7ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η γραμμή C με εξίσωση $x^2-(x-1)y=3x+10$.
- α) Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(3,-5)$ και $B(2,-10)$ ανήκουν στη γραμμή C.
- β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραμμής C με τους άξονες.
- γ) Αν το σημείο $M(\lambda,\lambda-1)$ ανήκει στη γραμμή C, να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.
- δ) Αν το σημείο P ανήκει στη γραμμή C, να αποδείξετε ότι το συμμετρικό Σ του P ως προς το $T(1,-1)$ ανήκει επίσης στη C.

2. α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας ε η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω ίση με:
- i) 30° ii) 120° iii) 90° iv) 0°

β) Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(5,-5)$, να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.

3. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία:
- α) $A(-1,4)$ και $B(1,6)$
- β) $A(-1,3)$ και $B(0,4)$
- γ) $A(1,3)$ και $B(1,-1)$
- δ) $A(2,3)$ και $B(-2,3)$

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,-1)$ και:
- α) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}=(3,-2)$,
- β) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}=(0,1)$,
- γ) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega=\frac{\pi}{4}$.

5. Δίνονται τα σημεία $A(1,-4)$, $B(4,5)$ και $\Gamma(4,-2)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών:
- α) ΑΒ
- β) ΒΓ

6. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$:
- α) οι ευθείες $\varepsilon_1: y=(\alpha^2+3\alpha)x+4$ και $\varepsilon_2: y=(\alpha+8)x-21$ είναι παράλληλες,
- β) οι ευθείες $\varepsilon_3: y=(\alpha+1)x-7$ και $\varepsilon_4: y=\frac{(\alpha-3)x+13}{4}$ είναι κάθετες.

7. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία:
- α) είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y=3x+10$ και διέρχεται από το σημείο $A(2,-1)$,
- β) είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: y=\frac{x+3}{2}$ και διέρχεται από το σημείο $B(3,-5)$,
- γ) σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-2,3)$,
- δ) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}=(2,8)$ και διέρχεται από το σημείο $\Delta(3,7)$,
- ε) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\beta}=(3,0)$ και διέρχεται από το σημείο $E(4,5)$.

8. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(1,-1)$, $B(2,0)$ και $\Gamma(-1,-3)$ είναι συνευθειακά.

9. Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(5, 1)$. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

10. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: y = 2x - 6$ και $\zeta: y = -3x + 19$. Να βρείτε:
α) το σημείο τομής των ευθειών ε και ζ,
β) τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

11. Δίνεται η ευθεία:

$$\varepsilon: y = \frac{1}{2}x - 3$$

και το σημείο $A(3, 1)$. Να βρείτε:
α) την προβολή του σημείου Α στην ευθεία ε,
β) το συμμετρικό του σημείου Α ως προς την ευθεία ε.

12. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: y = 3x + 5\lambda$, $\zeta: y = -x + 3$ και $\theta: y = 2x - 6$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Το σημείο $M(2\lambda + 4, \lambda + 2)$ ανήκει στην ευθεία ε. Να βρείτε:
α) τον πραγματικό αριθμό λ,
β) σημείο Α της ευθείας ζ και σημείο Β της ευθείας θ, ώστε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ να έχει μέσο το Μ.

13. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta: y = -\frac{1}{3}x + 2017$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 6 τετραγωνικές μονάδες (τ.μ.).

14. Δίνεται η ευθεία $\zeta: y = x - 2$. Να βρείτε ευθεία ε η οποία διέρχεται από το σημείο $P(3, 5)$ και τέμνει τη ζ σε σημείο Α, το οποίο απέχει απόσταση $\sqrt{10}$ από την αρχή των αξόνων.

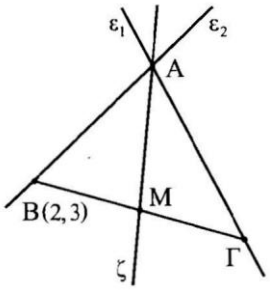
15. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B(-3, -3)$. Η εξίσωση της πλευράς ΑΓ (δηλαδή της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται η πλευρά ΑΓ) είναι $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ και η εξίσωση του ύψους ΑΔ είναι $y = -2x - 4$. Να βρείτε:
α) τις συντεταγμένες της κορυφής Α,
β) τις εξισώσεις των πλευρών ΑΒ και ΒΓ,
γ) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ,
δ) την εξίσωση του ύψους ΒΕ,
ε) τις συντεταγμένες του ορθόκεντρου του τριγώνου ΑΒΓ.

16. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: y = -2x + 13, \quad \varepsilon_2 \quad \text{και}$$

$$\zeta: y = -5x + 22$$

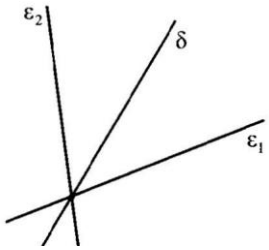
που διέρχονται από το σημείο Α. Θεωρούμε επίσης το σημείο $B(2, 3)$ της ε_2 και σημείο Γ της ε_1 τέτοιο, ώστε η ευθεία ζ να διέρχεται από το μέσο Μ του ΒΓ. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Γ.



17. Δίνονται δύο μη παράλληλες ευθείες:

$$\varepsilon_1: y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \varepsilon_2$$

Η ευθεία $\delta: y = x - 1$ διχοτομεί μια από τις γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2. Να βρείτε την εξίσωση της ε_2.



