19ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 6.1 Η έννοια της συνάρτησης**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(-5)$, $f(\alpha + 2)$ και $f(x^2)$.

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 2 και -6 ανήκουν στο σύνολο τιμών της f.

2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \dfrac{3}{x}$ β) $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2+2x-3}$

γ) $f(x) = \dfrac{x+1}{|2x-1|-5}$ δ) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-x+2}$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{2x-6} + x - 1$ β) $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt[3]{5-x}$

γ) $f(x) = \sqrt[4]{|x-2|-5}$ δ) $f(x) = \sqrt{x^2-3x-10}$

4. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{12-3x}}$ β) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt[3]{x^2+x-2}}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x+2} - \dfrac{1}{x-3}$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

γ) Να βρείτε τις τιμές $f(-3)$, $f(0)$ και $f(2)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x-2, & \text{αν } x \geq 1 \\ -x^2+2x+12, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f,

β) τις τιμές $f(-3)$, $f(1)$ και $f\left(\dfrac{4}{3}\right)$,

γ) την τιμή $f\big(f(-1)\big)$,

δ) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 4$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta, & \text{αν } -4<x\leq -1 \\ x-\alpha, & \text{αν } -1<x\leq 6 \end{cases}$ για την οποία ισχύει ότι $f(2)=-1$ και $f(-3)=-3$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>0$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x$. Να αποδείξετε ότι:

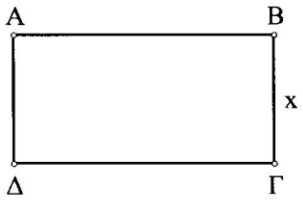
α) $f(\alpha+\beta)+f(\alpha-\beta)=2f(\alpha)+f(1-\beta)+f(1+\beta)-6$

β) $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

10. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 20 m και η μια διάστασή του είναι x m.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $21\,m^2$.



11. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(2x-4)=8x-16-f(2) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε το $f(2)$.

β) Να βρείτε τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Πεδίο ορισμού συνάρτησης

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^3-9x}$ **β)** $g(x)=\dfrac{2x+7}{x^3-4x^2+4x}$

γ) $h(x)=\dfrac{x-5}{x^4-27x}$ **δ)** $\varphi(x)=\dfrac{x+2}{x^4+9x^2}$

2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x-1}{|2x-1|-5}$ **β)** $g(x)=\dfrac{2x+6}{|x-7|+13}$

γ) $h(x)=\dfrac{x-3}{|x-2|-|2x-1|}$

3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x+21}{x^4-5x^2+4}$

β) $g(x)=\dfrac{x^2-25}{2x^2-5|x|-3}$

γ) $h(x)=\dfrac{1}{x^2+4|x|+3}$

δ) $\varphi(x)=\dfrac{x-3}{x^6+7x^3-8}$

4. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{14-2x}}$ **β)** $g(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{|x|-5}}$

γ) $h(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{|2x-3|-5}}$ **δ)** $t(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{7-|2x+1|}}$

5. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{1}{2x-6}+\sqrt{x+2}$

β) $t(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{4-x}}$ **γ)** $g(x)=\dfrac{\sqrt{10-2|x|}}{x^2+3x}$

δ) $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x-1|}}+\sqrt{2-|x|}$

6. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+4x+12}$

β) $t(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}-x+5}{\sqrt{-x^2-x+12}}$

γ) $g(x)=\dfrac{\sqrt{-x^2-2x+3}-x}{\sqrt{x^2+2x+1}}$

δ) $\varphi(x)=\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{-x^2+x+12}$

7. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}}{x-2}-\sqrt{4-x}$

β) $g(x)=\sqrt{|x|-2}+\sqrt{6-|x|}$

γ) $h(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{|x^2-3x|+|x^2-9|}$

δ) $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}-\dfrac{\sqrt{x+6}}{x^2-9}$

8. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α.

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο:

$$2x^2-5x+3$$

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει:

$$f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

9. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{1}{|x|-x}$ **β)** $\varphi(x)=\dfrac{1}{|x|+x}$

γ) $g(x)=\sqrt{|x|-x}$ **δ)** $t(x)=\sqrt{x-|x|}$

ε) $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ **στ)** $p(x)=\sqrt{|x|+x}$

Β. Τιμές συνάρτησης

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-2}$.

α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;

β) Να βρείτε όσες από τις επόμενες τιμές ορίζονται:

i) $f(11)$ **ii)** $f\left(\dfrac{41}{16}\right)$

iii) $f(1)$ **iv)** $f(f(38))$

11. Δίνονται τα σύνολα:

$$A=\{-3,-2,-1,0,1\} \quad \text{και}$$

$$B=\{-2,-1,0,1,2,3\}$$

Θεωρούμε και τη συνάρτηση $f: A\to B$ με τύπο:

$$f(x)=x^2+2x$$

α) Να παραστήσετε την παραπάνω συνάρτηση με ένα βελοδιάγραμμα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

12. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases}2x-5, & \text{αν } x\le 3\\ x^2, & \text{αν } 3<x<10\end{cases}$$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=25$.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

13. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}-2x, & \text{αν } x\le -2\\ 4, & \text{αν } -2<x<1\\ 3-x, & \text{αν } x\ge 1\end{cases}$$

α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;

β) Να βρείτε τις τιμές:

i) $f(-4)$ **ii)** $f(-2)$ **iii)** $f(-\sqrt{2})$

iv) $f(1)$ **v)** $f(3)$ **vi)** $f(3-\sqrt{3})$

vii) $f(f(0))$ **viii)** $f(f(-3))$ **ix)** $f(f(6))$

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(|x|+1)+f(-x^2-2)=7$$

14. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}6x, & \text{αν } |x|\le 1\\ x^2, & \text{αν } |x|>1\end{cases}$$

α) Να βρείτε τις τιμές:

i) $f(0)$ **ii)** $f(-1)$ **iii)** $f(-2)$

iv) $f(\sqrt{2})$ **v)** $f\left(\frac{1}{2}\right)$ **vi)** $f\left(-\frac{2}{3}\right)$

vii) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **viii)** $f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ **ix)** $f(\sqrt{5}-1)$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2f(x)-5x+2=0$$

15. Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x)=3x^2+9x-12,\quad x\in\mathbb{R}$$

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3-16x}{x-4}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της ισχύει:

$$f(x)=x^2+4x$$

β) τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$f(x)=32$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3x^2+2x$.

α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;

β) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$ και $f(f(1))$.

γ) Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$K=f(\alpha+\beta)+f(\alpha-\beta)-2\big(f(\alpha)+f(\beta)\big)$$

είναι ανεξάρτητη από το α.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^3(x)+x=xf^2(x)+f(x)$$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5$.

α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;

β) Για οποιαδήποτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$f(2\alpha)+f(2\beta)\ge 2f(\alpha+\beta)$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$|f^3(x)|-2f^2(x)+|f(x)|-2=0$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x+2)+f(x)\le 22$.

ε) Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να βρείτε για ποια τιμή του x η f παίρνει τη μικρότερη τιμή της.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^4-16x^2}{2x^2+8x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

γ) Να βρείτε όσες από τις παρακάτω τιμές ορίζονται:

i) $f(2)$ **ii)** $f(4)$ **iii)** $f(-4)$

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x)=16$$

ε) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x)\ge 0$$

Γ. Προσδιορισμός παραμέτρων

20. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^2-3x+\alpha$$

για την οποία ισχύει $f(4)=6$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<f(0)f(-1)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x+3)=3f(x-1)$.

δ) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $f(|x|)=2$ **ii)** $|f(x)|=2$

21. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x+\alpha+6, & \text{αν } x\le 2\\ x^2+\beta x, & \text{αν } x>2\end{cases}$$

για την οποία ισχύει $f(-5)=-2$ και $f(5)=10$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=4$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$d\big(x,f(2)\big)\le f\big(f(3)\big)$$

δ) Αν ισχύει ότι $-9\le\lambda\le 1$, να αποδείξετε ότι $|f(\lambda)|\le 10$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\alpha$ για την οποία ισχύει $f(\alpha)+5f(2)=11$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Θεωρούμε αριθμό β για τον οποίο ισχύει:

$$f(\beta-\sqrt{3})=f(\beta+\sqrt{3})+4\sqrt{12}$$

i) Να βρείτε τον αριθμό β.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x+\beta)+f(x-4)\le\beta$$

23. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta, & \text{αν } x\ge 1\\ \beta x+1, & \text{αν } x<1\end{cases}$$

για την οποία ισχύουν:

$$f(-1)=3\quad\text{και}\quad f(1)=1$$

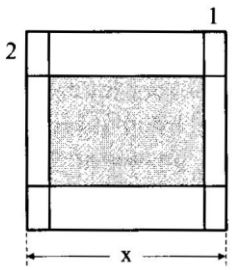
α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$3|f(x)| = 4x - 1$$

Δ. Προσδιορισμός τύπου συνάρτησης

24. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται ένα τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm, με $5 \le x \le 10$, στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο παρακάτω σχήμα).



