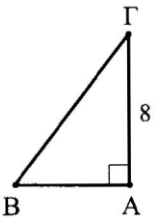
6ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 3.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

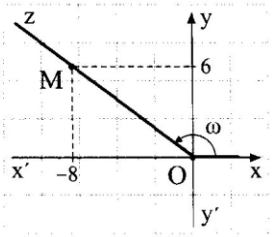
1. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με $\widehat{A} = 90^\circ$) του διπλανού σχήματος ισχύει $A\Gamma = 8\,\text{cm}$ και $\eta\mu B = \frac{4}{5}$. Να βρείτε:



α) τις πλευρές ΒΓ και ΑΒ,

β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\widehat{\Gamma}$.

2. Στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η ημιευθεία Oz. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \widehat{xOz}$.



3. α) Να μετατρέψετε σε rad τη γωνία 15°.

β) Να μετατρέψετε σε μοίρες τη γωνία $\frac{5\pi}{6}$ rad.

γ) Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ ένα τόξο $\frac{3}{2}$ rad έχει μήκος 9 cm. Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου.

4. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \sigma\upsilon\nu 60^\circ + \sigma\varphi 30^\circ \cdot \eta\mu 60^\circ - \varepsilon\varphi 45^\circ + 2\sigma\upsilon\nu^2 45^\circ$

β) $B = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \cdot \sigma\varphi\frac{\pi}{3} - \eta\mu\frac{\pi}{3} \cdot \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} + \eta\mu\frac{\pi}{2}$

5. α) Στον τριγωνομετρικό κύκλο να τοποθετήσετε τις γωνίες 130° και -140° και να προσδιορίσετε γεωμετρικά τους τριγωνομετρικούς τους αριθμούς.

β) Στον τριγωνομετρικό κύκλο να σχεδιάσετε δύο γωνίες των οποίων:

i) το ημίτονο ισούται με $\frac{3}{4}$,

ii) η εφαπτομένη ισούται με 2.

6. Να βρείτε τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών:

α) 70° και 110°

β) $\frac{7\pi}{6}$ rad και $\frac{5\pi}{3}$ rad

7. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

α) 1140°

β) $\frac{49\pi}{6}$

8. α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

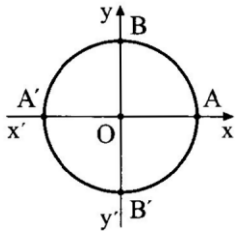
β) Να προσδιορίσετε τη μορφή που έχουν οι γωνίες των οποίων οι τελικές πλευρές τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο:

i) στο A, ii) στο B,

iii) στο A′, iv) στο B′,

v) στο A ή στο A′, vi) στο B ή στο B′,

vii) στο A ή στο B ή στο A′ ή στο B′.



9. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων:

α) $A = 3\eta\mu x - 4\sigma\upsilon\nu y$ β) $B = 5 - 3\eta\mu^2 x$

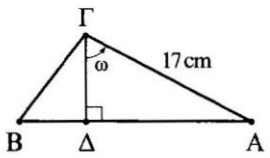
Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Γωνίες ορθογωνίων τριγώνων

1. Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ, το ΓΔ είναι ύψος. Ισχύουν οι σχέσεις:

$$A\Gamma = 17\,cm$$

$$\eta\mu\omega = \frac{15}{17} \text{ και } \varepsilon\varphi B = \frac{4}{3}$$



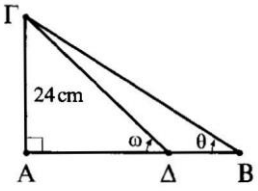
Να βρείτε τα μήκη των ΑΔ, ΓΔ, ΑΒ και ΒΓ.

2. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν:

$$\varepsilon\varphi\omega = 0{,}8 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = 0{,}6$$

Είναι επίσης $A\Gamma = 24\,cm$.



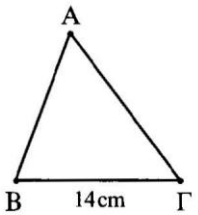
Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΒΔ.

3. Δίνεται το διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ με:

$$B\Gamma = 14\,cm$$

$$\sigma\varphi B = \frac{5}{12} \quad \text{και}$$

$$\sigma\varphi\Gamma = \frac{3}{4}$$



Να βρείτε:

α) τα μήκη των πλευρών ΑΒ και ΑΓ,

β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{A}$.

4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\beta > \gamma$, ισχύει ότι:

$$(\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu B)(\eta\mu\Gamma + \sigma\upsilon\nu\Gamma) = \frac{49}{25}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi B = \frac{4}{3}$$

β) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

Β. Ο τριγωνομετρικός κύκλος

5. Σε έναν τριγωνομετρικό κύκλο να τοποθετήσετε τη γωνία 220° και να προσδιορίσετε τη θέση των αριθμών:

$\eta\mu 220^\circ$, $\sigma\upsilon\nu 220^\circ$, $\varepsilon\varphi 220^\circ$ και $\sigma\varphi 220^\circ$

στους αντίστοιχους άξονες.

6. Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και μια γωνία ω με $\sigma\varphi\omega = -2$, της οποίας η τελική πλευρά ανήκει στο 4ο τεταρτημόριο.

α) Να σχεδιάσετε την τελική πλευρά της γωνίας ω.

β) Να προσδιορίσετε τη θέση των αριθμών ημω και συνω στους αντίστοιχους άξονες.

Γ. Ασκήσεις με μοίρες και ακτίνια

7. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

$$\hat{A} = \frac{4\pi}{9}\,rad \quad \text{και} \quad \hat{B} = 40^\circ$$

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

8. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \eta\mu 60^\circ \cdot \sigma\varphi 30^\circ - \sigma\upsilon\nu 60^\circ + \varepsilon\varphi 45^\circ$

β) $B = \sigma\varphi\frac{\pi}{3} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} + \eta\mu\frac{\pi}{6} - \sigma\varphi\frac{\pi}{4}$

9. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \eta\mu\frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\varphi\frac{3\pi}{2} + \varepsilon\varphi 0$

β) $B = \sigma\upsilon\nu 0 + \eta\mu\frac{3\pi}{2} + \varepsilon\varphi\pi + \sigma\varphi\frac{\pi}{2}$

γ) $\Gamma = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - \eta\mu\pi - \sigma\upsilon\nu\pi + \eta\mu 0$

δ) $\Delta = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} + \varepsilon\varphi\pi - \eta\mu\frac{3\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu 0$

10. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = 2\eta\mu^2\frac{\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4} + 3\sigma\varphi^2\frac{\pi}{3}$

β) $B = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{6} + 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3} - \varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{3}$

γ) $\Gamma = 3\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{6} + \sigma\varphi^2\frac{\pi}{6} - 4\eta\mu^2\frac{\pi}{3}$

δ) $\Delta = \eta\mu^2\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{8\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}}$

11. Αν για τις γωνίες ω και φ ισχύουν:

$$\begin{cases} 3\omega + 2\varphi = \pi \\ 12\omega - 12\varphi = -\pi \end{cases}$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\varphi - \sigma\upsilon\nu^2\omega \cdot \eta\mu^2\varphi$$

Δ. Τριγωνομετρικοί αριθμοί της μορφής κ360°+ω

12. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

α) 780° **β)** 1530° **γ)** 4500°

13. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

α) $\frac{25\pi}{6}$ **β)** $\frac{7\pi}{3}$ **γ)** $\frac{33\pi}{4}$ **δ)** $\frac{21\pi}{2}$

14. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

α) -675° **β)** -1770° **γ)** -4590°

15. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

α) $-\frac{35\pi}{6}$ **β)** $-\frac{23\pi}{3}$ **γ)** $-\frac{39\pi}{4}$

16. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $$A=\frac{\varepsilon\varphi^2\frac{9\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu^2\frac{55\pi}{3}}{\eta\mu^2\frac{129\pi}{4}\cdot\sigma\varphi\frac{73\pi}{6}\cdot\eta\mu\frac{127\pi}{3}}$$

β) $$B=\frac{\eta\mu\frac{25\pi}{6}+\sigma\upsilon\nu\frac{33\pi}{2}-\eta\mu 15\pi}{\eta\mu\frac{7\pi}{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{37\pi}{6}-\sigma\upsilon\nu\frac{31\pi}{3}\cdot\eta\mu\frac{49\pi}{6}}$$

17. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{\eta\mu 7610^\circ}{\eta\mu 4370^\circ}+\sigma\upsilon\nu\frac{61\pi}{5}-\sigma\upsilon\nu\frac{111\pi}{5}$$

Ε. Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

18. Να βρείτε το πρόσημο των επόμενων τριγωνομετρικών αριθμών:

α) $\varepsilon\varphi 1640^\circ$ **β)** $\eta\mu 1970^\circ$ **γ)** $\sigma\upsilon\nu 2500^\circ$

δ) $\sigma\varphi\frac{34\pi}{5}$ **ε)** $\frac{73\pi}{8}$ **στ)** $\frac{127\pi}{10}$

19. Να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

α) $A=\varepsilon\varphi 140^\circ\cdot\eta\mu 240^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu 340^\circ$

β) $B=\sigma\upsilon\nu 89^\circ\cdot\eta\mu 91^\circ\cdot\varepsilon\varphi 265^\circ\cdot\sigma\varphi 275^\circ$

γ) $\Gamma=\eta\mu 15^\circ-\varepsilon\varphi 115^\circ-\sigma\upsilon\nu 215^\circ$

δ) $\Delta=\sigma\varphi 130^\circ-\varepsilon\varphi 230^\circ-\sigma\upsilon\nu 330^\circ$

20. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με το κατάλληλο σύμβολο ($<$ ή $>$).

α) Αν $\frac{29\pi}{2}<x<\frac{31\pi}{2}$, τότε $\sigma\upsilon\nu x\ldots 0$.

β) Αν $16\pi<x<17\pi$, τότε $\eta\mu x\ldots 0$.

γ) Αν $21\pi<x<22\pi$, τότε $\eta\mu x\ldots 0$.

δ) Αν $\frac{43\pi}{2}<x<\frac{45\pi}{2}$, τότε $\sigma\upsilon\nu x\ldots 0$.

ε) Αν $\frac{21\pi}{2}<x<11\pi$, τότε $\varepsilon\varphi x\ldots 0$.

στ) Αν $31\pi<x<\frac{63\pi}{2}$, τότε $\sigma\varphi x\ldots 0$.

21. **α)** Αν ισχύει $\frac{21\pi}{2}<x<11\pi$, να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x>\varepsilon\varphi x$$

β) Αν ισχύει $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu x<\sigma\varphi x-\eta\mu x$$

Ζ. -1≤ημω≤1 και -1≤συνω≤1

22. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων:

α) $A=2\eta\mu\varphi-3\sigma\upsilon\nu\omega$ **β)** $B=2-\eta\mu^2\omega$

γ) $\Gamma=\frac{5}{\eta\mu\omega+2}$ **δ)** $\Delta=\frac{\eta\mu\varphi+3}{2-\sigma\upsilon\nu\omega}$

23. Να αποδείξετε ότι για οποιεσδήποτε γωνίες ω και φ ισχύουν:

α) $|2\eta\mu\omega+3\sigma\upsilon\nu\varphi|\le 5$ **β)** $|5\eta\mu\omega-3\sigma\upsilon\nu\varphi|\le 8$

24. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$$A=9\eta\mu\omega+8\sigma\upsilon\nu\omega-6(\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega+2)$$

25. Να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί ω και λ τέτοιοι, ώστε να ισχύει:

$$\eta\mu\omega=5\lambda^2-4\lambda+2$$

26. Αν ισχύει ότι:

$$3\eta\mu\omega-2\sigma\upsilon\nu\theta=5$$

να βρείτε το ημω και το συνθ.