18. Να αποδείξετε ότι καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, το σημείο $M(\lambda + 3, 4\lambda - 5)$ κινείται σε μια ευθεία.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Εξίσωση ευθείας

1. Δίνονται τα σημεία Α(6, 5) και Β(4, 1). Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται:
α) από τα σημεία Α και Β,
β) από το Β και είναι κάθετη στην ΑΒ,
γ) από το Α και είναι παράλληλη στον άξονα x′x
δ) από το Β και είναι κάθετη στον άξονα x′x.

2. Δίνονται τα σημεία Α(1, 2) και Β(5, 6).
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.
β) Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετη ε του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έχει εξίσωση την $y = -x + 7$.
(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α(4, −1) και:
α) είναι παράλληλη στην ευθεία:
$$\zeta_1 : y = -2x + 5$$
β) είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta_2 : y = \frac{-x+12}{3}$,
γ) σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x′x,
δ) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{v} = (3, -6)$,
ε) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{w} = (0, 4)$,
στ) είναι παράλληλη στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{xOy}$.

4. Δίνεται το σημείο Α(−2, 3) και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (6, -2)$. Να βρείτε:
α) τις συντεταγμένες του σημείου Β,
β) την ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το μέσο του ΑΒ,
γ) τη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

5. Δίνονται τα σημεία Α(−6, 4), Β(α, 6α) και Γ(α − 3, α + 1) με $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία ΒΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης 3, να βρείτε:
α) τον αριθμό α,
β) την εξίσωση της ευθείας ΒΓ,
γ) τη γωνία που σχηματίζει η ΑΒ με τον άξονα x′x,
δ) την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην ευθεία ΒΓ,
ε) την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από το Γ και είναι κάθετη στην ΑΒ.

6. Θεωρούμε τα σημεία:
$$A(6, \mu) \quad \text{και} \quad B(\mu + 2, \mu + 1) \quad \text{με } \mu \in \mathbb{R}$$
α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα Α και Β.
β) Να βρείτε για ποια τιμή του μ το σημείο Γ(4, 2) περιέχεται στην ευθεία ΑΒ.
(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

7. Δίνεται το σημείο Α(4, 2) και τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\mu, 6)$ και $\vec{\beta} = (6, \mu - 1)$, με $\mu \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 30$. Να βρείτε:
α) τον αριθμό μ,
β) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι:
i) παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$,
ii) κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

Β. Τομές ευθειών

8. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μέσο Μ και Α(1, −2), Μ(−2, 5). Να βρείτε:
α) τις συντεταγμένες του σημείου Β,
β) την εξίσωση της μεσοκάθετης ε του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, καθώς και τα κοινά σημεία με τους άξονες x′x και y′y.
(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

9. Οι ευθείες:
$$\varepsilon_1 : y = 2x + 16, \quad \varepsilon_2 : y = -5x + 2 \quad \text{και}$$
$$\varepsilon_3 : y = \alpha x - 4\alpha - 6$$
διέρχονται από το ίδιο σημείο. Να βρείτε:
α) τον αριθμό α,
β) τα σημεία τομής της ε_3 με τους άξονες.

10. Οι ευθείες:
$$\varepsilon_1 : y = \mu x + \mu - 7 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y = \frac{\mu - 6}{9} x + 2\mu$$
είναι κάθετες. Να βρείτε:
α) τον αριθμό μ,
β) το σημείο τομής Α των ε_1 και ε_2,
γ) τον αριθμό α, ώστε η ευθεία $\zeta : y = \alpha x + \alpha - 19$ να διέρχεται από το σημείο Α.

11. Θεωρούμε την ευθεία ε_1 που τέμνει τους άξονες x′x και y′y στα σημεία Α(3, 0) και Β(0, 6) αντίστοιχα.
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1.
β) Αν ε_2 είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ε_1, να βρείτε:
i) την εξίσωση της ευθείας ε_2,
ii) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2.
(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

12. Θεωρούμε την ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία Α(1, −2) και Β(5, 6). Να βρείτε:
α) την εξίσωση της ευθείας ε,
β) τα σημεία τομής της ε με τους άξονες,
γ) την εξίσωση της ευθείας ζ_1 που είναι παράλληλη στην ε και διέρχεται από το σημείο Γ(−4, −3),
δ) την εξίσωση της ευθείας ζ_2 που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το σημείο Δ(6, 7),
ε) το σημείο τομής των ευθειών ζ_1 και ζ_2.

13. Δίνονται τα σημεία:
$$A(\alpha, 2 - \alpha), \quad B(\alpha + 6, \alpha + 9) \quad \text{και} \quad \Gamma(5, -3)$$
Αν η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{1}{2}$, να βρείτε:
α) τον αριθμό α,
β) τα σημεία τομής της ευθείας ΑΒ με τους άξονες,
γ) την εξίσωση της ευθείας ΑΓ και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x′x,
δ) την εξίσωση της ευθείας ε που είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ στο σημείο Β,
ε) το σημείο τομής της ευθείας ε με την ευθεία ΑΓ.

14. Δίνεται η ευθεία ε: $y + x = 1$ και το σημείο $A(2, -4)$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ε,

β) την προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία ε.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

15. Δίνεται το σημείο $A(-3, 5)$ και η ευθεία ε: $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Να βρείτε:

α) την προβολή του Α στην ευθεία ε,

β) το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε.

16. Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(5, 1)$ και έστω ε η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της ευθείας ε,

β) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες.

17. Δίνονται τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(2, 3)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων και Κ, Λ είναι τα σημεία τομής της ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. ***(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)***

18. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε την ευθεία ε: $y = x + \kappa - 1$, όπου κ θετικός ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας.

