15ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 5.1 Ακολουθίες**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται μια ακολουθία (α_ν) με γενικό όρο $\alpha_\nu = 2\nu^2 - 4\nu$.

α) Να βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους και τον 100ό όρο της.

β) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, με $\nu \geq 2$, να αποδείξετε ότι το πηλίκο $\dfrac{\alpha_{\nu+2} - \alpha_{\nu-1}}{\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu}$ έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του ν).

2. Να βρείτε τον πέμπτο όρο καθεμίας από τις ακολουθίες (α_ν) για τις οποίες ισχύουν:

α) $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{\nu+1} = 3\alpha_\nu + 2$ για $\nu \geq 1$,

β) $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1$ και $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-2} + 4\alpha_{\nu-1}$ για $\nu \geq 3$.

3. Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες:

α) $\alpha_\nu = 2\nu - 3$ β) $\alpha_\nu = 2 \cdot 3^\nu$ γ) $\alpha_\nu = 3^\nu + 1$

4. Να βρείτε τον γενικό όρο των ακολουθιών:

α) $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 3$ β) $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = 3\alpha_\nu$

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:

α) $\alpha_\nu = 4\nu - 2$ **β)** $\alpha_\nu = 3^{\nu-1}$

γ) $\alpha_\nu = 3$ **δ)** $\alpha_\nu = \dfrac{(-1)^\nu \cdot 60}{\nu}$

ε) $\alpha_\nu = \nu^2 - 3\nu + 2$ **στ)** $\alpha_\nu = (-1)^\nu \cdot |4 - 2\nu|$

2. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:

α) $\alpha_1 = 12$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 7$

β) $\alpha_1 = -2$ και $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + 3$

γ) $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_\nu = \dfrac{16}{\alpha_{\nu-1}}$

δ) $\alpha_1 = -4$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu$

3. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:

α) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \alpha_{\nu-1}$

β) $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 4$ και $\alpha_{\nu+1} = 6\alpha_\nu - 4\alpha_{\nu-1}$

4. Δίνεται ακολουθία (α_ν), με $\alpha_1 = 3$, για την οποία ισχύει:

$$\alpha_\nu = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{\nu-1}}{2}, & \text{αν } \alpha_{\nu-1} \text{ άρτιος} \\ 3\alpha_{\nu-1} + 5, & \text{αν } \alpha_{\nu-1} \text{ περιττός} \end{cases}$$

Να βρείτε τον πέμπτο όρο της ακολουθίας.

5. Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες:

α) $\alpha_\nu = \nu - 4$ **β)** $\alpha_\nu = 2\nu + 3$

γ) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu + 2}{3}$ **δ)** $\alpha_\nu = 3 - \dfrac{\nu}{2}$

6. Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες:

α) $\alpha_\nu = 5^\nu$ **β)** $\alpha_\nu = 3 \cdot 2^\nu$

γ) $\alpha_\nu = \dfrac{4}{3^\nu}$ **δ)** $\alpha_\nu = 3^\nu - 2$

7. Να βρείτε τον ν-οστό όρο των ακολουθιών:

α) $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 3$

β) $\alpha_1 = 7$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 2$

γ) $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu$

δ) $\alpha_1 = 18$ και $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{\alpha_\nu}{3}$

8. Δίνεται η ακολουθία:

$$\alpha_\nu = \lambda \cdot 2^\nu + \mu$$

της οποίας ο τέταρτος όρος είναι ο 30 και ο πέμπτος όρος είναι ο 78. Να βρείτε:

α) τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

β) τους τρεις πρώτους όρους της ακολουθίας.

9. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu = \lambda\nu^2 - 13\nu + 15$. Ο έκτος όρος της ακολουθίας είναι κατά 5 μεγαλύτερος από τον πρώτο όρο της.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

β) Να βρείτε τους αρνητικούς όρους της προηγούμενης ακολουθίας.

10. Δίνεται η ακολουθία:

$$\alpha_\nu = \nu^2 - 2\nu + 3$$

α) Να βρείτε ποιος όρος της ακολουθίας είναι ίσος με 27.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει όρος της ακολουθίας μικρότερος του 2.

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

δ) Να αποδείξετε ότι το πηλίκο $\dfrac{\alpha_{\nu+4} - \alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+3} - \alpha_{\nu+2}}$ έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του ν).

11. Δίνεται η ακολουθία:

$$\alpha_\nu = \nu^2 - 10\nu + \lambda$$

της οποίας ο 3ος όρος είναι ίσος με 7.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 28$.

β) Να βρείτε τα $\nu \in \mathbb{N}^*$ για τα οποία ισχύει $\alpha_\nu = \nu$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu \geq 3$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

δ) Να βρείτε ποιος όρος της ακολουθίας είναι ο μικρότερος.

12. Η ακολουθία:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

ονομάζεται ακολουθία Fibonacci.

α) Να αντιστοιχίσετε τους φυσικούς αριθμούς ν (με $1 \leq \nu \leq 11$) με τους όρους α_ν της παραπάνω ακολουθίας, συμπληρώνοντας τον επόμενο πίνακα:

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
α_ν											

β) Να παρατηρήσετε πώς προκύπτουν οι όροι της ακολουθίας Fibonacci από τον α_3 και μετά. Στη συνέχεια να βρείτε τον όρο α_{13} και να γράψετε έναν αναδρομικό τύπο της ακολουθίας Fibonacci.

