19^{ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 5.1 Εκθετική συνάρτηση**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\dfrac{3^{24}\cdot 3^{14}}{(3^5)^7}$ β) $\dfrac{8^7\cdot 9^{11}}{6^{20}}$ γ) $9^{\frac{1}{2}}$

δ) $8^{-\frac{4}{3}}$ ε) $\left(64^{\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$ στ) $\sqrt[6]{4^5}\cdot\sqrt[3]{4^2}$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2^x$ και $g(x)=3^x$.

α) Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα.

β) Να σχεδιάσετε τις C_f και C_g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

x	−1	0	1	2
f(x)				
g(x)				

3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \text{και} \quad g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

α) Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα.

β) Να σχεδιάσετε τις C_f και C_g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

x	−2	−1	0	1
f(x)				
g(x)				

4. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x+2 \quad \text{και} \quad g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-1$$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4\cdot 2^x$, $g(x)=\dfrac{2^x}{2}$ και $h(x)=2^x$.

α) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της C_h.

β) Να σχεδιάσετε τις C_f και C_g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

6. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2^{x+1}-3$.

7. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=-3^x$.

8. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x)=3^x \quad \text{και} \quad g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

9. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\left(\frac{\lambda+4}{2-\lambda}\right)^x$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}-\{2\}$ η συνάρτηση $f(x)$:

α) έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, β) είναι εκθετική,

γ) είναι γνησίως αύξουσα, δ) είναι γνησίως φθίνουσα.

10. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι $1-1$.

α) $f(x)=4e^{2x^3-1}$ β) $f(x)=3^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x+x^3$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2^x=32$ β) $7^{x^2-3x-10}=1$ γ) $9^{|x|-5}=\frac{1}{27}$

δ) $5^{x+3}+25=0$ ε) $13^{x-1}=0$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $7^{2x-5}-7^{4-x}=0$ β) $3^{8-|x|}=9^{|x|-2}$

γ) $8^{x^2-x}=4^{x^2+2}$ δ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+5}=\sqrt{2}^{x-4}$

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $4^{x+1}-9\cdot 2^x+2=0$ β) $3^x-7=\frac{63}{3^{x+1}}-3^{3-2x}$

14. Να λύσετε την εξίσωση:

$$9^{x+1}-4^{x+2}=44\cdot 4^{x-1}+3^{2x}$$

15. Να λύσετε την εξίσωση $4^{x+1}-13\cdot 6^x+9^{x+1}=0$.

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x^2-3x+1)^{3x-5}=1$ β) $(x-3)^{2x^2-5x-3}=(x-3)^{x^2-4x-3}$

17. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $3^{12-5x}<9$ β) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-2x}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x+10}$

γ) $e^{|2x-1|-5}\geq 1$ δ) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-9}<-1$

ε) $5^{3-4x}\geq -25$ στ) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2-4x}-\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-3x-4}\geq 0$

18. Να λύσετε την ανίσωση:

$$4\cdot 2^{x-3}+\frac{16}{2^{x+2}}>3$$

19. Να λύσετε την ανίσωση:

$$2^{x-1}-15\cdot 3^{x-6}\leq 4\cdot 2^{x-5}+3^{x-4}$$

20. Να λύσετε την ανίσωση:

$$5\cdot 9^x<2\cdot 4^x+3\cdot 6^x$$

21. Να λύσετε την ανίσωση:

$$(x^2-2x-3)(e^x-1)(2^x-8)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x-\frac{4}{9}\right)\geq 0$$

22. Να λύσετε την ανίσωση $(x-2)^{2x^2-3x-5}>1$ με $x>2$.

23. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 8^{x-y}\cdot 4^{2y-1}=4\cdot 2^x \\ 1000^{x-2}=10\cdot 100^{x+y} \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2^{x+1}-15\cdot 3^{y-1}=3 \\ 2^{x+2}-3^{y+1}=13 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 2^x = 3y \\ y \cdot 3^x = 12 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 108 \\ 2^y \cdot 3^x = 72 \end{cases}$

24. Ένα ραδιενεργό υλικό διασπάται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής απόσβεσης. Ο χρόνος ημιζωής του υλικού αυτού είναι 3 χρόνια.

α) Να αποδείξετε ότι η ποσότητα $Q(t)$ του υλικού που απομένει μετά από t χρόνια είναι:

$$Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$$

όπου Q_0 η αρχική του ποσότητα.

β) Αν αρχικά υπήρχαν 8 Kg ραδιενεργού υλικού, να βρείτε μετά από πόσα χρόνια θα έχουν απομείνει 250 g.

25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $5^x = 12 - 7^x$ β) $3^x + 4^x = 5^x$

26. Να λύσετε την ανίσωση $5 - 4x^3 < e^{x-1}$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λύσετε την ανίσωση $2^{x^2-2} - 2^{1-2x} < (1-2x)^3 - (x^2-2)^3$.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Γραφικές παραστάσεις

1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\quad g(x)=\frac{1-2^x}{2^x}\quad \text{και}$$

$$h(x)=\frac{1+2^{x+1}}{2^x}$$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=3^x,\quad g(x)=3\cdot 9^{\frac{x}{2}},\quad h(x)=\frac{3^x}{9}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι C_g και C_h προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της C_f.

β) Να σχεδιάσετε τις C_f, C_g και C_h στο ίδιο σύστημα αξόνων.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{4-2^{x+1}}{2^x}$$

α) Να βρείτε από ποιες μετατοπίσεις της C_f προκύπτει η C_g.

β) Να σχεδιάσετε τις C_f και C_g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

4. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2^x$ και $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

β) $f(x)=4^x$ και $g(x)=4^{-x}$

5. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ και $g(x)=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$

β) $f(x)=2^x$ και $g(x)=-2^x$

6. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x)=3^{|x|}$ **β)** $g(x)=3^{-|x|}$

γ) $h(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ **δ)** $\varphi(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-|x|}$

7. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2^{|x|+x}$ **β)** $g(x)=2^{|x|-x}$

γ) $h(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|+x}$ **δ)** $\varphi(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|-x}$

Β. Εκθετικές με παράμετρο στη βάση

8. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)=(|\lambda|-3)^x$:

α) ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$,

β) είναι εκθετική,

γ) είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

δ) είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

9. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)=(\lambda^2-4\lambda+4)^x$ είναι:

α) γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

β) γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

10. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{\lambda+1}{5-\lambda}\right)^x$:

α) ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$,

β) είναι εκθετική,

γ) είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

δ) είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

11. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση:

$$f(x)=(\lambda^4+4\lambda^3-7\lambda^2-22\lambda+25)^x$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

12. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση:

$$f(x)=\left(\frac{\lambda^3+2\lambda^2-3\lambda-7}{2\lambda-1}\right)^x$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ. Συναρτήσεις 1-1

13. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι $1-1$.

α) $f(x)=3e^x+x^3$ **β)** $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{1}{\sqrt{x}}$

γ) $f(x)=\frac{1}{3^x+1}-5^x-x^3$

14. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{27(3\alpha-3)}{x^3}-\sqrt{x-2}-\alpha^x$$

με $\alpha>0$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(3,-6)$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

Δ. Συνδυαστικά θέματα

15. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & \text{αν } x\le 2\\ (x-4)^2, & \text{αν } 2<x\le 5\end{cases}$$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

β) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

γ) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

16. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x, & \text{αν } x\le 0\\ \eta\mu x+1, & \text{αν } 0<x\le 2\pi\end{cases}$$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

β) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

γ) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

17. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & \text{αν } x\le 0\\ \sigma\upsilon\nu x, & \text{αν } 0<x<2\pi\end{cases}$$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

β) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f.
γ) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

18. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$.
α) Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι:

$$4f(3) + 11f(2) + 5f(1) = 2$$

i) να βρείτε τον αριθμό α,
ii) να βάλετε σε αύξουσα σειρά τις τιμές:

$$1, \quad f\left(\frac{3}{5}\right), \quad f\left(-\frac{1}{3}\right), \quad f(\sqrt{5})$$

iii) να λύσετε την ανίσωση:

$$2x^3 + (f(-1) + f(0))x^2 - 14x < f\left(-\frac{3}{2}\right)$$

19. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{1}{2}(\alpha^x + \alpha^{-x}) \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{2}(\alpha^x - \alpha^{-x})$$

με $0 < \alpha \neq 1$.
α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x + y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$f\left(\eta\mu\frac{3\pi}{10}\right)f\left(\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{5}\right) + g\left(\eta\mu\frac{7\pi}{10}\right)g\left(\sigma\upsilon\nu\frac{14\pi}{5}\right)$$

20. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \alpha\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-1, 2)$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να βρείτε τον αριθμό α.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
δ) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

21. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση:

$$f(x) = \lambda^x \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει ότι:

$$2f(1) - 4f(-1) + 3f(-2) = 5$$

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.
β) Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi x + f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.
γ) Να συγκρίνετε τα $f\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}\right)$ και $f\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}\right)$.
δ) Αν ισχύει ότι $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = f(\alpha^3 + \beta^3)\left(\frac{f(\gamma^2)}{27^{\alpha\beta}}\right)^\gamma$$

22. Δίνονται οι επόμενες συναρτήσεις:

$$f(x) = 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \text{και} \quad g(x) = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Να αποδείξετε ότι:
α) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,
β) η g είναι άρτια,
γ) η $h(x) = f^2(x) - g^2(x)$ είναι σταθερή,
δ) η g έχει ελάχιστο στο 0.