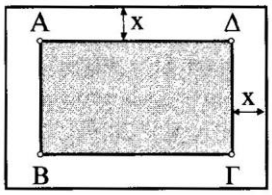
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:
$E(x) = (x-2)(x-4)$

β) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $35\,cm^2$.

γ) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον $24\,cm^2$.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

25. Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15 m και 25 m. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m $(x > 0)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση:
$$E(x) = 4x^2 + 80x$$
$$x > 0$$

β) Να βρείτε το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν $E = 500\,m^2$.

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500\,m^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

26. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90°)$ με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x και y τέτοια, ώστε $x + y = 10$.

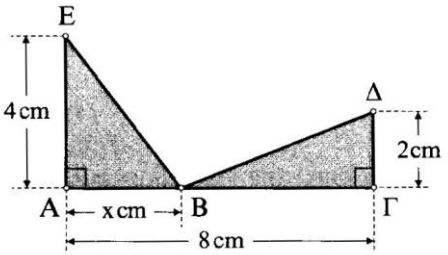
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο:
$$E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x), \quad x \in (0, 10)$$

β) Να αποδείξετε ότι:
$$E(x) \le \frac{25}{2} \quad \text{για κάθε } x \in (0, 10)$$

γ) Για ποια τιμή του $x \in (0, 10)$ το εμβαδόν Ε(x) γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ;

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

27. Στο επόμενο σχήμα είναι $AE = 4\,cm$ και $\Gamma\Delta = 2\,cm$, ενώ το τμήμα ΑΓ έχει μήκος 8 cm και το σημείο Β κινείται πάνω σ' αυτό.



Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x:

α) το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου,

β) το μήκος ΕΒ + ΒΔ.

28. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi = 40\,cm$. Αν x cm είναι το μήκος του ορθογωνίου, να αποδείξετε ότι:

α) $0 < x < 20$,

β) το εμβαδόν Ε(x) του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $E(x) = 20x - x^2$,

γ) ισχύει $E(x) \le 100$ για κάθε $x \in (0, 20)$,

δ) από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

29. Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά μέτρα νερού σε έναν χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 12 + 0{,}5\,x, & \text{αν } 0 \le x \le 30 \\ 0{,}7\,x + 6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό,

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού,

iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:
$$g(x) = 12 + 0{,}6\,x \quad \text{για } x \ge 0$$
Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά μέτρα νερού για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στον λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης Β, να αποδείξετε ότι ο καθένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

30. Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.ά.). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή

πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται στα 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(v)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ τον μήνα.

β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα $E(v)$ της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ τον μήνα.

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα, ώστε η επιχείρηση:

i) να μην έχει ζημιά,

ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

31. Μια μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε s) κατά την κίνησή της, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση:

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 1{,}05$$

α) Να βρείτε τις τιμές $h(0)$, $h(1)$ και $h(2)$ και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος.

β) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος.

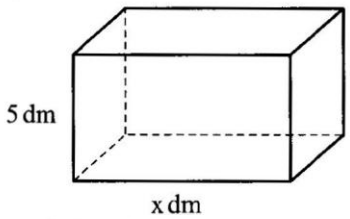
γ) Να αποδείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο:

$$h(t) = 5\left[1{,}21 - (t-1)^2\right]$$

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε s) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,05 m.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

32. Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση ορθογώνιο, το οποίο είναι ανοικτό από πάνω. Το ύψος του κουτιού είναι 5 dm. Η βάση του κουτιού έχει σταθερή περίμετρο 20 dm και μια πλευρά της είναι x dm με $0 < x < 10$.



α) Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του x είναι:

$$E(x) = -x^2 + 10x + 100 \quad \text{με } x \in (0, 10)$$

β) Για κάθε $x \in (0, 10)$ να αποδείξετε ότι:

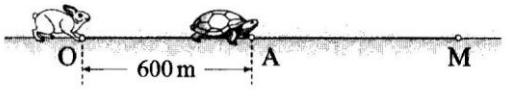
$$E(x) \leq E(5)$$

33. Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και τον λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο Ο.
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με:

$$OM > 600 \text{ μέτρα}$$

- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t = 0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ, με $OA = 600$ μέτρα.



Υποθέτουμε ότι για $t \geq 0$ η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_{\Lambda}(t) = 10t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση της χελώνας από το Ο τη στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_{X}(t) = 600 + 40t$ μέτρα.

α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα.

β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι $OM = 2250$ μέτρα. Να βρείτε:

i) ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα,

ii) ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t = 12$ min και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση,

iii) ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

Ε. Συναρτησιακές σχέσεις

34. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(-1) = 6$ και η σχέση:

$$3f(x+1) = 2f(x) + 3$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(1)$.

35. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = -1$ και η σχέση:

$$f(2x+5) = 4x + \alpha \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

α) τον αριθμό α,

β) τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης.

36. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x+2) = 3f(2) - 2(x-3)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) την τιμή $f(2)$,

β) τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης.

37. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(2x-1) = 4x^2 - 6x - f(3)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) την τιμή $f(3)$,

β) τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης,

γ) τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει:

$$f(\alpha+\beta) + f(\alpha-\beta) = \alpha^2 + 8\beta - 17$$

Ζ. Συνδυαστικά θέματα

38. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει:

$$f(x)=|x|-2$$

γ) Για $x\in A$ να λύσετε την εξίσωση:

$$(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-\alpha|x|}{|x|-3}$ για την οποία ισχύει $f(2)=2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.

β) Να βρείτε τον αριθμό α.

γ) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<5$.

ε) Αν για τα $\kappa,\lambda\in A$, με $\kappa,\lambda\neq 0$, ισχύει ότι:

$$f(\kappa)+f(\lambda)=f(\kappa+\lambda)$$

να αποδείξετε ότι οι αριθμοί κ και λ είναι ομόσημοι.

στ) Αν $f(\beta)<2$ και $f(\gamma)<1$, να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{\beta}{2}+2\gamma\right)<3$$

40. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^2+(6-\lambda)x+\lambda$$

για την οποία ισχύει $f(\lambda)=14$.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.

β) Να λύσετε την ανίσωση $-1\le f(x)\le 7$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge f(-2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Για τους πραγματικούς αριθμούς α και β να αποδείξετε ότι ισχύει $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$, αν και μόνο αν οι α και β είναι αντίστροφοι.

41. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^2-6|x|+\alpha}{x^2-9}$$

για την οποία ισχύει $f(5)=\frac{1}{4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.

β) Να βρείτε τον αριθμό α.

γ) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le\frac{1}{3}$.

στ) i) Αν $\lambda\in A-\{0\}$, να αποδείξετε ότι και:

$$\frac{9}{\lambda}\in A$$

ii) Για κάθε $\lambda\in A-\{0\}$, να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{9}{\lambda}\right)=-f(\lambda)$$

42. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x)=x^2-4x+\alpha$ και $g(x)=\alpha x-5$, με $\alpha\in\mathbb{R}$

α) Αν ισχύει $f(2)=g(2)$, να βρείτε την τιμή του α.

β) Για $\alpha=1$ να λύσετε:

i) την εξίσωση $f(x)=g(x)$,

ii) την ανίσωση $f(x)\ge g(x)$ και με τη βοήθεια αυτής να λύσετε την εξίσωση:

$$|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

43. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=5x^2-4\alpha x-3\beta$$

για την οποία ισχύει $f(\alpha)+f(\beta)=-9$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\big||2x-3|+f(0)\big|+f(5)=0$$

44. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=-x^2+2x+3$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x.

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2{,}999)f(-1{,}002)$$

γ) Αν $-3<\alpha<3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού:

$$-\alpha^2+2|\alpha|+3$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\lambda x-8$ για την οποία ισχύει $f(f(-1))=55$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ.

β) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$$K=f(2018)f\left(\frac{999}{500}\right)f\left(-\frac{25}{6}\right)$$

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge -9$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να βρείτε για ποια τιμή του x η f παίρνει τη μικρότερη τιμή της.

ε) Αν ισχύει ότι $f(\alpha-3)<-8$, να αποδείξετε ότι $|f(\alpha)-1|<6$.

46. Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x)=x^2-6x+\lambda-3\quad \text{με } \lambda\in\mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

γ) Έστω ότι $3<\lambda<12$.

i) Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

ii) Αν x_1 και x_2, με $x_1<x_2$, είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa<0$ και $x_1<\mu<x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa f(\kappa)\mu f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{x^2+\alpha}$ και η εξίσωση $x^2-3x+1=0$ (1). Ισχύει:

$$f(\Delta)=\frac{1}{6}$$

όπου Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης (1).

α) Να βρείτε τον αριθμό α και το πεδίο ορισμού της f.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να σχηματίσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $f(x_1)$ και $f(x_2)$.

48. Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x)=x^2-x+(\lambda-\lambda^2),\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν $\lambda\neq\frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, με $x_1<x_2$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$,

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2),\quad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\quad \text{και}\quad f(x_2+1)$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

49. Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

- $|1-3\alpha|<2$,
- η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1.

Να αποδείξετε ότι:

α) $-\frac{1}{3}<\alpha<1$, **β)** $|\beta-3\alpha-1|<3$,

γ) η συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2}$$

έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

50. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^2+\lambda x+\lambda-5$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε για τις ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης $f(x)=0$ να ισχύει:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{3}{2}$$

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β) να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x+2)+f(x)>-2$$

$20^{ο}$ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 6.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να σχεδιάσετε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy και στη συνέχεια να σημειώσετε πάνω σε αυτό τα σημεία:

$$A(3,\,2),\quad B(-3,\,3),\quad \Gamma(-2,\,-1)\quad \text{και}\quad \Delta(4,\,-2)$$

2. α) Να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία $A(3,\,0)$, $B(0,\,2)$, $\Gamma(-2,\,0)$ και $\Delta(0,\,-1)$.

β) Δίνεται το σημείο $M(2\alpha-8,\,9-3\alpha)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M όταν αυτό βρίσκεται:

i) στον άξονα $x'x$, ii) στον άξονα $y'y$.

γ) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε το σημείο $N\left(|\alpha|-2,\,\alpha^2-2\alpha-8\right)$ να ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων.

3. Να βρείτε:

α) σε ποιο τεταρτημόριο ανήκει καθένα από τα σημεία $A(3,\,5)$, $B(-4,\,2)$, $\Gamma(-1,\,-6)$ και $\Delta(5,\,-7)$,

β) για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ το σημείο $M\left(|\alpha-1|-4,\,\alpha^2-\alpha-2\right)$ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.

4. α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $M(-3,\,2)$ ως προς τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$, την αρχή των αξόνων και τη διχοτόμο της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων.

β) Δίνονται τα σημεία $A(\alpha-3,\,\beta+6)$ και $B(2\alpha+9,\,2\beta-3)$. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε τα σημεία A και B να είναι συμμετρικά ως προς:

i) τον άξονα $x'x$, ii) τον άξονα $y'y$,

iii) την αρχή των αξόνων,

iv) τη διχοτόμο της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων.

5. Δίνονται τα σημεία $A(-1,\,2)$, $B(2,\,1)$ και $\Gamma(-2,\,-1)$.

α) Να βρείτε τις αποστάσεις (AB), $(B\Gamma)$ και $(A\Gamma)$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

6. Δίνεται το σημείο $A(-3,\,4)$ και έστω C ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=(OA)$.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C.

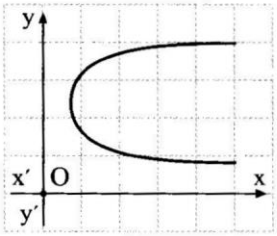
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ το σημείο $B(\alpha,\,\alpha-7)$ ανήκει στον κύκλο C.

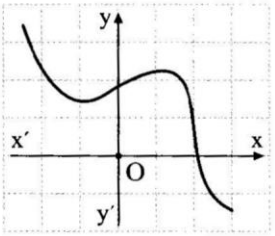
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+6$.

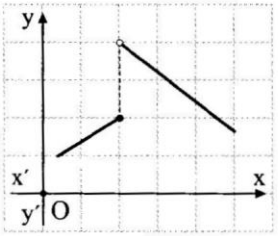
α) Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(-1,\,9)$ και $B(4,\,10)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

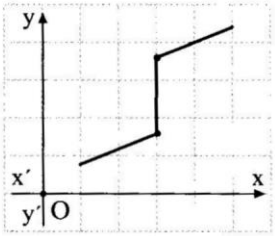
β) Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε το σημείο $\Gamma(\alpha-1,\,2\alpha)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

8. Να εξετάσετε ποιες από τις καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων:

α) 

β) 

γ) 

δ) 

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x-3|-2} \cdot (x^2+2x-8)$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f,

β) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f:

i) με τον άξονα $x'x$, ii) με τον άξονα $y'y$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3-2x| - 7$. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται:

α) πάνω από τον άξονα $x'x$, β) κάτω από τον άξονα $x'x$.

11. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 8x - 12 \quad \text{και} \quad g(x) = -x^2 + 2x + 8$$

Να βρείτε:

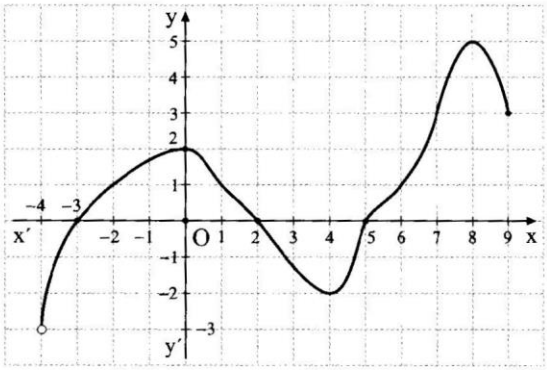
α) τα κοινά σημεία των C_f και C_g,

β) τα διαστήματα στα οποία:

i) η C_f δε βρίσκεται πάνω από τη C_g,

ii) η C_f δε βρίσκεται κάτω από τη C_g.

12. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε:



α) το πεδίο ορισμού της f,

β) το σύνολο τιμών της f,

γ) τις τιμές $f(-2)$, $f(4)$ και $f(8)$,

δ) για ποια x ισχύει $f(x) = 3$,

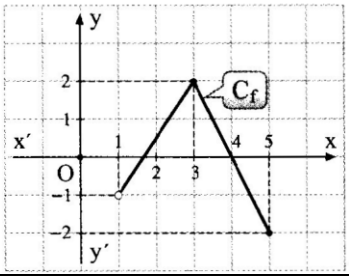
ε) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες,

στ) τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται:

i) πάνω από τον άξονα $x'x$, ii) κάτω από τον άξονα $x'x$,

ζ) τα διαστήματα στα οποία ισχύει $f(x) < 1$.

13. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:



α) $g(x) = -f(x)$

β) $h(x) = |f(x)|$

γ) $\varphi(x) = f(-x)$

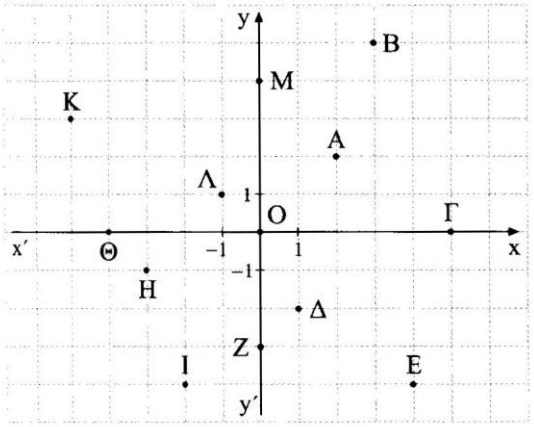
14. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{και} \quad g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Καρτεσιανές συντεταγμένες

1. Στο επόμενο σύστημα αξόνων να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ, Λ και Μ.



2. Δίνεται το σημείο:

$$M(2\alpha + 6,\ \alpha + 5)$$

Να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ, αν αυτό είναι σημείο:

α) του άξονα x′x, **β)** του άξονα y′y.

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$:

α) το σημείο $A(\alpha + 2,\ 3 - \alpha)$ ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο,

β) το σημείο $B(\alpha^2 - 3\alpha - 10,\ \alpha^2 - 4\alpha + 3)$ ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο,

γ) το σημείο $\Gamma\big(7 - |2\alpha - 1|,\ \alpha^2 - 36\big)$ ανήκει στο 3ο τεταρτημόριο,

δ) το σημείο $\Delta\big(\alpha^2 - 5\alpha,\ |\alpha - 3| - 5\big)$ ανήκει στο 4ο τεταρτημόριο.

4. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε τα παρακάτω σημεία να ταυτίζονται με την αρχή των αξόνων.