γ) Έχει αποδειχθεί ότι ο γενικός όρος της ακολουθίας Fibonacci είναι:

$$\alpha_\nu = \frac{\sqrt{5}}{5}(x_1^{\nu-1} - x_2^{\nu-1})$$

όπου x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x - 1 = 0$ με $x_1 < x_2$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς x_1 και x_2.

ii) Να επαληθεύσετε τον παραπάνω τύπο για τον όρο α_9.

16ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 5.2 Αριθμητική πρόοδος**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_2 = 7$. Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου και τους πέντε πρώτους όρους της.

2. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, ... Να βρείτε:
α) τον ν-οστό όρο της, β) τον 31ο όρο της,
γ) ποιος όρος της είναι ίσος με 140 και ποιος όρος της είναι ίσος με 120.

3. Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν) της οποίας ο 7ος όρος είναι 9.
α) Να βρείτε το άθροισμα $\alpha_3 + \alpha_{11}$.
β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι το άθροισμα του 4ου και του 9ου όρου είναι 16, να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της.

4. Ο ν-οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = 3\nu - 5$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά και τον πρώτο όρο.

5. Οι αριθμοί $x - 6$, $4x - 13$, $2x + 5$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
α) Να βρείτε τον αριθμό x.
β) Για την τιμή του x που βρήκατε να υπολογίσετε τον αριθμητικό μέσο των αριθμών x και 33.

6. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι και οι αριθμοί $\alpha^2 + \beta\gamma$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma - \gamma^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

7. Μεταξύ των αριθμών 2 και 50 να βρείτε άλλους 7 αριθμούς, ώστε όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

8. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) με 87 όρους ισχύει $\alpha_{32} + \alpha_{56} = 200$. Να υπολογίσετε τον μεσαίο από τους παραπάνω όρους.

9. Δίνονται οι διαδοχικοί όροι 7, 10, 13, ..., 43 μιας αριθμητικής προόδου.
α) Να βρείτε πόσοι είναι οι παραπάνω όροι.
β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = 7 + 10 + 13 + \ldots + 43$.

10. Σε μια αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = -5$ το άθροισμα των πρώτων 16 όρων της είναι ίσο με 400. Να βρείτε:
α) τη διαφορά της αριθμητικής προόδου,
β) το άθροισμα των 40 πρώτων όρων της προόδου,
γ) πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να πάρουμε ώστε να έχουν άθροισμα 72,
δ) το άθροισμα $S_1 = \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \ldots + \alpha_{60}$,
ε) το άθροισμα $S_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{51}$.

11. **Να βρείτε:**

α) **πέντε ακέραιους αριθμούς που αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και έχουν άθροισμα 20 και γινόμενο – 560,**

β) **τέσσερις ακέραιους αριθμούς που αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και έχουν άθροισμα 4 και γινόμενο 105.**

12. **Σε μια πολυκατοικία με 11 ορόφους ένας επιχειρηματίας αγόρασε ένα διαμέρισμα σε κάθε όροφο. Ισχύουν τα εξής:**

- **Το διαμέρισμα του 1ου ορόφου είναι $150\,m^2$.**
- **Το εμβαδόν κάθε άλλου διαμερίσματος είναι κατά $\lambda\,m^2$ μικρότερο από το εμβαδόν του διαμερίσματος του προηγούμενου ορόφου.**
- **Το διαμέρισμα του 1ου ορόφου κόστισε $1000\,€/m^2$ και κάθε άλλο διαμέρισμα κόστισε $250\,€/m^2$ παραπάνω από το διαμέρισμα του προηγούμενου ορόφου.**
- **Το διαμέρισμα του 5ου ορόφου κόστισε $260.000\,€$.**

Να βρείτε:

α) **τον αριθμό λ,**

β) **πόσα m^2 είναι όλα τα διαμερίσματα του επιχειρηματία,**

γ) **σε ποιον όροφο το διαμέρισμα κόστισε $3000\,€/m^2$,**

δ) **πόσα m^2 είναι το διαμέρισμα του μεσαίου ορόφου,**

ε) **πόσο κόστισε το διαμέρισμα του τελευταίου ορόφου.**

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Ο τύπος $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$

1. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύει:

$$\alpha_5 = 11 \quad \text{και} \quad \alpha_9 = 31$$

Να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου,

β) τον όρο α_{14},

γ) ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 86.

2. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους:

$$\alpha_2 = 0 \quad \text{και} \quad \alpha_4 = 4$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της,

β) ο ν-οστός όρος της προόδου (α_ν) είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

3. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με:

$$\alpha_1 = 1 \quad \text{και} \quad \alpha_3 = 9$$

Να βρείτε:

α) τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου,

β) τον μικρότερο θετικό ακέραιο ν, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu > 30$.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

4. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι:

$$\omega = 5$$

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

5. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά $\omega = -2$.

α) Να βρείτε την απόσταση των αριθμών α_{36} και α_{16} στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Αν επιπλέον είναι $\alpha_8 = -3$, να βρείτε:

i) τον πρώτο όρο της προόδου,

ii) ποιος όρος της προόδου είναι τριπλάσιος του α_{21}.

6. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$.

β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

7. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 10\omega$.

