (1)$$

Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού της οποίας οι ρίζες:

α) είναι διπλάσιες των ριζών της εξίσωσης (1),

β) είναι τα τετράγωνα των ριζών της εξίσωσης (1),

γ) είναι αντίστροφες των ριζών της εξίσωσης (1),

δ) είναι μισές των ριζών της εξίσωσης (1).

55. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+3x-5=0$, να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $|x_1|$ και $|x_2|$.

56. Έστω α και β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha\beta = 4 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

57. Έστω α και β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 2 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = -15$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

58. Έστω α και β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = -1 \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = -12$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

59. Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α και β τέτοιοι, ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 272$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = -64$.

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α και β.

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α και β.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

Ι. Προσδιορισμός παραμέτρου

60. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + (\lambda - 1)x + 2\lambda - 6 = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ.

β) Να βρείτε για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες:

i) αντίθετες, **ii)** αντίστροφες.

61. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση $x^2 + 4x + \lambda + 2 = 0$ να έχει:

α) μία διπλή ρίζα,

β) δύο ρίζες ετερόσημες,

γ) δύο ρίζες αρνητικές,

δ) δύο ρίζες θετικές,

ε) δύο ρίζες αντίστροφες.

62. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 5)x - \lambda + 4 = 0$ έχει:

α) μία διπλή ρίζα,

β) δύο ρίζες αντίστροφες,

γ) δύο ρίζες αντίθετες,

δ) δύο ετερόσημες ρίζες,

ε) δύο θετικές ρίζες,

στ) δύο αρνητικές ρίζες.

63. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης (1).

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

64. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + 2x - \lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) είναι τετραπλάσιο από το άθροισμά τους.

65. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει:

$$x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

66. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0$$

ii) για $\lambda = 1$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

67. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 10x + \lambda + 8 = 0 \quad (1)$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Αν για τις ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης (1) ισχύει $2x_1 = 3x_2$, να βρείτε το λ.

68. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x - 27 = 0$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) ισούται με το τετράγωνο της άλλης, να βρείτε τις ρίζες της και την τιμή του λ.

Κ. Συνδυαστικά θέματα

69. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 2\lambda + 6 = 0 \quad (1)$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Να βρείτε το λ, ώστε το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) να είναι ίσο με 14.

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς:

$$\frac{x_1 - 1}{x_2} \quad \text{και} \quad \frac{x_2 - 1}{x_1}$$

70. Δίνεται ο αριθμός:

$$\mu = (\sqrt{20} - 2)\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

και η εξίσωση:

$$x^2 + \mu^{\frac{1}{3}}\lambda x - \mu = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός μ είναι ακέραιος.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) ισούται με το τετράγωνο της άλλης, να βρείτε τις ρίζες της και την τιμή του λ.

71. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε:

i) το $S = x_1 + x_2$,

ii) το $P = x_1x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ.

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το λ.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

72. Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda < 0$, τότε:

i) Το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2$, όπου x_1 και x_2 οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

73. Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda \quad \text{με } \lambda > 0$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$.

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου,

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$,

iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

74. Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Αν x_1 και x_2, είναι οι ρίζες του προηγούμενου τριωνύμου, για κάθε $\lambda > 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{x_1x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

75. Δίνεται η εξίσωση:

$$-x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 + 2 = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για οποιουσδήποτε αριθμούς α και β.

β) Έστω S και P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1). Να βρείτε τα α και β, ώστε να ισχύει $2S = P - 2$.

γ) Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) για τις τιμές των α και β που βρήκατε.

i) Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \frac{x_1 + 1}{x_1 + 2} + \frac{x_2 + 1}{x_2 + 2}$$

ii) Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\frac{x_1^2}{x_2}$ και $\frac{x_2^2}{x_1}$.

76. Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης, τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$t_A < t_B, \quad t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} \quad \text{και}$$

$$|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|$$

α) **i)** Να αποδείξετε ότι:

$$t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$$

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει:

$$t_A + t_B = 6 \quad \text{και} \quad t_A t_B = 8$$

i) Να γράψετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B.