α) $A(\alpha^2 - 9,\ \alpha^2 + 2\alpha - 3)$

β) $B\big(|2\alpha - 5| - 3,\ |2\alpha + 3| - |\alpha - 6|\big)$

5. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $M(\alpha + 2\beta,\ 2\alpha - \beta + 10)$ να ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων.

6. Δίνεται το σημείο:

$$M\big(\alpha^2 + 2\alpha - 15,\ |\alpha - 3| - 2\big)$$

Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε το Μ να είναι σημείο:

α) του θετικού ημιάξονα Oy,

β) του αρνητικού ημιάξονα Ox′.

Β. Συμμετρικά σημεία

8. Δίνονται τα σημεία:

$$A(2x - 7,\ 3 - y) \quad \text{και} \quad B(-5,\ 1)$$

Να βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε τα σημεία Α και Β να είναι συμμετρικά ως προς:

α) τον άξονα x′x, **β)** τον άξονα y′y,

γ) την αρχή των αξόνων,

δ) τη διχοτόμο της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων.

9. Τα σημεία:

$$A(\alpha^2 + 2\alpha,\ 2 - 2\alpha) \quad \text{και} \quad B(\alpha + 6,\ \alpha^2 - \alpha)$$

είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x′x. Να βρείτε:

α) τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$,

β) το συμμετρικό του σημείου Α ως προς:

i) τον άξονα y′y,

ii) την αρχή των αξόνων,

iii) τη διχοτόμο της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων.

10. Τα σημεία:

$$A(5 - 3\lambda,\ 2\mu - \lambda) \quad \text{και} \quad B(2\mu,\ 3 - \mu)$$

είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y′y.

Να βρείτε:

α) τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

β) το συμμετρικό του σημείου Α ως προς:

i) τον άξονα x′x,

ii) την αρχή των αξόνων,

iii) τη διχοτόμο της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων.

11. Τα σημεία:

$$A(\alpha^2 - 2\alpha,\ -2\gamma - \beta) \quad \text{και} \quad B(\beta^2 + 4\beta + 5,\ \alpha + \gamma)$$

είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Να βρείτε:

α) τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

β) το συμμετρικό του σημείου Α ως προς:

i) τον άξονα x′x, **ii)** τον άξονα y′y,

iii) τη διχοτόμο της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων.

Γ. Απόσταση σημείων

12. Δίνονται τα σημεία:

$$A(-2,\ \alpha) \quad \text{και} \quad B(9 - \alpha,\ 2\alpha + 3)$$

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $(AB) = 10$.

13. Το σημείο $A(\alpha - 7,\ 3\alpha - 9)$ ανήκει στον άξονα x′x και το σημείο $B(2\beta + 4,\ 4 - \beta)$ ανήκει στον άξονα y′y, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

β) Αν το σημείο $\Gamma(\gamma,\ \gamma - 5)$ ισαπέχει από τα Α και Β, να βρείτε την τιμή του $\gamma \in \mathbb{R}$.

14. Δίνεται το σημείο $A(2,\ 2)$ και το σημείο $B(x,\ 4)$ του 2ου τεταρτημορίου για τα οποία ισχύει $(AB) = 2\sqrt{5}$. Να βρείτε:

α) τον αριθμό x,

β) σημείο Γ του άξονα y′y, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με $\widehat{A} = 90°$,

γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ,

δ) τις γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Δ. Εξίσωση κύκλου

15. Δίνεται ο κύκλος $C_1 : x^2 + y^2 = 16$ και έστω C_2 ο κύκλος που είναι ομόκεντρος του C_1 και έχει διπλάσια ακτίνα από αυτόν.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C_2.

β) Να εξετάσετε αν καθένα από τα σημεία $\Gamma(6, 8)$ και $\Delta(-4, 6)$ είναι εσωτερικό ή εξωτερικό του κύκλου C_2.

16. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

17. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -\sqrt{16 - x^2}$.

Ε. Σημεία γραφικής παράστασης

18. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{αν } x \geq 2 \\ |x - 3| - 2, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν τα επόμενα σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση της f:

α) $A(5, 10)$ **β)** $B(-1, 2)$ **γ)** $\Gamma(2, -1)$

δ) $\Delta(3, 0)$ **ε)** $E(1, 0)$ **στ)** $Z(4, -1)$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x - 3$. Να βρείτε τα σημεία της C_f:

α) που έχουν τετμημένη:

i) 3 **ii)** 0 **iii)** -2

β) που έχουν τεταγμένη:

i) 2 **ii)** -7 **iii)** -9

20. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 2x - 8 \quad \text{και} \quad g(x) = 3x + 9$$

Να βρείτε σημείο Α της C_f και σημείο Β της C_g, τα οποία είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x + 1$. Να βρείτε:

α) για ποιες τιμές του α το σημείο $M(\alpha - 1, 2 - \alpha)$ ανήκει στη C_f,

β) σημείο της C_f του οποίου η τετμημένη είναι ίση με την τεταγμένη,

γ) σημείο της C_f του οποίου η τεταγμένη είναι πενταπλάσια από την τετμημένη,

δ) σημείο της C_f του οποίου η τετμημένη είναι κατά 9 μικρότερη της τεταγμένης.

Ζ. Σημεία τομής C_f με τους άξονες – Σχετική θέση C_f και άξονα x'x

22. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x'x και y'y.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

23. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 3, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2 - 4, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f,

β) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x'x και y'y.

24. Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες x'x και y'y των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = (|x - 4| - |2x - 5|)(9x^2 - 1)$

β) $f(x) = (|7 - 2x| - 3)(x^2 - 2|x|)$

25. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4} \cdot (|2x - 1| - 3)$$

Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f,

β) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x'x και y'y.

26. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - 3x - 10$$

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f:

α) βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x,

β) βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x,

γ) δε βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x,

δ) δε βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x.

Η. Σημεία τομής και σχετική θέση C_f και C_g

27. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x) = (x - 1)^2 - 4$ και $g(x) = |x - 1| + 2$, $x \in \mathbf{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

28. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = |x - 3| - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x + 4}{5}$$

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g.

29. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^3 \quad \text{και} \quad g(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε τρία σημεία, τα οποία και να βρείτε.

β) Αν Α, Ο και Β είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0, 0)$, να αποδείξετε ότι τα Α και Β είναι συμμετρικά ως προς το Ο.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

30. **α)** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = x^3 - x^2 + 3x - 3$$

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - x + 3$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,3)$.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

31. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4 \quad \text{και} \quad g(x) = 20 - 5|x|$$

Να βρείτε:

α) τα σημεία τομής των C_f και C_g,

β) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$,

γ) τα διαστήματα στα οποία η C_g είναι κάτω από τον άξονα $x'x$,

δ) τα διαστήματα στα οποία η C_g είναι πάνω από τη C_f.

Θ. Προσδιορισμός παραμέτρων

32. Δίνεται η συνάρτηση g με:

$$g(x) = \frac{2x^2 - 4x + \mu}{x + 1}$$

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\mu = -6$,

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης,

γ) για $\mu = -6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

33. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης,

β) τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

34. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = |x + \alpha| - 7 + \alpha$$

διέρχεται από το σημείο $M(5 - \alpha, 3)$. Να βρείτε:

α) τον αριθμό α,

β) τα σημεία της γραφικής παράστασης της f που έχουν τεταγμένη 1.

35. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{\alpha}{x^2 - 1} - \frac{3\alpha}{x + 1}$$

διέρχεται από το σημείο $M\left(2, -\frac{2}{3}\right)$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f,

β) τον αριθμό α,

γ) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

36. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = |2x - 7| + \alpha$$

η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 4. Να βρείτε:

α) τον αριθμό α,

β) τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$,

γ) τον αριθμό β, ώστε το σημείο $B(\beta, 3\beta - 16)$ να ανήκει στη C_f.

37. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} (\beta - \alpha)x^2 + \alpha, & \text{αν} \quad x \le 1 \\ (\alpha + 5)x^2 + \beta x, & \text{αν} \quad x > 1 \end{cases}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-3, 5)$ και $B(5, 10)$. Να βρείτε:

α) τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

β) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

38. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + \alpha, & \text{αν } x < -1 \\ |x + 1| - \alpha, & \text{αν } x \ge -1 \end{cases}$$

της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -3. Να βρείτε:

α) την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$,

β) τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$,

γ) τα σημεία της C_f που έχουν τεταγμένη 6.

39. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = \sqrt{x - 1} - 2 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 + \lambda x - 5$$

τέμνουν τον άξονα $x'x$ στο ίδιο σημείο.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\lambda = -4$$

γ) Το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη C_g και ισχύει ότι:

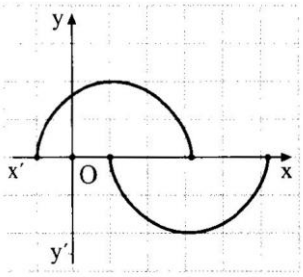
$$|\beta - 1| < 6$$

Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός α.