β) Αν $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30$ και $\alpha_1 = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha_\nu = 3\nu - 2$$

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30;

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60;

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

8. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με:

$$\alpha_3 = 10 \quad \text{και} \quad \alpha_{20} = 61$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν) τέτοιοι, ώστε να ισχύει $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3}$.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

9. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με:

$$\alpha_4 = 43 \quad \text{και} \quad \alpha_8 = 27$$

Να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου,

β) πόσους θετικούς όρους έχει η (α_ν),

γ) τους όρους της προόδου για τους οποίους ισχύει $|\alpha_\nu - 5| \leq 6$.

Β. Αριθμητικός μέσος

10. Να βρείτε για ποια τιμή του x ο αριθμητικός μέσος των αριθμών $2x + 1$ και $7x + 2$ είναι ίσος με τον αριθμητικό μέσο των αριθμών 4 και 26.

11. Αν ο αριθμητικός μέσος των αριθμών x^2 και $2x$ είναι μικρότερος του 4, να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των αριθμών $|x + 4|$ και $|x - 2|$.

Γ. Διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

12. Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να βρείτε την τιμή του x.

β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός Α είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν), να υπολογίσετε:

i) τη διαφορά ω,

ii) τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

13. α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε οι αριθμοί $x + 2$, $(x + 1)^2$, $3x + 2$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της προηγούμενης αριθμητικής προόδου όταν:

i) $x = 1$ **ii)** $x = -1$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

14. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τους αριθμούς:

$$(\beta + \gamma)^2 - \alpha^2, \quad (\gamma + \alpha)^2 - \beta^2, \quad (\alpha + \beta)^2 - \gamma^2$$

15. Αν α, β, γ, δ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha\gamma - \beta\delta = \beta^2 - \gamma^2$

β) $\alpha + \delta = \beta + \gamma$

γ) $\alpha\beta + \beta\delta + \beta\gamma + \gamma^2 = (\alpha + \delta)^2$

Δ. Υπολογισμός αθροισμάτων

16. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει $\alpha_4 = 13$ και $\alpha_9 = 33$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 4$.

β) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 8 όρων της προόδου (α_ν).

17. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι:

$$\alpha_1 = 19 \quad \text{και} \quad \alpha_{10} - \alpha_6 = 24$$

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι:

$$\omega = 6$$

β) Να βρείτε τον α_{20}.

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

18. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $1 + 4 + 7 + \ldots + 94$

β) $3 + 7 + 11 + \ldots + 119$

19. Να βρείτε το άθροισμα:

α) των άρτιων αριθμών μεταξύ 21 και 153,

β) των πολλαπλασίων του 5 μεταξύ 31 και 206.

20. Οι αριθμοί $x + 6$, $5x + 2$, $11x - 6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι:

$$\omega = 4$$

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

21. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) ο 16ος όρος είναι 35, ενώ το άθροισμα του 6ου και του 11ου όρου είναι 25.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = -10$ και $\omega = 3$.

β) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της.

γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 65 είναι όρος της (α_ν) και στη συνέχεια να βρείτε το άθροισμα των όρων της (α_ν) από τον α_1 μέχρι και τον 65.

22. Μεταξύ των αριθμών 6 και 50 θέλουμε να βρούμε άλλους 10 αριθμούς, ώστε όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 10 αριθμών που βρήκατε.

23. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1 = 2$ το άθροισμα των πρώτων 10 όρων είναι 200. Να βρείτε:

α) τη διαφορά της προόδου,

β) το άθροισμα των πρώτων 25 όρων της,

γ) για ποιες τιμές του ν ισχύει ότι $|S_\nu - 73| = 55$.

24. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) ο όγδοος όρος είναι 30 και το άθροισμα των 5 πρώτων όρων είναι 50. Να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της (α_ν),

β) το άθροισμα των όρων της (α_ν) που είναι μεγαλύτεροι του 40 και μικρότεροι του 80.

25. Αν σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύει:

$$\frac{\alpha_{101} + \alpha_{102} + \ldots + \alpha_{200}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{100}} = 2$$

να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{S_{300}}{S_{100}}$.

26. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύει:

$$S_{100} = 4S_{50}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2\alpha_1$.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$S_{2\nu} = 4S_\nu \quad \text{για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^*$$

γ) Αν επιπλέον ο έβδομος όρος της (α_ν) είναι 39, τότε:

i) να βρείτε τον α_1 και τη διαφορά ω της (α_ν),

ii) να βρείτε πόσοι πρώτοι όροι της (α_ν) έχουν άθροισμα 300 και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα αθροίσματα S_{20} και S_{40},

iii) να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots + \alpha_{24}$$

Ε. Προσδιορισμός διαδοχικών όρων α.π

27. Δίνονται πέντε διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου που έχουν άθροισμα 55, ενώ το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 695. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

28. Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς ακέραιους όρους αριθμητικής προόδου που έχουν άθροισμα 20, ενώ το άθροισμα των αντιστρόφων τους είναι ίσο με $\frac{25}{24}$.

29. Τρεις ακέραιοι αριθμοί, που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, έχουν άθροισμα 33 και γινόμενο 440.

α) Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

β) Ο μεγαλύτερος από τους παραπάνω αριθμούς είναι ο 10ος όρος και ο μικρότερος είναι ο 4ος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν). Να βρείτε:

i) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της (α_ν),

ii) το άθροισμα των πρώτων 9 όρων της (α_ν).

Ζ. Προβλήματα

30. Ένα θέατρο έχει 12 σειρές καθισμάτων. Η πρώτη σειρά έχει 10 καθίσματα και κάθε επόμενη έχει 3 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.

α) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

β) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

γ) Σε μια παράσταση τα εισιτήρια της 7ης σειράς διανεμήθηκαν δωρεάν και όλα τα υπόλοιπα πουλήθηκαν προς 30 € το ένα. Πόσα χρήματα εισέπραξε το θέατρο από την παράσταση αυτή;

31. Μια περιβαλλοντική οργάνωση ξεκινά να καταγράφει τον πληθυσμό των ελαφιών σε μια δασική περιοχή από το 2000, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Έτος	2000	2001	2002	2003	2004
Αριθμός ελαφιών	1300	1360	1420	1480	1540

Αν ο πληθυσμός των ελαφιών συνεχίσει να αυξάνεται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό και μετά το 2004:

α) Να βρείτε μια σχέση που να επιτρέπει τον υπολογισμό του πληθυσμού των ελαφιών στο τέλος κάθε έτους από το 2000 και μετά.

β) Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής:

i) να προσδιορίσετε τον πληθυσμό των ελαφιών στο τέλος του 2012,

ii) να προβλέψετε το έτος στο τέλος του οποίου ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα αυξηθεί κατά 60%,

iii) να προβλέψετε το έτος που ο πληθυσμός των ελαφιών δε θα υπερβεί τα 2600 ελάφια.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

32. Ένα αμφιθέατρο έχει 16 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά υπάρχουν ορισμένα καθίσματα και σε κάθε άλλη σειρά υπάρχουν 4 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 9η σειρά έχει τόσα καθίσματα περισσότερα από την 4η σειρά, όσα είναι τα καθίσματα της 1ης σειράς.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η πρώτη σειρά και πόσα η τελευταία.

β) Να βρείτε πόσα καθίσματα υπάρχουν συνολικά στο αμφιθέατρο.

γ) Αν στην πρώτη σειρά κάθονται 3 άτομα και σε κάθε άλλη σειρά κάθονται 5 άτομα περισσότερα από όσα κάθονται στην προηγούμενη, να βρείτε:

i) πόσα άτομα κάθονται στην τελευταία σειρά,

ii) πόσα καθίσματα είναι άδεια στην 8η σειρά,

iii) πόσα καθίσματα είναι άδεια σε ολόκληρο το αμφιθέατρο.

33. Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία, η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από την Α, η τρίτη 7 μέτρα από την Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α 3 επιπλέον μέτρα σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

34. Σε έναν ουρανοξύστη 17 ορόφων τα γραφεία του ίδιου ορόφου έχουν το ίδιο ενοίκιο. Κάθε γραφείο του πρώτου ορόφου ενοικιάζεται 550 € τον μήνα. Κάθε γραφείο ενός ορόφου ενοικιάζεται 35 € τον μήνα ακριβότερα από ένα γραφείο του προηγούμενου ορόφου.

α) Ποιο είναι το μηνιαίο ενοίκιο ενός γραφείου του πέμπτου ορόφου;

β) Πόσο ακριβότερο είναι ένα γραφείο του 15ου ορόφου από ένα του 7ου ορόφου;

γ) Σε ποιους ορόφους το ενοίκιο ξεπερνά τα 1000 € τον μήνα;

δ) Αν το πλήθος των γραφείων ενός ορόφου είναι κατά 2 μικρότερο από το πλήθος των γραφείων του αμέσως προηγούμενου ορόφου και ο 17ος όροφος έχει 12 γραφεία, να βρείτε:

i) πόσα γραφεία έχει ο πρώτος όροφος,

ii) πόσα γραφεία υπάρχουν συνολικά στον ουρανοξύστη,

iii) πόσο θα κοστίσει τον μήνα σε έναν επιχειρηματία να ενοικιάσει όλα τα γραφεία που βρίσκονται στον μεσαίο όροφο του ουρανοξύστη.

Η. Συνδυαστικά θέματα

35. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0 \qquad (1)$$

με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_1 = \beta - 2 \quad \text{και} \quad x_2 = \beta + 2$$

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

36. Σε αριθμητική πρόοδο είναι:

$$\alpha_2 = \kappa^2 \quad \text{και} \quad \alpha_3 = (\kappa+1)^2, \quad \kappa \text{ ακέραιος με } \kappa > 1$$

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:

i) να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι:

$$\omega = 7$$

ii) να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

37. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει $\alpha_{20} - \alpha_{18} = 4$ και οι αριθμοί:

$$\alpha_1 + 1, \quad \alpha_3 + 3, \quad 2\alpha_4$$

με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Θεωρούμε επίσης και την εξίσωση $x^2 - \alpha_\kappa x + \alpha_{\kappa-1} + 1 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 2$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}^*$.

γ) Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1).

i) Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

α) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20ή κυψέλη;

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι η απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη;

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

$$A = x_1 + x_2 - x_1x_2$$

είναι σταθερή (ανεξάρτητη του κ).

ii) Να βρείτε το κ, ώστε να ισχύει $x_1^2 + x_2^2 = 17$.

38. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν), της οποίας όλοι οι όροι είναι θετικοί. Ισχύουν τα εξής:

$$\alpha_7^2 - 2\alpha_7\alpha_2 - 8\alpha_2^2 = 0 \quad \text{και} \quad \alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_7 = 4\alpha_2$.

β) Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της (α_ν).