Ε. Εκθετικές εξισώσεις

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $6^x = 3^x$ **β)** $5^{2x+3} = 0{,}2$
γ) $\left(\frac{5}{7}\right)^{|x|-8} = \left(\frac{49}{25}\right)^3$ **δ)** $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3} = \sqrt[4]{\frac{8}{27}}$

24. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $7^{3x-8} = 7^x$ **β)** $3^{5x+1} = 9^{2x}$
γ) $5^x \cdot 5^{2x-13} = 25$ **δ)** $27 \cdot 9^{x-4} = 3^{13-x}$
ε) $4^x \cdot 2^{x-9} = 2\sqrt{2}$ **στ)** $8^{x-5} = 4^{x+3}$
ζ) $\left(\frac{1}{16}\right)^{x-3} = 8^{2x-1}$ **η)** $\sqrt{5}^{3x+3} = 5 \cdot 25^{x-1}$

25. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $(5^{2x-3} - 5\sqrt{5})\left(e^x - \frac{1}{e}\right) = 0$
β) $(\sqrt[3]{9^{x+1}} - \sqrt{3^{5x-6}})(7^{|x|-3} - 1) = 0$

26. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $\left(3^{x^2-9}\right)^{x-2} = 1$ **β)** $3^{x^3} = 81^x \cdot 27^{x+2}$
γ) $e^{x^3+3x^2-6x-8} = 1$ **δ)** $9^{\sigma\upsilon\nu^2 x + 1} = 27 \cdot 3^{\eta\mu x}$

27. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $8^{x^3+2} \cdot 2^x = 4^{x^3} \cdot 16^{x^2}$
β) $\sqrt{5}^{11x-3} = \left(\frac{1}{25}\right)^{x^3-3x^2}$

28. Να λύσετε την εξίσωση:

$$3^x \cdot 2^{x^2} + 18 = 9 \cdot 2^{x^2} + 2 \cdot 3^x$$

29. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $2^{x+2} + 2^{x+3} + 48 \cdot 2^{x-4} + 2 \cdot 2^{x-1} = 1$
β) $12 \cdot 4^{x-1} = 32 + 2^{2x+1}$
γ) $2^{x+2} \cdot 3^{x-1} = 48$

30. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$
β) $9^{x+1} - 36 \cdot 3^{x-1} + 3 = 0$
γ) $8^{2x+1} - 2^{3x+2} = 480$

31. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $2^x - 5\sqrt{2^x} + 4 = 0$
β) $e^x - e = 1 - e^{1-x}$
γ) $8^x - 20 \cdot 4^{x-1} - 7 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0$
δ) $9^{x+\frac{1}{2}} - 10 \cdot 3^{x+\frac{1}{2}} + 9 = 0$

32. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:
α) $72 \cdot 3^{x-2} = 9 \cdot 2^{x+1}$
β) $3^{x+3} - 20 \cdot 5^{x-1} = 5^{x+1} + 18 \cdot 3^{x-2}$
γ) $9^{x+1} = 2 \cdot 4^{x+1} - 6 \cdot 3^{2x+1}$
δ) $18 \cdot 2^{2x-1} - 6 \cdot 5^{x+\frac{1}{2}} = 10 \cdot 5^{x-\frac{1}{2}} - 4^{x+2}$

33. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $2^x + 2^{x-1} = 2^{4-x} - 2^{2-x}$
β) $5^x - 3 \cdot 5^{x-1} = \frac{8}{5^x} + \frac{50}{5^{x+2}}$

γ) $\frac{3^{x+3}}{2^x}+6\cdot\frac{2^{x+2}}{3^{x+1}}=30$

δ) $25\cdot 2^{2x-4}\cdot 3^x=9\cdot 5^x$

34. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $5\cdot 2^{2x}-7\cdot 10^x+2\cdot 5^{2x}=0$

β) $9\cdot 4^x-13\cdot 6^x+4\cdot 9^x=0$

γ) $4^{x+1}-12\cdot 6^{x-1}-6\cdot 9^x=0$

δ) $2\cdot 49^{|x|}=9\cdot 14^{|x|}-7\cdot 4^{|x|}$

35. Να λύσετε την εξίσωση:

$$9\cdot 8^x+5\cdot 12^x-22\cdot 18^x+8\cdot 27^x=0$$

36. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3^{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ β) $\frac{25^{\eta\mu^2 x}}{5^{\eta\mu x}}=5$

γ) $9^{\eta\mu^2 x}=27^{1+\sigma\upsilon\nu x}$ δ) $4^{\sigma\upsilon\nu x}=8^{\varepsilon\varphi x}$

ε) $8(4^{\eta\mu x})^{\varepsilon\varphi^2 x}=64^{\eta\mu x}\cdot 2^{\varepsilon\varphi^2 x}$

στ) $2^{\sigma\upsilon\nu^2 x}-2^{\eta\mu^2 x}=1$

37. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x^2+x-1)^{x^2+3x}=1$

β) $(x^2-x-1)^{x^2+3x}=(x^2-x-1)^{x^2-3x}$

Ζ. Εκθετικές ανισώσεις

38. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις:

α) $5^{3x-7}<5^{x-1}$ β) $\left(\frac{5}{8}\right)^{3-2x}>\left(\frac{5}{8}\right)^{3x-7}$

γ) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{x+8}<\left(\frac{\pi}{4}\right)^{3x}$ δ) $(0{,}5)^{x^2-2x}<(0{,}25)^{x+\frac{5}{2}}$

ε) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2+2x}>\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-x-6}$

39. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $2^{x-5}>0$ β) $3^{2x-1}\le 0$

γ) $5^{3x-1}\ge -5$ δ) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x+2}<-7$

40. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $2^{x^2}\cdot 16^x<1$

β) $\left(\frac{1}{9}\right)^{|x|-2}\left(\frac{1}{3}\right)^{1-|x|}\le 1$

41. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $3^{x^2}\cdot 13^{4-x^2}>81$ β) $(0{,}16)^{1-|x|}>2{,}5$

42. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις:

α) $4^{x-2}\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3}\le\frac{1}{32}$

β) $4^{|x|-3}\cdot 8^{|x|+1}>16^{|x|}$ γ) $9\cdot 3^{x^2-2x-8}<27^x$

δ) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^x\ge\left(\frac{1}{16}\right)^{x+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-8x+7}$

43. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $2^{2x-1}\ge 8^{x-1}\sqrt{2}$ β) $2^{x-3}<4^x\sqrt{2^x}$

γ) $\left(\frac{1}{5}\right)^x\le\sqrt[4]{5^{x-15}}$ δ) $e^{2x-6}>\pi^{2x-6}$

44. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $2^{2x}-10\cdot 2^{x-1}+4>0$

β) $4^x-5\cdot 2^{x+1}+16\le 0$

γ) $9^{x+\frac{1}{2}}-2\cdot 3^{x+2}+27\ge 0$

δ) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-1}-30\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+1\le 0$

45. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $2^x+2^{3-x}\ge 9$ β) $3^{x+1}+\frac{1}{3^x}\le 4$

γ) $\frac{1}{4}\cdot 8^{x+1}-11\cdot 4^x+26\cdot 2^{x-1}-4\ge 0$

46. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις:

α) $2^{x+3}+15\cdot 3^{x-1}<3^{x+2}-2^x$

β) $4^{x+\frac{1}{2}}+5^{2x+1}<7\cdot 25^x-6\cdot 2^{2x-1}$

γ) $3^{x+3}-2\cdot 3^{x+2}+8\ge 3^{2-x}-\frac{24}{3^{x+1}}$

δ) $2^{x+\frac{5}{2}}-9^x\ge 3^{2x+1}-46\cdot 2^{x-\frac{1}{2}}$

47. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $2\cdot 3^{2x}-5\cdot 6^x+3\cdot 2^{2x}\ge 0$

β) $6^{x+1}+4^{x+1}<10\cdot 9^x$

γ) $4^{x+\frac{1}{2}}-3\cdot 10^x-5^{2x+1}<0$

δ) $50^x+10\cdot 2^{x-1}\le\frac{3}{5}\cdot 10^{x+1}$

48. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $(2^x-8)(3^x-9)(7^x-1)\ge 0$