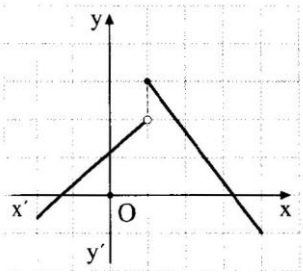
Ι. Γραφικές παραστάσεις

40. Να εξετάσετε αν οι επόμενες καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων:

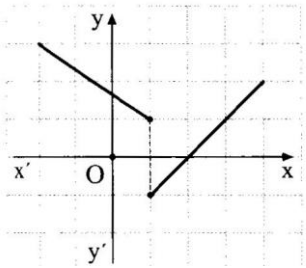
α)



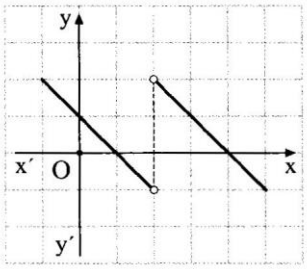
β)



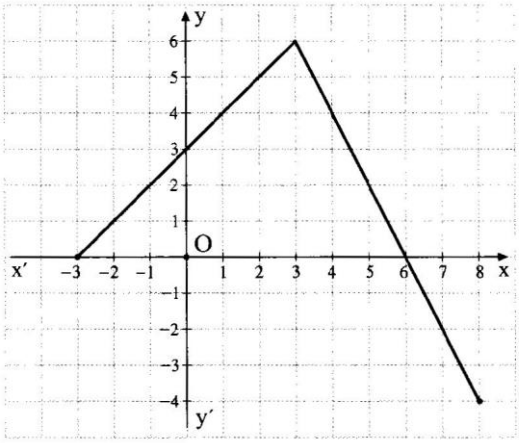
γ)



δ)



41. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών.

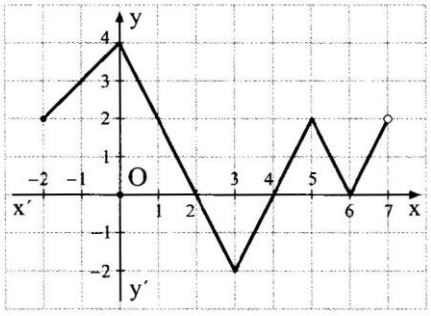
x	−3	−1	0	3		
y					−2	−4

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x′x και y′y.

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

42. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f,

β) το σύνολο τιμών της f,

γ) τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$,

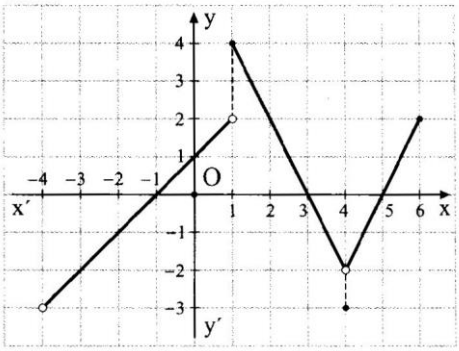
δ) τα x για τα οποία ισχύει $f(x) = 2$,

ε) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x′x και y′y

στ) τις λύσεις των ανισώσεων:

i) $f(x) > 0$ **ii)** $f(x) < 0$

43. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f,

β) το σύνολο τιμών της f,

γ) τις τιμές $f(-2)$, $f(1)$ και $f(4)$,

δ) τα x για τα οποία ισχύει $f(x) = 2$,

ε) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x′x και y′y,

στ) τα διαστήματα στα οποία:

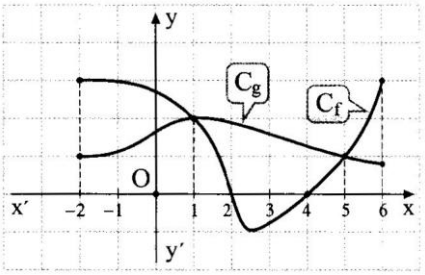
i) ισχύει $f(x) < 0$,

ii) ισχύει $0 < f(x) \leq 2$,

iii) η C_f είναι πάνω από τον άξονα x′x,

ζ) τα διαστήματα στα οποία ισχύει $f(x) \geq -2$.

44. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g.



α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g.

β) Να λύσετε:

i) την εξίσωση $f(x) = 0$,

ii) την εξίσωση $f(x) = g(x)$,

iii) την ανίσωση $f(x) > 0$,

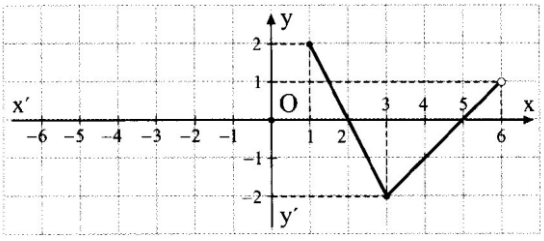
iv) την ανίσωση $f(x) > g(x)$,

v) την ανίσωση $0 < f(x) < g(x)$.

45. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $g(x) = -f(x)$ **β)** $h(x) = |f(x)|$

γ) $\varphi(x) = f(-x)$



Κ. Συνδυαστικά θέματα

46. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x) = x^2 - 3x + \lambda$ και $g(x) = |2x + 5| + \mu$

Το σημείο $K(-1, 6)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνουν τον άξονα y′y στο ίδιο σημείο, να βρείτε τον αριθμό μ.

γ) Για τις παραπάνω τιμές των λ και μ να βρείτε τα διαστήματα στα οποία:

i) η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x′x,

ii) η C_g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x.

47. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x + \alpha$

με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Για $\alpha = 1$ να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία.

γ) Για $\alpha > 1$ να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

48. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x) = \alpha x - \alpha + 2$ και $g(x) = x^2 - \alpha + 3$

με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α.

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) να βρείτε την τιμή του α,

ii) για την τιμή του α που βρήκατε, υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

49. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 + (\lambda - 4)|x| + 8}{x^2 + \lambda|x|}$$

διέρχεται από το σημείο $M(-1, -3)$.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < -\frac{1}{3}$.

50. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$

όπου $x \in \mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρείτε την παράμετρο λ, ώστε να ισχύει $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

51. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{\alpha}{4}}$$

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας,

ii) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

52. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 + \lambda x + \lambda - 6$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2, 4)$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται και από το συμμετρικό σημείο του A ως προς την αρχή των αξόνων.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ το σημείο $M(\alpha - 1, 2\alpha + 3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq f(f(-1))$.

ε) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x) = \mu x - \mu - 1$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο Σ. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ και τις συντεταγμένες του Σ.

53. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{4}{x^2 - 2\alpha} - \frac{4}{x - \alpha}$$

τέμνει τον άξονα y′y σε σημείο με τεταγμένη 1.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x′x.

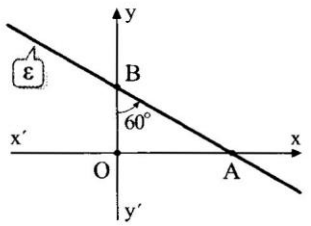
δ) Για κάθε $\lambda \neq 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες.

21ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 6.3 Η συνάρτηση f(x)=αx+β**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η ευθεία ε του διπλανού σχήματος. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x′x, καθώς και τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε.



2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 6$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x′x και y′y.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

3. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3$.

4. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης, καθώς και το είδος της γωνίας (οξεία, αμβλεία ή γωνία $0°$) που σχηματίζουν οι επόμενες ευθείες με τον άξονα x′x.

α) $y = 3x - 5$ β) $y = x + 2$ γ) $y = -\dfrac{6x-2}{3}$ δ) $y = -2$

5. Η ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία $A(-2, 3)$ και $B(4, 9)$. Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x′x.

6. Να σχεδιάσετε τις ευθείες:

α) $y = 2x$ β) $y = -\dfrac{1}{3}x$

7. Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ όταν $-4 \le x < 6$.

8. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 6, & \text{αν } x < -1 \\ 4, & \text{αν } -1 \le x < 2 \\ -x + 4, & \text{αν } x \ge 2 \end{cases}$$

9. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = |x - 2| - 2x + 6$$

10. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x) = |x|$ β) $g(x) = -|x|$

11. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: y = (2\lambda^2 + 4)x - 7, \quad \varepsilon_2: y = (\lambda^2 + 4\lambda)x + 13 \quad \text{και} \quad \varepsilon_3: y = 5x + 14$$

Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Να βρείτε:

α) την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$,

β) το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_3.