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

Λ. Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού

77. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 + |4x| - 5 = 0$

β) $x^2 - |-3x| + 2 = 0$

γ) $-3x^2 + |-5x| - 2 = 0$

δ) $-x^2 - |-x| + 20 = 0$

78. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2(x-3)(x+3) + 9|x| = 0$

β) $3|x| - (x-2)(x+2) = 0$

γ) $(x-2)^2 = 7|x| + 1 - x(x+4)$

δ) $(x-1)^2 - 8 = |x| - (x+1)^2$

ε) $5|x| = 1 - \dfrac{(x-3)(x+3)}{2}$

79. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **β)** $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

γ) $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$ **δ)** $x^4 - x^2 - 20 = 0$

80. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ **β)** $x^6 + 28x^3 + 27 = 0$

γ) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$ **δ)** $-16x^8 - 15x^4 + 1 = 0$

81. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$ **β)** $x - 3\sqrt{x} - 10 = 0$

γ) $x + 5\sqrt{x} + 4 = 0$ **δ)** $\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 2) = 3$

82. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $(x^2 + x)^2 - 4(x^2 + x) - 12 = 0$

β) $(x^2 + 3x)^2 - 2x^2 - 6x - 8 = 0$

γ) $x^2(x-4)^2 + 2(4x - x^2) - 15 = 0$

δ) $(x^2 + 2x - 6)^2 - 6x^2 - 12x + 9 = 0$

83. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x-1)^2 - 6\sqrt{x^2 - 2x + 1} + 8 = 0$

β) $(x+2)^2 - 2\sqrt{x^2 + 4x + 4} - 15 = 0$

γ) $(2x-1)^2 - 4\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3 = 0$

δ) $(|x| - 3)^2 - 3\sqrt{x^2 - 6|x| + 9} - 4 = 0$

Μ. Κλασματικές εξισώσεις

84. **α)** Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης:

$$-2x^2 + 10x = 12$$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$$ ***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

85. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{1+x}{x-1} \quad \text{και} \quad B = \frac{2}{x^2 - x}$$

όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις Α και Β πρέπει $x \neq 1$ και $x \neq 0$.

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$A = B$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

86. **α)** Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση:

$$\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο ερώτημα (α) να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

87. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $\dfrac{x+1}{x-3} - \dfrac{x}{3x-9} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{x-3}\right)$

β) $\dfrac{x}{2x-2} - \dfrac{11}{4x+4} = \dfrac{1}{x^2-1}$

γ) $\dfrac{4x}{x^2 - x} = \dfrac{4}{x^2 - 1} - \dfrac{x}{x+1}$

δ) $\dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{7}{x^2 - x} = \dfrac{x+3}{x^2 + 3x}$

ε) $\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{5x-20}{x^2 - 4x} = -\dfrac{14}{x^2 + 2x}$

Ν. Σύνθετες εξισώσεις

88. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x^2 - 5x + 3)^2 + 4x^2 - 20x + 15 = 0$

β) $(x^2 + 3x + 1)^2 - 4x^2 - 12x - 9 = 0$

γ) $(x^4 - 5x^2 + 2)^2 + 6x^4 - 30x^2 + 20 = 0$

89. Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2 - 2x - 2\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2$$

90. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\left(x + \dfrac{6}{x}\right)^2 - 12\left(x + \dfrac{6}{x}\right) + 35 = 0$

β) $4\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 - \dfrac{8x+8}{x-1} + 3 = 0$

γ) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x + 1} + \dfrac{12 - 6x}{x+1} + 8 = 0$

δ) $\left(\dfrac{3x}{x-1}\right)^2 + \dfrac{6x}{1-x} - 8 = 0$

91. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^2 - 3}{2x} + \dfrac{2x}{x^2 - 3} = 2$

β) $\dfrac{2x^2}{x+2} - \dfrac{4x+8}{x^2} + 2 = 0$

γ) $x^2+3x-8=\dfrac{20}{x^2+3x}$

δ) $x^2+x=\dfrac{42}{x^2+x+1}$

92. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x^2-x|+|x^2-11x+10|=0$

β) $|x^2+3x|+|x^4-8x^2-9|=0$

γ) $|x^2+x-6|+|x^4-13x^2+36|=0$

δ) $\big|x^2-4|x|+3\big|+|x^4-10x^2+9|=0$

93. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2+\dfrac{1}{x^2}+x+\dfrac{1}{x}=4$

β) $x^2+2x+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=6$

Ξ. Προβλήματα

94. Για την κάλυψη με τετράγωνα πλακάκια μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου,

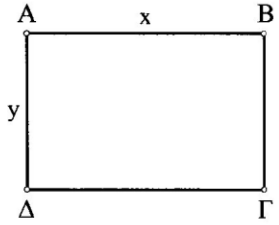
ii) το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

95. Ορισμένα άτομα θα μοιραστούν 3600 €. Αν τα άτομα ήταν 5 λιγότερα, ο καθένας θα έπαιρνε 24 € περισσότερα. Να βρείτε πόσα ήταν τα άτομα και πόσα χρήματα πήρε ο καθένας.

