14ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι μονώνυμα του x:

$$2x^5,\ 3x^{-2},\ -\frac{1}{2}x^3,\ 4\cdot\frac{1}{x},\ \sqrt{3}\cdot x,\ 4\sqrt{x},\ -5x^2,\ -7,\ 0,\ 2x^0$$

2. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x:

α) $2x^3-\frac{1}{3}x^2+\sqrt{3}\cdot x-1$ β) $x^2-\frac{3}{x}$

γ) $2x^3-7\sqrt{x}$ δ) $\sqrt{\alpha}\cdot x^2+\frac{1}{\alpha}x$

ε) -5 στ) 0

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=-3x^4+\sqrt{5}\cdot x^2-\frac{4}{9}x+6$. Να γράψετε τους όρους, τους συντελεστές, τον σταθερό όρο και τον βαθμό του πολυωνύμου.

4. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x)=(\lambda^3-4\lambda)x^3+(\lambda^2-2\lambda)x+\lambda-2$$

Να βρείτε τον βαθμό του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

5. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x)=(\alpha^2-4)x^3+(\alpha^2+2\alpha)x^2-\alpha^2x+3\alpha-8$$

και:

$$Q(x)=(3\alpha+2)x^2-2\alpha x+\alpha-\alpha^2$$

Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

6. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

α) Να βρείτε την αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x=-3$.

β) Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς $1, -1$ και -2 είναι ρίζες του $P(x)$.

7. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(x-1)^{2017}-x^{2018}$. Να βρείτε:

α) τον σταθερό όρο του $P(x)$, β) το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$.

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^3-\lambda)x^2+(\lambda^2+\lambda)x+\lambda^2-2\lambda-3$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$:

α) το $P(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο, β) το $P(x)$ είναι μηδενικό πολυώνυμο,

γ) το $P(x)$ έχει βαθμό μηδέν, δ) το $P(x)$ έχει ρίζα το 2,

ε) η αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x=-1$ είναι -3.

9. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^2-2x$ και $Q(x)=x^3+3x-1$. Να βρείτε τα παρακάτω πολυώνυμα και να προσδιορίσετε τον βαθμό τους:

α) $xP(x)-2Q(x)$ β) $P(x+2)Q(x^2)$

10. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$(3x-2)P(x) = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

11. Να γράψετε το κλάσμα $\dfrac{x+13}{x^2+x-6}$ ως άθροισμα απλών κλασμάτων.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Βασικοί ορισμοί

1. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 4x + 6$$

Να βρείτε:

α) τους όρους του $P(x)$,
β) τους συντελεστές του $P(x)$,
γ) τον βαθμό του $P(x)$,
δ) την αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = -1$.

2. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + 4x^2 - x - 10$$

α) Να βρείτε τους όρους, τους συντελεστές και τον σταθερό όρο του $P(x)$.
β) Να βρείτε τον βαθμό του $P(x)$.
γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 1 και -2 είναι ρίζες του $P(x)$.

3. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = x^2 - 2x \quad \text{και} \quad Q(x) = x^3 - x + 1$$

α) Να βρείτε το πολυώνυμο:

$$A(x) = P(x)Q(x) + P(-1) + Q(-1)$$

β) Να βρείτε τον βαθμό, τους συντελεστές και τον σταθερό όρο του $A(x)$.
γ) Να εξετάσετε αν το 2 είναι ρίζα του $A(x)$.

4. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x$.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο:

$$Q(x) = P(2x) - P(x-1)$$

β) Να βρείτε τον βαθμό και τους όρους του $Q(x)$.
γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί -2 και -1 είναι ρίζες του $Q(x)$.

Β. Βαθμός πολυωνύμου

5. Να βρείτε τον βαθμό των πολυωνύμων:

α) $P(x) = (3x^7 - 5x^3 + 2x - 1)(-2x^3 + 6x - 3)$
β) $P(x) = (2x^2 - 5)^4(x^3 + 5x - 6)^2$

6. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\lambda^2 - 1)x^2 + (\lambda^2 + \lambda)x - \lambda - 1$$

α) Ποιος είναι ο σταθερός όρος του $P(x)$;
β) Να βρείτε τον βαθμό του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\lambda^2 - 4)x^4 + \lambda(\lambda - 2)x^3 + 3\lambda x^2 + 5\lambda x - 2\lambda$$

το οποίο είναι 3ου βαθμού.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.
β) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 2 και -1 είναι ρίζες του $P(x)$.

8. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\alpha - 4)x^3 + (2\beta + \alpha)x^2 + $$
$$+ (2\gamma + \alpha + \beta)x + \delta + \gamma$$

Να ορίσετε τι πρέπει να ισχύει για τους αριθμούς α, β, γ και δ, ώστε το $P(x)$:

α) να είναι 3ου βαθμού,
β) να είναι το πολύ 2ου βαθμού,
γ) να είναι 2ου βαθμού,
δ) να είναι μηδενικού βαθμού,
ε) να στερείται βαθμού.

9. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$A(x) = \lambda^2 x^3 + 2x^2 - \lambda^2 x - \lambda$$

και:

$$B(x) = 2\lambda x^3 + \lambda x^2 - 4x - 2$$

α) Να βρείτε το πολυώνυμο:

$$P(x) = A(x) - B(x)$$

β) Να γράψετε τον σταθερό όρο του $P(x)$.
γ) Να αποδείξετε ότι το -1 είναι ρίζα του $P(x)$ για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
δ) Να βρείτε τον βαθμό του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ. Αριθμητική τιμή – Ρίζα πολυωνύμου

10. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 - (\alpha - 2)x - 2\alpha$$

Η αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = 3$ είναι 45.

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.
β) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί -1 και -2 είναι ρίζες του $P(x)$.

11. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 - (\beta - 2\alpha)x + 3\alpha + 4\beta$$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να έχει ρίζα το -1 και η τιμή του για $x = -2$ να είναι -5.

12. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = \lambda x^3 + (\lambda + 1)x^2 + (\lambda - 2)x + 6\lambda$$

για το οποίο ισχύει $P(-1) = 8$.

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ.
β) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί -2 και -3 είναι ρίζες του $P(x)$.
γ) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:

$$Q(x) = \big(P(2x+1) - 1\big)^9 + \big(P(x-1) + x + 1\big)^8$$

έχει ρίζα το -2.

13. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ με άθροισμα συντελεστών ίσο με 3 και για το οποίο ισχύει:

$$P(3x+1) = 2P(x) - 5 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τον σταθερό όρο του $P(x)$.
β) Να υπολογίσετε την τιμή $P(13)$.

Δ. Ίσα πολυώνυμα

14. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$P(x)=(\lambda^2-2\lambda-3)x^3+(\lambda^2-2\lambda)x^2-(\lambda^2-4)x+2$

και:

$$Q(x)=(9-2\lambda)x^2+(4-3\lambda)x+|\lambda-1|$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $Q(0)<P(0)$.

β) Για ποια τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα;

15. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x)=-2x^3+\lambda^2(x^2-1)+\lambda(x^3-1)+\lambda+9$$

και:

$$Q(x)=(\lambda+12)x^2+(\lambda-2)x^3+(\lambda^2-9)x$$

όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι και τα δύο πολυώνυμα είναι 3ου βαθμού. Συμφωνείτε με την άποψη αυτή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα. ***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

16. Το πολυώνυμο:

$$P(x)=(\alpha+1)x^3-(\beta-2)x^2+(\alpha^2+\beta^2)x-6$$

έχει ρίζα το 2. Να βρείτε:

α) τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

β) πραγματικούς αριθμούς κ, λ και μ τέτοιους, ώστε το $P(x)$ να παίρνει τη μορφή:

$$P(x)=(x+1)^2(\kappa x+\lambda)+\mu$$

17. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x)=(\lambda^3-10\lambda)x^3-3x^2+\lambda x+3-2\lambda$$

και:

$$Q(x)=\lambda x^3+|\lambda|x^2+(\lambda^2-4\lambda)x+\lambda^2-2\lambda$$

Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε το πολυώνυμο:

$$R(x)=P(x)+Q(x)$$

να είναι το μηδενικό.

Ε. Προσδιορισμός πολυωνύμου

18. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$(2x-3)P(x)=2x^3+7x^2-17x+3$$

19. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$x^2P(x)+xP(x)=2x^3+x^2-x$$

Να βρείτε:

α) το πολυώνυμο $P(x)$,

β) πολυώνυμο $Q(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$P(x)Q(x)=2x^3+5x^2-13x+5$$

20. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$(P(x))^2=x^4-2x^3+5x^2-4x+4$$

21. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$Q(x)=3x^4+\alpha x^3+\beta x^2-2\alpha x+12$$

το οποίο έχει ρίζα το 1.