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{N}^*$ η εξίσωση:

$$x^2 - 2\alpha_\kappa x + \alpha_{\kappa-6}^2 = 0$$

δεν έχει πραγματικές ρίζες.

17ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 5.3 Γεωμετρική πρόοδος**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται μια γεωμετρική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει:

$$\alpha_1 = \frac{1}{8} \quad \text{και} \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου και τους έξι πρώτους όρους της.

2. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος 64, 32, 16, ... Να βρείτε:
α) τον ν-οστό όρο της, β) τον 9ο όρο της,
γ) ποιος όρος της είναι ίσος με 4.

3. Δίνεται μια γεωμετρική πρόοδος της οποίας ο 5ος όρος είναι 16, ενώ το άθροισμα του 3ου και του 4ου όρου είναι -4. Να βρείτε τον λόγο και τους έξι πρώτους όρους της γεωμετρικής προόδου.

4. Ο ν-οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = \frac{3^{\nu+1}}{2^{\nu-1}}$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον λόγο και τον πρώτο όρο.

5. Οι αριθμοί $x-3$, $x+2$, 20, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε:
α) τον αριθμό x,
β) τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών x και 50.

6. Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι:
α) οι αριθμοί α, $\alpha+\beta$, $\alpha+2\beta+\gamma$ είναι επίσης διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου,
β) ισχύει $(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2-2\beta(\alpha+\gamma)=(\alpha+\gamma)^2$.

7. Αν οι α, β, γ, δ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha-\gamma)^2+(\beta+\gamma)^2+(\beta-\delta)^2=(\alpha+\delta)^2$$

8. Μεταξύ των αριθμών $\frac{3}{8}$ και 24 να βρείτε πέντε αριθμούς, ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

9. Να βρείτε το άθροισμα $S = 2+6+18+54+162+486$.

10. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν), με λόγο $\lambda > 0$, το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της είναι 63, ενώ ο 3ος και ο 6ος όρος έχουν άθροισμα 36. Να βρείτε:
α) τον πρώτο όρο και τον λόγο της (α_ν),
β) το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της (α_ν),
γ) το άθροισμα $S_1 = \alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\alpha_7+\alpha_9+\alpha_{11}$,
δ) το άθροισμα $S_2 = \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\ldots+\alpha_8^2$.

11. Να βρείτε:

α) τρεις αριθμούς που αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου και έχουν γινόμενο 8, ενώ το άθροισμα των αντιστρόφων τους είναι $\frac{21}{8}$,

β) τέσσερις αριθμούς που αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου και έχουν γινόμενο 64, ενώ ο τρίτος είναι ίσος με το τετράγωνο του δεύτερου.

12. Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δύο προγραμμάτων που της προτείνονται: Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, τον 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα. Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, τον 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) Να βρείτε:

i) το ποσό $\alpha_ν$ που πρέπει να κατατεθεί στον λογαριασμό τον ν-οστό μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α,

ii) το ποσό $\beta_ν$ που πρέπει να κατατεθεί στον λογαριασμό τον ν-οστό μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β,

iii) το ποσό $A_ν$ που θα υπάρχει στον λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α,

iv) το ποσό $B_ν$ που θα υπάρχει στον λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στον λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Ο τύπος $\alpha_\nu=\alpha_1\lambda^{\nu-1}$

1. Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ ισχύει ότι:

$$\alpha_3 = 1 \quad \text{και} \quad \alpha_5 = 4$$

α) Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_\nu = 2^{\nu-3}$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

2. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) είναι:

$$\alpha_1 = \frac{3}{4} \quad \text{και} \quad \alpha_4 = 6$$

Να βρείτε:

α) τον λόγο λ της (α_ν),

β) τον 8ο όρο της (α_ν),

γ) ποιος όρος της (α_ν) είναι ίσος με 24.

3. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι:

$$\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$$

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι:

$$\lambda = 3$$

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

4. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) είναι:

$$\alpha_{11} = 128 \quad \text{και} \quad \alpha_{13} - \alpha_{12} = 256$$

α) Να βρείτε τις τιμές που μπορούν να πάρουν ο πρώτος όρος και ο λόγος της (α_ν).

β) Αν επιπλέον όλοι οι όροι της (α_ν) είναι ομόσημοι, τότε:

i) να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha_{21}}{\alpha_8^4}$ είναι ακέραιος,

ii) να βρείτε τον αριθμό ν, ώστε να ισχύει:

$$\alpha_\nu = 4^{\nu^2-5\nu-5}$$

iii) να βρείτε τον αριθμό κ, ώστε να ισχύει:

$$\alpha_{\kappa+2} = \alpha_\kappa + 6$$

5. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) ισχύει:

$$\alpha_{10}\alpha_6 = 4\alpha_{11}$$

Να βρείτε:

α) τον πέμπτο όρο της (α_ν),

β) το γινόμενο $\alpha_2\alpha_5\alpha_8$.

Β. Διαδοχικοί όροι γ.π – Γεωμετρικός μέσος

6. Οι αριθμοί $x-2, 2x-2, 4x+4$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε:

α) τον αριθμό x,

β) τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών x και 27.