96. Ένα αγρόκτημα οργώνεται από δύο τρακτέρ Α και Β, αν δουλέψουν συγχρόνως, σε 6 ώρες. Αν οργώσει το αγρόκτημα μόνο το τρακτέρ Α, τότε χρειάζονται 5 ώρες περισσότερες από όσες χρειάζονται για να το οργώσει το τρακτέρ Β μόνο του. Να βρείτε σε πόσες ώρες καθένα τρακτέρ οργώνει μόνο του το αγρόκτημα.

97. Στο παρακάτω ορθογώνιο ο λόγος της μεγαλύτερης διάστασης (x) προς τη μικρότερη διάσταση (y) είναι ίσος με τον λόγο του αθροίσματος των δύο



διαστάσεων $(x+y)$ προς τη μεγαλύτερη διάσταση (x). Σε αυτή την περίπτωση ο λόγος $\dfrac{x}{y}$ είναι ίσος με τον χρυσό αριθμό φ. Μπορείτε να βρείτε τον λόγο $\dfrac{x}{y}=\varphi$;

Ο. Συνδυαστικά θέματα

98. Η εξίσωση:

$$(x+1)^4-(\alpha^2+3\alpha)(x^2+2x+1)+$$
$$+2\alpha^2-\alpha+3=0$$

έχει ρίζα το -2.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

99. α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4-9x^2+20=0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Να κατασκευάσετε μια διτετράγωνη εξίσωση της μορφής:

$$x^4+\beta x^2+\gamma=0$$

η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

100. α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4-7x^2+12=0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4+\beta x^2+\gamma=0 \quad (1)$$

με παραμέτρους $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν:

$$\beta<0,\ \gamma>0 \quad \text{και} \quad \beta^2-4\gamma>0$$

τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

101. Η εξίσωση:

$$\frac{1}{4}x^2+(\beta-9)x-\alpha^2+6\alpha-9=0$$

έχει μία διπλή ρίζα.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\alpha\beta^x-28\alpha^x+\beta=0$$

102. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2-\beta x+\gamma=0$$

με β, γ πραγματικούς αριθμούς. Η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει:

$$|x_1+x_2|=4$$

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β.

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma<4$.

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση:

$$x^2-\beta|x|+3=0 \quad (1)$$

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο ερώτημα (α), η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

$10^{ο}$ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ : **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **Ασκήσεις επανάληψης $3^{ου}$ κεφαλαίου**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

.1 Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2-(2\lambda+4)x-\lambda^2=0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το λ, ώστε οι ρίζες της εξίσωσης (1) να είναι αντίθετες.

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β) να λύσετε την εξίσωση:

$$\sqrt{\lambda^2}\cdot|x-3|=x-\lambda$$

.2 Η εξίσωση $x^2+\mu x+2\mu-4=0$ (1) έχει μία διπλή ρίζα.

α) Να αποδείξετε ότι $\mu=4$.

β) Αν ρ είναι η διπλή ρίζα της εξίσωσης (1), να λύσετε την εξίσωση:

$$|3x+\rho|-|13+\rho x|=0$$

.3 Δίνονται οι εξισώσεις:

$$\frac{(x-1)^2}{x-2}-\frac{2(2-x^2)}{x^2-2x}=\frac{2}{x} \quad (1)$$

$$|8x-20|-|5-2x|=3+|4x-10| \quad (2)$$

και:

$$\lambda(x+3-\lambda)=6-2(\lambda-x) \quad (3)$$

α) Να λύσετε τις εξισώσεις (1) και (2).

β) Έστω ρ η κοινή λύση των εξισώσεων (1) και (2). Να βρείτε το λ, ώστε η εξίσωση (3) να έχει μοναδική λύση το ρ.