β) $(x^2-3x-4)(e^x-1)(2^x-16)\le 0$

γ) $(4-2^x)(5^{x+2}-1)\left(3^x-\frac{1}{27}\right)>0$

δ) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x-\frac{1}{32}\right)(3^{|x|}-81)(5^x-\sqrt{5})<0$

49. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις:

α) $\frac{4^x+10\cdot 2^x-14}{4^x+1}\le 2$

β) $\frac{(2^x-8)(13^x-1)}{3^x-9}\ge 0$ γ) $2^x+1\le\frac{2^{x+2}-6}{2^x-2}$

δ) $\frac{2^{x+1}+1}{2^x-4}\ge\frac{2^x+2}{2^x-2}+\frac{2^{x+3}-2}{4^x-3\cdot 2^{x+1}+8}$

Η. Εκθετικά συστήματα

50. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases}2^x-5^y=3\\2^{x+2}-5^{y+1}=7\end{cases}$ β) $\begin{cases}2^x-3^y=1\\4^x-9^y=7\end{cases}$

γ) $\begin{cases}2^x+2^y=12\\x+y=5\end{cases}$ δ) $\begin{cases}3^{x+2}+3^y=28\\8^{x-y}\cdot 4^{2y-x}=2\end{cases}$

51. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases}5^{3x+1}\cdot 5^{y-x}=25\\7^{2x-13}\cdot 7^{x-y}=7\end{cases}$ β) $\begin{cases}4^{x-2y}\cdot 8^{y-1}=32\\27^{y-x}\cdot 9^{2x+1}=\frac{1}{3}\end{cases}$

γ) $\begin{cases} \sqrt[3]{4^x} \cdot \sqrt[4]{2^y} = 2^x \\ \sqrt[6]{2^x} \cdot \sqrt{8^y} = 2^{y+5} \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 3^x - 5^y = 4 \\ 9 \cdot 3^{-x} + 5^y = 6 \end{cases}$

52. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 108 \\ 2^y \cdot 3^x = 72 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 36 \\ 3^x \cdot 4^y = 36 \end{cases}$

Θ. Προβλήματα

53. Ένας βιολόγος, μελετώντας την ανάπτυξη ενός είδους βακτηρίων, παρατηρεί ότι:

- 2 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτήρια ήταν 400,
- 4 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτήρια ήταν 3200.

Αν ο τύπος που δίνει τον αριθμό των βακτηρίων είναι:

$$P(t) = P_0 \cdot 2^{\kappa t}$$

όπου $P(t)$ ο αριθμός των βακτηρίων σε χρόνο t (σε ώρες), P_0 ο αρχικός αριθμός και κ σταθερά που εξαρτάται από το είδος των βακτηρίων, να βρείτε:

α) τη σταθερά κ,

β) τον αρχικό αριθμό των βακτηρίων,

γ) σε πόσα λεπτά ο αρχικός αριθμός των βακτηρίων είχε διπλασιαστεί.

54. Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι, ώστε η ποσότητά του να μειώνεται σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$$f(t) = q_0 \alpha^t, \quad t \geq 0$$

όπου t ο χρόνος (σε ημέρες), $f(t)$ η ποσότητα του φαρμάκου (σε mg) και οι αριθμοί α, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0 < \alpha < 1$.

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$.

ii) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f, εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ συναρτήσει της αρχικής τιμής q_0.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(t)	q_0	$\frac{q_0}{2}$							

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4ης ημέρας είναι 25 mg.

i) Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής.

ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα [0, 6].

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

Ι. Επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων με την βοήθεια της μονοτονίας

55. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2^x = 13 - 3^x$ β) $5^x + 12^x = 13^x$

γ) $5^x - 3^x = 2$ δ) $2^x - 9 = 9\left(\frac{1}{3}\right)^x - 3x$

56. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $e^{x-2} < 10 - 3^x$ β) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 8 - \left(\frac{1}{5}\right)^x$

γ) $5^{4-x} > \sqrt{x} - 1$ δ) $2e^{x+2} > \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$

57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha \cdot 3^{2-x}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο με τεταγμένη -72.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -8$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 \cdot 3^{x-2} = 8$.

58. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{3-x} - 2x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$e^3 - 2xe^x > -5e^x$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$e^{3-x^2} - e^{3-5x} < 2x(x-5)$$

Κ. Σύνθετες ασκήσεις

59. Να λύσετε την εξίσωση:

$$3^{\eta\mu^2 x} = 2 + 3^{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

60. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x = 24\sqrt{2}$$

61. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2 \cdot 3^{2\sigma\upsilon\nu x+1} + 12^{\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}} + \sqrt{3} \cdot 4^{2\sigma\upsilon\nu x+1} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 12^{\sigma\upsilon\nu x+1} + 5\sqrt{3} \cdot 12^{\sigma\upsilon\nu x}$$

Λ. Συνδυαστικά θέματα

62. Δίνεται η συνάρτηση:

$f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία A(1, 3) και B(2, 13).

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 5$ και $\beta = -7$.

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα y′y.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x - 31) < 3$.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

63. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{3^x - 12 + 3^{\alpha - x}}$$

για την οποία ισχύει ότι:

$$f\left(\eta\mu\frac{29\pi}{6}\right) = f\left(\varepsilon\varphi^2\frac{2\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu\frac{20\pi}{3}\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{24^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{6}}}{9^{\frac{1}{4}}}$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο στο $\frac{3}{2}$.

64. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 3^{x^2} - 3^{x+\alpha} - 18 \cdot 3^{x-1}$$

διέρχεται από το σημείο $A(1, -24)$.

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α.

β) Για $\alpha = 1$ να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα x′x.

γ) Να βρείτε τη μονοτονία της f στο $(-\infty, 0)$.

δ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\text{συν}\frac{7\pi}{10}\right)$ και $f\left(\text{συν}\frac{4\pi}{5}\right)$.

65. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + 3x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Αν $\alpha > 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha f(\alpha) + 20 > 2f(\alpha) + 10\alpha$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + f(-x) < \frac{5}{2}$.

66. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2^\lambda x^3 + 3x^2 - 18x + 2 \cdot 4^\lambda - 2^{\lambda+1}$$

Η διαίρεση του $P(x)$ με το $x + 1$ αφήνει υπόλοιπο 23.

α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$P(x) = -7x + 10 \qquad (1)$$

γ) Αν α είναι η μικρότερη ρίζα και β η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης (1), να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} (\beta - \alpha) \cdot 3^x - (4\beta)^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{x-y} = 25 \\ 3^x \cdot 5^y - \alpha \cdot 5^x = 24 \cdot 5^y \end{cases}$$

67. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (2^{\lambda-3} - 1)^x$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι:

i) γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$,

ii) γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το λ, ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(2, 9)$.

γ) Για $\lambda = 5$:

i) να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$$

ii) να λύσετε την ανίσωση:

$$f(-2x) - 4f(-x) + 3 \le 0$$

iii) να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \le \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

68. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 4^{\frac{\eta\mu x}{2}} \cdot 2^{2\sigma\upsilon\nu^2 x - 5} + \alpha$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x′x.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{1}{e^4} + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{2}{e}\right)^{|x|} \ge 0$$

69. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt[3]{16 - 2^x} - \sqrt{2 \cdot 3^x - 18}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$2 \cdot 8^x - 11 \cdot 4^x + 13 \cdot 2^x + f(3) \ge 0$$

δ) Αν M είναι το μέγιστο της f και μ είναι το ελάχιστο της f, να λύσετε την εξίσωση:

$$M^{x+2} = |\mu|^{\sqrt{2-x}}$$

70. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha x - 6} - x^{4-\alpha}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(2, 8)$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(2 \cdot 8^x + 6 \cdot 27^x) > f(12^x + 7 \cdot 18^x)$$

δ) Αν $\kappa < \lambda$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^\kappa - \left(\frac{1}{2}\right)^\lambda > \frac{\kappa^3 - \lambda^3}{64}$$

71. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{f(x)} \le 3$.

δ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ε) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(6^x + 8) - f(8 \cdot 3^x + 2^x) <$$

$$< f(\sqrt{3} - 2) + f\left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)$$

72. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 4^x - 2^{x+\alpha} + 2$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(\alpha + 1, 10)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το 1.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$8^x - 2^{2x+1} + 2^{x+1} = 2^x \cdot \text{συν}x$$

20^{ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 5.2 Λογάριθμοι**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τους λογαρίθμους:

$$\log_4\frac{1}{32},\quad \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{27},\quad \log_7 7,\quad \log_2 16,\quad \log_3 9^{15},\quad \log_5\sqrt{5},\quad \log_{13}1,\quad 5^{\log_5 3}$$

2. Να υπολογίσετε τους λογαρίθμους:

α) $\log 10$ β) $\ln e$ γ) $\log 1$ δ) $\ln 1$ ε) $\log 10.000$

στ) $\ln\frac{1}{e^2}$ ζ) $\log(\ln e^{100})$ η) $10^{\log 3}$ θ) $e^{\ln 5}$

3. Να βρείτε για ποια τιμή του x ισχύει:

α) $\log x = 3$ β) $\log_x 9 = 2$ γ) $\log_x(5x-4) = 2$

4. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\log 20 + \log 50$ β) $\ln(e^4 - e^3) - \ln(e-1)$

γ) $2\log 5 + \frac{1}{2}\log 16$ δ) $\frac{\ln 25 - \log 9}{\ln\sqrt{5} - \log\sqrt{3}}$

5. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \dfrac{2-\log 4}{\frac{1}{2}+\log\sqrt{\frac{5}{2}}}$.

6. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \dfrac{1+4\log 2 - 3\log 4 + \frac{1}{3}\log 8}{\log 75 - 2\log\sqrt{3}}$ β) $B = e^{\frac{1}{2}\ln 9 - \frac{2}{3}\ln 8 + \ln 12}$

7. Για τους αριθμούς α, με $0 < \alpha \neq 1$, και x, y, ω > 0 ισχύουν $\log_\alpha x = 5$, $\log_\alpha y = 4$ και $\log_\alpha \omega = 3$. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \log_\alpha \dfrac{\alpha^3\sqrt{x^4y^3}}{\omega^4}$ β) $B = \ln\dfrac{x\omega}{y^2}$

8. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \dfrac{\log^2 20 - \log^2 5}{\log\sqrt{2}}$.

9. Για οποιαδήποτε α, β $\in (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι:

$$\log^2\alpha^3 + \log^2\beta^3 + \log\alpha^3 \cdot \log\beta^6 = \log^2(\alpha\beta)^3$$

10. α) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $A = \log_2 6 - \log_4 9$ ii) $B = \dfrac{\log 45}{\log 3} - \dfrac{\ln 5}{\ln 3}$

β) Αν α, β > 0 και α, β $\neq 1$, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\Gamma = \log_\alpha\beta^2 \cdot \log_{\frac{1}{\beta}}\alpha^3$$

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Ορισμός του λογαρίθμου

1. Να υπολογίσετε τους λογαρίθμους:

α) $\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{8}$ **β)** $\log_4 32$ **γ)** $\log_{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{2}}{16}$

δ) $\log_{\frac{1}{3}}(27\sqrt{3})$ **ε)** $\log_{0,1}(10\sqrt{10})$

2. Να υπολογίσετε τους λογαρίθμους:

α) $\log 100$ **β)** $\log 10$ **γ)** $\log\frac{1}{10.000}$

δ) $\log\sqrt{1000}$ **ε)** $\log 0{,}01$ **στ)** $\log\frac{\sqrt{10}}{100}$

3. Να υπολογίσετε τους λογαρίθμους:

α) $\ln e$ **β)** $\ln e^3$ **γ)** $\ln 1$

δ) $\ln\frac{1}{e^2}$ **ε)** $\ln\sqrt{e}$ **στ)** $\ln\frac{\sqrt[3]{e^2}}{e}$

4. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\log(\ln e^{100})$ **β)** $\ln(\log 10^e)$

γ) $\ln(\log_7 7)$ **δ)** $\log(\ln\sqrt[10]{e})$

ε) $\log(\log 10^{10})$ **στ)** $\ln(\ln e^e)$

5. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $e^{\ln 3}$ **β)** $10^{\log 7}$ **γ)** $10^{\log(\ln\sqrt{e})}$

δ) $\sqrt{e}^{\ln 25}$ **ε)** $100^{\log 3}$ **στ)** $e^{3\ln 2}$

6. Να βρείτε τον αριθμό x για τον οποίο ισχύει:

α) $\log_x 36 = 2$ **β)** $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

γ) $\log_4 x = 3$ **δ)** $\log_9 x = \frac{3}{2}$

ε) $\log_3(|x|+1) = 2$ **στ)** $\log_x(3x-2) = 2$

7. Να βρείτε τον αριθμό x για τον οποίο ισχύει:

$$\log_x(x^3 - 5x^2 - 2x + 24) = 3$$

Β. Ιδιότητες λογαρίθμων

8. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $3\log 2 + \log 125$ **β)** $2\log 40 - 4\log 2$

γ) $\frac{1}{2}\log 25 + \frac{1}{3}\log 8$ **δ)** $\log 50 + 5\log 2 - 2\log 4$

ε) $\frac{\log 2 + \log 12 - \log 3}{\log 14 - \log 7}$ **στ)** $\frac{2\log 9 - \frac{\log 27}{3}}{\log 72 - 3\log 2}$

9. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\frac{\ln\sqrt[3]{9} + \ln\sqrt[3]{4} - \ln\sqrt[3]{25}}{\ln 6 - \ln 5}$

β) $\frac{2\log 40 - \log 20 - 1}{2 - \log 50}$

γ) $\frac{2\log 3 + 3\log 2 + \log 5 - 1}{2\log 2 + \log 150 - 2}$

δ) $\frac{\ln(100e^4) - \ln 4 - 2}{\ln 10 - \ln 2 + 1}$

10. Να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων:

α) $\frac{\log 10.000 + \log 100 + \ln e^6}{\ln\frac{1}{e^6} + \log\frac{1}{10^5} + \log(10\sqrt{10}) + \ln\frac{1}{e^2\sqrt{e}}}$

β) $\frac{\log(\ln e) + 4\log\sqrt{10} - (\log 1000)^2}{\ln e^3 + 7\log\frac{1}{10} + \log 0{,}001}$

γ) $\frac{(\log 100\sqrt{10}) : \ln\sqrt{e} + \log 1000}{\ln\frac{1}{e^3} + \ln e^5 - \log 0{,}01}$

δ) $\frac{\log 5 + 3\log 2 - \log 4}{\log\sqrt{30} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{4} - \log 2 - \frac{\log 3}{2}}$

11. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $10^{2\log 6 - \log 12}$ **β)** $\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^{\log 25 - 4}$

γ) $1000^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\log 16}$ **δ)** $\frac{10^{2-\frac{1}{2}\log 5}}{5^{\log\sqrt{1000}}}$

12. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $e^{\ln 24 - 3\ln 2}$ **β)** $\left(\frac{1}{e}\right)^{2\ln 5 - \ln 75}$

γ) $\frac{e^{2-\ln 5}}{100^{\log e}}$ **δ)** $\frac{\sqrt{e}^{\ln 8}\cdot e^{\log 1000}}{e^{3+\ln\sqrt{2}}}$

13. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $4^{1+\log_2 3}$ **β)** $27^{\log_3 18 - 2}$

γ) $\sqrt{5}^{\log_5 72 - 3\log_5 2}$ **δ)** $\left(\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)^{2-\log_2 36}$

ε) $4^{\log_{\sqrt{2}} 5 - \log_{\sqrt{2}}\sqrt{5}}$ **στ)** $3^{\log_{\sqrt{3}} 5 + \log_9 4}$

14. Αν ισχύει:

$$\log\alpha = 4, \quad \log\beta = 6 \quad \text{και} \quad \log\gamma = 12$$

να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\log\frac{10\alpha^3\beta}{\gamma^2}$ **β)** $\log\left(\log\frac{\alpha\gamma}{\beta}\right)$

γ) $\log\frac{\alpha^2\sqrt[3]{\beta}}{100\sqrt[4]{\gamma}}$ **δ)** $\log\frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt[3]{10\alpha^2\gamma}}$

15. Αν ισχύει:

$$\ln\alpha = 2, \quad \ln\beta = 3 \quad \text{και} \quad \ln\gamma = 4$$

να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\ln\frac{e^4\alpha^3}{\beta^2\gamma}$ **β)** $\ln\frac{\gamma^2}{\sqrt{e\beta}\cdot\alpha^2}$

γ) $\ln\sqrt{\frac{\alpha^3 e^5\beta}{\gamma^3}}$ **δ)** $\log\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}$

Γ. Τύπος αλλαγής βάσης

16. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\ln 10 \cdot \log e$ **β)** $\ln 10.000 \cdot \log\sqrt{e}$

γ) $\ln\frac{1}{10} \cdot \log e^4$ **δ)** $\ln\sqrt{10} \cdot \log\frac{1}{e^6}$

17. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\frac{\log 24}{\log 2} - \frac{\ln 3}{\ln 2}$ **β)** $5^{\frac{\log 3}{\log 5}} + 9^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}$

γ) $10^{\frac{\ln 3}{\ln 10}} + \sqrt{10}^{\frac{\ln 16}{\ln 100}} + 100^{\frac{\ln 2}{\ln\sqrt{10}}}$

δ) $\log(10e) + \ln(10e) - \log(10e) \cdot \ln(10e)$

18. Για τις επιτρεπόμενες τιμές των α και β να αποδείξετε ότι οι τιμές των επόμενων παραστάσεων είναι σταθερές (ανεξάρτητες των α και β).