α) Να βρείτε, με τη βοήθεια του κ, τα σημεία τομής Α και Β της ευθείας με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

β) Αν ισχύει $(OAB) < 2$, να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

19. Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$, όπου $\alpha\beta > 0$ και $\alpha \neq \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$AB: \ y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \beta$$

β) Αν ε είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(\alpha, \beta)$ και είναι κάθετη προς την ευθεία ΑΒ, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ε,

ii) αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Κ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο Λ, να αποδείξετε ότι $(OK\Lambda) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{2\alpha\beta}$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων. ***(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)***

20. Θεωρούμε ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $M(4, -2)$ και σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$. Έστω επίσης Ε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

α) Να αποδείξετε ότι $E \geq 16$.

β) Έστω ότι το εμβαδόν Ε παίρνει την ελάχιστη τιμή του. Θεωρούμε και την ευθεία:

$$\zeta: \ y = \alpha x - 5\alpha + 1 \quad \text{με } \alpha \neq \frac{1}{2}$$

i) Να αποδείξετε ότι ε: $y = \frac{1}{2}x - 4$.

ii) Αν Ν είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και ζ και $K(7, -3)$, να αποδείξετε ότι $KN \geq \sqrt{5}$.

Γ. Σημείο που ανήκει σε ευθεία

21. Δίνονται τα σημεία $A(\alpha, 5)$ και $B(3, 2\alpha)$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Η ευθεία ε, που διέρχεται από τα σημεία Α και Β, σχηματίζει γωνία $135°$ με τον άξονα $x'x$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α και την εξίσωση της ε.

β) Αν το σημείο $B(\beta, 3\beta - 5)$ ανήκει στην ευθεία ε, να βρείτε:

i) τον αριθμό β και την απόσταση του Β από την αρχή των αξόνων,

ii) την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από το Β και είναι κάθετη στην ε,

iii) σημείο Γ της ε και σημείο Δ της ζ, ώστε το ΓΔ να έχει μέσο το $M(2, 7)$.

22. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda+\mu, 2\lambda)$ και $B(\mu, \lambda-2\mu)$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Αν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει μέσο το σημείο $M\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, να βρείτε:

α) τις τιμές των λ και μ,

β) σημείο Κ της ευθείας:

$$\varepsilon: \ y = -7x + 23$$

ώστε το τρίγωνο ΑΚΒ να είναι ορθογώνιο στο Κ,

γ) σημείο Γ της ευθείας $\zeta_1: \ y = 2x + 8$, ώστε το μέσο του ΑΓ να ανήκει στην ευθεία $\zeta_2: \ y = -3x - 4$.

23. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: \ y = (\alpha + 3)x + \alpha, \quad \varepsilon_2: \ y = \frac{5}{3}x - \frac{14}{3} \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_3: \ y = -3x + 14$$

Η ευθεία ε_1 διέρχεται από το σημείο $A(11, 9)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 διέρχονται από το ίδιο σημείο.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ η οποία διέρχεται από το σημείο Α και τέμνει τις ε_2 και ε_3 στα σημεία Μ και Β αντίστοιχα έτσι, ώστε το Μ να είναι μέσο του ΑΒ.

24. α) Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι σημεία της ευθείας ε: $y = \lambda x + \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$AB = |x_2 - x_1|\sqrt{\lambda^2 + 1}$$

β) Θεωρούμε την ευθεία ε: $y = \lambda x + \beta$ με $\lambda > 0$. Τα σημεία $A(-1, y_1)$, $B(0, 6)$ και $\Gamma(3, y_2)$ ανήκουν στην ευθεία ε και ισχύει ότι $B\Gamma = AB + \sqrt{20}$.

i) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και β.

ii) Έστω ζ ευθεία παράλληλη στην ε, η οποία διέρχεται από το $\Delta(2, 5)$. Αν Ε είναι το συμμετρικό του Δ ως προς το Α και Ζ το σημείο τομής της ευθείας ζ με τον άξονα $y'y$, να βρείτε τη γωνία $\widehat{\Delta EZ}$.

Δ. Στοιχεία τριγώνων

25. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(3, 1)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(2, 4)$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της πλευράς ΑΓ,

β) τις εξισώσεις του ύψους ΒΔ και της διαμέσου ΑΜ.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

26. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $A(-3, 2)$, ενώ η πλευρά ΒΓ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x - 5$ και το

ύψος ΓΔ βρίσκεται πάνω στην ευθεία:

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ,
β) την εξίσωση της πλευράς ΑΓ,
γ) την εξίσωση της πλευράς ΑΒ,
δ) τις συντεταγμένες της κορυφής Β,
ε) την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ,
στ) την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς ΒΓ.

27. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2, 1). Οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται τα δύο από τα ύψη του έχουν εξισώσεις:

$$y = -3x + 11 \quad \text{και} \quad y = x + 3$$

Να βρείτε:

α) τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ,
β) τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ,
γ) την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

28. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ, η οποία βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = \frac{x}{2} - 2$. Επίσης είναι Α(3, 7), $ΒΓ = 4\sqrt{5}$ και η τετμημένη του Β είναι μικρότερη του 6.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.
β) Αν για το σημείο Σ ισχύει ότι $\overrightarrow{ΓΣ} = (0, -5)$, να βρείτε τη γωνία $\widehat{ΒΑΣ}$.

29. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η πλευρά ΑΒ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = -3x - 20$, το ύψος ΑΔ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = -x - 6$ και η διάμεσος ΒΜ βρίσκεται πάνω στην ευθεία:

$$y = \frac{7x + 20}{3}$$

Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες των κορυφών Α και Β,
β) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ,
γ) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ,
δ) το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

30. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η πλευρά ΑΓ βρίσκεται στην ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$, το ύψος ΑΔ βρίσκεται στην ευθεία $y = -x + 8$ και η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ είναι η ευθεία $μ: y = -\frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$.