.4 Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda^2(x-1)+12=4(\lambda x-1) \quad (1)$$

Αν η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα, τότε:

α) να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$,

β) να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\lambda^{\frac{1}{2}}x^2-|x|-6=0$

ii) $\dfrac{x-1}{x+\lambda^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{2x^2+\lambda}{x^2-\lambda}=\lambda^{\frac{3}{2}}-\dfrac{7x-15}{x-2}$

.5 Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2+2\lambda x+4(\lambda-1)=0$$

με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της προηγούμενης εξίσωσης, να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$(x_1+x_2)^2+x_1x_2+5=0$$ ***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

.6 Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2-\lambda x-(\lambda^2+5)=0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1-2)(x_2-2)=-4$$ ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

.7 Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda+2)x^2+(2\lambda+3)x+\lambda-2=0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda\neq-2$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι $\Delta=12\lambda+25$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\neq-2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P=x_1x_2$.

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, ώστε για τις ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση:

$$(x_1+x_2-1)^2+(x_1x_2+3)^2=0$$ ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

.8 Δίνεται η εξίσωση:

$$\alpha x^2-5x+\alpha=0$$

με παράμετρο $\alpha\neq0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha|\leq\dfrac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης όταν $\alpha=2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$$ ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

.9 Δίνεται ο αριθμός:

$$\alpha=\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{7+3\sqrt{5}}$$

και η εξίσωση:

$$\frac{\beta^2(x-1)}{3}=\alpha(6x+\beta)$$

η οποία είναι αδύνατη.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{x^2-\alpha^2x+2\alpha}-\sqrt{x^2+\beta x+9}=\sqrt[3]{\alpha^\beta}$

ii) $\dfrac{|x|+\dfrac{\beta}{\alpha}}{|x|-x}=(\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}}$

.10 Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2-2x-1=0$$

α) Να βρείτε τους αριθμούς:

$$\lambda=\frac{\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}} \quad \text{και} \quad \mu=(2x_1-1)(2x_2-1)$$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\big||x|+x\big|+\big||x|-x\big|=\big|\lambda(x-1)+\mu\big|$$

.11 Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2-2(\mu+3)x+\mu^2+6\mu-7=0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Αν ρ_1 και ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=|\rho_1-\rho_2|$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\big||2x-1|-5\big|=A$.

.12 Δίνεται ο αριθμός:

$$\alpha=\sqrt[4]{\frac{1}{(5-\sqrt{7})^2}+\frac{1}{(5+\sqrt{7})^2}}$$

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x^2+2\left(\sqrt{3}-\sqrt{\alpha}\right)x+\frac{11\sqrt{3}}{3}-6\sqrt{\alpha}=0$$

γ) Αν ρ είναι η ρίζα της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς ρ και $\rho-\sqrt{8}$.

.13 Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda>0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Αν $0<\lambda\neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{και} \quad 1$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.14 Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2-2x+\lambda=0$$

με παράμετρο $\lambda<1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β) Να αποδείξετε ότι $x_1+x_2=2$.

γ) Αν για τις ρίζες x_1 και x_2 ισχύει επιπλέον:

$$|x_1-2|=|x_2+2|$$

i) να αποδείξετε ότι $x_1-x_2=4$,

ii) να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.15 Οι πλευρές x_1 και x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2-2x+\lambda(2-\lambda)=0 \quad \text{με } \lambda\in(0,2)$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου,

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

β) Να αποδείξετε ότι $E\leq 1$ για κάθε $\lambda\in(0,2)$.

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

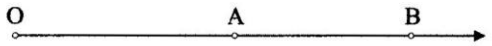
(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.16 Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας, βρίσκονται πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο s_A, s_B, s_Γ και s_Δ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$s_A<s_B, \quad s_\Gamma=\frac{s_A+3s_B}{4} \quad \text{και}$$

$$|s_\Delta-s_A|=|s_\Delta-s_B|$$

Στον παρακάτω άξονα το σχολείο βρίσκεται στο σημείο Ο και τα σημεία Α και Β παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.



α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν επιπλέον οι τιμές των αποστάσεων s_A και s_B σε km ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$s_A+s_B=1{,}4 \quad \text{και} \quad s_As_B=0{,}45$$

τότε:

i) να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A και s_B,

ii) να υπολογίσετε τις αποστάσεις:

$$s_A, \quad s_B, \quad s_\Gamma \quad \text{και} \quad s_\Delta$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.17 Δίνεται η εξίσωση:

$$2x^2+4x+3\lambda-1=0 \quad (1)$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1). Να βρείτε το λ, ώστε να ισχύει:

$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2=15$$

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β)

να λύσετε την εξίσωση:

$$3(|x|^3 - \lambda) + \lambda|x| = 9x^2$$

.18 Η εξίσωση $\lambda^2(x-1) = 2(2x+\lambda)$ έχει μοναδική λύση τη $x = \dfrac{\lambda+3}{2}$.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.

β) Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης:

$$-x^2 + \lambda x + \lambda - 1 = 0$$

Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $A = \dfrac{1}{x_1 - 2} + \dfrac{1}{x_2 - 2}$

ii) $B = |x_1 - x_2|$

.19 Δίνεται η εξίσωση:

$$2x^2 + \lambda x - 36 = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ. Να αποδείξετε ότι:

i) ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$2x^2 - \lambda x - 36 = 0$$

ii) • $\rho \neq 0$ και

• ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.20 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$ (1).

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Να βρείτε το λ, ώστε η μία ρίζα της εξίσωσης (1) να είναι ίση με το τετράγωνο της άλλης.

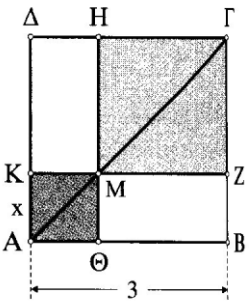
γ) Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) για τη μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β).

i) Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \frac{x_1 + 2}{x_2} + \frac{x_2 + 2}{x_1}$$

ii) Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\dfrac{1}{x_1 - 1}$ και $\dfrac{1}{x_2 - 1}$.

.21 Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $AB = 3$ και το Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Έστω Ε το συνολικό εμβαδόν των χρωματισμένων τετραγώνων του σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9$, $x \in (0, 3)$.

β) Να αποδείξετε ότι $E \geq \dfrac{9}{2}$ για κάθε $x \in (0, 3)$.

γ) Για ποια θέση του Μ πάνω στην ΑΓ το συνολικό εμβαδόν των χρωματισμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\dfrac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.22 Οι πλευρές x_1 και x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0, \quad \lambda \in (0, 4)$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ,

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου.

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$ για κάθε $\lambda \in (0, 4)$.

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.23 Έστω ρ_1 και ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης:

$$-x^2 + \alpha x + 4 = 0$$

και x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - \beta x - 5 = 0$$

Ισχύουν τα εξής:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = -\frac{3}{2} \quad \text{και} \quad x_1(x_1 - 6) + x_2(x_2 - 6) = 1$$

Να βρείτε:

α) τους αριθμούς α και β,

β) εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1\rho_1 + x_2\rho_2$ και $\rho_1 x_2 + \rho_2 x_1$.

.24 Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση:

$$x^2 - (\alpha^2 - 1)x - 5\alpha\beta = 0 \quad (2)$$

έχει ρίζες τους αριθμούς $2x_1 - 1$ και $2x_2 - 1$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2 - \alpha x + \alpha + \beta = |x + \beta|$$

.25 Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της προηγούμενης εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.26 Δίνεται το τριώνυμο:

$$x^2 - 6x + \lambda - 7$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) i) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S = x_1 + x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P = x_1x_2$ των ριζών.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε λ, με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση:

$$x^2 - 6|x| + \lambda = 7 \quad (1)$$

έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.27 α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (1)$$

με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν $\gamma < 0$, τότε:

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$,

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.28 Δίνεται η εξίσωση:

$$4x(x + \mu) = 8(1 - x) - \mu^2 \quad (1)$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Να βρείτε το μ, ώστε το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) να είναι ίσο με 2.

γ) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα (β) να λύσετε την εξίσωση:

$$\left|\mu^{\frac{1}{2}}x + |x|\right| = 35 - \mu|x|$$

.29 Η εξίσωση:

$$x^2 - 2x + 5 - 2\beta(\alpha + 1) = 0 \quad (1)$$

έχει ρίζα τον αριθμό $\alpha + \beta$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β και να λύσετε την εξίσωση (1).

β) Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta - \alpha = 0$$

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\gamma = 2x_1^3 - 13x_1x_2^2 - 13x_1^2x_2 + 2x_2^3$$

γ) Για την τιμή του γ που βρήκατε να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x^2 - 4}{\gamma x} + \frac{\gamma x}{x^2 - 4} = 2$$

.30 α) Να βρείτε το ανάπτυγμα $(\lambda^2 - 2\lambda - 1)^2$.

β) Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - (\lambda^2 + 2\lambda + 1)x + 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \quad (1)$$

με $\lambda \in \mathbb{Q}$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{Q}$.

ii) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1), συναρτήσει του λ.

iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{Q}$ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης (1) στον άξονα των πραγματικών αριθμών ισούται με 2.