Η. Συνδυαστικά θέματα

27. Δίνεται η εξίσωση 2ου βαθμού:

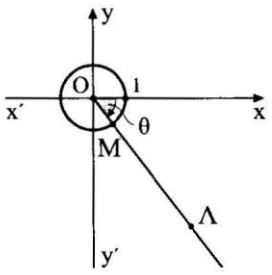
$$4x^2-4x-\eta\mu\theta=0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για οποιαδήποτε τιμή του $\theta\in\mathbb{R}$.

β) Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1). Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1},\quad \text{όταν}\quad \theta=\frac{49\pi}{6}$$

28. Στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy δίνεται γωνία θ, της οποίας η τελική πλευρά διέρχεται από το σημείο Λ και τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ. Οι συντεταγμένες του σημείου Λ είναι οι λύσεις της εξίσωσης:



$$|2\omega-15|-|4\omega-9|=0$$

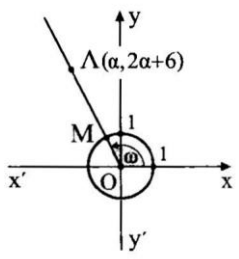
Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του σημείου Λ,

β) την απόσταση ΟΛ,

γ) τις συντεταγμένες του σημείου Μ.

29. Στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα Oxy δίνεται γωνία ω, της οποίας η τελική πλευρά διέρχεται από το σημείο $\Lambda(\alpha, 2\alpha+6)$ και τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ. Επίσης ισχύει ότι:



$$2\sigma\varphi^2\omega-5\sigma\varphi\omega-3=0$$

α) Να βρείτε τη σφω.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-\frac{3}{2}$.

γ) Να βρείτε την απόσταση ΟΛ.

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ.

30. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^6-16x^3+65$$

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το 1.

β) Να βρείτε για ποια τιμή του x ισχύει ότι:

$$x^3(x^3-16)=\sigma\upsilon\nu(7\pi x)-65$$

7ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 3.2 Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν για τη γωνία ω ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$, να εκφράσετε το $\eta\mu\omega$ και το $\sigma\upsilon\nu\omega$ ως συνάρτηση της $\varepsilon\varphi\omega$.

2. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες να ισχύουν συγχρόνως:

α) $\eta\mu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x = 0$ β) $\eta\mu x = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x = -1$

3. Δίνεται γωνία ω για την οποία ισχύουν:

$$\eta\mu\omega = \frac{5}{13} \quad \text{και} \quad \frac{\pi}{2} < \omega < \pi$$

Να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\omega$, την $\varepsilon\varphi\omega$ και τη $\sigma\varphi\omega$.

4. Δίνεται γωνία ω για την οποία ισχύουν:

$$\pi < \omega < \frac{3\pi}{2} \quad \text{και} \quad 4\varepsilon\varphi\omega - 6\sigma\varphi\omega + 5 = 0$$

Να βρείτε:

α) την $\varepsilon\varphi\omega$ και τη $\sigma\varphi\omega$, β) το $\eta\mu\omega$ και το $\sigma\upsilon\nu\omega$.

5. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\varepsilon\varphi x} + \dfrac{\eta\mu^2 x}{1+\sigma\varphi x} = 1 - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

β) $\eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \eta\mu^2\alpha \cdot \eta\mu^2\beta$

6. Να αποδείξετε ότι $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 \leq 2$.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Υπολογισμός τριγωνομετρικών αριθμών

1. Αν ισχύει $\text{συν}\omega = \frac{3}{5}$ και $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, να βρείτε το ημω, την εφω και τη σφω.

2. Δίνεται γωνία ω, με $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ τέτοια, ώστε:

$$\text{ημ}\omega \in \left\{-\frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

3. Για τη γωνία ω ισχύουν:

$$\text{σφ}\omega = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \text{και} \quad \frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi$$

Να βρείτε την εφω, το ημω και το συνω.

4. Για τη γωνία x, με $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, ισχύει:

$$6\text{ημ}^2x + \text{συν}x - 5 = 0$$

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.

5. Για τη γωνία x, με $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, ισχύει ότι:

$$3\sqrt{5} \cdot \text{ημ}^2x - 2\text{ημ}x - \sqrt{5} = 0$$

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{3\text{ημ}^2x + \text{ημ}x \cdot \text{συν}x}{\text{σφ}x - 2\text{εφ}x}$$

6. Δίνεται γωνία x, με $-\frac{3\pi}{2} < x < -\pi$, για την οποία ισχύει ότι $\text{εφ}x = 9\text{σφ}x$. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.

7. Δίνεται γωνία ω για την οποία ισχύει ότι:

$$3\sqrt{7} \cdot \text{ημ}^2\omega - \sqrt{7} \cdot \text{συν}^2\omega - 4\text{ημ}\omega \cdot \text{συν}\omega = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $\text{συν}\omega \neq 0$.

β) Αν $\pi \leq \omega \leq \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

8. Για τη γωνία ω ισχύουν:

$$\text{ημ}\omega = \frac{1-3\lambda}{5\lambda+3} \quad \text{και} \quad \text{συν}\omega = \frac{4\lambda+4}{5\lambda+3}$$

Να βρείτε:

α) τον αριθμό λ,

β) σε ποιο τεταρτημόριο ανήκει η τελική πλευρά της γωνίας ω,

γ) την εφω και τη σφω.

Β. Τριγωνομετρικές ταυτότητες

9. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $\frac{\text{συν}\varphi}{1-\text{ημ}\varphi} + \frac{\text{συν}\varphi}{1+\text{ημ}\varphi} = \frac{2}{\text{συν}\varphi}$

β) $\left(1+\frac{1}{\text{σφ}\omega}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{\text{σφ}\omega}\right)^2 = \frac{2}{\text{συν}^2\omega}$

γ) $\text{ημ}^2x \cdot \text{εφ}x - \frac{\text{συν}^2x}{\text{εφ}x} + \frac{1}{\text{εφ}x} = \text{εφ}x$

δ) $\left(1+\frac{\text{ημ}\theta - 1}{\text{συν}\theta}\right)\left(1+\frac{\text{συν}\theta + 1}{\text{ημ}\theta}\right) = 2$

10. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $\frac{\text{συν}^2\omega}{1+\text{εφ}^2\omega} - \frac{\text{ημ}^2\omega}{1+\text{σφ}^2\omega} = \text{συν}^2\omega - \text{ημ}^2\omega$

β) $\frac{\text{ημ}^3\theta}{\text{συν}\theta} + \frac{\text{σφ}\theta}{1+\text{σφ}^2\theta} = \text{εφ}\theta$

γ) $\frac{1-\text{σφ}^2\alpha + \text{σφ}^4\alpha}{1+\text{σφ}^6\alpha} = \text{ημ}^2\alpha$

δ) $\frac{1+\text{εφ}^3x}{1+\text{σφ}^3x} = \left(\frac{1+\text{εφ}x}{1+\text{σφ}x}\right)^3$

11. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $\frac{1+2\text{ημ}x}{\text{συν}^2x} - \frac{1+3\text{ημ}x}{1+\text{ημ}x} = 3\text{εφ}^2x$

β) $\text{ημ}^6\alpha + \text{συν}^6\alpha = 1 - 3\text{ημ}^2\alpha \cdot \text{συν}^2\alpha$

γ) $\frac{\text{εφ}^2x + \text{σφ}^2x}{\text{εφ}x + \text{σφ}x} = \frac{1 - 2\text{ημ}^2x \cdot \text{συν}^2x}{\text{ημ}x \cdot \text{συν}x}$

δ) $\frac{1 - 2\text{ημ}\theta \cdot \text{συν}\theta}{\text{ημ}^4\theta - \text{συν}^4\theta} = \frac{1-\text{σφ}\theta}{1+\text{σφ}\theta}$

Γ. Απόδειξη ανισοτήτων

12. Να αποδείξετε ότι:

α) $\text{συν}^2\alpha - \text{ημ}^2\beta \leq 1 + 2\text{ημ}\alpha \cdot \text{ημ}\beta$

β) $4\text{ημ}^2\alpha - 12\text{συν}\alpha \cdot \text{ημ}\beta - 9\text{ημ}^2\beta \leq 4$

γ) $9\text{συν}^2\alpha + 6\text{ημ}\alpha \cdot \text{ημ}\beta + \text{συν}^2\beta \leq 10$

δ) $2\text{ημ}\alpha \cdot \text{συν}\alpha \leq 1$

ε) $\text{συν}^2\alpha + \text{ημ}^2\beta \leq 2(1 - \text{ημ}\alpha \cdot \text{συν}\beta)$

13. Να αποδείξετε ότι:

α) $-\sqrt{2} \leq \text{ημ}x - \text{συν}x \leq \sqrt{2}$

β) $-13 \leq 5\text{ημ}x + 12\text{συν}x \leq 13$

14. **α)** Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{εφ}x + \text{σφ}x \geq 2$$

β) Αν $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{εφ}x + \text{σφ}x \leq -2$$

Δ. Σύνθετες ασκήσεις

15. Δίνεται γωνία x για την οποία ισχύει:

$$\text{ημ}x + \text{συν}x = \frac{1}{2}$$

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\text{ημ}x \cdot \text{συν}x$ **β)** $\frac{1}{\text{ημ}x} + \frac{1}{\text{συν}x}$

γ) $\text{εφ}x + \text{σφ}x$ **δ)** $\text{ημ}^3x + \text{συν}^3x$

ε) $\text{ημ}^4x + \text{συν}^4x$ **στ)** $|\text{ημ}x - \text{συν}x|$

16. Αν ισχύει $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{1+\eta\mu x}+\sqrt{1-\eta\mu x}}{\sqrt{1+\eta\mu x}-\sqrt{1-\eta\mu x}} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

17. Αν ισχύει $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι:

$$(\sigma\upsilon\nu x + \sigma\varphi x)^2 - (\sigma\upsilon\nu x - \sigma\varphi x)^2 = 4\sqrt{\sigma\varphi^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}$$

18. Δίνεται ένας αριθμός $\alpha \in (0, 1)$ και μια γωνία $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ για τα οποία ισχύει:

$$1 + \alpha^2 - 2\alpha \cdot \eta\mu x - 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$$

Να εκφράσετε συναρτήσει του α την παράσταση:

$$K = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + \varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x$$

19. Αν $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\sqrt{1+\eta\mu x}\cdot\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}}{1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$$

είναι σταθερή (ανεξάρτητη του x).

Ε. Συνδυαστικά θέματα

20. Δίνεται η εξίσωση:

$$4x^2 + (5 - 3\eta\mu\alpha)x + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1). Αν ισχύει $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{9}{2}$ και $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α.

21. Δίνεται γωνία ω, με $\pi < \omega < 2\pi$, για την οποία ισχύουν:

$$\varepsilon\varphi\omega = 3 - \lambda \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{\sqrt{15 - 2\lambda}}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 5$.

β) Για οποιαδήποτε γωνία x να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$A = \sqrt{\eta\mu^4 x - \sqrt{5}\cdot\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x - 1} - \sigma\upsilon\nu^2 x$$

είναι σταθερή.