α) Να βρείτε:
i) τις συντεταγμένες της κορυφής Α,
ii) τις συντεταγμένες της κορυφής Β,
iii) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ,
iv) τη μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ.

β) Δίνονται τα σημεία Κ(2, 14) και Λ(8, 16). Να βρείτε σημείο Ρ για το οποίο ισχύει:

$$ΡΑ = ΡΓ \quad \text{και} \quad ΡΚ = ΡΛ$$

31. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(−2, 4). Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = 3x - 5$ και η διχοτόμος ΓΔ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x + 2$. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του σημείου Β,
β) τις συντεταγμένες του σημείου Δ,
γ) την εξίσωση της ευθείας ΒΓ,
δ) την εξίσωση της ευθείας ΑΓ.

32. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με:

$$Α(5, 5) \quad \text{και} \quad Β(9, -7)$$

ενώ το ορθόκεντρό του είναι το σημείο Η(4, −2).

α) Να βρείτε:
i) τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ,
ii) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ,
iii) την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς ΒΓ.

β) Έστω Ρ τυχαίο και σταθερό σημείο της ευθείας ΑΓ, με θετική τετμημένη. Μια ευθεία ζ διέρχεται από το Ρ και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Οx και Οy στα σημεία Σ και Τ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα:

$$\frac{1}{|\overrightarrow{ΟΣ}|} + \frac{1}{|\overrightarrow{ΟΤ}|}$$

είναι σταθερό (ανεξάρτητο της ευθείας ζ).

Ε. Εύρεση ευθείας με γνωστό λ

33. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που είναι παράλληλη στην ευθεία $ζ: y = -3x + 2017$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 24 τ.μ.

34. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $ζ: y = \frac{x + 21}{2}$ και τέμνει τους άξονες y′y και x′x στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, ώστε η τεταγμένη του Α και η τετμημένη του Β να έχουν άθροισμα 9.

35. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} = (3, -6)$ και επιπλέον τέμνει τους άξονες x′x και y′y στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, ώστε να ισχύει $ΑΒ = 2\sqrt{5}$.

36. Δίνεται ευθεία ε η οποία σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία ω με $συνω = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 2.
β) Αν επιπλέον η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x′x και y′y στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, ώστε το μέσο Μ του ΑΒ να ανήκει στην ευθεία:

$$ζ: y = -5x + 9$$

να βρείτε την εξίσωση της ε.

Ζ. Εύρεση ευθείας που διέρχεται από γνωστό σημείο

37. Δίνονται τα σημεία:

$$Ρ(-2, 6) \quad \text{και} \quad Μ(-8, 4)$$

Να βρείτε ευθεία ε που διέρχεται από το Ρ και τέμνει τους άξονες x′x και y′y στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, ώστε $\overrightarrow{ΜΑ} \perp \overrightarrow{ΜΒ}$.

38. Δίνονται οι ευθείες:

$$ε_1: y = 2x + 3 \quad \text{και} \quad ε_2: y = x - 1$$

Να βρείτε ευθεία ζ η οποία διέρχεται από το σημείο Ρ(2, 3) και τέμνει τις $ε_1$ και $ε_2$ στα σημεία Α και Β

39. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1 : y = \frac{x}{2} + 5 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y = \frac{x}{2} - 5$$

και το σημείο Γ(6, 4). Να βρείτε ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο Ρ(2, 1) και τέμνει τις ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία Α και Β αντίστοιχα έτσι, ώστε $\widehat{A\Gamma B} = 90°$.

40. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon_1 : y = \frac{1}{2}x + 2$. Θεωρούμε επίσης ευθεία ε_2 η οποία διέρχεται από το σημείο Σ(4, −1) και τέμνει τους άξονες x′x και y′y στα σημεία Α και Β αντίστοιχα έτσι, ώστε να ισχύει:

$$\overrightarrow{B\Sigma} = 2\overrightarrow{\Sigma A}$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε_2 είναι:

$$y = \frac{1}{2}x - 3$$

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ η οποία διέρχεται από το σημείο $P\left(2, \frac{1}{2}\right)$ και τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα έτσι, ώστε να ισχύει ΓΔ = 5.

Η. Γεωμετρικοί τόποι

41. Δίνεται το σημείο Α(2λ − 3, 6λ − 11) με λ ∈ ℝ. Να αποδείξετε ότι:

α) το σημείο Α κινείται πάνω σε ευθεία ε,

β) για οποιαδήποτε τιμή του θ ∈ ℝ, το σημείο Β(2 − συν²θ, 1 + 3ημ²θ) ανήκει στην ευθεία ε.

42. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1 : y = 2x + \kappa \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y = 3x - 2\kappa + 5$$

Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του κ ∈ ℝ το σημείο τομής Μ των ευθειών ε_1 και ε_2 ανήκει σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

43. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon : y = 3x - 7 \quad \text{και} \quad \zeta : y = \frac{1}{2}x - 2$$

Έστω Α(λ, μ) ένα σημείο της ευθείας ε και Β το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ζ.

α) Να εκφράσετε τις συντεταγμένες του Β συναρτήσει του λ.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β κινείται σε ευθεία.

44. Θεωρούμε τα σημεία:

$$A(-2t + 6, 0) \quad \text{και} \quad B(0, 4t - 2) \quad \text{με } t \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ.