α) Να αποδείξετε ότι το $Q(x)$ έχει ρίζα το -2.

β) Αν επιπλέον η αριθμητική τιμή του $Q(x)$ για $x=-1$ είναι 20, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha=10$ και $\beta=-5$,

ii) να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $(3x-2)P(x)=Q(x)$.

22. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$P(x-1)=x^2+2x-5$$

Να βρείτε:

α) το πολυώνυμο $P(x)$,

β) πολυώνυμο $Q(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$P(x)Q(x)=2x^3+5x^2-16x+6$$

23. Δίνεται μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$(P(x))^2=(x+1)P(x)-3x+6$$

α) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ είναι 1ου βαθμού.

β) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

γ) Να βρείτε πολυώνυμο $Q(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$P(x)Q(x)=2x^3-7x^2+2x+8$$

Ζ. Διάσπαση κλάσματος σε άθροισμα απλών κλασμάτων

24. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει:

$$\frac{-3x+17}{(x-4)(x+1)}=\frac{\alpha}{x-4}+\frac{\beta}{x+1}$$

25. Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα ως αθροίσματα απλών κλασμάτων:

α) $\dfrac{2x+18}{x^2+2x-3}$ **β)** $\dfrac{x^2+x+40}{x^3-3x^2-10x}$

26. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ 2ου βαθμού για το οποίο ισχύει:

$$P(x)+P(x+2)=2x^2-16$$

α) Να βρείτε το $P(x)$.

β) Να γράψετε το κλάσμα $\dfrac{P(x+1)-P(x)-19}{P(x)}$ ως άθροισμα απλών κλασμάτων.

Η. Συνδυαστικά θέματα

27. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$P(2x-1)=16x^3-24x^2+18x-5$$

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $P(x)$ είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $P(x)$ ως προς τη μονοτονία.

28. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$(x^2+1)P(x)=x^6-7x^4+16x^2+24$$

α) Να βρείτε το $P(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $P(x)$ είναι το 8 και να βρείτε για ποια x παίρνει την τιμή αυτή.

29. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{(\alpha - \beta)x^2 + (\alpha + 2\beta)x + 4\alpha - 1}{x^2 - x + 1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Αν η συνάρτηση f είναι σταθερή, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β.

30. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 7$$

Ισχύει ότι $f(2) = 1$ και η f έχει ρίζα το 1.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 12$.

β) Αν $g(x) = x^3$, τότε να αποδείξετε ότι η C_f προκύπτει από 2 μετατοπίσεις της C_g.

γ) Να σχεδιάσετε τη C_f.

15ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 4.2 Διαίρεση Πολυωνύμων**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να κάνετε τη διαίρεση:

$$(2x^4 - 7x^3 + 18x + 2) : (x^2 - 3x + 1)$$

Στη συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 22x + 24$.

α) Να αποδείξετε ότι το $2x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 3x^3 + \alpha x^2 + (\alpha^2 - 4\alpha - 8)x + \alpha^2 - 21$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 + 1)$.

β) Αν η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια, να βρείτε τον αριθμό α.

4. Να κάνετε τη διαίρεση $(x^3 - 5x + 3) : (x + 2)$.

5. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12$$

διαιρείται με το $x^2 - 4$ και να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης αυτής.

6. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης:

$$(x^\nu + x^{\nu-1} - 1) : (x - 1)$$

7. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x + 3)^{10} - (x + 1)^9 + (3x + 5)^8$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$.

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^8 - 2x^7 + x^3 - 3x - 2$. Να εξετάσετε αν τα πολυώνυμα $x - 2$ και $x + 1$ είναι παράγοντες του $P(x)$.

9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 14x + \beta$. Το $x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι 36.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

10. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 4x^2 + \alpha x + \beta$. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x^2 + 2x - 3$.

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x^2 - 4x + 4$.

12. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 8x^3 - 16x^2 + \kappa x + \lambda$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(2x + 1)$ είναι -12 και το $2x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$P(x) : (2x - 1)$$

13. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 2$ είναι 1 και με το $x + 3$ είναι -14. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 + x - 6$.

14. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x^2 - 3x - 10$ είναι $-2x + 7$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 2$ και της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 5$.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Διαίρεση πολυωνύμων – Ταυτότητα διαίρεσης

1. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και σε κάθε περίπτωση να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

α) $(2x^3 - 3x^2 - x + 7) : (2x + 3)$

β) $(x^4 - 11x^2 + 6x - 3) : (x^2 - 3x)$

γ) $(-3x^3 - 3x^2 + x^4 + 12x - 4) : (x^2 - 3x + 2)$

δ) $x^5 : (x^2 - x + 1)$

2. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6$$

α) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x^2 + 2$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

3. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 3x^3 + 7x^2 - 18x + 8$$

α) Να αποδείξετε ότι το $3x - 2$ είναι διαιρέτης του πολυωνύμου $P(x)$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

4. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6 \quad \text{και}$$

$$Q(x) = 2x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 6$$

α) Να αποδείξετε ότι το $2x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και το $x^2 + 1$ είναι παράγοντας του $Q(x)$.

β) Για τις επιτρεπόμενες τιμές του x να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

5. Το πολυώνυμο $P(x)$ αν διαιρεθεί με το $x - 2$ δίνει πηλίκο $x^2 - 3x + 2$ και υπόλοιπο τον πραγματικό αριθμό υ.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της προηγούμενης διαίρεσης.

β) Αν $P(1) = 10$, να βρείτε το υ.

γ) Αν $\upsilon = 10$, να βρείτε το $P(x)$. ***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

6. Η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x^3 - 3x + 2$ δίνει πηλίκο $x^2 + 1$.

α) Να βρείτε τον βαθμό του $P(x)$.

β) Αν επιπλέον η προηγούμενη διαίρεση έχει υπόλοιπο $2x - 3$, τότε:

i) να βρείτε το $P(x)$,

ii) να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x^2 - x + 1$.

7. Η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x^2 - 3x$ δίνει πηλίκο $x^2 + 5x + 10$ και υπόλοιπο $36x - 24$.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι το $x^2 + 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

γ) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

8. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$P(x) = (2x - 3)(x^3 - 5x + 1) + (6x - 5) \qquad (1)$$

α) Η ισότητα (1) μπορεί να θεωρηθεί ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το:

Α: $2x - 3$

Β: $x^3 - 5x + 1$

Γ: $6x - 5$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

β) Να βρείτε τον διαιρέτη, το πηλίκο και το υπόλοιπο της προηγούμενης διαίρεσης.

γ) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $2x - 3$.

Β. Σχήμα Horner

9. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των παρακάτω διαιρέσεων και σε κάθε περίπτωση να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

α) $(x^3 - 5x^2 + 7x - 3) : (x - 2)$

β) $(2x^4 + 3x^2 - 4x + 1) : (x + 1)$

γ) $(2x^3 - x^2 + 4) : (x + 2)$

δ) $(2x^3 + 4x^2 - 3x - 5) : (x + 1)$

ε) $x^4 : (x + 2)$

στ) $(3x^4 - 2x^3 + x^2) : (x - 2)$

ζ) $(2x^3 - 5x^2 + 3x^4 - x + 6) : (x + 2)$

10. Να κάνετε τις επόμενες διαιρέσεις και σε κάθε περίπτωση να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

α) $(x^3 + 2\alpha x^2 - 7\alpha^2 x + 5\alpha^3) : (x - \alpha)$

β) $(5x^3 + 6\alpha x^2 + 16\alpha^3) : (x + 2\alpha)$

11. Να κάνετε τις επόμενες διαιρέσεις και σε κάθε περίπτωση να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

α) $(2x^\nu + x^2 - 2x - 1) : (x - 1)$

β) $(x^{\nu+1} + 2x^\nu - 3) : (x - 1)$

γ) $(3x^{\nu+1} - x^\nu + 2x - 4) : (x - 1)$

12. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$$

διαιρείται με το $(x + 1)(x - 3)$ και να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης.

13. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18$$

α) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το $x^2 - 9$ και να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης.

β) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

14. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$$

α) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να αποδείξετε ότι το $(x + 1)^2$ είναι παράγοντας του

πολυωνύμου $P(x)$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

Γ. Προσδιορισμός παραμέτρων

15. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x + \alpha + \beta \quad \text{με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 + 1)$ και να γράψετε την ταυτότητά της.

β) Αν το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεσης είναι $\upsilon(x) = 5x$, να βρείτε τους αριθμούς α και β.

16. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + \alpha x^2 - (2\alpha + \beta)x + \beta \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

α) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $x^2 - 4$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β) Αν η προηγούμενη διαίρεση είναι τέλεια:

i) να βρείτε τους αριθμούς α και β,

ii) να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

17. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 3x$$

και:

$$Q(x) = x^4 + \alpha x^3 + 3x^2 + (2\alpha + 5)x + \beta$$

α) Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$P(x) : (x^2 + 1) \quad \text{και} \quad Q(x) : (x^2 + 1)$$

και να γράψετε τις αντίστοιχες ταυτότητες.

β) Αν οι παραπάνω διαιρέσεις έχουν το ίδιο υπόλοιπο, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

γ) Για $\alpha = -4$ και $\beta = -7$ να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο:

$$R(x) = Q(x) - P(x)$$

18. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6 \quad \text{με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

α) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 2$.

β) Αν το πηλίκο της παραπάνω διαίρεσης είναι το:

$$\pi(x) = x^2 - 3x + 4$$

να βρείτε τους αριθμούς α και β, καθώς και το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεσης.

γ) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης:

$$P(x) : (x + 1)$$

Δ. Τα θεωρήματα – Ασκήσεις εμπέδωσης

19. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 15x - 18$$

α) Να εξετάσετε ποια από τα επόμενα πολυώνυμα είναι παράγοντες του $P(x)$:

i) $x - 3$ **ii)** $x + 1$

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το:

i) $x - 1$ **ii)** x

20. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 121x^2 + 2x + 130$$

Να βρείτε την τιμή $P(12)$.

21. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 2$$

έχει παράγοντα το $x - 2 + \sqrt{3}$.

22. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - 3\alpha\beta x + \alpha^3 + \beta^3$$

έχει παράγοντα το $x + \alpha + \beta$.

23. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = (x - 2)^{10} - (4 - 3x)^5 + (x - x^2)^5$$

και:

$$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του $Q(x)$.

24. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει ότι:

$$P(4x - 5) = x^3 - 2x^2 + 7x - 6$$

α) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$.

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$P(x) : (x - 3)$$

Ε. Προσδιορισμός παραμέτρων

25. α) Να βρείτε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης:

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 2) : (x - 3)$$

β) Αν είναι $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + \lambda$, να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η διαίρεση:

$$P(x) : (x - 3)$$

να έχει υπόλοιπο 0. ***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

26. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^{30} + \alpha x^{29} + \alpha x^2 + 3x - 2$$

Η διαίρεση του $P(x)$ με το $x - 1$ έχει υπόλοιπο 6.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Να εξετάσετε αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 2$.

27. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - \beta + 1$$

Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 3$, ενώ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι 8.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

28. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ 3ου βαθμού. Το παρακάτω σχήμα Horner αντιστοιχεί στη διαίρεση του $P(x)$ με το $x + 2$.

	$\alpha - 6$		$\alpha + 7$	$\rho = -2$
		$2\alpha + 12$		
			$-5\alpha - 19$	

α) Να συμπληρώσετε το παραπάνω σχήμα Horner.

β) Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$,

ii) να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

29. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = x^3 + \lambda x^2 + (1 - 2\lambda)x + 4$$

και:

$$Q(x) = (\lambda - 1)x^3 - x^2 + (2\lambda + 1)x - 5$$

Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ όταν διαιρεθούν με το $x - 1$ αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο.

α) Να βρείτε τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Αν $R(x) = Q(x) - P(x)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι το $x - 1$ είναι διαιρέτης του $R(x)$,

ii) να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $R(x)$ με το $(x - 1)^2$.

30. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^2 + \lambda x - 2\lambda - 4$$

Έστω υ το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + \lambda)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\upsilon \geq -5$.

β) Να βρείτε για ποια τιμή του λ το υ παίρνει την ελάχιστη τιμή του.

Ζ. Παράγοντας της μορφής (x-α)(x-β) ή (x-α)²

31. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = \alpha x^3 + x^2 + \beta x - 5(\alpha + 1)$$

Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x + 1)(x - 3)$.

32. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - (5\alpha - 3)x + \beta - 1$$

Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x^2 - 4$.

33. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \beta - \alpha + 1$$

Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x^2 + x - 6$.

34. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 12$$

Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x + 2)^2$.

35. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 + \alpha x^3 - 2\alpha x^2 + 2\beta x - \beta$$

Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x^2 - 2x + 1$.

36. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^{\nu+1} - x^\nu + \alpha x + \beta$$

με $\nu \geq 2$ φυσικό αριθμό. Να βρείτε για ποιες τιμές των α και β το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$.

Η. Η διαίρεση P(x):(αx+β), α≠0

37. Το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + 8x + \alpha + 2$$

έχει παράγοντα το $2x - 1$. Να βρείτε:

α) την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$,

β) το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $2x + 3$.

38. Το πολυώνυμο:

$$P(x) = \alpha x^3 + 12x^2 - x + \beta$$

έχει παράγοντα το $4x^2 - 1$. Να βρείτε:

α) τους αριθμούς α και β,

β) το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $2x + 3$.

Θ. Οι διαιρέσεις P(x):(x-α), P(x):(x-β) και P(x):[(x-α)(x-β)]

39. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 1$ είναι -1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 2$ είναι -49. Να βρείτε:

α) το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $x^2 + x - 2$,

β) το $P(x)$ αν επιπλέον γνωρίζετε ότι είναι 3ου βαθμού και έχει παράγοντα το:

$$x^2 - x + 1$$

40. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - x - 6$ είναι $-4x + 1$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 2$.

41. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x^2 - 4$ είναι $13x - 29$. Να βρείτε:

α) το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 2$,

β) το $P(x)$ αν επιπλέον γνωρίζετε ότι είναι 3ου βαθμού και έχει παράγοντα το $x^2 - 2x + 3$.

42. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο έχει σταθερό όρο το 3. Επίσης το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 2$ είναι 9 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 2$ είναι 13. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x^3 - 4x$.

43. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ του οποίου οι συντελεστές έχουν άθροισμα ίσο με 5. Επίσης το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 2$ είναι -4. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 + x - 2$.

44. Το πολυώνυμο $P(x) = (x + 4)^{99} + \lambda x + 8$ έχει παράγοντα το $x + 3$. Να βρείτε:

α) τον πραγματικό αριθμό λ,

β) τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

i) $P(x) : (x + 4)$ **ii)** $P(x) : (x + 5)$

iii) $P(x) : (x^2 + 9x + 20)$

45. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 2$ είναι 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 3$ είναι 4.

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:

$$R(x) = P(7 - x) - 4P(2x - 6)$$

έχει παράγοντα το $x - 4$.

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου:

$$Q(x) = P(5-x) + P(x)$$

με το $x^2 - 5x + 6$.

Ι. Θεωρητικές ασκήσεις

46. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο έχει παράγοντα το $x - \alpha$. Αν $\beta \neq \alpha$, να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-\alpha)(x-\beta)$ είναι $\dfrac{P(\beta)}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$.

47. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

με $\alpha\gamma \neq 0$

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (\alpha x + \beta)$.

β) Αν η διαίρεση $P(x) : (\alpha x + \beta)$ είναι τέλεια, να αποδείξετε ότι και η διαίρεση $P(x) : (\gamma x + \delta)$ είναι τέλεια και να βρείτε το πηλίκο της.

48 Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x - \alpha$ δίνει υπόλοιπο β, διαιρούμενο με $x - \beta$ δίνει υπόλοιπο γ και διαιρούμενο με $x - \gamma$ δίνει υπόλοιπο α, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ διαφορετικοί ανά δύο.

α) Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - \gamma$, να αποδείξετε ότι:

$$\pi(\alpha)\pi(\beta) = \frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma}$$

β) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:

$$Q(x) = P\big(P\big(P(x)\big)\big) - x$$

έχει παράγοντα το $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$.

Κ. Συνδυαστικά θέματα

49. Το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + (\alpha - 3)x^2 + \alpha x - 14$$

έχει παράγοντα το $x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$.

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$. Αν υ_1 και υ_2 είναι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του $P(x)$ με το $x - \rho_1$ και το $x - \rho_2$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\upsilon_1 < \upsilon_2$.

50. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \alpha x - 5\alpha + 1$$

το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 - 4$ δίνει υπόλοιπο $10x + 3$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Έστω $\upsilon(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 + 2x - 3$.

i) Να βρείτε το $\upsilon(x)$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\upsilon\big(\sqrt{3}\cdot \varepsilon\varphi x\big) + \upsilon\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right) + \frac{5}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 0$$

51. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + x^2 \cdot \eta\mu\theta + x(2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1) + \alpha$$

Το $P(x)$ διαιρούμενο με x δίνει υπόλοιπο 1.