22. **α)** Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου να βρείτε όλες τις γωνίες ω, με $0 \le \omega \le 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega = -1$$

και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

23. Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Αν $\lambda = -1$ και (x_0, y_0) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να βρείτε γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ τέτοια, ώστε:

$$x_0 = \sigma\upsilon\nu\theta \quad \text{και} \quad y_0 = \eta\mu\theta$$

γ) Αν $\lambda = 1$ και (x_1, y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω τέτοια, ώστε:

$$x_1 = \sigma\upsilon\nu\omega \quad \text{και} \quad y_1 = \eta\mu\omega$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

24. Δίνονται δύο γωνίες x και β για τις οποίες ισχύουν:

$$\eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi x = 2\eta\mu\beta - 2\sigma\upsilon\nu\beta$$

α) Να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu^2 x$.

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι:

$$2x^2 - 3\pi x + \pi^2 < 0$$

τότε:

i) να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο ανήκει η τελική πλευρά της γωνίας x,

ii) να βρείτε τα ημβ και συνβ,

iii) να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\kappa = \varepsilon\varphi\beta + \sigma\varphi\beta$ είναι ρητός.

25. Δίνεται γωνία x, με $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$, για την οποία ισχύει:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \varepsilon\varphi x = \alpha \quad \text{με } \alpha \neq 0$$

α) Να εκφράσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + \varepsilon\varphi x$$

ως συνάρτηση του α.

β) Επιπλέον είναι $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ και υπάρχουν γωνίες θ και ω τέτοιες, ώστε:

$$\frac{\eta\mu\theta + 3}{2\alpha} = \frac{3\eta\mu\omega + 5}{\alpha} = 1$$

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

ii) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.

26. Δίνεται γωνία ω, με $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$, και η συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha x^5 + x^3 \cdot \eta\mu^2\omega + x \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega$$

για την οποία ισχύει:

$$f(2) = 98 + 6\varepsilon\varphi^2\omega - 6\eta\mu^2\omega \cdot \varepsilon\varphi^2\omega$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Για οποιαδήποτε γωνία $\theta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$|f(\eta\mu\theta)| \le 4$$

8ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 3.3 Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

α) -60° β) $-\frac{\pi}{6}$ rad

2. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

α) 135° β) $\frac{5\pi}{6}$ rad

3. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

α) 210° β) $\frac{4\pi}{3}$ rad

4. Αν δίνεται ότι $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 75°.

5. Να εκφράσετε με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας ω τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

α) $\frac{\pi}{2}+\omega$ β) $\frac{3\pi}{2}-\omega$ γ) $\frac{3\pi}{2}+\omega$

6. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu(\omega-\pi) + \sigma\upsilon\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)$$

7. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α) $\eta\mu\frac{29\pi}{6}$ β) $\sigma\upsilon\frac{22\pi}{3}$ γ) $\varepsilon\varphi\frac{31\pi}{4}$

8. Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \frac{\eta\mu(24\pi-\theta)\cdot\sigma\upsilon(37\pi-\theta)\cdot\varepsilon\varphi(15\pi+\theta)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2}-\theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{17\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\left(\frac{23\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{27\pi}{2}+\theta\right)\cdot\varepsilon\varphi(\theta-12\pi)}$$

9. Για τις επιτρεπόμενες τιμές του ω να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \varepsilon\varphi(50^\circ+\omega)\cdot\sigma\varphi(130^\circ-\omega)$ β) $B = \eta\mu^2\left(\frac{5\pi}{6}-\omega\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{3}-\omega\right)$

10. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

α) $\eta\mu A = \eta\mu(B+\Gamma)$ β) $\sigma\upsilon\frac{A}{2} = \eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}$

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Υπολογιστικές ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

α) $960°$ **β)** $870°$ **γ)** $2115°$ **δ)** $1770°$

2. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

α) $\frac{19\pi}{6}$ **β)** $\frac{27\pi}{4}$ **γ)** $\frac{17\pi}{3}$ **δ)** $\frac{67\pi}{6}$

3. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $$A=\frac{\eta\mu\frac{5\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}\cdot\varepsilon\varphi\frac{4\pi}{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}}{\eta\mu\frac{2\pi}{3}\cdot\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4}\cdot\sigma\varphi\frac{5\pi}{6}\cdot\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$

β) $$B=\frac{\eta\mu150°+\sigma\upsilon\nu120°+\sigma\varphi240°}{\sigma\upsilon\nu(-45°)+\eta\mu225°+\eta\mu120°+\varepsilon\varphi150°}$$

4. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $$A=\frac{\eta\mu\frac{19\pi}{6}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{27\pi}{4}\cdot\varepsilon\varphi\frac{17\pi}{3}}{\sigma\varphi\frac{20\pi}{3}\cdot\eta\mu\frac{37\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{46\pi}{3}}$$

β) $$B=\frac{2\eta\mu\frac{31\pi}{6}+\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{35\pi}{4}-2\sigma\upsilon\nu\frac{23\pi}{3}}{\sigma\varphi\frac{39\pi}{4}+\sqrt{3}\cdot\varepsilon\varphi\frac{53\pi}{6}-2\sigma\upsilon\nu\frac{34\pi}{3}}$$

5. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A=\eta\mu20°+\sigma\upsilon\nu80°+\sigma\upsilon\nu100°+\eta\mu200°$

β) $$B=\frac{\eta\mu10°-\eta\mu320°}{\eta\mu220°-\sigma\upsilon\nu80°}$$

γ) $$\Gamma=\frac{\eta\mu130°}{\eta\mu40°}+\sigma\varphi140°+\varepsilon\varphi160°\cdot\varepsilon\varphi110°$$

δ) $\Delta=\eta\mu20°\cdot\eta\mu160°-\sigma\upsilon\nu200°\cdot\eta\mu70°$

6. Δίνεται ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Να υπολογίσετε:

α) τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{\pi}{5}$,

β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

i) $\frac{4\pi}{5}$ **ii)** $\frac{6\pi}{5}$ **iii)** $\frac{84\pi}{5}$

Β. Υπολογισμός παραστάσεων με μεταβλητές

7. Για όλες τις επιτρεπόμενες τιμές του x να αποδείξετε ότι οι παρακάτω παραστάσεις έχουν σταθερή τιμή.

α) $$\frac{\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2}-x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{27\pi}{2}+x\right)}{\eta\mu\left(\frac{17\pi}{2}+x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{23\pi}{2}-x\right)}$$

β) $$\eta\mu(5\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)+$$
$$+\sigma\upsilon\nu(6\pi-x)\cdot\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2}+x\right)$$

8. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $$\frac{\eta\mu\left(\frac{41\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{35\pi}{2}+\theta\right)\cdot\varepsilon\varphi(21\pi-\theta)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{25\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu(33\pi+\theta)}$$

β) $$\frac{\eta\mu\left(\frac{49\pi}{2}+\omega\right)\cdot\sigma\upsilon\nu(16\pi-\omega)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{13\pi}{2}+\omega\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{39\pi}{2}-\omega\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{65\pi}{2}-\omega\right)\cdot\sigma\varphi(-\omega-28\pi)}$$

9. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

β) $\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)$

γ) $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{8}-\theta\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{7\pi}{8}+\theta\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{8}+\theta\right)$

10. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\frac{\eta\mu(70°-x)}{\eta\mu(20°+x)}+\varepsilon\varphi(290°+x)$

β) $\eta\mu^2(40°-x)-\varepsilon\varphi(25°-x)\cdot\varepsilon\varphi(115°-x)+$
$+\eta\mu^2(x+50°)$

11. Για τις επιτρεπόμενες τιμές του x να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$A=\eta\mu(\pi-x)-\frac{\sigma\upsilon\nu(25\pi-x)\cdot\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2}+x\right)}{1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{23\pi}{2}-x\right)}$$

έχει σταθερή τιμή.

Γ. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών τριγώνου

12. Αν $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι γωνίες τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων:

α) $K=\sigma\upsilon\nu A\cdot\varepsilon\varphi(B+\Gamma)+\eta\mu(B+\Gamma)$

β) $$\Lambda=\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\cdot\sigma\varphi\frac{B+\Gamma}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}$$

γ) $M=\eta\mu A\cdot\eta\mu(B+\Gamma)-\sigma\upsilon\nu A\cdot\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)$

δ) $$N=\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}$$

13. Αν $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι γωνίες τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) $\eta\mu(A+2B+\Gamma)+\eta\mu B=0$

β) $\sigma\upsilon\nu(2A+B+\Gamma)-\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)=0$

γ) $\eta\mu(2A+2B+\Gamma)+\eta\mu\Gamma=0$

δ) $$\sigma\upsilon\nu\frac{A+B+2\Gamma}{2}+\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=0$$

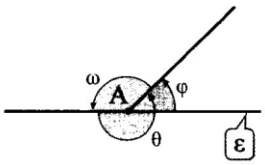
14. Αν $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι γωνίες τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) $\text{συν}\dfrac{3A+B+\Gamma}{2}+\eta\mu A=0$

β) $\eta\mu\dfrac{A+B-\Gamma}{2}-\text{συν}\Gamma=0$

Δ. Συνδυαστικά θέματα

15. Δίνεται $\eta\mu\varphi=\dfrac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της ευθείας ε του διπλανού σχήματος. Να βρείτε:



α) το συνημίτονο της γωνίας φ,

β) το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών θ και ω του σχήματος. ***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

16. Δίνεται γωνία x, με $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$, για την οποία ισχύει:

$$15\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)\cdot\text{συν}(7\pi-x)-4\text{συν}\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)=12$$

Να υπολογίσετε:

α) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x,

β) την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{\text{συν}\left(\frac{15\pi}{2}+x\right)+2\text{συν}(17\pi+x)}{3\varepsilon\varphi\left(\frac{11\pi}{2}-x\right)+4\sigma\varphi\left(x-\frac{17\pi}{2}\right)}$$

17. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{\eta\mu\omega}{1+\text{συν}\omega}+\frac{\eta\mu\omega}{1-\text{συν}\omega}=\frac{2}{\eta\mu\omega}$$

β) Αν ισχύει ότι $\eta\mu\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, να υπολογίσετε το $\text{συν}\dfrac{\pi}{8}$.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\eta\mu\frac{\pi}{8}}{1+\text{συν}\frac{\pi}{8}}+\frac{\eta\mu\frac{\pi}{8}}{1-\text{συν}\frac{\pi}{8}}\right)\cdot\left(\frac{\eta\mu\frac{3\pi}{8}}{1+\text{συν}\frac{3\pi}{8}}+\frac{\eta\mu\frac{3\pi}{8}}{1-\text{συν}\frac{3\pi}{8}}\right)=8\sqrt{2}$$

18. Δίνεται γωνία x για την οποία ισχύει ότι:

$$\text{συν}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}$$

α) Να βρείτε:

i) τα $\text{συν}\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$ και $\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$,

ii) το $\eta\mu\left(\dfrac{41\pi}{2}\cdot\text{συν}\left(\dfrac{14\pi}{3}+x\right)+x\right)$.

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $|12x-7\pi|<3\pi$, να βρείτε το $\text{συν}\left(\dfrac{5\pi}{6}-x\right)$.

9ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
α) $f(x) = -\eta\mu x$ β) $g(x) = -\sigma\upsilon\nu x$

2. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:
$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x + 2$$

3. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
α) $f_1(x) = 2\eta\mu x$ και $f_2(x) = \eta\mu x$ για $0 \le x \le 2\pi$
β) $g_1(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$ και $g_2(x) = \sigma\upsilon\nu x$ για $0 \le x \le 2\pi$
γ) $h_1(x) = 3\eta\mu 2x$ και $h_2(x) = \eta\mu x$ για $0 \le x \le 2\pi$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 + 2\eta\mu 3x$.
α) Να βρείτε την περίοδο της f.
β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \le x \le 2\pi$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sigma\upsilon\nu(2x)$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.
α) Να βρείτε από ποια μετατόπιση της C_f προκύπτει η C_g.
β) Να σχεδιάσετε τις C_f και C_g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την περίοδο και να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
α) $f(x) = \varepsilon\varphi 2x$ β) $g(x) = \sigma\varphi\frac{x}{2}$

7. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha + \beta \cdot \eta\mu(\omega x)$, με $\beta > 0$, έχει περίοδο 4π, μέγιστη τιμή το 5 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{7}{2}\right)$.
α) Να βρείτε τους αριθμούς ω, α και β.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \le x \le 4\pi$.

8. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 8x + |\sigma\upsilon\nu 6x|$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{\pi}{2}$.

9. Να εξετάσετε αν καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτια ή περιττή:
α) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x$ β) $g(x) = \varepsilon\varphi x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

10. α) Αν ισχύει $\frac{\pi}{4} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:
$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4} + x_1\right) \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4} + x_2\right)$$
β) Αν $x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]$, να λύσετε την ανίσωση $\sigma\upsilon\nu 4x < \sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Περίοδος – Συμμετρίες – Μονοτονία

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

α) $f(x) = \eta\mu 2x + \varepsilon\varphi x$ έχει περίοδο $T = \pi$

β) $f(x) = 2\eta\mu 8x - 3\sigma\upsilon\nu 4x$ έχει περίοδο $T = \frac{\pi}{2}$

2. Να εξετάσετε αν καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτια ή περιττή:

α) $f(x) = 2\eta\mu x - \varepsilon\varphi x$

β) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - |x|$

γ) $f(x) = \frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x}{3 + \sigma\upsilon\nu x}$

δ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - |\eta\mu x|$

ε) $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

στ) $f(x) = \eta\mu x - \varepsilon\varphi x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

3. α) Να γράψετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ όταν $x \in [0, 2\pi]$.

β) Να συγκρίνετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς που ακολουθούν:

i) $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}$

ii) $\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{10}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{9\pi}{10}$

iii) $\sigma\upsilon\nu\frac{13\pi}{12}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{12}$

iv) $\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{9\pi}{5}$

4. α) Να γράψετε τη μονοτονία της συνάρτησης:

$f(x) = \eta\mu x$ όταν $x \in [0, 2\pi]$

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i) $\eta\mu\frac{\pi}{5}$ και $\eta\mu\frac{29\pi}{7}$

ii) $\eta\mu\frac{7\pi}{12}$ και $\eta\mu\frac{35\pi}{12}$

iii) $\eta\mu\frac{6\pi}{5}$ και $\eta\mu\frac{73\pi}{10}$

iv) $\eta\mu\frac{7\pi}{4}$ και $\eta\mu\frac{31\pi}{8}$

5. α) Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}, \quad \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10}$$

β) Αν $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) \quad \text{και} \quad \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

6. Αν ισχύει $\frac{\pi}{8} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{4}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $\eta\mu 4x_1$ και $\eta\mu 4x_2$

β) $\sigma\upsilon\nu 4x_1$ και $\sigma\upsilon\nu 4x_2$

γ) $\varepsilon\varphi\frac{\pi - 2x_1}{2}$ και $\varepsilon\varphi\frac{\pi - 2x_2}{2}$

δ) $\sigma\varphi\frac{\pi - 4x_1}{2}$ και $\sigma\varphi\frac{\pi - 4x_2}{2}$

Β. Συναρτήσεις της μορφής f(x)=ρημ(ωx)+c

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4\eta\mu 2x$.

α) Να βρείτε την περίοδο T, τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $0 \le x \le 2\pi$.

8. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f;

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μίας περιόδου.

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

9. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μίας περιόδου.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$\sigma\upsilon\nu 2x$					
$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$					

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2\eta\mu\frac{x}{2}$.

α) Να βρείτε την περίοδο T, τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $0 \le x \le 4\pi$.

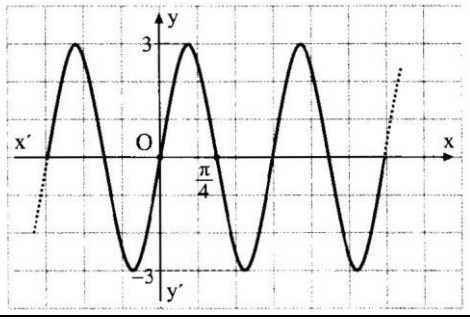
11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu 2x - 3$.

α) Να βρείτε την περίοδο T, τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f.

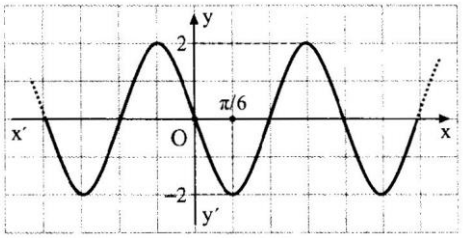
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $-\pi \le x \le 2\pi$.

12. Να βρείτε τις εξισώσεις των επόμενων ημιτονοειδών καμπυλών:

α)



β)



13. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 2\eta\mu x \quad \text{και} \quad g(x) = 2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$$

α) Να βρείτε από ποιες μετατοπίσεις της C_f έχει προκύψει η C_g.

β) Να σχεδιάσετε τη C_g.

14. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x) = |\eta\mu x|$ **β)** $g(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$

15. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

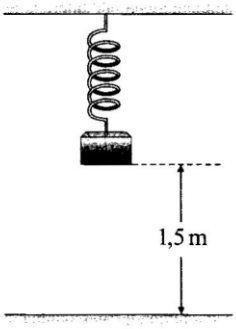
$$f(x) = \eta\mu|x|$$

Γ. Προβλήματα

16. Ένα σώμα κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι και απέχει από το έδαφος 1,5 m. Όταν το σώμα αρχίζει να εκτελεί ταλάντωση (να ανεβοκατεβαίνει), το ύψος του (σε m) από το πάτωμα είναι:

$$h(t) = 1{,}5 + 0{,}5 \cdot \eta\mu 2t$$

όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.



α) Να βρείτε τη διαφορά ανάμεσα στο μέγιστο και στο ελάχιστο ύψος.

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ύψους h για $0 \le t \le 2\pi$.

17. Ένα σώμα κινείται σε άξονα και η θέση του πάνω σε αυτόν τη χρονική στιγμή t (σε δευτερόλεπτα) δίνεται από τη συνάρτηση:

$$x(t) = 5\eta\mu\frac{\pi t}{2} \quad \text{με } t \ge 0$$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης x(t).

β) Να βρείτε πόσο απέχουν οι θέσεις που βρίσκεται το σώμα τις χρονικές στιγμές $\frac{11}{3}$ s και $\frac{25}{3}$ s.

γ) Να αποδείξετε ότι τις χρονικές στιγμές t_0 και $t_0 + 4$ το σώμα βρίσκεται στην ίδια θέση.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης x(t) για $t \in [0, 8]$.

Δ. Προσδιορισμός παραμέτρων

18. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu(\omega x)$ έχει περίοδο $T = 6\pi$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς ω και α.

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μίας περιόδου.

19. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha - 3\sigma\upsilon\nu(\beta x)$ έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{3}$ και ισχύει ότι $f\left(\frac{17\pi}{9}\right) + f\left(\frac{26\pi}{9}\right) = 8$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

20. Η συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha \cdot \eta\mu\frac{x}{2} + \beta \quad \text{με } \alpha > 0$$

έχει μέγιστη τιμή 2 και ελάχιστη τιμή -4.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

β) Να βρείτε την περίοδο της f.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f για $-4\pi \le x \le 4\pi$.

21. Η συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega x) \quad \text{με } \beta < 0$$

έχει περίοδο $T = \pi$, μέγιστη τιμή 5 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς ω, α και β.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f για $-\pi \le x \le 2\pi$.

Ε. Συνδυαστικά θέματα

22. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 2\eta\mu 3x$$

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. ***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

23. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{10\pi - x}{2}\right) + 3\eta\mu\left(\frac{13\pi + x}{2}\right)$$

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

β) Να βρείτε την περίοδο T, τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f για $-4\pi \le x \le 4\pi$.

24. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \eta\mu(11\pi - 3x) - \sigma\upsilon\nu\left(3\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)\right) + \beta$$

διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{35\pi}{18}, 2\right)$.

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε τον αριθμό β.

γ) Να βρείτε την περίοδο T, τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \le x \le 2\pi$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$3f(x) + f(-x) = 4\eta\mu 3x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \le x \le 2\pi$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f: \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = 8x^3 + 2\eta\mu\frac{\pi x}{3}$$

α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 2$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = 3\sigma\upsilon\nu x - 2x^2$$

α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

β) Να βρείτε τη μονοτονία της f σε καθένα από τα διαστήματα $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο το 3.

δ) Αν ισχύει ότι $0 \le \alpha < \beta \le \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\beta^2 - \alpha^2} < \frac{2}{3}$$

28. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x + \alpha, & \text{αν } -5 \le x < -2 \\ \sigma\upsilon\nu(\pi x), & \text{αν } -2 \le x \le 2 \\ -x + 3, & \text{αν } 2 < x \le 5 \end{cases}$$

Τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες -4 και -1 έχουν την ίδια τεταγμένη.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

γ) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

δ) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

29. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}, \hat{\Gamma} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ισχύουν τα εξής:

$$\eta\mu B - \sigma\upsilon\nu B = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{και}$$

$$9\sigma\phi\Gamma - 2\epsilon\phi\Gamma = 3$$

α) Να βρείτε την εφΒ και την εφΓ.

β) Να συγκρίνετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\frac{\pi}{4}$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{\pi}{2}$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το 1 και μέγιστο το $\sqrt{2}$.

31. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = |\eta\mu x| - \eta\mu x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει περίοδο 2π.

β) Να βρείτε την τιμή $f\left(\frac{43\pi}{6}\right)$.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

δ) Αν $0 \le x \le 2\pi$, να γράψετε τον τύπο της f χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

ε) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \le x \le 4\pi$.