12. Δίνονται οι ευθείες ε_1: $y = (\lambda + 1)x - 3$ και ε_2: $y = \dfrac{\lambda - 2}{2}x + 4$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να είναι κάθετες.

13. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία:

α) έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό 2 και διέρχεται από το σημείο $A(-3, -5)$,

β) είναι παράλληλη στην ευθεία ζ: $y = -3x + 4$ και διέρχεται από το σημείο $B(-2, 4)$,

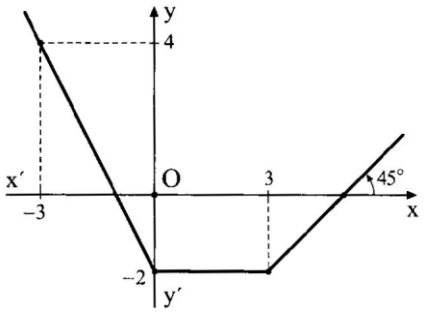
γ) είναι κάθετη στην ευθεία η: $y = \dfrac{-x + 3}{4}$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(2, 5)$,

δ) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο $\Delta(3, -2)$.

14. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία:

$$A(-2, 8) \quad \text{και} \quad B(3, -7)$$

15. Να βρείτε τη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x|$ και έστω Α και Β τα σημεία της με τετμημένες -2 και 6 αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β, καθώς και την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της f και την ευθεία ε που βρήκατε στο ερώτημα (α).

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $|x| > \dfrac{1}{2}x + 3$.

17. Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $y = \lambda x + \lambda - 8$, όπου $\lambda \neq 0$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι 9 τ.μ.

18. Σε μια δεξαμενή υπάρχουν 600 λίτρα βενζίνη. Ένα βυτιοφόρο που περιέχει 2000 λίτρα βενζίνη αρχίζει να γεμίζει τη δεξαμενή. Αν η παροχή του βυτιοφόρου είναι 100 λίτρα το λεπτό και η δεξαμενή χωράει όλη τη βενζίνη του βυτιοφόρου:

α) να βρείτε τις συναρτήσεις που εκφράζουν, με τη βοήθεια του χρόνου t, την ποσότητα της βενζίνης:

i) στο βυτιοφόρο, ii) στη δεξαμενή,

β) να παραστήσετε γραφικά τις παραπάνω συναρτήσεις και να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το βυτιοφόρο και η δεξαμενή έχουν την ίδια ποσότητα βενζίνης.

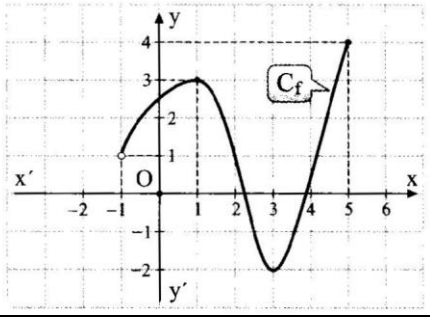
19. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f,

β) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$f(x) = \alpha$$

για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.



Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Γραφική παράσταση της f(x)=αx+β

1. Να βρείτε τα σημεία τομής των παρακάτω ευθειών με τους άξονες x′x και y′y και να τις σχεδιάσετε.

α) $y = x - 2$ **β)** $y = -x + 3$

γ) $y = 2x - 3$ **δ)** $y = -\frac{1}{2}x - 2$

ε) $y = 1$ **στ)** $y = -4$

2. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = -2x + 1$ όταν $x \leq -2$

β) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ όταν $x > -4$

γ) $f(x) = x - 3$ όταν $-2 \leq x < 5$

δ) $f(x) = \frac{x-1}{3}$ όταν $-5 < x \leq 4$

3. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι επόμενες ευθείες με τον άξονα x′x.

α) $y = x - 3$ **β)** $y = -x + 2$

γ) $y = \sqrt{3} \cdot x - 5$ **δ)** $y = -\sqrt{3} \cdot x$

ε) $y = \frac{\sqrt{3} \cdot x - 3}{3}$ **στ)** $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$

4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$:

α) η ευθεία $\varepsilon: y = (|2\lambda - 3| - 5)x + 2017$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα x′x,

β) η ευθεία $\zeta: y = (\lambda^2 - 3\lambda - 10)x - 2018$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x′x.

5. **α)** Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο:

$$x^2 + 2x - 3$$

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της.

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

6. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon: y = -2x + 4 \quad \text{και} \quad \zeta: y = 3x + 9$$

α) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε και ζ.

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες ε και ζ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

7. Η γραφική παράσταση της:

$$f(x) = \frac{x + \lambda}{3}$$

διέρχεται από το σημείο $A(-1, -2)$.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.

β) Να βρείτε το σημείο της C_f με τετμημένη 2.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

δ) Να βρείτε τα σημεία $M(\alpha, \beta)$ της γραφικής παράστασης της f για τα οποία ισχύει:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 25$$

8. Δίνεται η συνάρτηση:

$f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$ και $B(-1, 4)$, να βρείτε τις τιμές των α και β.

β) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x′x και y′y.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{(\alpha x^2 - 4\alpha x + 6)(x - \alpha)}{x^2 - 3x + 2}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(4, 2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

γ) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

11. Η ευθεία $\varepsilon: y = \alpha x + 2\alpha + 3$ τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο με τετμημένη 4.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Η ευθεία $\zeta: y = (\beta + 8)x + \beta$ σχηματίζει οξεία γωνία ω με τον άξονα x′x για την οποία ισχύει:

$$\varepsilon\varphi^2\omega - \varepsilon\varphi\omega - 6 = 0$$

i) Να αποδείξετε ότι $\beta = -5$.

ii) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε και ζ.

iii) Να σχεδιάσετε τις ευθείες ε και ζ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Β. Γραφική παράσταση με κλάδους ή με απόλυτα

12. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} x - 4, & \text{αν } x \leq -2 \\ 2, & \text{αν } -2 < x < 3 \\ -2x + 8, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$$

13. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x) = |x| - 2$ **β)** $f(x) = |x - 3|$

γ) $f(x) = 2 - |x + 1|$ **δ)** $f(x) = 2|x - 1| - 3$

14. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 2, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$

β) $g(x) = \frac{x - |x|}{2}$

15. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$$

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$ για κάθε $x \in A$.

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

16. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{|3x+6|}{x+2} - 1$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να γράψετε τον τύπο της f χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

δ) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$f(x) \quad \text{και} \quad g(x) = |x+1| - 6$$

17. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + x + 3$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

18. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = |x-1| + \lambda x + \mu$$

τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο με τεταγμένη 5 και τον άξονα x′x στο σημείο με τετμημένη 3.

α) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

γ) Αν ισχύει ότι $\alpha < 1 < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$f(\alpha) > f(\beta)$$

19. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x + \lambda - 5, & \text{αν } x < -4 \\ x, & \text{αν } -4 \le x \le 2 \\ \lambda x + 8, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

με $\lambda < -\frac{18}{7}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f\left(f\left(\frac{14}{3}\right)\right) = -2$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -3$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.

δ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$f(x) = \alpha$$

για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Γ. Παράλληλες ευθείες

20. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες.

α) ε: $y = (\lambda - 3)x - 1$ και ζ: $y = (5 - \lambda)x + 4$

β) ε: $y = \lambda x - 2x - 2$ και ζ: $y = \frac{x+5}{2}$

γ) ε: $y = (\lambda^2 + 4\lambda)x - 7$ και ζ: $y = (\lambda + 10)x + 21$

δ) ε: $y = |\lambda + 2|x - 1$ και ζ: $y = x - 5$

ε) ε: $y = |\lambda - 3|x - 2$ και ζ: $y = |3\lambda + 7|x + 5$

21. Δίνονται οι ευθείες:

ε: $y = \lambda(\lambda + 3)x + 5$ και

ζ: $y = (\lambda + 8)x + 2\lambda + 1$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες ε και ζ:

α) είναι διακεκριμένες και παράλληλες,

β) ταυτίζονται.

22. Δίνονται οι ευθείες ε: $y = (\lambda^3 - 1)x + 4$ και ζ: $y = 3\lambda(\lambda - 1)x - 1$, οι οποίες είναι παράλληλες.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες ε και ζ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

23. Δίνονται οι ευθείες:

ε: $y = (\alpha + 2)x + 3\beta - 1$ και

ζ: $y = (\beta - \alpha)x - \beta - 2\alpha$

με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $M(-3, 2)$ και ισχύει ότι ε//ζ. Να βρείτε:

α) τις τιμές των α και β,

β) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ζ με τους άξονες x′x και y′y.

Δ. Κάθετες ευθείες

24. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες ε και ζ είναι κάθετες.