7. Να βρείτε:

α) τον πραγματικό αριθμό x, ώστε οι αριθμοί x, $2x+1$, $5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου,

β) τον λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου όταν:

i) $x = 1$ **ii)** $x = -1$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

8. α) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

β) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

γ) Να βρείτε τον αριθμό x, ώστε οι αριθμοί $4-x, x, 2$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

9. Τρεις θετικοί αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και έχουν άθροισμα 15. Αν στον πρώτο αριθμό προσθέσουμε 2, στον δεύτερο προσθέσουμε 3 και στον τρίτο προσθέσουμε 8, τότε οι αριθμοί που προκύπτουν είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε τους τρεις αρχικούς αριθμούς.

10. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x οι αριθμοί:

$$x+4, \quad 2-x, \quad 6-x$$

με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Αν $x = 5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:

i) τον λόγο λ της γεωμετρικής προόδου,

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

11. Οι αριθμοί:

$$\kappa-2, \ 2\kappa \ \text{και} \ 7\kappa+4, \quad \kappa \in \mathbb{N}$$

είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$ και να βρείτε τον λόγο λ της προόδου.

β) i) Να εκφράσετε τον 2ο όρο, τον 5ο όρο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1.

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

12. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν), με $\alpha_1 \neq \alpha_2$, ο πέμπτος όρος είναι 16, ενώ ο αριθμητικός μέσος των α_6 και α_7 είναι επίσης 16. Να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο και τον λόγο της (α_ν),

β) αν υπάρχει, τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών:

i) α_4 και α_7, **ii)** α_3 και α_5.

13. Ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών:

$$x \quad \text{και} \quad 5x-2$$

είναι κατά 1 μικρότερος από τον αριθμητικό μέσο των αριθμών αυτών. Να βρείτε τον αριθμό x.

Γ. Υπολογισμός αθροισμάτων

14. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320 + 640$

β) $192 + 96 + 48 + 24 + 12 + 6 + 3$

γ) $4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + 256$

15. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) ο δεύτερος και ο τέταρτος όρος έχουν άθροισμα 30, ενώ ο πέμπτος και ο έβδομος όρος έχουν άθροισμα 810. Να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο α_1 και τον λόγο λ της (α_ν),

β) τον όρο α_4,

γ) το άθροισμα των πρώτων 6 όρων της (α_ν).

16. Ο ν-οστός όρος μιας ακολουθίας είναι:

$$\alpha_\nu = 3 \cdot 2^\nu$$

α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο.

β) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 7 όρων της α_ν.

17. Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει:

$$\alpha_9\alpha_{12} = \alpha_{20}$$

και ο όρος α_4 είναι ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών $\frac{1}{16}$ και 1024. Να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο και τον λόγο της (α_ν),

β) το άθροισμα:

$$S = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \ldots + \alpha_9 - \alpha_{10}$$

18. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) ισχύει ότι:

$$\alpha_3 + 9\alpha_1 = 6\alpha_2$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 3$.

β) Αν επιπλέον το άθροισμα των 4 πρώτων όρων της είναι 40, να βρείτε:

i) τον πρώτο όρο της (α_ν),

ii) το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της (α_ν).

19. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) ισχύει:

$$\frac{\alpha_7 - \alpha_6 - \alpha_5}{\alpha_4 - \alpha_3 - \alpha_2} = 27$$

Να βρείτε:

α) τον λόγο λ της προόδου,

β) το πηλίκο $\frac{2S_{2019} + \alpha_1}{2S_{2017} + \alpha_1}$.

20. Δίνεται μια γεωμετρική πρόοδος (α_ν) της οποίας το άθροισμα των πρώτων τριών όρων περιττής τάξης είναι 105, ενώ το άθροισμα των πρώτων τριών όρων άρτιας τάξης είναι 210. Να βρείτε:

α) τον λόγο και τον πρώτο όρο της (α_ν),

β) τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών α_2 και α_6,

γ) το πηλίκο $\frac{\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \ldots + \alpha_{30}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{20}}$.

21. Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύουν:

$$S_5 = 93 \quad \text{και} \quad \alpha_6 + \alpha_7 + \ldots + \alpha_{10} = 2976$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 3$ και $\lambda = 2$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \ldots + \alpha_{300}^2}{\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \ldots + \alpha_{200}^3}$$

22. Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει $\frac{S_{10}}{S_5} = 33$. Να βρείτε:

α) τον λόγο λ της (α_ν),

β) το πηλίκο $\frac{S_6}{\alpha_6}$,

γ) το πηλίκο $\frac{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{99}}{\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots + \alpha_{100}}$.

23. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha_3 = 4, \quad \alpha_5 = 16 \quad \text{και} \quad \lambda > 0$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τον λόγο λ της προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με:

$$\beta_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}$$

αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

Δ. Παρεμβολή γεωμετρικών ενδιαμέσων

24. Δίνεται η εξίσωση:

$$|2x^2 + 4x - 9| = |2x^2 + 3x + 7|$$

Ανάμεσα στις θετικές ρίζες της προηγούμενης εξίσωσης να βρείτε πέντε αριθμούς, ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

25. Μεταξύ των αριθμών $\frac{5}{16}$ και 20 παρεμβάλλουμε ορισμένους αριθμούς, ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Οι δύο τελευταίοι αριθμοί που παρεμβάλλουμε έχουν γινόμενο 50. Να βρείτε τους αριθμούς που παρεμβάλλουμε.

26. Μεταξύ των αριθμών $\frac{3}{4}$ και 96 παρεμβάλλουμε ορισμένους αριθμούς, ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ο δεύτερος και ο τελευταίος από τους αριθμούς που παρεμβάλλουμε έχουν γεωμετρικό μέσο το 12. Να βρείτε τους αριθμούς που παρεμβάλλουμε.