$10^{ο}$ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 3.5 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ β) $3\eta\mu x - 5 = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ β) $3\sigma\upsilon\nu x + 4 = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\varepsilon\varphi x = 1$ β) $\sqrt{3} \cdot \sigma\varphi x - 1 = 0$

4. Να βρείτε τις λύσεις των εξισώσεων:

α) $\eta\mu x = 0$ β) $\sigma\upsilon\nu x = 0$ γ) $\eta\mu x = 1$

δ) $\sigma\upsilon\nu x = 1$ ε) $\eta\mu x = -1$ στ) $\sigma\upsilon\nu x = -1$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $6\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$ β) $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\varepsilon\varphi 3x = \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ β) $\sigma\varphi 2x - \sigma\varphi\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ β) $\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

γ) $\sigma\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\varphi x = 0$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ β) $\varepsilon\varphi 2x - \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$

9. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0$$

10. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 = 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

11. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu x \cdot \varepsilon\varphi x = 1 + \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

12. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu x - \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$$

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $4\sigma\upsilon\nu^2 x + 8\eta\mu x - 7 = 0$

β) $\sqrt{3} \cdot \eta\mu^2 x + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = 0$

14. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Εξισώσεις για εμπέδωση

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ β) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

γ) $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$ δ) $\sigma\varphi x = 1$

ε) $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ στ) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ζ) $\varepsilon\varphi x = -1$ η) $\sigma\varphi x = -\sqrt{3}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ β) $2\eta\mu x - 5 = 0$

γ) $2\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$ δ) $\sqrt{2}\cdot\eta\mu x - 1 = 0$

ε) $\sqrt{3}\cdot\varepsilon\varphi x + 1 = 0$ στ) $\sqrt{3}\cdot\sigma\varphi x - 3 = 0$

ζ) $\frac{4\eta\mu x + 8}{3} = 2$ η) $\frac{\sqrt{3}\cdot\sigma\varphi x + 7}{3} = 2$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu 3x = 0$ β) $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

γ) $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ δ) $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

ε) $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ στ) $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{5} - 2x\right) = -1$

4. Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν:

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και $\eta\mu(\pi - x) - \eta\mu(\pi + x) = 1$

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x = \frac{1}{2}$.

β) Να βρείτε τη γωνία x. ***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(\eta\mu x - 1)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$

β) $(2\sigma\upsilon\nu x + 1)(\varepsilon\varphi x - 1) = 0$

γ) $(\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu x + 1)(\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0$

δ) $(2\sqrt{3}\cdot\eta\mu x + 3)(2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{5}) = 0$

6. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

β) $\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

γ) $\varepsilon\varphi\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) + \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

δ) $\sigma\varphi\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sigma\varphi\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$

β) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sigma\varphi\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

γ) $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0$

δ) $\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

ε) $\varepsilon\varphi\left(\frac{7\pi}{10} - 2x\right) + \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{5} + x\right) = 0$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu x + \varepsilon\varphi\frac{3\pi}{8}\cdot\sigma\upsilon\nu x = 0$

β) $\sigma\upsilon\nu x - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{5}\cdot\eta\mu x = 0$

9. Να λύσετε καθεμία από τις επόμενες εξισώσεις στο διάστημα που δίνεται:

α) $2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ στο $(0, 2\pi)$

β) $2\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$ στο $(-\pi, \pi)$

γ) $\sqrt{3}\cdot\varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ στο $(-\pi, 2\pi)$

δ) $\sqrt{3}\cdot\sigma\varphi\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$ στο $(0, 2\pi)$

Β. Παραγοντοποίηση – Τριγωνομετρικές ταυτότητες

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x = -\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$

β) $2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x - 1 = \sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x$

γ) $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x\cdot\varepsilon\varphi x - 1 = \eta\mu x - \sqrt{3}\cdot\varepsilon\varphi x$

δ) $\sigma\varphi x\cdot\sigma\upsilon\nu x + 1 = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\varphi x$

ε) $2\sqrt{3}\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x - 6\sigma\upsilon\nu x = 3 - \sqrt{3}\cdot\eta\mu x$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu^2 x = \eta\mu^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

β) $\eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 3x$

γ) $\eta\mu^3 x = \eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x$

δ) $2(1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x) + \eta\mu x = 0$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $8\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x - 3 = 0$ στο $(0, \pi)$

β) $6\sigma\upsilon\nu^2 x + \sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x - 3 = 0$ στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3\varepsilon\varphi x = 2\sqrt{3}\cdot\eta\mu x$ β) $2\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\varphi x = 3$

γ) $\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu x - \sigma\varphi x = 0$ δ) $\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x = \varepsilon\varphi x$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu x - \varepsilon\varphi x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

β) $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x} - \varepsilon\varphi x = 2$

γ) $\frac{1}{\eta\mu^2 x} + 2\sqrt{3}\cdot\sigma\varphi x + 2 = 0$

δ) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\upsilon\nu x = \varepsilon\varphi x$

ε) $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$

15. Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \quad \text{με } x \neq 2\kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbf{Z}$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1 + \sigma\upsilon\nu x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{2}$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$. ***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

16. **α)** Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{2}{\eta\mu x}$$

όπου $x \neq \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbf{Z}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

17. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\eta\mu^2 x-3|\eta\mu x|+1=0$

β) $\varepsilon\varphi^4 x-4\varepsilon\varphi^2 x+3=0$

γ) $2\eta\mu^2 x-|\sigma\upsilon\nu x|-1=0$

δ) $3\varepsilon\varphi^2 x-\sigma\varphi^2 x+2=0$

18. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{3}\cdot\eta\mu^2 x-2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x=0$

β) $\eta\mu^3 x+\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x-3\sigma\upsilon\nu^3 x=0$

γ) $2\eta\mu^2 x+(1-\sqrt{3})\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+(1-\sqrt{3})\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x=1$

δ) $2\eta\mu^2 x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=1$

ε) $2\eta\mu^2 x-\sqrt{12}\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+4\sigma\upsilon\nu^2 x=1$

στ) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\varepsilon\varphi x=2$

Γ. Σύνθετες εξισώσεις

19. Να λύσετε την εξίσωση:

$$|\sigma\upsilon\nu x-1|-|5\sigma\upsilon\nu x+5|=-1$$

20. Αν ισχύει ότι:

$$\eta\mu\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

α) να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}$,

β) να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu x=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

21. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{3\pi}{8}\right)+3\eta\mu\left(\frac{\pi}{8}-x\right)=-2$

β) $\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)+\eta\mu\left(\frac{4\pi}{5}-2x\right)=-1$

22. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu^2 x=-2$$

23. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+\varepsilon\varphi x=\frac{1}{\eta\mu x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}+\sigma\varphi x$$

24. Να λύσετε την εξίσωση:

$$3\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x-\varepsilon\varphi x=0$$

25. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^4 x=1$$

Δ. Συνδυαστικά θέματα

26. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=2\eta\mu x+1,\quad x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

β) Για ποια τιμή του $x\in[0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή; ***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

27. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{\eta\mu^2 x+\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1+\sqrt{3}$.

28. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{1+\sigma\varphi x}{1+\varepsilon\varphi x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^2(x)=\sqrt{3}\cdot f(x)$$

29. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=(\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x)(\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x)^2$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\varepsilon\varphi^2 x+\sigma\varphi^2 x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή το 2 και να βρείτε για ποια x η f παίρνει την τιμή αυτή.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x-1=2\sigma\upsilon\nu x-f(x)$$

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{20\pi}{3}, \frac{10}{3}\right)$, να βρείτε τον αριθμό α.

γ) Για την τιμή του α που βρήκατε:

i) να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή,

ii) να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\alpha$.

31. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(t)=-2\eta\mu\frac{\pi t}{2}+2,\quad t\in[0, 4]$$

α) Να βρείτε την περίοδο της f.

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της, καθώς και τις τιμές του t για τις οποίες η f παίρνει τις τιμές αυτές.

γ) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της f.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

32. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=3\sigma\upsilon\nu\left(\frac{21\pi}{2}-4x\right)+\eta\mu(21\pi+4x)\quad\text{και}$$

$$g(x) = \eta\mu\left(\frac{37\pi}{2} + 2x\right) - \sigma\upsilon\nu(37\pi - 2x)$$

α) Να απλοποιήσετε τους τύπους των συναρτήσεων f και g.

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της f, καθώς και για ποια x παίρνει την τιμή αυτή.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της g, καθώς και για ποια x παίρνει την τιμή αυτή.

δ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f και g στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

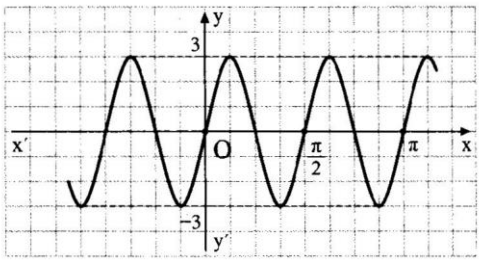
ε) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + g(x) = 0$$

33. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \alpha \cdot \eta\mu(\omega x)$$

με παραμέτρους $\alpha, \omega > 0$.



Να βρείτε:

α) την περίοδο της συνάρτησης f,

β) τους αριθμούς α και ω,

γ) τους αριθμούς $\kappa \in \mathbb{R}$ για τους οποίους η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση αυτή. ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

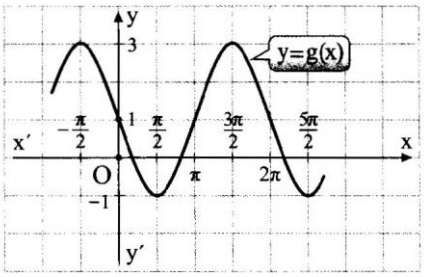
34. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\eta\mu 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε την περίοδο Τ και τη μέγιστη τιμή της f.

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$g(x) = \alpha \cdot \eta\mu(\beta x) + \gamma, \quad x \in \mathbb{R}$$



i) Να προσδιορίσετε τα α, β, γ.

ii) Για $\alpha = -2$, $\beta = 1$ και $\gamma = 1$ να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi)$. ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

35. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = |\alpha + 1| \cdot \eta\mu(\beta\pi x)$$

με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta > 0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή 3 και περίοδο 4.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha = 2 \ \text{ή} \ \alpha = -4) \quad \text{και} \quad \beta = \frac{1}{2}$$

β) Για $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$:

i) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$,

ii) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 8]$. ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

36. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)x + 4\eta\mu\omega + 2\sigma\upsilon\nu\omega - 3 = 0 \quad (1)$$

με άγνωστο τον x.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για οποιαδήποτε τιμή του ω.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του ω ισχύει ότι:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{5}{x_1 x_2} = 1$$

37. Η θερμοκρασία μιας περιοχής, σε βαθμούς Κελσίου (°C), κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12} + 4 \quad \text{με } 0 \le t \le 24$$

(t ο χρόνος σε ώρες).

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετραώρου.

β) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με 0 °C.

γ) Να παραστήσετε γραφικά την f για $t \in [0, 24]$.

δ) Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, πότε η θερμοκρασία είναι πάνω από 0 °C. ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

38. Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματος τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t s δίνεται από τη συνάρτηση:

$$h(t) = 8 + 6\eta\mu\frac{\pi t}{30}, \quad 0 \le t \le 180$$

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.

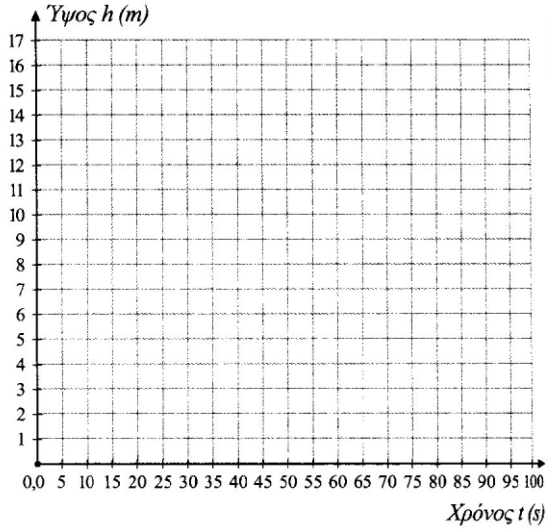
γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή τον χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μία περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 s;

δ) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

i) να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους h(t):

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)							

ii) να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \leq t \leq 90$.