α) ε: $y = \lambda^2 x - 2$ και ζ: $y = -\frac{\lambda}{8}x + 1$

β) ε: $y = (\lambda + 2)x + 7$ και ζ: $y = \frac{5 - x}{4}$

γ) ε: $y = (\lambda + 1)x$ και ζ: $y = (\lambda + 3)x$

δ) ε: $y = (\lambda - 2)x - 1$ και ζ: $y = -\frac{\lambda x + 3}{3}$

25. Η ευθεία:

$$\varepsilon: \ y = \frac{\lambda + 1}{2}x + 1 - \lambda$$

διέρχεται από το σημείο $A(-4, 5)$. Να βρείτε:

α) τον αριθμό λ,

β) την ευθεία ζ που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το σημείο $B(4, 6)$,

γ) το σημείο στο οποίο η ευθεία ε τέμνει την ευθεία ζ που βρήκατε στο ερώτημα (β).

Ε. Προσδιορισμός εξίσωσης ευθείας

26. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και διέρχεται από το σημείο Α.

α) $\lambda = 1$ και $A(-3, 2)$

β) $\lambda = -2$ και $A(2, -1)$

γ) $\lambda = -\frac{1}{2}$ και $A(4, -5)$

δ) $\lambda = 0$ και $A(-3, 4)$

27. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

α) $A(-4, 0)$ και $B(0, 2)$

β) $A(0, 3)$ και $B(2, 1)$

γ) $A(2, 4)$ και $B(-1, -5)$

δ) $A(0, -1)$ και $B(4, -1)$

28. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας:

α) που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A(-2, 4)$,

β) που σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $B(3, -5)$,

γ) που σχηματίζει γωνία 30° με τον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη $2\sqrt{3}$,

δ) που σχηματίζει γωνία 120° με τον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $\Delta(\sqrt{27}, -4)$.

29. Να αποδείξετε ότι τα σημεία:

$A(-1, 3)$, $B(2, -3)$ και $\Gamma(-3, 7)$

είναι συνευθειακά.

30. Η ευθεία ε: $y = (\lambda + 1)x + 2 - 4\lambda$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

β) Έστω Α το σημείο της ε με τεταγμένη 6 και Β το συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα $y'y$. Να βρείτε:

i) τα σημεία Α και Β,

ii) την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από το Β και είναι παράλληλη στην ε,

iii) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ζ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

31. Δίνονται οι ευθείες:

ε_1: $y = -2x + 2$, ε_2: $y = 4x - 1$

και ε_3: $y = -3x + 6$

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας:

α) που είναι παράλληλη στην ε_1 και διέρχεται από το σημείο τομής των ε_2 και ε_3,

β) που διέρχεται από το σημείο τομής των ε_1 και ε_3 και το σημείο της ε_2 με τετμημένη -3.

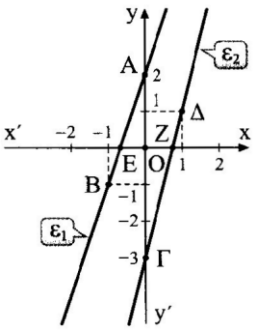
Ζ. Προσδιορισμός τύπου συνάρτησης από την γραφική της παράσταση

32. Στο διπλανό σχήμα δίνονται δύο ευθείες ε_1 και ε_2. Να βρείτε:

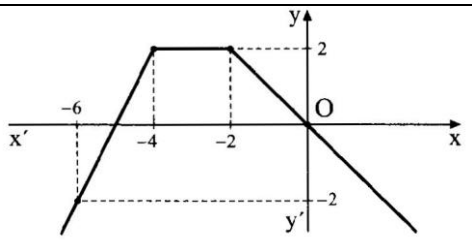
α) τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2,

β) τις συντεταγμένες των σημείων Ε και Ζ,

γ) το σημείο τομής των ε_1 και ε_2.



33. Δίνεται συνάρτηση $f(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.

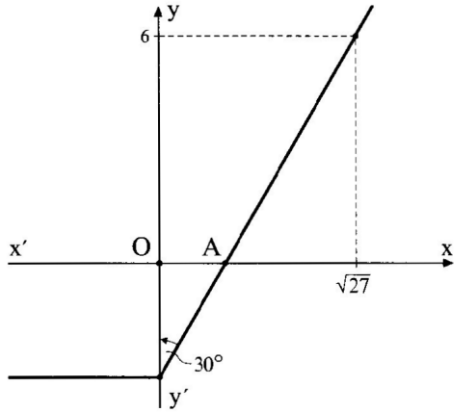
β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία:

$A(-8, f(-8))$, $B(-1, f(-1))$ και $\Gamma(0, 2)$

είναι συνευθειακά.

34. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α.



Η. Γραφική επίλυση ανισώσεων

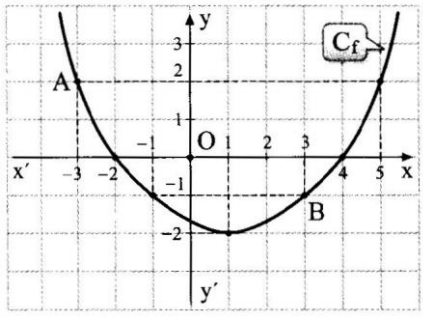
35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x|$ και έστω Α και Β τα σημεία της γραφικής της παράστασης με τετμημένες -3 και 5 αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις τεταγμένες των σημείων Α και Β, καθώς και την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

β) Να σχεδιάσετε τη C_f και την παραπάνω ευθεία ε στο ίδιο σύστημα αξόνων.

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $|x| \leq \frac{x + 15}{4}$.

36. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



α) Να σχεδιάσετε στο προηγούμενο σχήμα τις ευθείες με εξισώσεις $y = -1$ και $y = 2$. Στη συνέχεια να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις:

i) $f(x) \leq -1$ **ii)** $-1 < f(x) < 2$

β) Να σχεδιάσετε στο προηγούμενο σχήμα την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β και να βρείτε την εξίσωσή της.

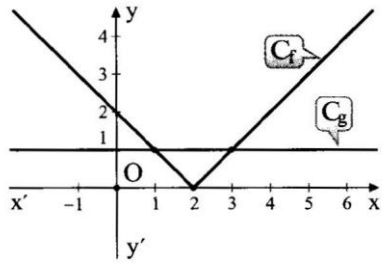
γ) Να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις:

i) $f(x) > \dfrac{-x+1}{2}$

ii) $0 \le f(x) \le \dfrac{-x+1}{2}$

37. Στο επόμενο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με:

$$f(x) = |x-2| \quad \text{και} \quad g(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$



α) Να εκτιμήσετε:

i) τα σημεία τομής των C_f και C_g,

ii) τις τιμές του x για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g.

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

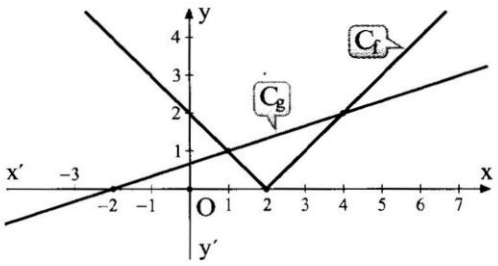
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$A = \frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

38. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με:

$$f(x) = |x-2| \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad x \in \mathbb{R}$$



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g.

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

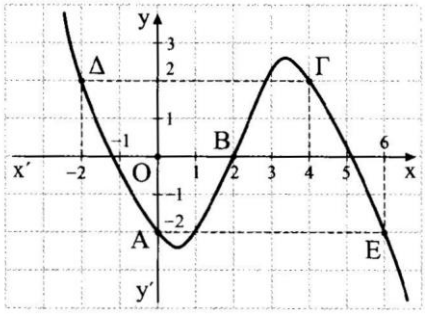
δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (γ) να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$K = \sqrt{3|2-x| - (x+2)}$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

39. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, που έχει πεδίο ορισμού το R και η οποία διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η ε διέρχεται και από το σημείο Γ.



Θ. Προβλήματα

40. Η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς Κελσίου (°C), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T = 15 + 25x \quad \text{όταν } 0 \le x \le 200$$

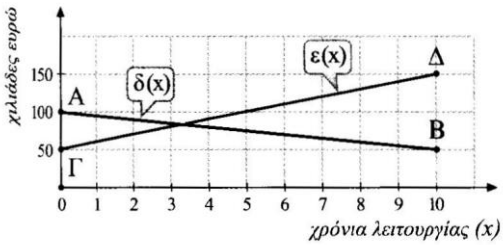
α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290 °C. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440 °C; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

41. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, με $A(0, 100)$ και $B(10, 50)$, παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.



Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, με $\Gamma(0, 50)$ και $\Delta(10, 150)$, παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων ε(x) της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.