α) $\log_{\alpha^6}\beta^4 \cdot \log_{\beta^2}\alpha^3$ **β)** $\frac{\log_\alpha \beta^{18} \cdot \log_{\alpha^2}\beta}{(\log_\alpha \beta)^2}$

γ) $\frac{1}{1+\log_\beta \alpha} + \frac{1}{1+\log_\alpha \beta}$

Δ. Συνδυαστικά θέματα

19. Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x - y = \log\frac{8}{3} \\ x + 2y = \log 18 \end{cases}$$

α) Να λύσετε το σύστημα.

β) Αν (x_0, y_0) είναι η λύση του συστήματος, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 50^{y_0} \cdot 10^{x_0 y_0}$$

20. Δίνεται γωνία $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ για την οποία ισχύει:

$$\eta\mu\theta = 100^{\frac{3}{2}\log 2 - \frac{1}{2}}$$

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \sqrt{10}^{\varepsilon\varphi\theta \cdot \log\frac{1}{27}} - \left(\frac{1}{10}\right)^{\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \log 32}$$

21. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + (2 + \log 2 \cdot \log 5)x - \log 4 + 2\log^2 2$$

α) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

22. Το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + \lambda x^2 - x \cdot \log 50 + \log 4$$

έχει παράγοντα το $x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\lambda = -\log 20$$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

23. Δίνεται ο αριθμός:

$$\rho = \frac{\log\frac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}{\log\sqrt{3}} + \frac{\log\frac{9}{5+2\sqrt{6}}}{\log\frac{1}{3}}$$

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός ρ είναι ακέραιος.

β) Το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 \cdot \log 2 + x^2 \cdot \log 5 - x \cdot \log 40 + \lambda$$

έχει παράγοντα το $x - \rho$.

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -2$.

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει 3 πραγματικές ρίζες, από τις οποίες οι δύο είναι ακέραιες.

24. Δίνεται γωνία $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 \cdot \log(\varepsilon\varphi^2\alpha + 1) + x^2 \cdot \log(\varepsilon\varphi\alpha) + x \cdot \log(\eta\mu\alpha) - \log(\sigma\upsilon\nu\alpha)$$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$.

β) Αν ισχύει ότι:

$$\alpha = \log\left(\sqrt[6]{5^2\sqrt{\frac{1}{5}}}\right)^\pi + \log\left(\sqrt[6]{2\sqrt[5]{2\sqrt{2^3}}}\right)^\pi$$

να λύσετε την εξίσωση:

$$P(x) = x \cdot \log\sqrt{32} - \log\sqrt{8}$$

25. Δίνονται οι αριθμοί:

$\alpha = \log(100 \cdot \log 40 - 200 \cdot \log 2)$ και

$$\beta = \log\left(\ln\underbrace{\sqrt[10]{\sqrt[10]{\dots\sqrt[10]{e}}}}_{8\ \text{ριζικά}}\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ακέραιοι.

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{\sqrt[3]{e^{2^{\ln|\alpha|}}} \cdot x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6}{x - 1} \le \log 1000^{x^2+x}$$

21ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 5.3 Λογαριθμική συνάρτηση**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \log x$ και $g(x) = \ln x$.

2. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log x + 3$

β) $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln \frac{x}{e}$

3. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log(x-2)$

β) $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln(x+3)$

4. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln \frac{1}{x}$

β) $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log(-x)$

5. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x) = |\ln x|$ β) $g(x) = \ln|x|$ γ) $h(x) = \frac{1}{2}\ln x^2$

6. Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \log \frac{2-x}{2+x}$ είναι άρτια,

β) η συνάρτηση $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ είναι περιττή.

7. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι $1-1$:

α) $f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$ β) $f(x) = \log(3-x) - e^{x-2}$

8. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\log(|2x-5|-15) = 2$ β) $\ln(x^2-4x+4) = 0$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\ln(3x-1) = \ln(9-x^2)$ β) $\log(x+8) + \log(8-x) = 1 + \log(x+4)$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{\log x + 3}{\log x} + \frac{\log x^2 - 3}{\log x - 2} = 5$ β) $\log^2 x^2 + \log x^4 - 8 = 0$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2^{x+4} = 5^{2-x}$ β) $x^{\log x} = \sqrt{10x}$

12. α) Να αποδείξετε ότι $x^{\log 2} = 2^{\log x}$ για κάθε $x > 0$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $4^{\log x} = x^{\log 2} + 2$.

13. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\log(2x + 4) < \log(13 - x)$$

14. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\log(x - 20) < 2$

β) $\ln(|x| - 3) < 0$

15. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\log(7 - x) \geq 1 - \log x$

β) $(\log x)^2 - \log x^2 \geq 3$

γ) $x^{2-\ln x} \geq \dfrac{1}{e^{15}}$

16. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \log(20x + 10y) = 2 \\ \log(x + 1) + \log y = 1 \end{cases}$

β) $\begin{cases} \log x^2 - \log y^4 = -10 \\ \log^2 x + \log^2 y = 5 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x^{\log y} = \dfrac{1}{100} \\ 2^{\log y} \cdot 4^{\log x} = 1 \end{cases}$

17. Να λύσετε την εξίσωση $2^{x-8} = 5 - \log x$.

18. Να λύσετε την ανίσωση $\ln x < \dfrac{1}{x} - 1$.

19. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \log x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+12} < \log\frac{2x^2 + 3}{x^2 + 12}$$

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Γραφική παράσταση λογαριθμικής συνάρτησης

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log x - 1$

β) $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln x + 2$

2. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln(x + 1)$

β) $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log(x - 2)$

3. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log(x + 1) - 2$

β) $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln(x - 2) + 3$

4. Να βρείτε από ποιες μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $f(x) = \log x$ προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις των επόμενων συναρτήσεων:

α) $g(x) = \log(10x)$ **β)** $g(x) = \log\dfrac{x}{1000}$

γ) $g(x) = \log(10x + 30)$ **δ)** $g(x) = \log\dfrac{x+1}{100}$

ε) $g(x) = \log(0{,}1x - 0{,}2)$

στ) $g(x) = \log(100x - 50)$

5. Να βρείτε από ποιες μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $f(x) = \ln x$ προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $g(x) = \ln(e^2 x)$ **β)** $g(x) = \ln\dfrac{x}{e}$

γ) $g(x) = \ln\dfrac{x+2}{e^3}$ **δ)** $g(x) = \ln(e^2 x - 3e^2)$

ε) $g(x) = \ln(ex + e^2)$ **στ)** $g(x) = \ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{e}} - 1\right)$

6. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = \log x \quad \text{και} \quad g(x) = \log\frac{1}{x}$$

7. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \dfrac{1}{2}\log x^2$ **β)** $f(x) = |\log x|$

γ) $f(x) = |\log(x + 2)|$ **δ)** $f(x) = |\log(x - 1)|$

Β. Πεδίο ορισμού

8. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

α) $f(x) = \log(2x^3 + 3x^2 - 11x - 6)$

β) $f(x) = \log(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) + \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$

9. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \log(x^2 - 2x - 3) + \log(x - 2)$$

και:

$$g(x) = \log\big((x^2 - 2x - 3)(x - 2)\big)$$

έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

10. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

α) $f(x) = \log(2^{2x-5} - 8)$

β) $f(x) = \log\left(\left(\dfrac{3}{7}\right)^{x^2-1} - 1\right)$

γ) $f(x) = \log(8^{x+2} - 4^{x-1})$

δ) $f(x) = \ln(7^x + 13^x)$

11. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \log(4^x - 10 \cdot 2^x + 16)$

β) $f(x) = \ln(21 \cdot 3^x + 5^{x+3} - 3^{x+4} - 5^{x+2})$

γ) $f(x) = \log(4 \cdot 9^x + 3 \cdot 16^x - 7 \cdot 12^x)$

δ) $f(x) = \ln(4^{x+1} \cdot 5^{2x+3} - 5 \cdot 10^{10})$

12. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln\big((\lambda - 3)x^2 + \lambda x + \lambda\big)$$

έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Γ. Συναρτήσεις 1-1

13. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι $1 - 1$:

α) $f(x) = \dfrac{5\log x - 3}{2}$ **β)** $f(x) = \ln(2^x - 4)$

γ) $f(x) = \ln\dfrac{3-x}{x+1}$ **δ)** $f(x) = \log\dfrac{3^x}{3^x - 1}$

14. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \ln(x + 3) + \alpha x^3$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-2, 28)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τον αριθμό α.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.