(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

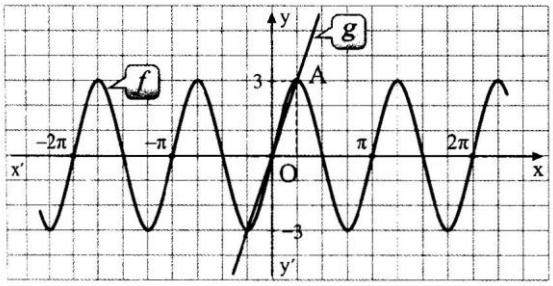
39. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$g(x) = \alpha x + \beta$$

όπου α και β πραγματικοί αριθμοί, και της συνάρτησης:

$$f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$$

όπου $\omega > 0$ και $\rho > 0$. Και οι δύο συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Επίσης η f έχει μέγιστο 3.



α) Να αποδείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$.

β) Να βρείτε τα α και β.

γ) Να βρείτε γραφικά το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$3\eta\mu 2x - \frac{12x}{\pi} = 0$$

στο διάστημα $[0, \pi]$. ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

40. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\alpha}{1+\eta\mu x} + \frac{\beta}{1-\eta\mu x} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

για την οποία ισχύει $f\left(-\frac{\pi}{7}\right) = f\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha = \beta$, **ii)** η f είναι άρτια,

iii) η f είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.

γ) Αν ισχύει ότι $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$,

ii) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4$.

11^{ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 3.6 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α) $\eta\mu 105^\circ$ β) $\varepsilon\varphi 825^\circ$ γ) $\sigma\upsilon\nu 15^\circ$

2. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \sigma\upsilon\nu 50^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 20^\circ + \eta\mu 50^\circ \cdot \eta\mu 20^\circ$

β) $B = \dfrac{\varepsilon\varphi 80^\circ + \varepsilon\varphi 160^\circ}{1 + \sigma\varphi 10^\circ \cdot \varepsilon\varphi 20^\circ}$

3. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \eta\mu\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

4. Δίνονται οι γωνίες α και β, με $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ και $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, για τις οποίες ισχύει $\eta\mu\alpha = \frac{4}{5}$ και $\varepsilon\varphi\beta = \frac{5}{12}$. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\alpha - \beta$.

5. Δίνονται γωνίες $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{2}$, $\varepsilon\varphi\beta = \frac{1}{4}$ και $\varepsilon\varphi\gamma = \frac{1}{13}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha < \frac{\pi}{4}$ β) $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$

6. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta} = 2\varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta$.

7. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi(\alpha - \beta) = \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta - \varepsilon\varphi(\alpha - \beta)$.

8. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu(\alpha + \beta) \cdot \eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta} + \frac{\eta\mu(\beta + \gamma) \cdot \eta\mu(\beta - \gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma + \alpha) \cdot \eta\mu(\gamma - \alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma + \sigma\upsilon\nu\alpha} = 0$$

9. Αν ισχύει $\eta\mu(\alpha - \beta) = 0$, να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha - 2\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha$.

10. Δίνονται γωνίες $\alpha, \beta, \gamma \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, για τις οποίες ισχύει ότι $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\gamma = \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma$.

11. Σε κάθε μη ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma} = \varepsilon\varphi B \cdot \varepsilon\varphi\Gamma - 1$

β) $\varepsilon\varphi\frac{A}{2} \cdot \varepsilon\varphi\frac{B}{2} + \varepsilon\varphi\frac{B}{2} \cdot \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} + \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} \cdot \varepsilon\varphi\frac{A}{2} = 1$

12. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)-\sigma\upsilon\nu A}{2\eta\mu B}=\eta\mu\Gamma$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ.

13. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3}{2}$$

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Υπολογιστικές ασκήσεις

1. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\eta\mu 15^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 75^\circ + \sigma\upsilon\nu 15^\circ \cdot \eta\mu 75^\circ$

β) $\eta\mu 245^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 20^\circ - \sigma\upsilon\nu 245^\circ \cdot \eta\mu 20^\circ$

γ) $\dfrac{\varepsilon\varphi 70^\circ - \varepsilon\varphi 40^\circ}{1 + \varepsilon\varphi 70^\circ \cdot \varepsilon\varphi 40^\circ}$ δ) $\dfrac{\varepsilon\varphi 100^\circ + \varepsilon\varphi 20^\circ}{1 - \varepsilon\varphi 100^\circ \cdot \varepsilon\varphi 20^\circ}$

2. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \eta\mu\dfrac{3\pi}{20} \cdot \eta\mu\dfrac{9\pi}{10} + \sigma\upsilon\nu\dfrac{17\pi}{20} \cdot \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{10}$

β) $B = \eta\mu\dfrac{5\pi}{18} \cdot \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{18} + \sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{18} \cdot \sigma\upsilon\nu\dfrac{4\pi}{9}$

γ) $\Gamma = \dfrac{\varepsilon\varphi\dfrac{4\pi}{5} - \sigma\varphi\dfrac{11\pi}{30}}{1 - \varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{5} \cdot \varepsilon\varphi\dfrac{2\pi}{15}}$

Β. Απλοποίηση παραστάσεων

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{7} - x\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{6\pi}{7} - 2x\right)}{1 - \varepsilon\varphi\left(\frac{6\pi}{7} + x\right) \cdot \varepsilon\varphi\left(2x - \frac{6\pi}{7}\right)}$

β) $B = \eta\mu\left(\dfrac{5\pi}{6} + x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + + \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right)$

5. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - - \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$$

και:

$$B = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu x$$

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

β) Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης Β είναι σταθερή.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι $A = B$.

Γ. Υπολογισμοί τριγωνομετρικών αριθμών

6. Δίνονται γωνίες α και β, με $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ και $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$, για τις οποίες ισχύει $\eta\mu\alpha = \dfrac{5}{13}$ και $\varepsilon\varphi\beta = \dfrac{3}{4}$. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\alpha + \beta$.

7. Για τις γωνίες α και β ισχύει:

$$\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = 1 \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\alpha = \frac{2}{3}$$

Να βρείτε:

α) την $\varepsilon\varphi\beta$, β) την $\varepsilon\varphi(\alpha - \beta)$,

γ) τη $\sigma\varphi\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right)$.

8. Δίνονται γωνίες α και β, με $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ και $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$, για τις οποίες ισχύει:

$$\eta\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \eta\mu\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{5}$$

και:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{5}$$

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α) $\eta\mu\alpha$ και $\eta\mu\beta$, β) $\eta\mu\left(\alpha + \beta + \dfrac{\pi}{3}\right)$,

γ) $\sigma\upsilon\nu\left(\alpha - \beta - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Δ. Απόδειξη τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

9. Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)}{\eta\mu(\alpha+\beta) - \eta\mu(\alpha-\beta)} = \sigma\varphi\beta$

β) $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$

γ) $\dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\eta\mu(\alpha-\beta)} = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}$

δ) $\dfrac{2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) + 2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta} = \varepsilon\varphi(\alpha-\beta)$

ε) $\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta}$

στ) $\eta\mu(\alpha+\beta) - \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta}$

10. Να αποδείξετε ότι:

α) $\eta\mu(\alpha+\beta) \cdot \eta\mu(\alpha-\beta) + \eta\mu(\beta+\gamma) \cdot \eta\mu(\beta-\gamma) + + \eta\mu(\gamma+\alpha) \cdot \eta\mu(\gamma-\alpha) = 0$

β) $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) \cdot \eta\mu(\alpha-\beta) + \sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma) \cdot \eta\mu(\beta-\gamma) + + \sigma\upsilon\nu(\gamma+\alpha) \cdot \eta\mu(\gamma-\alpha) = 0$

γ) $\dfrac{1 + \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}{\sigma\varphi(\alpha-\beta)} + \dfrac{1 + \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma}{\sigma\varphi(\beta-\gamma)} + + \dfrac{1 + \varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi\alpha}{\sigma\varphi(\gamma-\alpha)} = 0$

Ε. Τριγωνομετρικές ταυτότητες με συνθήκη

11. Αν για τις γωνίες $\alpha, \beta \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbf{Z}$, ισχύει $\eta\mu(\alpha+\beta) = 2\eta\mu(\alpha-\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α) $\varepsilon\varphi\alpha = 3\varepsilon\varphi\beta$

β) $\dfrac{\varepsilon\varphi\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) - \varepsilon\varphi\left(\beta - \frac{4\pi}{5}\right)}{1 + \varepsilon\varphi\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) \cdot \varepsilon\varphi\left(\beta - \frac{4\pi}{5}\right)} = \dfrac{2\varepsilon\varphi\beta}{1 + 3\varepsilon\varphi^2\beta}$

12. Αν ισχύει $x + y = \dfrac{3\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι:

α) $(1 + \varepsilon\varphi x)(1 + \varepsilon\varphi y) = 2\varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi y$

β) $\dfrac{1 - \sigma\varphi x}{\sigma\varphi x} \cdot \dfrac{1 - \sigma\varphi y}{\sigma\varphi y} = 2$

Ζ. Προσδιορισμός γωνίας

13. Δίνονται δύο γωνίες $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ για τις οποίες ισχύουν:

$$\sigma\upsilon\nu\beta \neq \eta\mu\alpha \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha}$$

Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

14. Δίνονται γωνίες $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιες, ώστε οι εφα και εφβ να είναι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{6})x - \sqrt{2} = 0$$

Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$.

Η. Γωνίες τριγώνου

15. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$2\eta\mu B \cdot \eta\mu\Gamma - \sigma\upsilon\nu A = 1$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΒΓ.

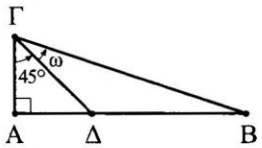
16. Σε κάθε μη ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\eta\mu(B-\Gamma) + \eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) - \sigma\upsilon\nu A} = \varepsilon\varphi B$

β) $\frac{\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) - \sigma\upsilon\nu A} = \varepsilon\varphi B \cdot \varepsilon\varphi\Gamma$

Θ. Ασκήσεις με σχήματα

17. Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος.



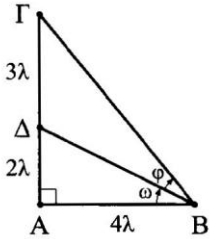
Είναι $\hat{A} = 90°$ και παίρνουμε σημείο Δ της πλευράς ΑΒ, ώστε $\widehat{A\Gamma\Delta} = 45°$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\gamma - \beta}{\gamma + \beta}$$

β) Αν ισχύει $\gamma = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \beta$, να βρείτε τη γωνία ω.

18. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $\hat{A} = 90°$, $AB = 4\lambda$, $A\Delta = 2\lambda$ και $\Delta\Gamma = 3\lambda$.



α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\varepsilon\varphi\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x = \frac{11}{13}$$

β) Να συγκρίνετε τις γωνίες ω και φ.