α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

β) i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων δ(x), ε(x) και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο ερώτημα (α) ήταν σωστές.

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

42. Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0{,}20\,x$$

όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 km;

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος για μία ημέρα πλήρωσε 150 ευρώ;

γ) Μια άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 80 + 0{,}10\,x$$

όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μάς συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

δ) Αν δίνεται ότι:

$$f(x) = 60 + 0{,}20\,x \quad \text{και} \quad g(x) = 80 + 0{,}10\,x$$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

43. Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει κολυμπώντας να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες;

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει τον χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα ο αθλητής για να κάψει 360 θερμίδες είναι:

$$f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$$

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος (β) (i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

Ι. Συνδυαστικά θέματα

44. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\dfrac{x}{x-5} + \dfrac{x-5}{x} - 1}{\dfrac{x^2 - 5x + 25}{x^3 - 10x^2 + 25x}}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

45. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9 - x^2}}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

46. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - \alpha$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

γ) Να βρείτε την τιμή του α, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.

δ) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

47. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \lambda x + 4} - 3$$

διέρχεται από το σημείο $M(-4, -1)$.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ε) Να βρείτε αριθμό $\alpha > 1$ για τον οποίο ισχύει $f(\alpha) + f(1 - 3\alpha) = 5$.

48. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 + x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

γ) Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου Μ ισχύει $|2x - 1| < 3$, να αποδείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

49. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 4x + 2 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - 9$$

με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα x′x.

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία:

$$(3,0) \quad \text{και} \quad (-3,0)$$

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το σημείο $A(0,3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

50. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: y = \lambda(\lambda - 1)x + 3 - 4\lambda$ και $\zeta: y = (\lambda^2 - 1)x - 3\lambda$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο $M(1, -3)$. Να βρείτε:

α) την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$,

β) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ζ με τους άξονες x′x και y′y,

γ) την εξίσωση της ευθείας η που είναι παράλληλη στην ε και διέρχεται από το σημείο $N(3, -2)$,

δ) το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών ζ και η.

51. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{αν } x < 0 \\ x + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα y′y.

β) **i)** Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y = 3$ και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y′y. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) **i)** Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει τη C_f σε δύο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γ) (i) να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = \alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (β) (ii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

52. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{αν } x > 2 \\ -x + 3, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$$

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f και να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x′x και y′y.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

53. Το σημείο $A(\alpha - 3, \alpha + 2)$ ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \sqrt{4\alpha^2 + 16\alpha + 16} + \sqrt{4\alpha^2 - 24\alpha + 36}$$

β) Η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x - 2\alpha + 10$ διέρχεται από το σημείο A. Να βρείτε:

i) τον αριθμό α,

ii) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η C_f με τους άξονες x′x και y′y.

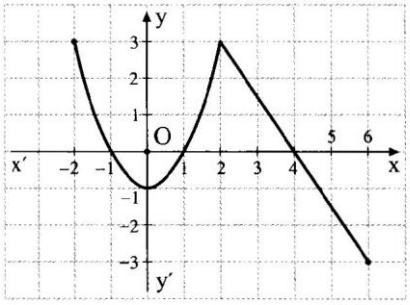
22^{ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ : **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **Ασκήσεις επανάληψης 6^{ου} κεφαλαίου**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

.1 Στο επόμενο σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	−2	−1	0	1	2	
y						−3

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες x′x και y′y.

δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

.2 Οι ευθείες ε_1: $y = (1-3\alpha-\alpha^2)x + 1 - \alpha$ και ε_2: $y=(\alpha+5)x+\beta$ είναι παράλληλες.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε_1 με τους άξονες x′x και y′y.

γ) Αν το σημείο $M(\mu, \mu+5)$ ανήκει στην ευθεία ε_1 και το συμμετρικό του M ως προς τον άξονα x′x ανήκει στην ευθεία ε_2, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\beta = -9$,

ii) να βρείτε σημείο P της ε_1 και σημείο Σ της ε_2 τα οποία είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y′y.

.3 Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τη συνάρτηση f με:

$$f(x) = (\lambda+1)x^2 - (\lambda+1)x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

β) Για $\lambda = -1$ να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο $B(2, 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x′x και σε άλλο σημείο.

δ) Για $\lambda = 1$ να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x′x.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.4 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x) = x^2 - 2x \quad \text{και} \quad g(x) = 3x - 4, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g.

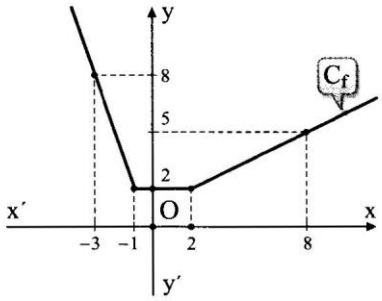
γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής:

$$y = \alpha, \quad \alpha < -1$$

βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.5 Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

β) Έστω A και B τα σημεία της C_f με τετμημένες -4 και 4 αντίστοιχα. Να βρείτε:

i) τις τεταγμένες των σημείων A και B,

ii) την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A και B,

iii) τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω ευθεία ε με τον άξονα x′x.

.6 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + 2$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(-1) = f(4)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x′x και y′y.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x.

δ) Έστω M και N τα σημεία της C_f με τετμημένες -2 και 3 αντίστοιχα και ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία M και N. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες των σημείων M και N,

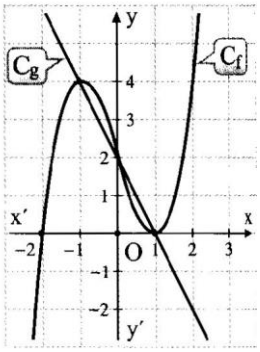
ii) την εξίσωση της ευθείας ε,

iii) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες x′x και y′y,

iv) ευθεία ζ παράλληλη στην ε, η οποία έχει ένα κοινό σημείο με τη C_f.

.7 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και της συνάρτησης:

$$g(x) = -2x + 2$$



Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α) τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) = -2x + 2$$

β) τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$ και $f(1)$,

γ) τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g,

δ) τις τιμές του x για τις οποίες η παράσταση:

$$A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.8 Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία ΤΑΧΙ με το όνομα «RED» χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο ΤΑΧΙ και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Μια άλλη εταιρεία ΤΑΧΙ με το όνομα «YELLOW» χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο ΤΑΧΙ και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α) i) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία «RED» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να συμπληρώσετε τον πίνακα.

x (km)	0	2	8
f(x) (ευρώ)			

ii) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία «YELLOW» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα.

x (km)			
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g και τους τύπους τους $f(x)$ και $g(x)$.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας «RED» είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

δ) Αν δύο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία «RED» και ο πελάτης Α διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον Β, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.9 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + 2, & \text{αν } x \le 2 \\ \beta x + 5, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

διέρχεται από τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(3, 2)$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Αν ισχύει ότι $|\lambda - 4| < |\lambda - 2|$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \lambda$.

.10 Για τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \lambda x - 6, & \text{αν } x \le 1 \\ |x - 1| - 4, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

ισχύει $f(f(4)) = -4$.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x′x και y′y.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2 + (f(1) - f(7))|x| + f(-2) = 0$$

δ) Αν ισχύει ότι $|\alpha + 2| < 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|f(\alpha) - 1| < 5$$

.11 Η ευθεία $\varepsilon: y = (\alpha + 4)x + 8$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα x′x και για τη συνάρτηση:

$$f(x) = 3\sqrt{x + 1} + \frac{2}{x + \alpha}$$

ισχύει ότι $f(8) - f(-1) = 10$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Θεωρούμε ευθεία ζ για την οποία ισχύουν τα εξής:

- η C_f και η ευθεία ζ τέμνονται πάνω στον άξονα y′y στο σημείο Μ,
- η ευθεία ζ σχηματίζει οξεία γωνία ω με τον άξονα x′x για την οποία ισχύει:

$$|\varepsilon\varphi\omega - 3| = |2\varepsilon\varphi\omega + 1|$$

Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ζ,

ii) το εμβαδόν του τετραπλεύρου που ορίζεται από τους άξονες x′x, y′y και τις ευθείες ε, ζ.

.12 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 9 \quad \text{και}$$

$$g(x) = (3 - \lambda)x + 2\lambda - 12$$

α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι C_f και C_g έχουν δύο (διαφορετικά) κοινά σημεία.

γ) Για $\lambda \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$, έστω x_1 και x_2 οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g. Αν ισχύει ότι $|x_1 + x_2| = |x_1 x_2|$, να βρείτε:

i) την τιμή του λ,

ii) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η C_g με τους άξονες x′x και y′y.