β) Να αποδείξετε ότι το Μ κινείται σε ευθεία, την οποία να προσδιορίσετε.

γ) Αν ΑΒ = d, να αποδείξετε ότι $d^2 \geq 20$ και κατόπιν να βρείτε τα Α και Β, ώστε η απόσταση ΑΒ να είναι ελάχιστη. ***(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)***

45. Αν το σημείο Α(κ, λ) κινείται στην ευθεία:

$$\varepsilon : y = 3x - 5$$

να αποδείξετε ότι το σημείο Μ(2κ − 7, 4λ − 2) κινείται σε ευθεία ζ, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

46. Δίνεται η ευθεία ε: y = 2x − 6 και σημείο της Ρ. Έστω Α και Β οι προβολές του Ρ στους άξονες x′x και y′y αντίστοιχα. Καθώς το Ρ κινείται στην ευθεία ε, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM}$ κινούνται σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

47. Ένα επιβατηγό πλοίο εκτελεί το δρομολόγιο Πειραιάς - Ηράκλειο Κρήτης. Σε κάθε χρονική στιγμή t του ταξιδιού η θέση Μ του πλοίου ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy είναι Μ(2 + κt, λ + 2t), όπου κ, λ ∈ ℝ. Τη χρονική στιγμή t = 5 το πλοίο διέρχεται από το σημείο Α(7, 13).

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ.

β) Να αποδείξετε ότι το πλοίο διαγράφει γραμμή που βρίσκεται πάνω στην ευθεία ε: y = 2x − 1.

γ) Ένα δελφίνι κινείται παράλληλα προς το πλοίο. Να βρείτε ένα διάνυσμα μήκους 1, κάθετο προς την ευθεία πάνω στην οποία κινείται το δελφίνι.

48. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με Α(8, 4), στο οποίο το ύψος ΒΔ βρίσκεται πάνω στην ευθεία y = −2x + 10 και η διάμεσος ΒΜ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες της κορυφής Β,

β) τις εξισώσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ,

γ) το μήκος της διαμέσου ΒΜ,

δ) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ,

ε) την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς ΒΓ,

στ) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Σ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{\Sigma A}^2 + \overrightarrow{\Sigma\Gamma}^2 = 2\overrightarrow{\Sigma B}^2$$

Θ. Συνδυαστικά θέματα

49. Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{\alpha} = (1, -1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (3, 0)$$

Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του διανύσματος:

$$\vec{u} = 4\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}$$

β) την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\vec{u}^2}{5}$ και διέρχεται από το Α(1, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$+2).

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

50. Έστω Μ(3, 5) το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με Α(1, 1).

α) Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου Β,

ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Κ του άξονα x′x έτσι, ώστε να ισχύει ΚΑ = ΚΒ.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

51. Θεωρούμε την ευθεία ε_1 που διέρχεται από το σημείο Α(12, 4) και τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο Β με τετμημένη −4. Επίσης θεωρούμε την ευθεία δ_1 που σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία 45° και τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο Γ με τεταγμένη −2.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και δ_1.

β) Να βρείτε το σημείο τομής Δ των ευθειών ε_1 και δ_1

γ) Θεωρούμε ευθεία ε_2 που διέρχεται από το Δ(4, 2) τέτοια, ώστε η ευθεία δ_1 να διχοτομεί μια γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ε_2,

ii) την ευθεία δ_2 που διχοτομεί την άλλη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2.

52. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(−5, 4), Β(−1, 6), Γ(4, 1) και σημείο Μ της πλευράς ΑΒ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ.

γ) Αν το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Γ και Μ.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

53. Θεωρούμε τα σημεία:

$$A(\alpha, 8) \quad \text{και} \quad B(-2, \alpha - 6) \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}$$

Η ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β έχει συντελεστή διεύθυνσης 3.

α) Να βρείτε τον αριθμό α και την εξίσωση της ε.

β) Θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο, ώστε:

$$2\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Gamma} = (-8, 6)$$

Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου Γ,

ii) την προβολή του Γ στην ευθεία ε,

iii) το συμμετρικό του Γ ως προς την ευθεία ε.

γ) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}^2$ είναι ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

54. Δίνονται τα σημεία Α(λ + 1, λ − 1), Β(2, 2) και Γ(4, 6), λ ∈ ℝ.

α) Να βρείτε τη μεσοκάθετη του τμήματος ΒΓ.

β) Αν το σημείο Α ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ, να βρείτε την τιμή του λ.

γ) Για λ = 4 να βρείτε σημείο Δ, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΔΓ να είναι ρόμβος.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

55. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με Α(3, 6), του οποίου η διαγώνιος ΒΔ έχει εξίσωση $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$. Επίσης η τεταγμένη του σημείου Β είναι κατά 8 μικρότερη από την τεταγμένη του σημείου Δ.

α) Να αποδείξετε ότι Δ(11, 7).

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

γ) Αν Κ είναι το κέντρο του ρόμβου, να βάλετε σε αύξουσα σειρά τις γωνίες 60°, $\widehat{KAB}$ και $\widehat{AB\Gamma}$.

56. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Οxy θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ με Α(−5, 5). Η τετμημένη του Β είναι μικρότερη από −4 και μια διαγώνιος του ΑΒΓΔ βρίσκεται πάνω στην ευθεία:

$$\varepsilon: \ y = \frac{1}{2}x + 5$$

Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ και Δ,

β) ευθεία ζ παράλληλη στην ΑΔ, η οποία σχηματίζει με τους αρνητικούς ημιάξονες Οx′ και Οy′ τρίγωνο με εμβαδόν 6 τ.μ.

57. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ. Είναι Β(4, 7) και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Η ευθεία ΔΓ έχει εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, η ευθεία ΔΜ έχει εξίσωση $y = \frac{10}{11}x + \frac{1}{11}$ και η ευθεία ΔΑ έχει εξίσωση $y = \mu x + \mu - 9$. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες της κορυφής Δ,

β) τον πραγματικό αριθμό μ,

γ) τις συντεταγμένες της κορυφής Α,

δ) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

58. Θεωρούμε το σημείο Μ(−3, −2) και ευθεία που διέρχεται από το Μ και τέμνει τους αρνητικούς ημιάξονες στα σημεία Α και Β.

α) Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας είναι αρνητικός.

β) Έστω Ε(λ) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

i) Να αποδείξετε ότι $E(\lambda) \geq 12$ για κάθε $\lambda < 0$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που σχηματίζει με τους ημιάξονες τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν. ***(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)***

59. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\beta} = (\mu, 2\mu + 3)$ και $\vec{\alpha} = (\kappa, 8)$ και ευθεία ε, ώστε:

$$\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = (-5, 5) \quad \text{και} \quad \varepsilon // \vec{\alpha}$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Επιπλέον η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x′x και y′y στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, ώστε το μέσο Μ του ΓΔ να έχει τεταγμένη κατά 3 μεγαλύτερη από την τετμημένη του.

i) Να βρείτε την εξίσωση της ε.

ii) Αν $\overrightarrow{OH} = 3\vec{\beta} - \vec{\alpha}$, να βρείτε το σημείο Η, καθώς και το συμμετρικό του ως προς την ευθεία ε.

60. Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: y = \mu x + 1$ και το διάνυσμα $\vec{v} = (9 - \mu, -2)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$. Η ευθεία ε είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{v}$.

α) Να βρείτε τον αριθμό μ.

β) Δίνονται τα σημεία:

$$A(\alpha, \beta) \quad \text{και} \quad B(\beta - 5, \alpha + 1)$$

ώστε η ευθεία ε να είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

i) Να βρείτε τις τιμές των α, β ∈ ℝ.

ii) Δύο κάθετες ευθείες ε_1 και ε_2 διέρχονται από το μέσο του ΑΒ. Η ε_1 τέμνει τον άξονα x′x στο Σ και η ε_2 τέμνει τον άξονα y′y στο Τ. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες ευθείες ε_1 και ε_2 το μέσο του ΣΤ κινείται σε ευθεία.

61. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: y = x + 5 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y = 10$$

Έστω Α το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2. Θεωρούμε τα σημεία Β(6, 11) και Δ(10, 10), τα οποία ανήκουν στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.

α) Να βρείτε ένα σημείο Γ(x, 10) της ευθείας ε_2 έτσι, ώστε να ισχύει $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0$.

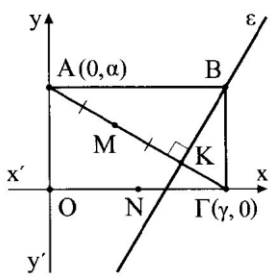
β) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$.

γ) Έστω ζ η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Δ(10, 10) και είναι κάθετη προς την ευθεία ε_1.

i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ.

ii) Έστω Κ σημείο της ζ και Σ, Ρ οι προβολές του Κ στους άξονες x′x και y′y. Να αποδείξετε ότι καθώς το Κ κινείται στη ζ, η μεσοκάθετη του ΣΡ διέρχεται από σταθερό σημείο.

62. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε το ορθογώνιο ΟΑΒΓ με Α(0, α) και Γ(γ, 0), όπου α, γ > 0. Θεωρούμε την ευθεία ε που διέρχεται από το Β και είναι κάθετη στην ΑΓ. Έστω επίσης Κ το σημείο τομής των ευθειών ε και ΑΓ, Μ το μέσο του ΑΚ και Ν το μέσο του ΟΓ.



α) Να βρείτε (ως συνάρτηση των α και γ) τις εξισώσεις των ευθειών ΑΓ και ε, καθώς και τις συντεταγμένες του Κ.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΜΝ και ΒΜ είναι κάθετες.

γ) Αν η ευθεία ε διέρχεται από το μέσο Σ του ΝΓ, τότε:

i) να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΝ τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο με τεταγμένη 3α,

ii) να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΒΝ με τον άξονα x′x.

63. Θεωρούμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Έστω ότι οι ε_1 και ε_2 τέμνουν την ευθεία $y = \alpha$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Οι κάθετες των ε_1 και ε_2 στα Α και Β αντίστοιχα τέμνονται στο Γ.

Α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ συναρτήσει των λ_1, λ_2 και α.

Β. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι Γ(6, 8), $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ και η ευθεία ε_1 σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα x′x.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2.

β) Θεωρούμε ευθεία ε_3 τέτοια, ώστε η ευθεία ΟΓ να διχοτομεί μια από τις γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_3. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ε_3,

ii) την εξίσωση της ευθείας που διχοτομεί την άλλη γωνία που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_3.

8ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 2.2 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda^2 + 2\lambda - 8)x + (\lambda^2 - 4)y + \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \qquad (1)$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1):

α) παριστάνει ευθεία,

β) παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$,

γ) παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$,

δ) παριστάνει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της μορφής:

$$(2\alpha^2 + \alpha + 3)x + (\alpha^2 - \alpha + 1)y + 3\alpha + 1 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

διέρχονται από το ίδιο σημείο.

3. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x + (\lambda - 1)y = 2\lambda$ και $\varepsilon_2: (\lambda + 1)x + \lambda y = 2\lambda + 1$ τέμνονται για όλες τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής τους;

4. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες:

$$(\lambda - 1)x + \lambda y + 8 = 0 \quad \text{και} \quad \lambda x + 3y + 1 - 2\lambda = 0$$

α) να είναι κάθετες, β) να είναι παράλληλες.

5. Να βρείτε την οξεία γωνία την οποία σχηματίζουν οι ευθείες:

$$y = \mu x \quad \text{και} \quad (1 + \mu)x = (1 - \mu)y$$

6. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: \sqrt{3} \cdot x - y + 2 = 0$ και το σημείο $P(2, 3)$. Να βρείτε ευθεία ζ που διέρχεται από το σημείο P και σχηματίζει με την ευθεία ε οξεία γωνία ίση με $30°$.

7. Να αποδείξετε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνει δύο ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 2y^2 - xy - 3x + 9y - 4 = 0$ β) $x^2 - y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Δίνεται η ευθεία:

$$\varepsilon: x + y + 2 = 0$$

και το σημείο Α(5, 1). Να βρείτε:

α) την εξίσωση της ευθείας η_1, η οποία διέρχεται από το Α και είναι κάθετη προς την ευθεία ε,

β) την εξίσωση της ευθείας η_2, η οποία διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς τον άξονα x′x,

γ) το σημείο τομής των ευθειών η_1 και η_2 και την απόστασή του από την αρχή των αξόνων.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

2. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: 8x + y - 28 = 0 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_2: x - y + 1 = 0$$

οι οποίες τέμνονται στο σημείο Μ.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Μ και είναι κάθετη στον άξονα x′x.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από το Μ και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ έχουν εξίσωση την $\lambda x - y - 3\lambda + 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

3. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: x - 8y + 16 = 0 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_2: 2x + y + 15 = 0$$

οι οποίες τέμνονται στο σημείο Μ. Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα y′y στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Μ, Α και Β,

β) αν Κ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ, να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{MK}$.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

4. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: x - 3y + 5 = 0 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_2: 3x + y - 5 = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α και την αρχή Ο των αξόνων.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

5. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες:

$$\varepsilon_1: x - 2y - 8 = 0 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_2: 2x - 4y + 10 = 0$$

και το σημείο Α της ε_1 που έχει τετμημένη το 4.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε, η οποία διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ε_1.

γ) Αν Β είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και ε_2, να βρείτε τις συντεταγμένες του Β.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

6. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: x + 2y - 4 = 0 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_2: 3x - y + 9 = 0$$

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 και επιπλέον:

α) είναι παράλληλη στην ευθεία:

$$4x - 2y + 2017 = 0$$

β) είναι κάθετη στην ευθεία:

$$3x + 2y - 99 = 0$$

γ) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} = (1, -4)$,

δ) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u} = (3, 4)$,

ε) διέρχεται από το σημείο $\Sigma(-5, 6)$.

Β. Προσδιορισμός παραμέτρων

7. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda^2 - 4)x + (\lambda^2 + 2\lambda - 8)y + \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad (1)$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1):

α) παριστάνει ευθεία,

β) παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα x′x,

γ) παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y′y,

δ) παριστάνει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

8. Δίνεται η ευθεία:

$$(\alpha - 3)x + 2y + 2\alpha - 14 = 0 \quad (1)$$

α) Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε που παριστάνει η εξίσωση (1):

i) είναι παράλληλη στην ευθεία:

$$\zeta_1: 5x - 10y + 13 = 0$$

ii) είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta_2: 6x - 3y + 1 = 0$,

iii) σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x′x,

iv) διέρχεται από το σημείο $M(-4, -6)$.

β) Έστω οι ευθείες ε_1 και ε_2 των οποίων οι εξισώσεις προκύπτουν από την (1) για $\alpha = 4$ και $\alpha = 5$ αντίστοιχα. Αν η ε_1 τέμνει τους άξονες x′x και y′y στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και η ε_2 τέμνει τους άξονες x′x και y′y στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΔΓ.

9. Δίνεται η εξίσωση:

$$3x + 4y - \mu(x + y - 1) = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο και να βρείτε.

γ) Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία ε που έχει εξίσωση την (1) να είναι:

i) κάθετη στον άξονα x′x,

ii) κάθετη στον άξονα y′y,

iii) παράλληλη στην ευθεία ζ: $4x + 2y + 13 = 0$.

10. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda^2-\lambda)x+(\lambda^2+\lambda-2)y+\lambda^2-5\lambda+4=0 \quad (1)$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.

β) Έστω ε μια ευθεία που έχει εξίσωση την (1) και διέρχεται από το σημείο $A(3,-1)$. Να βρείτε:

i) τον αριθμό λ,

ii) την ευθεία ζ_1 που είναι παράλληλη στην ε και διέρχεται από το σημείο $B(1,6)$,

iii) την ευθεία ζ_2 που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(4,2)$,

iv) το σημείο τομής των ευθειών ζ_1 και ζ_2.

11. Δίνεται η εξίσωση:

$$(2\kappa+\mu+1)x-(\kappa-\mu-4)y-8\kappa-\mu+5=0 \quad (1)$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.

β) Για κάθε $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$, με $(\kappa,\mu) \neq (1,-3)$, να αποδείξετε ότι οι ευθείες που έχουν εξίσωση την (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

γ) Να βρείτε ποια από τις ευθείες που έχουν εξίσωση την (1) είναι παράλληλη στην ευθεία:

$$\zeta:\ 6x-2y+2017=0$$

12. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\alpha+4)x+\alpha y+\alpha-4=0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο και να βρείτε.