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του θ το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$.

γ) Έστω υ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 4$.

i) Να αποδείξετε ότι $\upsilon \leq 77$.

ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του θ το υ παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

52. Δίνεται ο αριθμός:

$$\beta = 3\eta\mu^4\theta + 3\sigma\upsilon\nu^4\theta - 2\eta\mu^6\theta - 2\sigma\upsilon\nu^6\theta$$

και τα πολυώνυμα:

$$Q(x) = x^2 + \alpha x + 2\alpha + 11$$

και:

$$P(x) = x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + 2\kappa$$

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός β είναι ανεξάρτητος του θ.

β) Οι αριθμοί β, $Q(\beta)$, $Q(3)$, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$.

ii) Αν το $Q(x)$ είναι παράγοντας του $P(x)$, να βρείτε τις τιμές των κ και λ.

iii) Για $\kappa = -5$ και $\lambda = 11$, αν υ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$, να λύσετε την εξίσωση:

$$8 - \frac{11}{\sigma\upsilon\nu x} = \upsilon \cdot (1 + 2\varepsilon\varphi^2 x)$$

53. Δίνεται ένα πολυώνυμο $P(x)$ και μια γωνία $\theta \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$4\varepsilon\varphi\theta - 6\sigma\varphi\theta = 5, \quad \eta\mu\theta = \frac{P(2)+3}{5} \quad \text{και}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{P(5)-4}{5}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi\theta = -\frac{3}{4}$$

β) Να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα $x - 2$ και $x - 5$ είναι παράγοντες του $P(x)$.

γ) Θεωρούμε και το πολυώνυμο:

$$Q(x) = P(x+3) + x^2 + x - 4$$

i) Αν υ_1 και υ_2 είναι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $Q(x) : (x + 1)$ και $Q(x) : (x - 2)$ αντίστοιχα, να λύσετε την εξίσωση:

$$3\sigma\upsilon\nu^2 x + \upsilon_1 \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu^2 x = \upsilon_2$$

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $x^2 - x - 2$.

16ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 4.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^3 - 12 = 4x - 3x^2$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(2x+1)^3 = 27$ β) $(x^2-2)^4 - 16 = 0$

γ) $(x^2-11)^5 + 32 = 0$ δ) $(5x-3)^6 + 4 = 0$

3. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες της εξίσωσης:

$$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$$

4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$6x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4 = 0$$

5. Να λύσετε την εξίσωση:

$$3x^3 - 17x^2 + 6x + 4 = 0$$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ β) $4x^2 + 4x + 1 > 0$ γ) $x^2 - 3x + 4 \leq 0$

7. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$P(x) = (x-2)(x^2-3x-4)(x^2+6x+9)(x^2-x+2)$$

Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

8. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$P(x) = (x^2+3x+2)(1-x^2)(-x^2+2x+3)(x^2-2x+1)(x^2+x-2)$$

Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.

9. Να λύσετε την ανίσωση $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 \leq 0$.

10. α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^6 - 3x^4 - 6x^2 + 8 \geq 0$$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$(x^2+2x-2)^3 - (2x^2+4x-6)^2 - 23x^2 - 46x + 68 = 0$$

11. Το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 - 20x + \mu$ έχει παράγοντα το $x+2$, ενώ διαιρούμενο με το $x-1$ αφήνει υπόλοιπο -15.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

12. Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 2x + 1 = 0$.

13. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$$

Να βρείτε:

α) τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$,

β) τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 \quad \text{και} \quad g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 8$$

Να βρείτε:

α) τα σημεία τομής των C_f και C_g,

β) τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g.

15. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 5x - 3 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$. Στη συνέχεια να βρείτε μια ρίζα της παραπάνω εξίσωσης με προσέγγιση δεκάτου.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Πολυωνυμικές εξισώσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3+2x^2-x-2=0$

β) $(x-1)^3-3(x^2-1)+2(x-1)=0$

γ) $x^3-1+6(x^2-1)=x^2-2x+1$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^6-32x=0$

β) $(2x-1)^6-81(2x-1)^2=0$

γ) $(x+2)^{10}+(x+2)^3=0$

δ) $-x^7-64x=0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^6+7x^3-8=0$

β) $(2x-5)^4-10(5-2x)^2+9=0$

γ) $(x+4)^6+16(x+4)^3+64=0$

δ) $(x-1)^4-4=3(x^2-2x+1)$

4. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες:

α) $x^3-5x^2+x-2=0$

β) $x^4-3x^2+7x+1=0$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x^3-x^2-7x+6=0$

β) $x^3-3x-2=0$

γ) $x^3+7x^2-36=0$

δ) $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$

ε) $x^4-9x^2+4x+12=0$

στ) $2x^4-9x^3+37x-30=0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x-1)^3-15x=3-3(x-2)(x+2)$

β) $31-x(x-1)^3=7x-3(x-3)(x+3)$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{1}{2}x^3+\frac{17}{6}x^2+3x-\frac{4}{3}=0$

β) $\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{12}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}=0$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^5+3x^4+6x^3+12x^2+8x=0$

β) $2x^5-5x^4-4x^3+15x^2-6x=0$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^6-6x^4+11x^2-6=0$ **β)** $x^9-5x^6-22x^3-16=0$

γ) $x^6-13x^2+12=0$ **δ)** $x^6-6x^4+32=0$

Β. Ανισώσεις γινόμενο

10. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $(x-2)(x^2+2x-3)>0$

β) $(x^2+3x-4)(x^2-3x+2)<0$

γ) $(1-x)(x^2-3x+2)(x^2+x+2)>0$

δ) $(x^2-7x+12)(-x^2+5x-6)\le 0$

ε) $(-x^2+8x-12)(x^2+x-20)(4-x)\ge 0$

στ) $x^2(9-x^2)(2-x)>0$

ζ) $(2-x)(x^2-3x+2)(-x^2+2x-1)\ge 0$

η) $-x(x^2-1)(-x^2-5x+6)\le 0$

11. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις:

α) $(x-2)^4(x+1)^6(x^2-4)\ge 0$

β) $(x+2)^3(x-4)^4(-x^2+2x+8)>0$

γ) $(x-1)^5(x-2)^4(x-3)^3\le 0$

δ) $(x^2-4)^7(5-x)^8(x^2-7x+10)<0$

12. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$(x-2)(x^2+2x-15)\ge 0$ και

$(x^3-1)(5x^2-x+4)(x+3)>0$

13. Να λύσετε την ανίσωση:

$(|x+2|-3)(x^2-x-6)<0$

14. Να λύσετε την ανίσωση:

$(x^2-6|x|+8)(x^2+2|x|-3)\ge 0$

Γ. Πολυωνυμικές ανισώσεις

15. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^4-x^3-7x^2+13x-6\ge 0$

β) $x^4+5x-6\ge 0$

γ) $x^4-3x^3-3x^2+7x+6\le 0$

δ) $x^4+3x^3+3x^2+8x+12\le 0$

16. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις:

α) $x^4-2x^3+3x^2-4x+2>0$

β) $x^4-7x^3+16x^2-15x+9\ge 0$

γ) $x^4-6x^3+13x^2-12x+4\le 0$

δ) $x^4-5x^3+10x^2-12x+8<0$

17. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$x^3-3x^2-6x+8<0$ και

$-x^3-2x^2+15x\le 0$

18. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $4x^6-x^4-30x^2+27\ge 0$

β) $4x^6-13x^4+11x^2-2<0$

19. Να λύσετε την ανίσωση:

$|x^3-7x|<6$

20. Να λύσετε την ανίσωση:

$|x+2|(x^2+3x-7)\le -x-10$

Ε. Προσδιορισμός παραμέτρων

21. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x)=x^3+(\kappa-6)x^2-7x+\kappa$$

α) Να βρείτε για ποια τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ το 2 είναι ρίζα του $P(x)$.

β) Αν $\kappa=6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

22. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = \lambda^2 x^3 - 4\lambda x + 3 \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x - 1$.

β) Αν $\lambda = 3$, να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$. ***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

23. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 11x + 30 \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}$$

για το οποίο γνωρίζουμε ότι η τιμή του για $x = 1$ είναι 16.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α.