Ε. Προσδιορισμός διαδοχικών όρων γ.π

27. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου που έχουν γινόμενο 64 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 84.

28. Να βρείτε 4 αριθμούς που αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου και έχουν γινόμενο 729, ενώ τα τετράγωνα των δύο τελευταίων αριθμών έχουν γινόμενο 59.049.

29. Να βρείτε 5 θετικούς διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου που έχουν γινόμενο 32 και άθροισμα $\frac{31}{2}$.

Ζ. Προβλήματα

30. Η Άννα διάβασε ένα βιβλίο σε 8 ημέρες. Την πρώτη ημέρα διάβασε ορισμένες σελίδες και τις ημέρες που ακολούθησαν διάβαζε κάθε ημέρα τις μισές σελίδες από αυτές που είχε διαβάσει την προηγούμενη. Αν την τέταρτη ημέρα διάβασε 16 σελίδες, να βρείτε:

α) πόσες σελίδες διάβασε την πρώτη ημέρα,

β) πόσες σελίδες διάβασε την έβδομη ημέρα,

γ) πόσες σελίδες είχε ολόκληρο το βιβλίο.

31. Σε μια κοινωνία μικροβίων ρίχνεται ένα φάρμακο, με αποτέλεσμα κάθε μία ώρα το πλήθος των μικροβίων που είναι ζωντανά να φτάνει στο $\frac{1}{4}$ του πλήθους των μικροβίων της προηγούμενης ώρας. Αν αρχικά υπήρχαν 2^{20} μικρόβια, να βρείτε το πλήθος των μικροβίων που έμειναν ζωντανά 8 ώρες μετά τη ρίψη του φαρμάκου.

32. Ο Κώστας αποφάσισε να ξεκινήσει να αποταμιεύει χρήματα. Έτσι τον πρώτο μήνα αποταμίευσε 64 € και κάθε επόμενο μήνα θα αποταμίευε 50% περισσότερα χρήματα σε σχέση με τον προηγούμενο μήνα. Να βρείτε:

α) πόσα χρήματα αποταμίευσε τον πέμπτο μήνα,

β) πόσα χρήματα αποταμίευσε συνολικά τους πρώτους 6 μήνες.

33. Ένας πληθυσμός βακτηρίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μία ώρα.

α) Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτήρια, να βρείτε το πλήθος των βακτηρίων ύστερα από 6 ώρες.

β) Στο τέλος της 6ης ώρας ο πληθυσμός των βακτηρίων ψεκάζεται με μια ουσία η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί την καταστροφή $3^3 \cdot 10$ βακτηρίων κάθε ώρα.

i) Να βρείτε το πλήθος των βακτηρίων που απομένουν 20 ώρες μετά τον ψεκασμό.

ii) Μετά από πόσες ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν όλα τα βακτήρια;

34. Σε ένα θέατρο η πρώτη σειρά έχει 70 καθίσματα και η τελευταία έχει 250 καθίσματα. Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η προτελευταία σειρά έχει 140 καθίσματα περισσότερα από τη δεύτερη σειρά.

α) Να αποδείξετε ότι κάθε σειρά καθισμάτων του θεάτρου έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

β) Να υπολογίσετε το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου.

γ) Την πρώτη παράσταση ενός θεατρικού έργου, σε αυτό το θέατρο, την παρακολούθησαν 100 θεατές, ενώ σε κάθε επόμενη παράσταση ο αριθμός των θεατών διπλασιαζόταν. Ποια είναι η παράσταση στην οποία για πρώτη φορά θα γεμίσει το θέατρο;

Η. Συνδυαστικά θέματα

35. Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν) και μια γεωμετρική πρόοδος (β_ν), οι οποίες έχουν $\alpha_1 = \beta_1$ και $\alpha_2 = \beta_2$. Αν επιπλέον ισχύει $\beta_5 - \beta_4 = 24$ και $\alpha_5 - \alpha_4 = 3$, να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της (α_ν), καθώς και τον πρώτο όρο και τον λόγο της (β_ν),

β) τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών β_2 και α_8,

γ) ποιος όρος της (α_ν) είναι ίσος με τον β_7.

36. Δίνεται η εξίσωση:

$$2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_1 = 2\beta \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{\beta}{2}$$

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

37. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν), με λόγο $\lambda > 0$, το άθροισμα των πρώτων τεσσάρων όρων είναι 90, ενώ ο πέμπτος και ο έκτος όρος έχουν άθροισμα 288.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο της (α_ν).

β) Ανάμεσα στον α_6 και στον α_7 να παρεμβάλλετε 5 αριθμούς, ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

38. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν Ε τέτοια, ώστε οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι $E = 1$.

β) Αν $\alpha + \beta = 10$, τότε:

i) να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη α και β,

ii) να βρείτε τα μήκη α και β.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

39. Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι:

$$S_\nu = 2^{\nu+2} - 4 \quad \text{για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^*$$

α) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της (α_ν) είναι $\alpha_\nu = 2^{\nu+1}$.

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον λόγο και τον πρώτο όρο.

γ) Να βρείτε τον $\kappa \in \mathbb{N}$, ώστε να ισχύει:

$$\alpha_{2\kappa} - \alpha_\kappa = 112$$

40. Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύουν:

$$\frac{\alpha_5^2}{\alpha_9} = 3 \quad \text{και} \quad \alpha_7 - \alpha_2\alpha_3 = 120$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 3$ και να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο λόγος λ της (α_ν).