Ι. Εξισώσεις για εμπέδωση

19. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\eta\mu x$

β) $3\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$

20. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sigma\upsilon\nu x = 0$$

στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

21. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \eta\mu x = 3\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

β) $-\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) =$

$= \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

22. Δίνεται γωνία $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ τέτοια, ώστε:

$$\eta\mu\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

α) Να βρείτε το συνα και την εφα.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\varepsilon\varphi(x + \alpha) = 3$$

Κ. Σύνθετες εξισώσεις

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 4x + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 4x = \eta\mu 3x$

β) $\eta\mu 5x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi + 3x)$

24. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - x\right) -$

$- \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = -\frac{1}{2}$

β) $\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= 1 - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \cdot \eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

γ) $\frac{\varepsilon\varphi\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \varepsilon\varphi x}{1 - \varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)} = \sqrt{3}$

25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x - \frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu x = \frac{1}{2}$

β) $\eta\mu\frac{\pi}{5} + \varepsilon\varphi x \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5} = 1$

Λ. Συνδυαστικά θέματα

26. **α)** Να αποδείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\sigma\upsilon\nu^2 6x - \sigma\upsilon\nu^2 3x = \eta\mu^2 4x - \eta\mu^2 x$$

27. Οι πραγματικοί αριθμοί:

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^* - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$$

είναι ρίζες της εξίσωσης:

$$4x^2 - \pi x + 2x_1 x_2 \cdot \varepsilon\varphi x_1 = 0$$

α) Να βρείτε την $\varepsilon\varphi x_2$.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu(\omega + x_2) = 2\eta\mu(\omega - x_2)$$

28. **α)** Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)} = \varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta$$

β) Έστω η παράσταση:

$$A = \frac{\sigma\upsilon\nu 15^\circ - \sigma\upsilon\nu 105^\circ}{\sigma\upsilon\nu 15^\circ + \sigma\upsilon\nu 105^\circ}$$

29. **α)** Να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\eta\mu x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

β) Να βρείτε με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης:

$$f(x) = \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right), \quad x\in\mathbb{R}$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

30. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{3}\cdot\eta\mu x - \eta\mu^2 x\cdot(\sigma\upsilon\nu x - 1) - \sigma\upsilon\nu^3 x + \sigma\upsilon\nu^2 x$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$.

β) Να βρείτε την τιμή $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = 2$$

δ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f, καθώς και για ποια x παίρνει η f τις τιμές αυτές.

31. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 3 + \alpha\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+2x\right) - 2\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{12}, 4\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3 + 2\eta\mu 2x$ και να βρείτε την περίοδο της f.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f, καθώς και για ποια x παίρνει η f τις τιμές αυτές.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

12^{ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 3.7 Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{5\pi}{12} - 1$ β) $B = \eta\mu\frac{\pi}{8}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}$

2. Δίνεται γωνία α, με $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, για την οποία ισχύει $\eta\mu\alpha = \frac{4}{5}$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 2α και 4α.

3. Αν ισχύει ότι $\varepsilon\varphi\alpha = 3$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α.

4. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{\pi}{8}$.

5. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha+\eta\mu2\alpha}{\eta\mu2\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha-\eta\mu2\alpha}=\frac{\sigma\varphi\alpha+1}{2}$$

6. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{2\eta\mu\alpha-\eta\mu2\alpha}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}=\eta\mu\alpha$$

7. Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu3\alpha-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu3\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha$.

8. Αν ισχύει $\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\beta$, να αποδείξετε ότι $\eta\mu(\alpha+\beta)-\eta\mu2\beta=\frac{\eta\mu2\alpha}{4}$.

9. Σε κάθε μη ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

$$2\eta\mu^2\frac{A}{2}+\frac{\eta\mu2B\cdot\eta\mu2\Gamma}{2\sigma\upsilon\nu B\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma}=1+\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)$$

10. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu2x-1=2\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$$

11. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\sigma\upsilon\nu2x+\sigma\upsilon\nu x+2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}=1$$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=1$ β) $\eta\mu x-\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{3}$

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Υπολογιστικές ασκήσεις

1. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\left(\text{συν}\frac{3\pi}{8} - \text{ημ}\frac{3\pi}{8}\right)\left(\text{συν}\frac{3\pi}{8} + \text{ημ}\frac{3\pi}{8}\right)$

β) $\left(\text{συν}\frac{\pi}{12} + \text{ημ}\frac{\pi}{12}\right)^2$ **γ)** $\frac{\text{ημ}\frac{\pi}{12}}{\text{συν}\frac{\pi}{12}} + \frac{\text{συν}\frac{\pi}{12}}{\text{ημ}\frac{\pi}{12}}$

2. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = 2\text{ημ}75^\circ \cdot \text{συν}105^\circ$

β) $B = \text{ημ}^2\frac{5\pi}{12} - \text{ημ}^2\frac{\pi}{12}$

3. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \frac{2\text{συν}^2 55^\circ - 1}{\text{συν}80^\circ \cdot \text{συν}10^\circ + \text{ημ}80^\circ \cdot \text{ημ}10^\circ}$

β) $B = \frac{2\text{ημ}25^\circ \cdot \text{συν}25^\circ}{1 - 2\text{ημ}^2 25^\circ} - \frac{\text{εφ}40^\circ + \text{εφ}10^\circ}{1 - \text{εφ}40^\circ \cdot \text{εφ}10^\circ}$

γ) $\Gamma = 4\text{συν}^3\frac{\pi}{16} \cdot \text{ημ}\frac{\pi}{16} - 4\text{ημ}^3\frac{\pi}{16} \cdot \text{συν}\frac{\pi}{16}$

4. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \left(\text{συν}^2\frac{\pi}{24} - \text{ημ}^2\frac{\pi}{24}\right)^2$

β) $B = 4\text{ημ}^2\frac{\pi}{16} \cdot \text{συν}^2\frac{\pi}{16}$

Β. Προσδιορισμός τριγωνομετρικών αριθμών

5. Δίνονται γωνίες α και β, με $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ και $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, για τις οποίες ισχύει ότι:

$$\text{ημα} = \frac{4}{5} \quad \text{και} \quad \text{συνβ} = -\frac{12}{13}$$

Να βρείτε:

α) το συνα και το ημβ,

β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 2α και 2β,

γ) το ημ(2α − 2β).

6. Δίνεται γωνία α, με $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$5\text{ημ}2\alpha + 6\sqrt{3} \cdot \text{ημα} = 12\text{συν}\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι $\text{ημα} = \frac{3}{5}$.

β) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 2α και 4α.

7. Δίνεται γωνία α για την οποία ισχύει ότι:

$$\text{εφα} + 4\sigma\text{φα} - 4 = 0$$

Να βρείτε:

α) την εφα,

β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α,

γ) την τιμή της παράστασης:

$$A = 3\text{ημ}4\alpha + 4\text{συν}4\alpha$$

8. Για τη γωνία ω ισχύει ότι:

$$5\text{συν}2\omega + 28\text{συν}\omega + 21 = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $\text{συν}\omega = -\frac{4}{5}$.

β) Αν για τη γωνία ω επιπλέον ισχύει $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι:

$$\text{συν}2\omega = \frac{7}{25} \quad \text{και} \quad \text{ημ}2\omega = -\frac{24}{25}$$

ii) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{13(\text{ημ}^2 2\omega + \text{συν}^2 2\omega) + 12}{18\text{εφ}2\omega \cdot \sigma\text{φ}2\omega + 25(\text{ημ}2\omega + \text{συν}2\omega)}$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

9. Δίνεται γωνία α, με $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, για την οποία ισχύει ότι:

$$9\text{ημ}^2\alpha + 17\text{συνα} - 7 = 0$$

Να βρείτε:

α) το ημα και το συνα,

β) την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{\text{εφ}\frac{\alpha}{2} - \text{ημ}\frac{\alpha}{2}}{\text{συν}\frac{\alpha}{2}} - \frac{3}{4}\text{ημ}\frac{\alpha}{2}$$

γ) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{\alpha}{4}$.

Γ. Αποδεικτικές ασκήσεις

10. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $\frac{1 + \text{ημα} - \text{συν}2\alpha}{2\text{ημα} + 1} = \text{ημα}$

β) $\frac{1}{\text{ημα}} + \sigma\text{φα} = \sigma\text{φ}\frac{\alpha}{2}$

γ) $\frac{\text{συν}2\alpha + 2\text{συν}^2\frac{\alpha}{2}}{2\text{συνα} + 1} = \text{συνα}$

δ) $\frac{\text{ημ}^2\frac{\alpha}{2} + \text{συνα}}{\text{συν}^2\frac{\alpha}{2}} = 1$

11. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $\frac{2\text{ημα} - \text{ημ}2\alpha}{2\text{ημα} + \text{ημ}2\alpha} = \text{εφ}^2\frac{\alpha}{2}$

β) $\frac{\left(\text{ημ}\frac{\alpha}{2} + \text{συν}\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1}{2\text{συν}^2\frac{\alpha}{2} - 1} = \text{εφα}$

γ) $\frac{\text{ημα} + \text{ημ}\frac{\alpha}{2}}{1 + \text{συνα} + \text{συν}\frac{\alpha}{2}} = \text{εφ}\frac{\alpha}{2}$

δ) $2\text{ημα} \cdot \text{συν}4\alpha \cdot \text{συν}3\alpha + 2\text{ημα} \cdot \text{ημ}4\alpha \cdot \text{ημ}3\alpha = \text{ημ}2\alpha$

12. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\text{ημ}2\alpha} = \sigma\text{φα} - \sigma\text{φ}2\alpha$$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{1}{\eta\mu\frac{16\pi}{15}} + \frac{1}{\eta\mu\frac{8\pi}{15}} + \frac{1}{\eta\mu\frac{4\pi}{15}} + \frac{1}{\eta\mu\frac{2\pi}{15}}$$

Δ. Ταυτότητες με δεδομένη συνθήκη

13. Αν για τις γωνίες x και y ισχύει:

$$x + 2y = \pi$$

να αποδείξετε ότι $\frac{2\eta\mu^2 y}{\eta\mu x} = \varepsilon\varphi y$.

14. Αν $\sigma\upsilon\nu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\alpha$, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \varepsilon\varphi^2\frac{\beta}{2}$$

Ε. Εφαρμογές στα τρίγωνα

15. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu^2\frac{A}{2} - \eta\mu^2\frac{B-\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma$$

16. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση:

$$\eta\mu 2B \cdot \sigma\varphi\Gamma = 1 - \sigma\upsilon\nu 2B$$

να αποδείξετε ότι είναι ορθογώνιο με $A = \frac{\pi}{2}$.

17. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με:

$$AB = A\Gamma$$

για το οποίο ισχύει ότι:

$$5\sigma\upsilon\nu 2B + 12\eta\mu^2\frac{B}{2} = 1$$

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:
α) της γωνίας Β, **β)** της γωνίας Α.

Ζ. Επίλυση εξισώσεων

18. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu 2x - 3\sigma\upsilon\nu x = 1$ **β)** $\eta\mu 2x = \sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x$

γ) $\eta\mu 2x = \varepsilon\varphi x$ **δ)** $\sigma\upsilon\nu 2x = 6\eta\mu^2 x - 1$

ε) $1 - \sqrt{3}\cdot\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu 2x$

19. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu 2x + 1 = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}$

β) $2\eta\mu^2\frac{x}{2} = 1 - \sigma\upsilon\nu 2x$

γ) $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} + 1 = 0$

δ) $\eta\mu x + \sqrt{3}\cdot\eta\mu\frac{x}{2} = 0$

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\sigma\upsilon\nu 2x\cdot\eta\mu x + \frac{1}{2}\eta\mu 2x = 3\eta\mu x$

β) $2\eta\mu 2x + 1 = 4\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} - 2\eta\mu x$

γ) $\eta\mu 2x = 4\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$

21. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{1+\eta\mu 2x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}$

β) $\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{1-\eta\mu 2x} = \varepsilon\varphi x$

γ) $1 - \eta\mu 2x = \frac{1-\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi x}$

δ) $\eta\mu^3\frac{x}{2} - \sigma\upsilon\nu^3\frac{x}{2} = \sigma\upsilon\nu x$

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu x + \sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3}$

β) $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 1$

γ) $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 1$

δ) $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = -1$

ε) $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{1-\eta\mu 2x}$

Η. Τριγωνομετρικοί αριθμοί του 3^{α}

23. Δίνεται γωνία $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ για την οποία ισχύει ότι $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 3α.

24. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $\frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2$

β) $\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 3\alpha$

γ) $4\sigma\upsilon\nu 3\alpha\cdot\eta\mu^3\alpha + 4\eta\mu 3\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^3\alpha = 3\eta\mu 4\alpha$

δ) $\frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha}{3\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha} = \frac{3\eta\mu\alpha - \eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 3\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$

Θ. Συνδυαστικά θέματα

25. Δίνεται γωνία α για την οποία ισχύει ότι:

$$\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Lambda = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{4} - \eta\mu^2\frac{\alpha}{4}}$$

β) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α.

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{\eta\mu 4\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 4\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu(x + 2\alpha) = -\frac{31}{25}\eta\mu x$$

26. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2\cdot\eta\mu 2\alpha - 2(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)x + 2 = 0 \qquad (1)$$

με $\eta\mu 2\alpha \neq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης ως συνάρτηση του α.

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, καθώς επίσης και ότι $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{7}{25}$, τότε:

i) να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης (1),
ii) να λύσετε την εξίσωση:

$$\varepsilon\varphi(x + \alpha) = \frac{1}{7}$$

27. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 3 - 24\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$$

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f και να βρείτε την περίοδο, καθώς και τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, \pi]$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + 2f\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right) = 3$$

28. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu^6\alpha + \sigma\upsilon\nu^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\eta\mu^2 2\alpha$$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu^6\frac{\pi}{8} + \eta\mu^6\frac{3\pi}{8}$$

γ) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x$$

i) Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο το 1 και να βρείτε για ποια x η f παίρνει την τιμή αυτή.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sigma\upsilon\nu 4x$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu 2x}{2\eta\mu x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{9} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{9}$$

γ) Να λύσετε στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ την εξίσωση:

$$\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 4x \cdot \sigma\upsilon\nu 8x = \frac{1}{16}$$

30. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{3 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2 + \sigma\varphi^2 x} - \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x}{\eta\mu 2x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 1 - \varepsilon\varphi x \quad \text{για κάθε } x \in D_f$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x)(1 + \eta\mu 2x) = f(-x)$$

31. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\eta\mu 5x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 5x}{\sigma\upsilon\nu x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 4\sigma\upsilon\nu 2x \quad \text{για κάθε } x \in A$$

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\eta\mu\frac{\pi}{15}} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{15}}}{\sigma\upsilon\nu\frac{13\pi}{15}}$$

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

13^{ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ : **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΟ 3^{ο} ΚΕΦΑΛΑΙΟ**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

.1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{10\pi}{3}, -2\right)$.

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό ρ.

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή, την ελάχιστη τιμή και την περίοδο της f.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

ε) Να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της C_f και της ευθείας $y = -2$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

.2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu 2x$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή, την ελάχιστη τιμή και την περίοδο της f.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = f\left(\frac{37\pi}{12}\right) - f\left(\frac{23\pi}{12}\right)$$

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + 2\eta\mu\frac{4\pi}{3} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} = 0$$

ε) Αν ισχύει ότι:

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right) - f\left(\frac{3\pi - 2\alpha}{4}\right) = \sqrt{3}$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$B = \varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha$$

.3 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x \quad \text{και} \quad g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$$

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων f και g. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ για $x \in [0, 2\pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
f(x)									
g(x)									

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu x \qquad (1)$$

στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

γ) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα του ερωτήματος (α) τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

.4 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2 + 2\eta\mu\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$$

α) Να βρείτε την τιμή $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f, καθώς και για ποια x παίρνει τις τιμές αυτές.

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f\left(x + \frac{\pi}{18}\right)$$

έχει σταθερή τιμή για κάθε $x \in R$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2\eta\mu 3x$. Να βρείτε από ποιες μετατοπίσεις της C_g έχει προκύψει η C_f.

.5 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\eta\mu x \cdot \varepsilon\varphi x}{\alpha - \sigma\upsilon\nu x}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{2\pi}{3}, -1\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

γ) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$.

ε) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $f\left(\frac{33\pi}{5}\right)$.

στ) Για τις επιτρεπόμενες τιμές του x να αποδείξετε ότι:

$$f(x) - f(\pi - x) = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$$

.6 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\eta\mu\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) - \sigma\upsilon\nu(3\pi - x)}{4\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{2\eta\mu x}$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

δ) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $f^2(x) = \frac{1}{3}$ **ii)** $2f^2(x) = 1 + \sigma\varphi x$

.7 Η συνάρτηση $f(x)=\alpha+\beta\cdot\sigma\upsilon\nu 2x$, με $\beta>0$, έχει μέγιστη τιμή 4 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3},-5\right)$.

α) Να βρείτε τα α και β.

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή και την περίοδο της f.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο $[0, 2\pi]$.

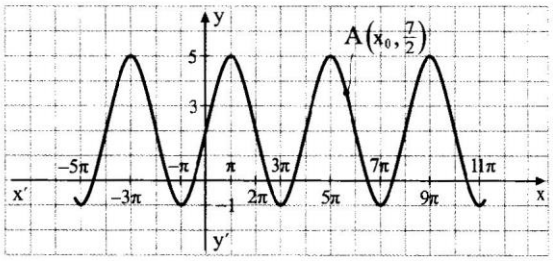
δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+2}{f(x)+2}=\sigma\varphi x$$

.8 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, η οποία είναι της μορφής:

$$f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)+\kappa$$

με ρ, κ πραγματικές σταθερές και $\omega>0$.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση να βρείτε:

i) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f,

ii) την περίοδο Τ της συνάρτησης f.

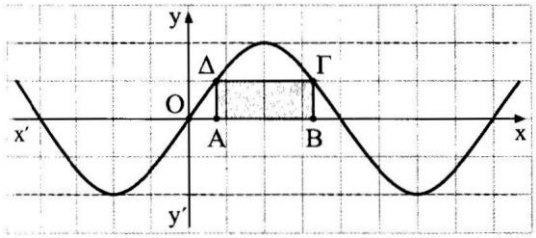
β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, ω και κ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι:

$$\rho=3,\quad \omega=\frac{1}{2}\quad \text{και}\quad \kappa=2$$

να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου Α της γραφικής παράστασης που δίνεται στο σχήμα. ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

.9 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.



α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με:

$$A\left(\frac{2}{3},0\right)$$

Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου Δ,

ii) τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.10 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)+\beta\cdot\eta\mu(\pi x)$$

διέρχεται από τα σημεία:

$$A\left(\frac{1}{3},3\right)\quad \text{και}\quad B\left(\frac{23}{6},\sqrt{3}\right)$$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$ στο διάστημα $[-1, 2]$.

.11 Δίνεται η εξίσωση:

$$1-\eta\mu x=\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x\qquad (A)$$

α) Να αποδείξετε ότι αν x_0 είναι μια λύση της εξίσωσης (Α), τότε $\sigma\upsilon\nu x_0\geq 0$.

β) Θεωρούμε την εξίσωση:

$$(1-\eta\mu x)^2=3\sigma\upsilon\nu^2 x\qquad (B)$$

η οποία προκύπτει υψώνοντας στο τετράγωνο τα δύο μέλη της εξίσωσης (Α). Να λύσετε την εξίσωση (Β).

γ) Να λύσετε την εξίσωση (Α). ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

.12 Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε cm) δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t)=12\eta\mu\frac{\pi t}{4}+13$$

όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα. Να βρείτε:

α) την περίοδο της ταλάντωσης,

β) την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές $t=5$ και $t=8$,

γ) κατά το χρονικό διάστημα από $t=0$ έως $t=8$ ποια χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη και ποια είναι η απόσταση αυτή. ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

.13 Ένα παιχνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι. Το ύψος του από το πάτωμα (σε cm) συναρτήσει του χρόνου t (σε s) δίνεται από τη σχέση:

$$h(t)=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t)+\beta$$

με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $\omega>0$.

Όταν το ελατήριο ταλαντώνεται, το ελάχιστο ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι 20 cm και το μέγιστο 100 cm. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το ύψος παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης (θέσεις: ελάχιστο - ηρεμία - μέγιστο - ηρεμία - ελάχιστο) είναι 6 s.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega=\frac{\pi}{3}$.

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α και β αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ) Να υπολογίσετε το ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα 14 s μετά την έναρξη της ταλάντωσης.

δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(t)$ για $0\leq t\leq 12$. ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

.14 Δίνεται η παράσταση:

$$A=\frac{1-\eta\mu\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha}+\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\sigma\varphi\alpha}$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του α ορίζεται η παράσταση Α.

β) Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης Α είναι σταθερή.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x}=A$.

.15 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 4\sigma\upsilon\nu(5\pi - x) \cdot \eta\mu\left(\frac{11\pi}{2} + x\right) \quad \text{και}$$

$$g(x) = \left(1 - \varepsilon\varphi x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)\left(1 - \sigma\varphi x + \frac{1}{\eta\mu x}\right)$$

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

ε) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$h(x) = \sqrt{4 - f(x)} \quad \text{στο } [-2\pi, 2\pi]$$

.16 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{19\pi}{2} + x\right) - \eta\mu\left(\frac{27\pi}{2} - x\right)}{\varepsilon\varphi^2\frac{13\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu(5\pi - x) - \eta\mu(11\pi - x)}$$

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ και $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Να βρείτε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

δ) Να αποδείξετε ότι η f έχει περίοδο $T = 2\pi$.

ε) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

.17 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu^2 x - 2\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{14\pi}{3}, -\frac{11}{4}\right)$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο στο $x_0 = 2\pi$.

δ) Να βρείτε όλες τις θέσεις στις οποίες η f έχει μέγιστο.

.18 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x - 6\sigma\upsilon\nu x}{2}$$

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -\frac{5}{4}$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το -2.

ε) Για τις επιτρεπόμενες τιμές του x να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{4}{(1 + \varepsilon\varphi x)^2 + (1 - \varepsilon\varphi x)^2} = f(x) + f(\pi + x)$$

.19 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\eta\mu\left(\frac{25\pi}{2} - x\right) - \eta\mu(7\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{17\pi}{2} + x\right)}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{5} + 2\eta\mu^2\frac{4\pi}{5} - \sigma\upsilon\nu(16\pi - x)}$$

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε την τιμή $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

γ) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = \frac{5}{6}$$

ε) Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστη τιμή το 1 και ελάχιστη τιμή το $-\frac{1}{3}$.

.20 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = |\eta\mu x| - |\sigma\upsilon\nu x|$$

α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το -1 και μέγιστο το 1.

δ) Να βρείτε τη μονοτονία της f σε καθένα από τα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

ε) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.