β) Αν $\alpha = -4$ και το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x) = 0$, να προσδιορίσετε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$. ***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

24. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 5x + \beta \quad \text{με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x - 2$ είναι ίσο με -4, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Αν $\alpha = -2$ και $\beta = 6$, να λύσετε την εξίσωση:

$$P(x) = 0$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

25. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \quad \text{με } \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς 0, 1 και 3.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\beta = -4, \quad \gamma = 3 \quad \text{και} \quad \delta = 0$$

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

26. Το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \alpha$$

έχει παράγοντα το $x + 2$. Επίσης η διαίρεση του $P(x)$ με το $x - 1$ αφήνει υπόλοιπο -18.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

27. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$$

Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$ και $P(2) = 18$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$,

β) να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$,

γ) να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

28. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$$

Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$, ενώ η διαίρεση του $P(x)$ με το $x - 2$ αφήνει υπόλοιπο $P(1) - 4$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

29. Το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\lambda^2 - 1)x^4 - 2(\lambda - 1)x^3 + 2\lambda x^2 + \lambda + 1$$

είναι 3ου βαθμού.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -1$.

β) Να βρείτε το $P(x)$.

γ) Να βρείτε τις ρίζες του $P(x)$. ***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

30. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - 22x + 6\alpha$$

το οποίο έχει παράγοντα το $x^2 + 2x - 3$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το πρόσημο του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του x.

γ) Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$P\left(-\frac{7}{2}\right)P\left(\frac{9}{5}\right)P\left(\frac{9}{4}\right)$$

31. Δίνεται η εξίσωση:

$$6x^3 + \alpha x^2 + (2\alpha + 2)x + 3 = 0 \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{Z}$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{Z}$ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραια ρίζα.

β) Για τη μικρότερη τιμή του α που βρήκατε στο ερώτημα (α) να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

32. Δίνεται ο αριθμός $\alpha \in \mathbb{Z}$ και τα πολυώνυμα:

$$P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + (\alpha - 8)x + 6$$

και:

$$Q(x) = x^3 - 7x^2 + 2x + 40$$

Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ έχουν κοινή ρίζα.

α) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{Z}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

33. Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί α και β και τα πολυώνυμα:

$$P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 - (\beta + 4)x - 17$$

και:

$$Q(x) = x^3 + (\alpha - 1)x^2 + \beta x - 2$$

Το $P(x)$ διαιρούμενο με το $x - 2$ αφήνει υπόλοιπο -29. Επίσης ισχύει ότι $Q(-3)Q(1)Q(5) = 0$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq Q(x)$.

34. Το πολυώνυμο:

$$P(x) = 12x^3 - 20x^2 + x + \alpha$$

διαιρούμενο με το $2x - 1$ αφήνει υπόλοιπο 5.

α) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 5$.

35. Το πολυώνυμο $P(x) = 12x^3 - 8x^2 - 10x + \alpha$ έχει παράγοντα το $3x + 1$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 3x + 1$.

Ε. Συναρτήσεις

36. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^4 - 15x^2 + 10x + 24}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

37. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + \alpha x^2 - 5x + 6$$

διέρχεται από το σημείο $M(-2, 0)$, τότε:
α) να αποδείξετε ότι $\alpha = -14$,
β) να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. ***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

38. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 7x \quad \text{και}$$

$$g(x) = 2x^3 + x^2 + 6$$

39. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$$

βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

40. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 3x^3 + \alpha x^2 - 5x - \alpha - 2$$

τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 6. Να βρείτε:
α) την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$,
β) τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

41. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$$

δε βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

42. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \alpha x^3 + (9 - \alpha)x^2 + x - 10$$

διέρχεται από το σημείο $M(-1, -6)$.
α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.
β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f δε βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

43. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^4 + \alpha x^2 + 3x - 5$$

και:

$$g(x) = x^5 - 3x^4 + (\alpha + 5)x^3 + x^2 - \alpha - 8$$

Οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = -1$.
α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$.
β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f δε βρίσκεται κάτω από τη C_g.

Ζ. Προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση

44. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-1, 0)$.
β) Να βρείτε μια ρίζα της εξίσωσης (1) με προσέγγιση δεκάτου.

45. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$3x^5 + 2x^2 = 7x^3 + 5$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-1, 0)$.

46. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του $\theta \in \mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$x^3 + 2x^2 - 9x + 4 + \eta\mu\theta = 0$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

Η. Σύνθετες ασκήσεις

47. Να λύσετε την εξίσωση:

$$|x^3 - 7x + 6| = x^3 - 7x + 6$$

48. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $(x^2 + 1)^3 - 8(x^2 + 1)^2 + 17x^2 + 7 = 0$
β) $(x^2 - 2)^3 + 3x^4 - 18x^2 + 16 = 0$
γ) $(x^2 + x - 5)^3 - 5(x^2 + x - 4)^2 - 7(x^2 + x) + 61 = 0$

49. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 24$
β) $(x - 2)(x - 3)(x + 4)(x + 5) = 60$

50. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$
β) $12x^5 - 4x^4 - 47x^3 + 31x^2 + 20x - 12 = 0$

51. Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 1 = 0$$

52. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του:

$$P(x) = x^4 + x^2 + \alpha x + \beta$$

με το $x^2 - 2x - 3$ είναι ίσο με $16x + 34$.
α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

53. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 4$$

με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}$ και $\alpha \neq 0$. Αν το $P(x)$ έχει δύο ακέραιες και περιττές ρίζες:
α) να βρείτε την τιμή του β και να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και γ είναι αντίθετοι,
β) να εκφράσετε την τρίτη ρίζα του $P(x)$ ως συνάρτηση του α.

54. Το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

έχει παράγοντα το $x + 1$ και τρεις πραγματικές ρίζες των οποίων το άθροισμα είναι -2 και το γινόμενο είναι 6. Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ και τις

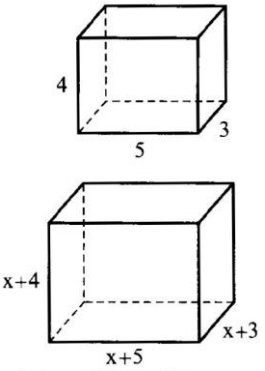
ρίζες του $P(x)$.

Θ. Προβλήματα

55. Μια εταιρεία κατασκευάζει κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις:

3 cm, 4 cm και 5 cm

Ένας νέος πελάτης ζήτησε από την εταιρεία να κατασκευάσει κουτιά με όγκο 120 cm^3, δηλαδή διπλάσιο από εκείνον που κατασκευάζει. Η εταιρεία αποφάσισε να κατασκευάσει τα κουτιά που ζήτησε ο πελάτης της, αυξάνοντας τις διαστάσεις του αρχικού κουτιού κατά σταθερό ακέραιο μήκος x.



α) Να αποδείξετε ότι το x θα είναι λύση της εξίσωσης $x^3 + 12x^2 + 47x - 60 = 0$.
(Ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ δίνεται από τον τύπο $V = αβγ$.)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο x λύνοντας την εξίσωση που δίνεται στο ερώτημα (α).

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

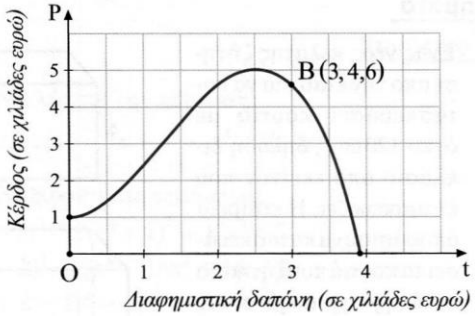
56. Μια εταιρεία εκτίμησε ότι το κέρδος της P (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός συγκεκριμένου προϊόντος ήταν:

$$P(x) = -0,5x^3 + 1,9x^2 + 1, \quad 0 \le x < 4$$

όπου x είναι η διαφημιστική δαπάνη (σε χιλιάδες ευρώ). Για αυτό το προϊόν ξόδεψε για διαφήμιση 3 χιλιάδες ευρώ και το κέρδος της ήταν 4,6 χιλιάδες ευρώ.

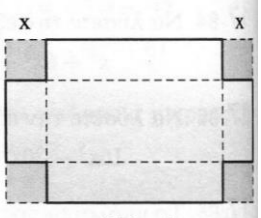
α) i) Να χρησιμοποιήσετε την επόμενη γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ για να εκτιμήσετε ένα άλλο ποσό x που θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση η εταιρεία, ώστε να έχει το ίδιο κέρδος.

ii) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του ερωτήματος (i).



β) Πόσα χρήματα πρέπει να δαπανήσει η εταιρεία για διαφήμιση, ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ; ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

57. Για να κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κουτί από ένα ορθογώνιο χαρτόνι με διαστάσεις 5 dm και 8 dm, κόβουμε ίσα τετράγωνα, πλευράς x, από κάθε γωνία του και γυρίζουμε προς τα πάνω τις πλευρές του (σχήμα 1).