Δ. Συνδυαστικά θέματα

15. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ \log x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

β) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

γ) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

16. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & \text{αν } x \in (-\infty, -1) \\ -\ln|x|, & \text{αν } x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ x - 1, & \text{αν } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

β) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

γ) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

δ) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

17. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\log\frac{6-x}{6+x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\varepsilon\varphi^2x+\frac{3f\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}\right)}{f\left(\sigma\upsilon\nu\frac{6\pi}{7}\right)}=\frac{f(2)+f(4)}{\sigma\upsilon\nu^2x}$$

δ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

18. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=x^{\alpha}\cdot\log\frac{11-x}{11+x}$$

διέρχεται από το σημείο $M\left(2,\ 16\log\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$.
β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.
δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\sqrt{3}^{x^3+2x^2-11x}+f(9)+f(\ln 7)-f\left(\ln\frac{1}{7}\right)=0$$

19. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\left|\log|x|\right|$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.
γ) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f.
δ) Να βρείτε τα ακρότατα της f.
ε) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x)=\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1$$

20. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=\log(x+1)+\alpha^3-3\alpha^2+4\alpha-5$$

τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο με τετμημένη 9.
α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α.
β) Να βρείτε σε ποιο σημείο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y′y.
γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.
δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu^2x=f\left(\frac{9}{\sqrt{10}+1}\right)(1+\sigma\upsilon\nu x)$$

21. Δίνεται συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το $A_f=(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει ότι:

$$f(x)-3f\left(\frac{1}{x}\right)=2x-\frac{6}{x}+4\ln x\quad\text{για κάθε } x>0$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f.
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$2\left(x^2-|x|\right)<\ln\frac{|x|+1}{x^2+1}$$

22. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=\log\left(\sqrt{x^2+100}-x\right)+\alpha$$

διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ και το πεδίο ορισμού της f.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $(-\infty,0)$.
δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\sigma\upsilon\nu^3x+7\eta\mu^2x+2\sigma\upsilon\nu x=\left(\frac{1}{100}\right)^{f\left(\frac{15}{2}\right)}$$

23. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\log(x+7)-3^{4+\alpha x}+9^{x-1}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο M(3, 79).
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και τον αριθμό α.
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\sqrt[3]{10}^{f(1)+23}=25^y$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\omega^2-\omega\cdot\log 300+f(2)<0$$

ε) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\log(x^2+6)<3^{5-x^2}-9^{x^2-2}+79$$

Ε. Λογαριθμικές εξισώσεις

23. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:
α) $\log(x^2-16)=\log 900-2$
β) $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln(8-x)$
γ) $\ln 6+x\cdot\ln 2=\ln 2+\ln(1-2^x)$
δ) $(x-4)\cdot\log 3+\log(3^x-9)=$
$=\log(3^{x-1}-3)-2\log 3$

24. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $\log 9+x\cdot\log 2=\log 4+x\cdot\log 3$
β) $(x-2)\cdot\ln 4+(2x-4)\cdot\ln 3=\ln 144-2\ln 2$
γ) $x\cdot\log 2=\log(2^x+4)-\log(2^{x+1}-1)$
δ) $\log 3+(2x-1)\cdot\log 2=\log(4^x+1)+\log(1-4^x)$

25. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:
α) $\ln^2x^3-9\ln x=54$
β) $\log^3x^2-2\log^2x^3-6\log x+20=0$
γ) $\log^2x^3=9\log(100x)$
δ) $\log^2x\cdot\log\frac{x^2}{10}=\log(100x^5)$

26. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $\frac{\log x+1}{\log x}-\frac{2}{\log x+2}=\frac{4}{\log^2x+2\log x}$
β) $\frac{1}{\ln^2x+\ln x^2}=1-\frac{\ln x^2}{\ln(xe^2)}$
γ) $\frac{\log(10x)}{\log x-1}=\frac{\log(100x)}{\log x+3}-\frac{4}{\log^2x+\log x^2-3}$
δ) $\frac{\log^2x}{\log(10x)}-\frac{\log x^4}{\log(100x)}=\frac{\log\frac{x}{10^6}}{\log^2x+\log(100x^3)}$

27. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2^{\log x+1}+2^{\log x+2}=48$

β) $9^{\log x}-4\cdot 3^{\log x}+3=0$

γ) $3^{\log(100x)}+3^{\log\frac{10}{x}}=12$

δ) $3^{\log x^2}-4\cdot 3^{1+\log x}+27=0$

28. Να λύσετε την εξίσωση:

$$5^{\log x}-3^{\log\frac{x}{10}}=3^{\log(10x)}-5^{\log\frac{x}{10}}$$

29. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2^{x+3}=5^{1-x}$ **β)** $3^{x-2}=2^{3-x}$

γ) $25^x-5^{x+1}+6=0$ **δ)** $3^{x-2}\cdot 27^x=\dfrac{4^{x+1}}{8^x}$

30. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$x^{\log 2}=2^{\log x}$$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^{\log 2}+2^{\log x}=8$$

31. Να λύσετε την εξίσωση:

$$9^{\log x}-10x^{\log 3}+9=0$$

32. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\log\big(\log(x^2+1)+9\big)=1$

β) $\ln\big(\log(150-|x|)-1\big)=0$

33. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\log 5}{\log x^2}+\frac{\log(5x)}{\log x}=\frac{9}{4}+\left(\frac{\log\sqrt{5}}{\log x}\right)^2$$

34. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\ln(\sigma\upsilon\nu x)=0$

β) $\log(\eta\mu x)-\log 5=-1$

35. α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2\ln(\alpha-3)-\ln(2\alpha-8)=\ln 2e-1$$

β) Για την τιμή του α που βρήκατε να λύσετε την εξίσωση:

$$\log x\cdot\ln x+\log e^6=\alpha\cdot\log x$$

36. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{3}{\log x}+\dfrac{2}{\log(4x)}+\dfrac{3}{\log(16x)}=0$

β) $\dfrac{\log x}{\log 2}+\dfrac{\log 4}{\log(2x)}=\dfrac{\log 8}{\log(4x)}+\dfrac{\log(2x^5)}{\log 64}$

Ζ. Λογαριθμικές ανισώσεις

37. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $1+\log(x+1)\le\log(32-x)$

β) $\ln x-2\ln 2\ge\ln 3-\ln(x+4)$

γ) $2\ln x\ge\ln(x-2)+\ln(x+6)$

δ) $\ln x-\ln(3x-2)\ge\ln 3-\ln(x^2+2)$

38. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις:

α) $2\log 5+x\cdot\log 3\le\log 9+x\cdot\log 5$

β) $x\cdot\ln 3+\ln(3^{x+1}-1)\ge\ln(3+7\cdot 3^x)$

γ) $\log(2\cdot 5^{2x}+5\cdot 4^x)\ge x+\log 7$

δ) $(4x-5)\cdot\ln 6\le(2x-1)\cdot\ln 2+(6x-9)\cdot\ln 3$

39. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\ln^2 x-2\ln x-3>0$

β) $\log^2 x-\log x^3+2\le 0$

γ) $\log^2 x^2-3\log x^4+8\ge 0$

δ) $\log^2 x^2-10\log(-x)-6>0$

40. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\log^2 x\le\log x^4$ **β)** $\log\sqrt{x}\le\log^2 x$

γ) $\ln\sqrt[4]{x}\ge\ln^3 x$ **δ)** $\ln^2 x^3\ge 9\ln\sqrt{x}$

41. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\dfrac{2\ln x-1}{\ln x}\ge 1$

β) $\dfrac{\log x-2}{\log x}\le\dfrac{\log x-1}{\log x+3}$

γ) $\log x\ge\dfrac{2}{\log x-1}$ **δ)** $\dfrac{\ln x^2+1}{\ln(ex)}>1$

42. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{\log(9-2^x)}{\log\frac{1}{2}}<x-3$$

43. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{(2^x-8)\cdot\log(x+2)}{x^2-x-12}\le 0$$

44. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\log x>\ln x$$

45. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $2^{x-2}\ge 3^{x+1}$ **β)** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<3$

γ) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}\ge\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1-x}$ **δ)** $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x-2}<2^x$

46. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $|\log x-2|>3$ **β)** $2|\log x|+\log x<3$

γ) $|2\log x-5|\ge|\log x-1|$

47. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{\log\sqrt{x+12}}{\log x}\ge 1$$

Η. Λογαριθμικά συστήματα

48. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases}\log(y-x)=1-\log 5\\ \log x+\log 6=\log y+\log 2\end{cases}$

β) $\begin{cases}\log x-\log y=3\\ \log x^5+\log y^4=-3\end{cases}$

γ) $\begin{cases}\log^2 x+\log^2 y=13\\ \log x+\log y=1\end{cases}$

δ) $\begin{cases}\log x+\log y=5\\ \log^2 x-\log^2 y=5\end{cases}$

49. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases}\ln x\cdot\ln y=-2\\ x^2y=1\end{cases}$

β) $\begin{cases} \ln(ex) - 3 = 0 \\ \ln^2 x + \ln y = 3 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 3^x - 2^y = 1 \\ x \cdot \ln 3 + y \cdot \ln 2 = \ln 72 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 2^{\ln x} - 3^{\ln y} = 1 \\ 4^{\ln x} + 9^{\ln y} = 25 \end{cases}$

50. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \log x - \log y = 4 \\ y^{\log x} = \dfrac{1}{10.000} \end{cases}$ β) $\begin{cases} y^{3+\log x} = 10 \\ 3^{4+\log x} = 9^{\log y} \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x^{\log y} = \dfrac{1}{1000} \\ 8^{\log x} \cdot 4^{\log y} = 8 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} y - \log x = 1 \\ x^y = 100 \end{cases}$

51. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{\log x}{\log 2} + \dfrac{\log y}{\log 4} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{\log 4}{\log x} + \dfrac{\log 16}{\log y} = 5 \end{cases}$$

52. Να βρείτε τα $x, y \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ που ικανοποιούν το σύστημα:

$$\begin{cases} x^{8x} = y^{x+6} \\ x^{9x-6} = y^{x+4} \end{cases}$$

Θ. Συναρτήσεις

53. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e) - 1$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

54. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln\left(3 - \sqrt{x+1}\right)$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

55. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln(x^2 + 4) \quad \text{και} \quad g(x) = \ln x + \ln 4$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

56. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \log(\log(x + \alpha))$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 10$.
β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$100^{f(x)} \geq 4$$

57. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \log\Big(2 - \log(|2x - 13| - 3)\Big)$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

58. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln(e^x - 1) \quad \text{και} \quad g(x) = \ln x^2$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.
β) Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $g(x) < 0$.
γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 3)$ και $g\left(\dfrac{2}{e}\right)$.
δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(2x) - f(x) = g\left(\sqrt{e-1}\right)$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

59. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$$

και:

$$g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g.
β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 0$.
γ) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.
δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g.
ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$.

60. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln\frac{9^x - 1}{3^x + 5}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να βρείτε το σημείο της C_f που έχει τεταγμένη $2\ln 2$.
γ) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
δ) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = \ln(3^x - 1) + \ln\left(1 - \frac{4}{3^x + 5}\right)$$

ε) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

61. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + \lambda\right)$$

διέρχεται από το σημείο $M(-6, 1 + \log 6)$.
α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -4$.
β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 1$.
δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2^{\log y} + y^{f(-3)} = 2$$

ε) Για $\alpha, \beta < -1$ να αποδείξετε ότι:

$$2f(\alpha + \beta) \geq f(2\alpha) + f(2\beta)$$

62. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln^2 x + \alpha \cdot \ln x - 3 \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(e^3, 12)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τον πραγματικό αριθμό α.

β) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τεταγμένη 5.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα x′x.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = 2\ln^3 x - \ln(e^5 x^3)$$

ε) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο στο:

$$x_0 = e^{-1}$$

στ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + 2x + \frac{2}{x} = 0$$

63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\frac{\log\sqrt{3x}}{\log x}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε την τιμή $f(\sqrt[7]{3})$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) \cdot \log x = \log\frac{1}{3}$$

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

ε) Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$f(\alpha^2 + 2) + f(\alpha^2 + 4) > f(\alpha^2 + 3) + f(\alpha^2 + 5)$$

Ι. Επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων με τη βοήθεια της μονοτονίας

64. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{6}{x} = 2 + \ln(x - 2)$

β) $\log(x + 3) = 2e^{7-x} - 1$

65. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x \le 11 - \log x$

β) $3^x + \log x \ge 3$

γ) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \le \ln x + \frac{1}{2}$

δ) $\log(120 - x) > \log(x - 10) + \frac{x}{20}$

66. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + \log x$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^3 \le 1001 - \log x$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$(2x^2 + 1)^3 - (x^2 + x + 3)^3 \le \log\frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 1}$$

67. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - \ln x$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3|x|+5} - \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|+13} \ge \ln\frac{3|x| + 5}{|x| + 13}$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$1 - 3^x \cdot \ln x \ge 3^{x-1}$$

Κ. Συνδυαστικά θέματα

68. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(e^x) + f(e^x - 2) = 3\ln 2$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(e^x) + f(e^x - 2) \le 3\ln 2$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

69. Δίνονται οι αριθμοί $x, y > 0$, με $x \ne 1$, για τους οποίους ισχύει:

$$\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right)^2 - 6 \cdot \frac{\log y}{\log x} + 9 = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $y = x^3$.

β) Αν επιπλέον ισχύει:

$$x + \log(1 + 2^{x-1}) = x \cdot \log 5 + \log\left(\frac{\ln y^4}{\ln 10 \cdot \log x}\right)$$

να βρείτε τους αριθμούς x και y.

70. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(ex + 1)$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(2x) < f(x)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(\sqrt{3} \cdot \eta\mu x) = f(\sigma\upsilon\nu x)$$

στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

71. Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 lt ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι, ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1ης και στο τέλος της 2ης εβδομάδας.

β) Ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση:

$$V(t) = V_0\alpha^t$$

όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α.

γ) Να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής.

(Δίνεται ότι $\log 5 \cong 0{,}7$ και $\log 85 \cong 1{,}93$.)

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

72. Το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 \cdot \log(3^\alpha - 2^{4-\alpha}) +$$

$$+ x^2 \cdot \log 4^\alpha - x \cdot \log 16 - 16$$

έχει παράγοντα το $x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$.

β) Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης:

$$P(x) : (x-2)$$

και υ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$P(x) : (x-1)$$

να λύσετε την ανίσωση $\pi(x) + \upsilon < 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει μοναδική ρίζα.

73. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 5x^3 - 8x^2 + \alpha \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}$$

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$, να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Για $\alpha = -8$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{(\ln^2 x + 1)^3}{(\ln^2 x + 1)^2 + 1} = \frac{8}{5}$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

74. Το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - x^2 + \lambda x + 4 - \lambda$$

έχει παράγοντα το $x + \sqrt{e^{\ln 9}}$ και έστω $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + \sqrt{e^{\ln 9}}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$.

γ) Δίνονται οι αριθμοί $\alpha, \beta > 1$ για τους οποίους ισχύει:

$$\ln(\ln\beta) - \ln(\ln\alpha) = \ln 2$$

i) Να αποδείξετε ότι $\beta = \alpha^2$.

ii) Αν ισχύει $\pi(\ln\alpha) \leq 1$, να αποδείξετε ότι:

$$e^2 \leq \beta \leq e^6$$

75. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x^3 + \lambda x)$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(5,\ 1 + 3\log 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -9$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + \varepsilon\varphi\frac{27\pi}{4} = 0$.

δ) Δίνεται γωνία $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ για την οποία ισχύει

ότι $\varepsilon\varphi\theta = \frac{f(9) - f(6)}{f(-1)f(\sqrt{10})}$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \log^2 y - \eta\mu\theta \cdot \log y^4 + 1 = 0$$

76. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\log(x+2)|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

γ) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 1$.

στ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log\frac{1}{-3-2x}$.

77. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \ln\frac{e^x + \theta}{e^x + 1}$$

όπου $\theta > 0$ τέτοιος, ώστε η εξίσωση:

$$x^2 - 4(1 + \ln\theta)x + \ln^2\theta^2 + 12 = 0$$

να έχει μία διπλή ρίζα.

α) Να βρείτε τον αριθμό θ και το πεδίο ορισμού της f.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - f(-x) = x$.

γ) Αν $\alpha, \beta > 0$, με $\alpha\beta = 10$, να αποδείξετε ότι:

$$f(\log\alpha) + f(\log\beta) = 1$$

78. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2^{1-x} - \ln x - 1$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2^x(1 + \ln x) = 2$$

γ) Δίνονται γωνίες $\theta, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ για τις οποίες ισχύει ότι:

$$2^{1-\sigma\upsilon\nu\theta} - 2^{1-\sigma\upsilon\nu\varphi} < \ln\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Να συγκρίνετε τις γωνίες θ και φ.

79. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \log(x+2), & \text{αν } -2 < x < -1 \\ x^2 - 1, & \text{αν } -1 \leq x \leq 2 \\ -3x + 9, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = -1$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $-1 < f(x) < 0$.

στ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

80. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\log(8\alpha)}{\log(x+2)} - \frac{\log(\alpha+8) - \log(x+2)}{\log 2}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(2,\ 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 8$.

γ) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα y'y σε σημείο με ακέραια τεταγμένη.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 1$.

ε) Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + (\lambda^2 + 5)x + 6 = 0 \qquad (1)$$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να αποδείξετε ότι:

$$f(2^{x_1} - 2) = f(2^{x_2} - 2)$$

22ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ : **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΟ 5ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

.1 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3^{x+\alpha} + 1$ διέρχεται από το σημείο $M(5, 28)$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) - f(x-1) < 6$.

.2 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\alpha^{2x+1} - (\alpha+1)^{x+1}}{9^x - 4^x} \quad \text{με } \alpha > 0$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(1, \dfrac{11}{5}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$.