β) Έστω ότι $\lambda = 2$ και επιπλέον η εξίσωση:

$$x^2 - \alpha_\kappa x + 3\alpha_{\kappa+3} = 0 \quad (1)$$

έχει μία διπλή ρίζα.

i) Να βρείτε τον αριθμό κ.

ii) Να εξετάσετε αν η διπλή ρίζα της εξίσωσης (1) είναι όρος της (α_ν).

41. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + \lambda x + 2\lambda - 12 = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι αριθμοί:

$$-x_1x_2, \quad x_1 + x_2, \quad \frac{1}{2}$$

αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

18^{ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ : **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **Ασκήσεις επανάληψης 5^{ου} κεφαλαίου**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

.1 Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) της οποίας ο 6ος όρος είναι 10 και το άθροισμα των πρώτων 3 όρων είναι 66. Να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της (α_ν),

β) τον 21ο όρο της (α_ν),

γ) ποιος όρος της (α_ν) είναι ίσος με -62,

δ) το άθροισμα των πρώτων 8 όρων της (α_ν),

ε) πόσοι όροι της προόδου (α_ν) βρίσκονται στο διάστημα $[-15, 5]$,

στ) τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών α_{11} και α_{16}.

.2 Δύο αριθμοί έχουν αριθμητικό μέσο 9 και γεωμετρικό μέσο $4\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

β) Αν ο μικρότερος από τους αριθμούς που βρήκατε είναι ο 4ος όρος και ο μεγαλύτερος είναι ο 7ος όρος μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν), τότε:

i) να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο λ της γεωμετρικής προόδου (α_ν),

ii) να βρείτε τον αριθμό ν για τον οποίο ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-3}^2$,

iii) να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 + \alpha_{10}$$

.3 Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν), με διαφορά $\omega \neq 0$, για την οποία ισχύει:

$$\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_7 + \alpha_{12} = \alpha_3 + \alpha_9$$

α) Να βρείτε τον όρο α_6.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha_5\alpha_7 < 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha_{2\nu-6} = 2\alpha_\nu$$

για κάθε $\nu \geq 4$.

δ) Να υπολογίσετε τον λόγο:

$$A = \frac{\alpha_{14}\alpha_{34}\alpha_{54}\alpha_{74}\alpha_{94}}{\alpha_{10}\alpha_{20}\alpha_{30}\alpha_{40}\alpha_{50}}$$

.4 Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει:

$$S_3 = 26 \quad \text{και} \quad \alpha_4 - \alpha_1 = 52$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο της (α_ν).

β) Να λύσετε την εξίσωση $\alpha_5 x^6 = \alpha_{17}$.

γ) Ανάμεσα στους αριθμούς α_2 και α_4 να βρείτε άλλους 7 αριθμούς, ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

δ) Να βρείτε τον αριθμό κ για τον οποίο ισχύει:

$$\alpha_{\kappa+1} - \alpha_\kappa = 108$$

.5 Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς.

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

.6 Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνεται καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά αυτής της προόδου.

β) Να βρείτε τον γενικό όρο της προόδου.

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς από τη 2η και μετά είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, να βρείτε:

i) από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα,

ii) πόσοι είναι οι θεατές.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.7 Έστω δύο κοινωνίες βακτηρίων Α και Β. Αν συμβολίσουμε με A_0 τον αρχικό πληθυσμό της κοινωνίας Α και με B_0 τον αρχικό πληθυσμό της κοινωνίας Β, τότε είναι:

$$9A_0 = 10^{11}B_0$$

Ο πληθυσμός της κοινωνίας Α μειώνεται κάθε ώρα κατά το $\frac{1}{100}$ του αρχικού πληθυσμού της, ενώ ο πληθυσμός της κοινωνίας Β αυξάνεται ανά ώρα με γεωμετρική πρόοδο λόγου λ. Οι δύο πληθυσμοί γίνονται ίσοι 10 ώρες μετά την αρχική στιγμή.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της γεωμετρικής προόδου που αναφέρεται στον πληθυσμό Β είναι $\lambda = 10$.

β) Πέντε ώρες μετά την αρχική στιγμή ο πληθυσμός της κοινωνίας Β είναι $9 \cdot 10^{10}$ βακτήρια. Να αποδείξετε ότι ο αρχικός πληθυσμός της κοινωνίας Β είναι $9 \cdot 10^5$ βακτήρια.

γ) Να βρείτε τον πληθυσμό της κοινωνίας Α 99

ώρες μετά την αρχική στιγμή.

.8 Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) της οποίας οι όροι α_4 και α_{16} είναι αντίθετοι.

α) Να βρείτε τον όρο α_{10}.

β) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{\alpha_{2\nu-10}}{\alpha_\nu}$ για κάθε $\nu \geq 6$ και $\nu \neq 10$.

γ) Αν επιπλέον ο αριθμητικός μέσος των α_{13} και α_{18} ισούται με 11, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = -18$ και $\omega = 2$,

ii) να βρείτε τον μικρότερο και τον μεγαλύτερο όρο της α_ν για τους οποίους η εξίσωση:

$$x^2 + \alpha_\nu x + 5\nu = 0$$

δεν έχει πραγματικές ρίζες.