Σχήμα 1

α) Να αποδείξετε ότι ο όγκος V του κουτιού εκφράζεται ως συνάρτηση του x με τον τύπο:

$$V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$$

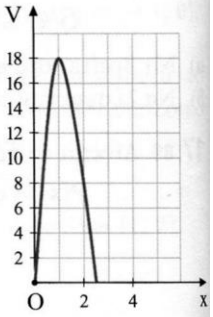
β) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει το x στο πλαίσιο του προβλήματος.

γ) Να βρείτε τις διαστάσεις (εκφρασμένες σε dm με ακέραιους αριθμούς) του κουτιού, αν γνωρίζουμε ότι ο όγκος του είναι 8 dm^3.

δ) Στο σχήμα 2 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x \quad \text{για } x \in (0, 2,5)$$

Χρησιμοποιώντας το σχήμα να βρείτε ποιος είναι ο μεγαλύτερος όγκος που μπορεί να έχει το κουτί. Στη συνέχεια να υπολογίσετε αλγεβρικά τις διαστάσεις του κουτιού με τον μεγαλύτερο όγκο.



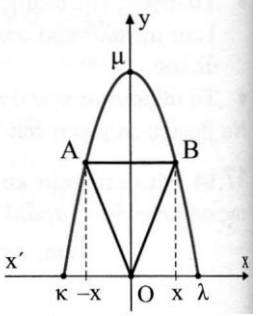
Σχήμα 2

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

58. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 9 - x^2$$

με πεδίο ορισμού [κ, λ].



α) Να βρείτε τους αριθμούς κ, λ και μ.

β) Θεωρούμε τα σημεία A και B της C_f με τετμημένες $-x$ και x αντίστοιχα. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι ίσο με 10 τετραγωνικές μονάδες.

Ι. Συνδυαστικά θέματα

59. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + (\lambda + 2)x + \lambda = 0 \qquad (1)$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$x_1^3 + x_2^3 + 19x_1x_2 < -23$$

60. Το πολυώνυμο:

$$P(x) = 3x^3 - 10x^2 \cdot \eta\mu\omega + 25x \cdot \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega + 50\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} - \omega\right) \cdot \eta\mu(9\pi - \omega)$$

όπου $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, έχει παράγοντα το $x - 2$.

α) Να βρείτε το ημω και το συνω.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

61. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο $x^2 + 2x$ και είναι τέτοιο, ώστε $P(1) = 0$ και $P(2) = 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(x) = x^3 + x^2 - 2x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 8$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x > 2$.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

62. Το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x + \beta$ διαιρούμενο με το $x^2 + x - 2$ δίνει υπόλοιπο $\upsilon(x) = 11x - 6$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:

$$Q(x) = P(x) + (2x - 4)^2$$

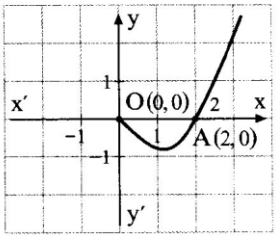
είναι τέλειο τετράγωνο ενός άλλου πολυωνύμου.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

63. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \gamma x + \delta$$

όπου $x \in \mathbb{R}$ και γ, δ πραγματικές σταθερές.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση να αποδείξετε ότι $\gamma = -1$ και $\delta = 0$.

β) Θεωρώντας τώρα δεδομένο ότι $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$:

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ii) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$.

iii) Να επαληθεύσετε ότι $f(1) = -\frac{3}{4}$ και στη συνέχεια να λύσετε τις εξισώσεις:

$$f(x) = -\frac{3}{4} \quad \text{και} \quad f(x) = \frac{3}{4}$$

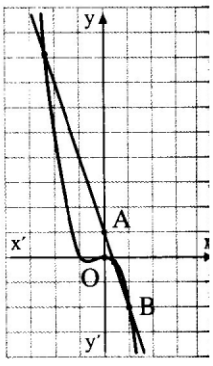
(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

64. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = -x^3 - x^2$$

και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία:

$A(0, 1)$ και $B(1, -2)$



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

β) Αν η ευθεία έχει εξίσωση:

$$y = -3x + 1$$

να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $-x^3 - x^2 < -3x + 1$.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

65. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha x^7 + (\alpha^2 - 1)x^3 + (12 - \alpha^3)x + \alpha - 3$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-1, -10)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < -10$.

66. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση:

$$f(x) = x^7 - 3x^5 + \alpha x^3 + 8x + \alpha + 6$$

Τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

$$f(x) : (x - 5) \quad \text{και} \quad f(x) : (x + 5)$$

είναι αντίθετοι αριθμοί.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(\frac{11}{9}\right)y^3 + 3f\left(-\frac{11}{9}\right)y \geq 2f\left(-\frac{11}{9}\right)$$

17ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ: § 4.4 Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε Πολυωνυμικές

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1}{x+2}-\frac{3x-10}{x^2-4}=2x-\frac{x-3}{x-2}$$

2. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{(x+2)(x^2-9)}{-x^2-2x+3}\geq 0$$

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $2x^2+\frac{5x^2}{x-3}+\frac{6}{x}\leq\frac{7x^2-18}{x^2-3x}$ β) $\frac{x^3+6x^2-x}{x^2-x+3}<2$

4. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x+2}+x=4$.

5. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$.

6. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{4x-4}-5x+13=0$.

7. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{2x+6}-\sqrt{9-x}\leq 0$.

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\sqrt{x+10}\geq x-2$ β) $\sqrt{x+7}\leq x+1$

9. Να λύσετε την εξίσωση:

$$4\sigma\upsilon\nu^4x+4\sigma\upsilon\nu^3x+9\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu x-7=0$$

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Κλασματικές εξισώσεις

1. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $\frac{3x}{x-3} - \frac{2x^2}{x+1} - \frac{10x+6}{x^2-2x-3} = 0$

β) $\frac{3x^2}{x-2} - \frac{9x}{x^2-4} - \frac{10x^2+20}{x^3-4x} = 4 + \frac{10}{x^2+2x}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x + \frac{3}{x-2} = 1 - \frac{4-5x}{x^2-2x}$

β) $\frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{x^2+x+1}{x+1}$

γ) $\frac{x^2-3x+2}{x} - \frac{1-3x^2}{x-1} = \frac{2}{x^2-x}$

δ) $(x+1)^2 + \frac{3(x+1)^2}{x} = \frac{x+2}{x} - \frac{x^2+2x-1}{x(x+1)}$

Β. Κλασματικές ανισώσεις

3. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις:

α) $\frac{(x-2)(9-x^2)}{x^2+2x-3} \geq 0$

β) $\frac{(x^2-1)(-x^2+x+6)}{x^2-2x-8} \leq 0$

γ) $\frac{(x+3)(-x^2+x-1)}{x^2-4} \geq 0$

δ) $\frac{x(x^2+3x-10)}{-x^2+4x-4} \geq 0$

4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{x^3-5x^2+2x+8}{|x-3|} < 0$$

5. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{(x-1)^4(x-3)^5}{(x+2)^7(5-x)^6(7-x)^3} \geq 0$$

6. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{x^2-4|x|+3}{x^2+2x-8} \geq 0$$

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\frac{x^3-4x^2+x+6}{x^2+2x-3} \leq 0$

β) $\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2-3x-18} \geq 0$

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\frac{3x-1}{x+2} \geq 2$ **β)** $\frac{4x}{3x-x^2} \geq \frac{1}{2}$

γ) $\frac{x+8}{2x+1} \geq x$ **δ)** $\frac{2x^2-4x+5}{x^2+2} \geq 1$

9. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις:

α) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \leq \frac{1-2x}{x^3+1}$

β) $\frac{2-x}{x^3+x^2} \geq \frac{1-2x}{x^3-3x^2}$

10. Να βρείτε για ποια x συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\frac{-x^2+5x+6}{x^2+x-6} \geq 0 \quad \text{και} \quad \frac{3}{5-x} \geq 1$$

11. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\frac{x^2}{x+2} > \frac{4(x-2)}{x} - \frac{x-10}{x^2+2x}$

β) $\frac{x^3+6x-5}{x^2-9} + \frac{3x}{x+3} + \frac{5}{x-3} + 2 \geq 0$

γ) $\frac{2x^2}{x+2} \leq \frac{3x}{x-1} - \frac{2x+3}{x^2+x-2}$

δ) $\frac{3x^2-6x+2}{x-2} - \frac{2}{x^2-3x+2} \geq \frac{x^2-5x+6}{x-1}$

12. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\left|\frac{x^2-2}{3x+2}\right| < 1$$

Γ. Άρρητες εξισώσεις

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{3x+18} = x$ **β)** $\sqrt{x+10} = 2-x$

γ) $x - \sqrt{14-2x} = 3$ **δ)** $x + \sqrt{4-11x} = 2$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{9-x^2} - \sqrt{x-5} = 2$

β) $\sqrt{4-x^2} + \sqrt{3x-6} = 8-4x$

γ) $\sqrt[3]{x^2-4} + \sqrt[3]{4-x^2} = x+2$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{x+\sqrt{1-x}} - \sqrt{x} = 1$

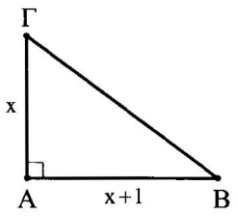
β) $\sqrt{x-1} = \sqrt{x-1-\sqrt{x+7}}$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4x-1}$

β) $\sqrt{x+1} = \sqrt{x+6} - \sqrt{x-2}$

17. Το διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο έχει περίμετρο 12 cm και οι σημειωμένες διαστάσεις είναι σε cm. Να βρείτε το x.



18. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{4-x^2} = \lambda$

β) $\sqrt{x^2+4} = x - \lambda$

Δ. Άρρητες ανισώσεις

19. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις:

α) $\sqrt{x-3} \geq x-5$ **β)** $\sqrt{x+2} - x > 0$

γ) $x - 2 - \sqrt{x} > 0$ **δ)** $\sqrt{7-x} > x-1$

ε) $\sqrt{x-6} \leq 3-x$ **στ)** $2\sqrt{x-2} < x-1$

20. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\sqrt{x^2-3x} \geq x-3$

β) $\sqrt{x^2+3x-10} \leq x+5$

γ) $\sqrt{2-x-x^2} > x-3$

δ) $\sqrt{-x^2+9x-8} < x^2-8x$

21. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2} \geq 1$

β) $\sqrt{4-\sqrt{5-x}-\sqrt{3-x}} > 0$

Ε. Επίλυση εξισώσεων – ανισώσεων με αντικατάσταση

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$ **β)** $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$

γ) $x + 6\sqrt{x} + 8 = 0$ **δ)** $\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[6]{x} + 2 = 0$

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + 3 = 0$

β) $\sqrt[3]{x^2-4x+4} - 2\sqrt[3]{x-2} - 3 = 0$

24. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^3 - \left(\frac{1-x}{x+2}\right)^2 - \frac{22x-22}{x+2} - 24 = 0$

β) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^4 - 5\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 + 4 = 0$

25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 23x + 18\sqrt{x} + 40 = 0$

β) $x - 33\sqrt{x} + 28\sqrt[4]{x} + 60 = 0$

26. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2+4x+3} = \sqrt{6x^2+12x+7}$

β) $\sqrt{\frac{x+1}{2x-1}} + \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} = \frac{5}{2}$

27. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\sqrt{x-2} + 2 \leq 3\sqrt[4]{x-2}$

β) $\sqrt{3x^2-x+5} - \sqrt{3x^2-x} \geq 1$

28. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $2\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 - \frac{5x-10}{x-1} + 2 \leq 0$

β) $\left(\frac{1-2x}{x-2}\right)^2 + \frac{2x-1}{x-2} - 2 \leq 0$

29. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\eta\mu^3 x + 5\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu x - 3 = 0$

β) $4\sigma\upsilon\nu^4 x + 4\sigma\upsilon\nu^3 x + 11\eta\mu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x - 5 = 0$

Ζ. Συνδυαστικά θέματα

30. Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda^2(x-1) - (\lambda-2)^2 = \lambda(6x+\lambda) - 8(x+1) \quad (1)$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση x_0 για την οποία ισχύει $x_0 \leq 1$.

31. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda-1)x^2 - 2\lambda x + \lambda + 1 = 0 \quad (1) \quad \text{με } \lambda \neq 1$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \geq 0$$

όπου x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

32. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - (\lambda-1)x + \lambda - 3 = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύουν:

i) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq 2$ **ii)** $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \leq 7$

33. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 7x + \alpha + 5$$

για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 και ότι έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ να λύσετε:

i) την ανίσωση $P(x) \geq 0$,

ii) την εξίσωση $\sqrt{P(x)} = x - 1$.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

34. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\kappa^2-1)x^4 + \frac{1}{2}(\kappa+1)x^3 + (\kappa-1)x^2 - 3\kappa x + \lambda, \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ, αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 3ου βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι ίσο με -4.

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$:

i) να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-1$,

ii) να λύσετε την εξίσωση:

$$P(x) + 4 = x^2 - 1$$

iii) να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)} \geq 1$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

35. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = x^3 + \alpha x - 6 \quad \text{και}$$

$$Q(x) = x^2 + (\alpha + 1)x + 17$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$ είναι κατά 6 μικρότερο από το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x) : (x + 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$.

β) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : Q(x)$.

γ) Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο και $\upsilon(x)$ είναι το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεσης, να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{P(x)}{\pi(x)} + \upsilon(x) \geq 62$$

36. Το πολυώνυμο:

$$P(x) = 3x^4 + x^3 + \alpha x^2 - (\alpha + 10)x + 2\alpha$$

έχει παράγοντα το $x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\left|\frac{P(x) - P(-x) - 12}{2x - 4}\right| = \frac{-x^3 + 7x + 6}{x - 2}$$

37. Δίνεται γωνία $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + 5\varepsilon\varphi\omega \cdot x^2 + 12\sigma\varphi\omega \cdot x - 6$$

έχει παράγοντα το $x + 1$.

α) Να βρείτε την $\varepsilon\varphi\omega$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 60$.

γ) Θεωρούμε τον αριθμό $\lambda = 26\sigma\upsilon\nu\omega - 13\eta\mu\omega$. Έστω επίσης $\pi(x)$ και υ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - \lambda$. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{P(x)}{\pi(x) + \upsilon} \geq \frac{4x - 3}{3}$$

38. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + (\lambda - 4)x + \lambda - 5$$

και:

$$g(x) = -x^2 + \lambda x + 5\lambda - 2$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις έχουν τον ίδιο άξονα συμμετρίας.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.

β) Να λύσετε την εξίσωση $xf(x) = g(x) - 5$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$.

18^{ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ : **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΟ 4^{ο} ΚΕΦΑΛΑΙΟ**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

.1 Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = (\alpha^3 + 2)x^3 + x^2 + 1 \quad \text{και}$$

$$Q(x) = 3\alpha x^3 + x^2 + 1$$

όπου α θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το α, ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

β) Αν $\alpha = 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες. ***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

.2 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = \alpha x^3 + (\beta - 1)x^2 - 3x - 2\beta + 6$$

όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι ίσο με 2, να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 4$.

β) Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος (α) να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

.3 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 - x^3 + \kappa x^2 + x + \lambda \quad \text{με} \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ όταν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το $x + 2$.

β) Για $\kappa = -7$ και $\lambda = 6$ να λύσετε την εξίσωση:

$$P(x) = 0$$

γ) Για $\kappa = -7$ και $\lambda = 6$ να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{P(x)}{x - 5} \geq 0$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.4 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$$

α) Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $3x^2 - 4x + 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

.5 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + \alpha^3 x^2 - \alpha^2 x - \alpha \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}$$

α) Να κάνετε τη διαίρεση:

$$P(x) : (x - \alpha)$$

και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το $x - \alpha$ διαιρεί το $P(x)$.

γ) Αν $\alpha = -1$, να λύσετε:

i) την ανίσωση $P(x) \geq 0$,

ii) την ανίσωση $(x + 1)P(x) \leq 0$.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.6 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 8x^2 + \alpha x + \beta$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x + 1$ αφήνει υπόλοιπο $16 + P(1)$ και διαιρούμενο με $x - 1$ αφήνει υπόλοιπο $16 - P(-1)$, να αποδείξετε ότι:

α) $P(1) = 0$ και $P(-1) = 16$,

β) $\alpha = 4$ και $\beta = -3$,

γ) $P(4)P(5)P(6)P(7) \neq 0$. ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

.7 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (x^2 - 1)(x^2 + \alpha)(x^2 - 2)^2$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + \sqrt{7}$ είναι 600.

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 72$.

.8 Το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\lambda^2 - 4)x^4 + \frac{\lambda^2 - \lambda - 2}{4}x^3 + 3x^2 + 2\lambda x - \lambda$$

είναι 3ου βαθμού.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -2$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 14$.