γ) Να βρείτε τα σημεία της C_f που έχουν τεταγμένη 1.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(-x) = 7$ για κάθε $x \neq 0$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση:

$$5 \cdot 4^x - 10^x \cdot f\left(\eta\mu\frac{\pi}{5}\right) = 10^x \cdot f\left(\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{10}\right) - 2 \cdot 5^{2x}$$

.3 Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha^x$$

για την οποία ισχύει ότι:

$$2f(3) - f(2) - 5f(1) = 2$$

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Έστω $g(x)$ η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της C_f, μια οριζόντια κατά δύο μονάδες προς τα δεξιά και μια κατακόρυφη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

i) Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και C_g.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $g(2x) < 2f(x)$.

.4 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{4^x - 7 \cdot 2^x}{2^x - 4}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα σημεία της C_f που έχουν τεταγμένη 5.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 2$.

δ) Για κάθε $\lambda < 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μοναδική λύση.

.5 Το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - (4^{\lambda-2} + 1)x^2 + 5x + 4^{\lambda-\frac{1}{2}} + 4^{\lambda-1} - 10$$

έχει παράγοντα το $x + 2$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$5 \cdot 6^x - 4^{x+\frac{1}{2}} = \lambda^{2x+1}$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\lambda^{\eta\mu^2 x} + \lambda^{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 4$$

δ) Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2^x - \lambda^y = \lambda \\ 2^{2-x} + \lambda^y = 2 \end{cases}$$

.6 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{17 - 2^{x+1} - 2^{3-x}}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα σημεία της C_f που έχουν τεταγμένη $\sqrt{7}$.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο.

ε) Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο στο 1.

.7 Σε ένα πείραμα εργαστηρίου ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο:

$$P(t) = 200e^{ct}$$

όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος. Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328. (Δίνεται ότι $\ln 1{,}64 \cong 0{,}5$ και $\ln 10 \cong 2{,}3$.)

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

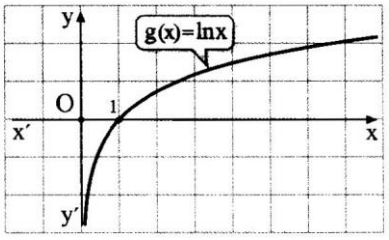
β) Να αποδείξετε ότι $c = \dfrac{1}{2}$.

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής. ***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

.8 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(x-3), \quad x > 3$$

α) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$.



β) Σε ποιο σημείο τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα x′x; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Ποια είναι η ασύμπτωτη της C_f;

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

.9 Δίνεται ο αριθμός $\alpha = \log 2 \cdot \log 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{1}{4}$.

β) Να εκφράσετε καθέναν από τους αριθμούς log2 και log5 ως συνάρτηση του α.

.10 Δίνονται οι αριθμοί:

- $\alpha = \dfrac{\log 125 + \log 27 - \log 8}{\log\sqrt{15} - \log\sqrt{2}}$
- $\beta = \dfrac{\ln 9}{\frac{1}{2}\ln 4 + \frac{2}{3}\ln 27 - \ln 6}$
- $\gamma = -\sqrt{e}^{\ln 9} + 1000^{\log 2}$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α, β και γ.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$x + \log(\beta^x + 1) = x \cdot \log\gamma + \log\alpha$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$9\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\log x} < 3^{\log x^2 + \gamma} - \beta$$

δ) Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \log^\beta x + \log^\beta y = \gamma \\ \log x^\beta + \log y^\beta = \alpha \end{cases}$

ii) $\begin{cases} \beta^x \gamma^y = 40 \\ (\alpha+\beta)^{x-y} = \beta^\alpha \end{cases}$

.11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\dfrac{4^x - 1}{2^x + 5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.12 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{6}}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$4 \cdot 4^{f(x)} - 9 \cdot 2^{f(x)} + 100^{\log\sqrt{6}} - 4 = 0$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + e^x) - \dfrac{x}{2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 0$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(x-2)$.

.14 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(\alpha + e^x) - \frac{x}{1 + e^{-x}}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\ln 2,\ \ln\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

γ) Αν λ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της C_f με τον άξονα y′y, να λύσετε την εξίσωση:

$$4^{\ln x} - 9x^\lambda + 8 = 0$$

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^{\log x} + f(1 - \sqrt{3}) = 100x + f\left(\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)$$

.15 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \log(x^2 - 4x + \alpha)$$

με $\alpha > 0$, για την οποία ισχύει ότι $f(6) = 2f(4)$. Να βρείτε:

α) τον αριθμό α,

β) το πεδίο ορισμού της f,

γ) τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα x′x,

δ) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία ε: $y = 2\log 6$.

.16 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{6\ln x + \alpha}{\ln^3 x - \ln\sqrt[4]{x}}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(e^2,\ \dfrac{14}{15}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -5$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6 - f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$.

.17 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha + \log 1500 + \log(1 - \sigma\upsilon\nu x) - \log(\eta\mu^2 x)$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\dfrac{2\pi}{3},\ \log 3\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x′x.

.18 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + \lambda} - x\right), \quad \lambda > 0$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x}{2} = \frac{f\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{5}\right)}{f\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{4\pi}{5}\right)}$$

ε) Αν το σημείο M(α, β) ανήκει στη C_f, να αποδείξετε ότι το σημείο N(β, α) ανήκει στη γραφική παράσταση της $g(x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2}$.

.19 Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$3f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2\ln x \quad \text{για κάθε } x > 0$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu\left(\pi f(x)\right) = \sqrt{e}^{\ln 3 - 2\ln 2}$$

στο διάστημα $\left(1, e\sqrt{e}\right)$.

δ) Αν για τους $\alpha, \beta > 0$ ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta + 1 < \alpha + \beta$.

.20 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \log(1 - \log^2 x)$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A_f της f.

β) Να βρείτε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in A_f$ η τιμή του αριθμού:

$$\lambda = \sqrt{\log^2\alpha - \log\alpha^2 + 1} + \sqrt{\log^2\alpha + \log\alpha^2 + 1}$$

είναι σταθερή (ανεξάρτητη του α).

δ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (γ) να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x) < \lambda \cdot \log\left(\eta\mu\frac{20\pi}{3}\right)$$

.21 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{4^x - 32}{2^x + 5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε το σημείο της C_f που έχει τεταγμένη -4.

γ) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

δ) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = 2^x - 5 - \frac{7}{2^x + 5}$$

ε) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

στ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$(4^{x^3+x} - 32)(2^{4x^2-6} + 5) <$$

$$< (4^{4x^2-6} - 32)(2^{x^3+x} + 5)$$

.22 Δίνονται συναρτήσεις f και g, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

$$f(x) + g(x) = 2e^x \quad \text{και} \quad f(x) - g(x) = 2e^{-x}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τους τύπους των $f(x)$ και $g(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 0$.

γ) Να εξετάσετε αν η g είναι άρτια ή περιττή.

δ) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

ε) Να βρείτε τα σημεία της C_f που έχουν τεταγμένη $\frac{5}{2}$.

στ) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq \dfrac{5}{3}$.

ζ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$2g(\alpha + \beta) = f(\alpha)g(\beta) + g(\alpha)f(\beta)$$

.23 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha^x, \quad \text{με } 0 < \alpha \neq 1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(7x) + f(x) \geq f(5x) + f(3x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Επιπλέον η f είναι γνησίως αύξουσα και η C_f διέρχεται από το σημείο $M\left(2, \dfrac{8\alpha - 4}{3}\right)$.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(4^x) < 4^{f(x)}$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(\frac{6}{x}\right) - 3f\left(\frac{x+3}{x}\right) + 8 = 0$$

.24 Δίνεται η εκθετική συνάρτηση:

$$f(x) = (2\log^2\alpha + \log\alpha)^x$$

όπου $\alpha > 0$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Έστω ότι:

$$\alpha = 1000^{\log 2} + \sqrt{e}^{\ln 9} - \ln 10 \cdot \log e$$

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 10$.

ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

iii) Να βρείτε για ποια τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ το σημείο $K\left(\mu, \dfrac{2^{\mu+3}}{27}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

iv) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x+1) + f(1-x) < 10$$

.25 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A_f της f.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in A_f$ ισχύει:

i) $\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2} \in A_f$

ii) $f\left(\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right) = 2f(\alpha)$

ε) Θεωρούμε τον αριθμό $\rho = f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{e-3}{e+3}\right)$ και το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + \alpha x + \alpha + 14$$

το οποίο έχει παράγοντα το $x - \rho$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός ρ είναι ακέραιος.

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

στ) Αν $\lambda = f\left(\dfrac{e-1}{e+1}\right)$, να λύσετε την εξίσωση:

$$8^x - 12 \cdot 4^{x-\lambda} - 3 \cdot 2^{x+\lambda} + 8 = 0$$