γ) Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο και $\upsilon(x)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 1)$, να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{\pi(x)} = \upsilon(x)$.

.9 Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο αν διαιρεθεί με το $2x^2 + 3x + 1$ αφήνει υπόλοιπο $-32x - 9$.

α) Να βρείτε τις τιμές $P(-1)$ και $P\left(-\frac{1}{2}\right)$.

β) Επιπλέον ισχύει ότι:

$$P(x) = \kappa x^3 - (\kappa + \lambda)x^2 + \lambda x + 1$$

i) Να αποδείξετε ότι $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$.

ii) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $2x + 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 7$.

iv) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 + 1$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 24x^2 - 43x - 10$.

.10 Καθένα από τα πολυώνυμα:

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 5x + \beta$$

και:

$$Q(x) = x^3 - \beta x^2 + (1 - 5\alpha)x - 6$$

έχει παράγοντα το $x - 1$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+1}{P(x)}+\frac{x}{Q(x)}=\frac{3x+2}{x^2-4}$$

.11 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x)=x^4-8x^3+(5\alpha-1)x^2+8x-3\alpha-6$$

όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το x^2-1 και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

β) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

γ) Για $\alpha=3$ να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$, καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι κάτω από τον άξονα x′x.

.12 Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x)=4x^3+\alpha x^2+(6\alpha+3)x-9 \quad \text{με } \alpha\in\mathbf{Z}$$

και:

$$Q(x)=x^4-4x^3-9x^2+16x+20$$

Ο αριθμός $\rho\in\mathbf{Z}$ είναι λύση της εξίσωσης $P(x)=0$ και της ανίσωσης $Q(x)<0$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-4$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

.13 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x)=x^4-3x^3+\alpha x^2-5x+3 \quad \text{με} \quad \alpha\in\mathbf{Z}$$

και έστω $\pi(x)$ το πηλίκο και $\upsilon(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x^2+2)$. Το $\pi(x)$ έχει παράγοντα το $\upsilon(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$.

β) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης:

$$P(x):(x-1)$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P(x)}{x^2-4x+3}\geq 3-2x$.

.14 Έστω $P(x)$ πολυώνυμο 3ου βαθμού, το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+1, έχει ρίζα το 0 και το άθροισμα των συντελεστών του είναι ίσο με 2.

α) Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^3+x$.

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\big(P(x)-2\big)^3+\big(P(x)-2\big)^2+P(x)>2$$

.15 Δίνονται πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με:

$$Q(x)=\alpha x^3+13x^2+5x+\beta$$

για τα οποία ισχύουν τα εξής:

- Η διαίρεση $P(x):(x^2-4x+3)$ αφήνει υπόλοιπο $4x-10$.
- Το $Q(x)$ έχει παράγοντα το $x-P(1)$.
- Η διαίρεση $Q(x):\big(x+P(3)\big)$ αφήνει υπόλοιπο 20.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=-6$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $Q(x)\geq 0$.

γ) Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο και $\upsilon(x)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x):(2x^2+15x+23)$, να λύσετε την εξίσωση:

$$\sqrt{\pi(x)}=\sqrt[3]{\upsilon(x)-10}$$

.16 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x)=\alpha x^9+\beta x^7+\gamma x-2017$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$ πραγματικοί αριθμοί.

α) Να εξετάσετε αν το $P(x)$ μπορεί να έχει παράγοντα της μορφής $x^2-\rho^2$.

β) Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου:

$$Q(x)=P(x)+P(-x)$$

γ) Αν το $x-99$ είναι παράγοντας του $P(x)$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+99$.

.17 Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$P(x)-P(x-1)=6x^2-12x+12$$

και ο σταθερός όρος του είναι 22.

α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το x^2+3x+2.

β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι το $P(x)$ είναι 3ου βαθμού, τότε:

i) να βρείτε το $P(x)$,

ii) να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{P(x)}{3x+4}\leq 10$$

.18 Το πολυώνυμο:

$$P(x)=x^5+(\alpha-11)x^4+\alpha x^3-6x^2+5x-1$$

με $\alpha\in\mathbf{Z}$, έχει ακέραια ρίζα.

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbf{Z}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

.19 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδόν:

$$E=30\,\text{cm}^2$$

του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 1 cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x και y ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$y=\frac{60}{x} \quad \text{και} \quad (x+1)^2=x^2+y^2$$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση:

$$2x^3+x^2-3600=0$$

γ) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 15, να βρείτε την τιμή του x, καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο (με διαφορετικά μήκη πλευρών από αυτά που προσδιορίσατε στο ερώτημα (γ)) το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.20 Το πολυώνυμο:

$$P(x)=8x^4+12x^3-2x^2+\alpha x+\beta$$

έχει παράγοντα το $4x^2-3$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\leq 0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$8\sigma\upsilon\nu^4x+6\sigma\upsilon\nu x\cdot(1-2\eta\mu^2x)=$$

$$=3\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu^2x+5$$

.21 Το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$$

έχει παράγοντα το:

$$Q(x) = x^2 + \alpha x - 2$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = -13$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

.22 Το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$$

όπου $\alpha \in (0, \pi)$, έχει παράγοντα το $x - \eta\mu\alpha$.

α) Να βρείτε την τιμή του α.

β) Αν $\upsilon(x)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου:

$$Q(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 3$$

με το $x^2 - \sigma\upsilon\nu(14\alpha)$, να λύσετε την ανίσωση:

$$P(x) \leq \upsilon(x)$$

.23 Τα πολυώνυμα:

$$P(x) = (x-2)^{2017} + x + 5$$

και:

$$Q(x) = -2x^3 + 19x^2 + \alpha x + \beta$$

όταν διαιρεθούν με το $x^2 - 4x + 3$ αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $Q(x) \geq 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 7$.

.24 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = \alpha(x^2 - x + 1)^3 - 27(x-1)^2x^2$$

Το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$ ισούται με 4.

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

.25 Το πολυώνυμο:

$$P(x) = 16x^4 - 32x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

είναι ίσο με το τετράγωνο του $4x^2 + \delta x - 3$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\sigma\upsilon\nu^4x - 4\sigma\upsilon\nu^3x + \eta\mu^2x + 3\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{8}$$

.26 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\lambda x^3 - 5x^2 - 2\lambda x + \lambda^3 - 5}{2x - 1}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(1, -4)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $|f(x)| \leq \frac{8 - x}{2}$.

.27 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^4 + \alpha x^2 + \alpha + 1}{x^2 - 16}$$

με $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(2, -1)$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^3 + 4x^2 + \frac{f(-2017)}{f(2017)} \cdot x - 6 =$$

$$= f\left(\sqrt{3} - 2\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{3} + 2}\right)$$

.28 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + x^2 + \lambda x + \mu$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - 1$ είναι $-7x + 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -8$ και $\mu = 4$.

β) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει μία ακέραια και δύο άρρητες ρίζες.

γ) Να βρείτε ένα πολυώνυμο:

$$Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{Z}$, το οποίο έχει ρίζες τα τετράγωνα των ριζών του $P(x)$.

.29 Το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + \lambda x^2 + (\lambda + 14)x - 3$$

έχει παράγοντα το $x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -6$.

β) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει 3 άνισες πραγματικές ρίζες.

γ) Έστω ρ_1 και ρ_2 οι άρρητες ρίζες του $P(x)$. Θεωρούμε και το πολυώνυμο:

$$Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ, ώστε η διαίρεση του $Q(x)$ με το $x - 1$, το $x - \rho_1$ και το $x - \rho_2$ να αφήνει υπόλοιπο 1, ρ_2 και ρ_1 αντίστοιχα.

.30 Δίνονται πραγματικοί αριθμοί λ και μ για τους οποίους ισχύουν $\lambda < 0$ και $\mu < -1$. Θεωρούμε τα πολυώνυμα:

$$\alpha(x) = x^2 + \lambda x + \mu, \quad \beta(x) = \alpha(\alpha(x))$$

$$\gamma(x) = \alpha(x) - x \quad \text{και} \quad \delta(x) = \beta(x) - x$$

α) Να αποδείξετε ότι το $\gamma(x)$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες ρ_1 και ρ_2.

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες ρ_1 και ρ_2 του $\gamma(x)$ είναι ρίζες και του $\delta(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το $\delta(x)$, εκτός από τις ρ_1 και ρ_2, έχει άλλες δύο ρίζες ρ_3 και ρ_4.

δ) Για τους αριθμούς ρ_3 και ρ_4 του ερωτήματος (γ) να αποδείξετε ότι $\rho_3 = \alpha(\rho_4)$ και $\rho_4 = \alpha(\rho_3)$.