γ) Να βρείτε το α, ώστε η ευθεία ε που έχει εξίσωση την (1) να είναι κάθετη στην ευθεία:

$$\zeta: x-3y-7=0$$

δ) Έστω ότι η ευθεία που έχει εξίσωση την (1) τέμνει τους άξονες y′y και x′x στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, διαφορετικά της αρχής των αξόνων.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει ότι:

$$OA = 3OB$$

ii) Αν $\alpha \in (-4,0)$, να αποδείξετε ότι:

$$OA \cdot OB \geq 8$$

Γ. Σχετική θέση δύο ευθειών

γ) Να βρείτε το α, ώστε η ευθεία ε που έχει εξίσωση την (1) να είναι κάθετη στην ευθεία:

$$\zeta: x-3y-7=0$$

δ) Έστω ότι η ευθεία που έχει εξίσωση την (1) τέμνει τους άξονες y′y και x′x στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, διαφορετικά της αρχής των αξόνων.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει ότι:

$$OA = 3OB$$

ii) Αν $\alpha \in (-4,0)$, να αποδείξετε ότι:

$$OA \cdot OB \geq 8$$

14. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: \lambda x+(\lambda+3)y-6=0$$

και:

$$\varepsilon_2: (\lambda-1)x+(\lambda+2)y-3=0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,

β) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σημείο τομής Μ των ε_1 και ε_2 κινείται πάνω σε ευθεία.

15. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: (\lambda-1)x+\lambda y-2=0$$

και:

$$\varepsilon_2: (\lambda-2)x+(\lambda-1)y-1=0$$

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 5.

16. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: \lambda x+(\lambda-4)y-12=0$$

και:

$$\varepsilon_2: (\lambda-1)x+(\lambda-5)y-4=0$$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν μοναδικό κοινό σημείο Μ, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες συναρτήσει του λ.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σημείο Μ:

i) απέχει από τον άξονα y′y απόσταση ίση με 7,

ii) απέχει από τον άξονα x′x απόσταση μικρότερη του 5.

Δ. Διάνυσμα παράλληλο ή κάθετο σε ευθεία

17. Οι ευθείες $\varepsilon_1: (\lambda-6)x+\lambda y+21=0$ και:

$$\varepsilon_2: \lambda x+(\lambda+2)y+2=0$$

είναι παράλληλες, ενώ οι ευθείες:

$$\varepsilon_3: (\mu-\lambda)x-\mu y-9=0$$

και:

$$\varepsilon_4: (\mu+2\lambda)x+(\mu-\lambda^2)y+27=0$$

είναι κάθετες.

α) Να βρείτε τις τιμές των λ και μ.

β) Αν Α είναι το σημείο τομής των ε_1 και ε_3 και Β είναι το σημείο τομής των ε_2 και ε_4, να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

18. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: \lambda x+(\lambda-1)y-\mu=0$$

και:

$$\varepsilon_2: (\lambda-4)x+(\lambda-3)y+\mu-4=0$$

με $\mu > 4$, οι οποίες είναι παράλληλες.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.

β) Έστω ότι η ε_1 τέμνει τους άξονες x′x και y′y στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και η ε_2 τέμνει τους άξονες x′x και y′y στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να βρείτε τον αριθμό μ, ώστε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ να ισούται με 8 τ.μ.

19. Οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\lambda+1)x + (\lambda-4)y - 4 = 0$ και $\varepsilon_2 : \lambda x + (5-\lambda)y - 7 = 0$ είναι κάθετες.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.

β) Θεωρούμε την εξίσωση:

$$(\mu^2 - 3\mu + 2)x + (\mu^2 - 1)y - 2\mu^2 + 2\mu = 0 \quad (1)$$

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.

ii) Να βρείτε τον αριθμό μ, ώστε η ευθεία ζ που έχει εξίσωση την (1) να διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2.

20. Οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda-3)y - 3 = 0$ και:

$$\varepsilon_2 : (\lambda-4)x + (2-\lambda)y + 14 = 0$$

είναι κάθετες.

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ.

β) Αν δίνονται το σημείο Α(4, 5) και σημείο Β το οποίο κινείται στην ευθεία ε_1, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ του ΑΒ.

γ) Αν το σημείο $\Gamma(\gamma, \delta)$ ανήκει στην ευθεία ε_2, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων:

$$N(3\gamma - \delta, \gamma + 2\delta)$$

Ε. Γωνία δυο ευθειών

21. Οι ευθείες:

$$\varepsilon_1 : \alpha x + (\beta-1)y - 1 = 0 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_2 : \beta x + (\alpha+1)y + 6 = 0$$

τέμνονται στο σημείο Μ(1, −2). Να βρείτε:

α) τους αριθμούς α και β,

β) την οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2.

22. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$(2\lambda-1)x + (18-11\lambda)y + 9\lambda - 17 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για $\lambda = 1$ και $\lambda = 2$ αντίστοιχα, να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

23. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon: \ 2\kappa x - (1+\kappa)y + 1 - 3\kappa = 0 \quad \text{και}$$

$$\zeta: \ (1+3\kappa)x + (\kappa-1)y + 2 - 6\kappa = 0$$

όπου $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του κ, ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

β) Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε και ζ. ***(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)***

24. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1 : \ \alpha x + (2 - \alpha\sqrt{3})y - \sqrt{3} = 0 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_2 : \ 3x + \sqrt{3}\cdot y - \alpha^4 = 0$$

Η οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 ισούται με 60° και η ευθεία ε_1 δεν είναι παράλληλη στον άξονα x′x.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ο άξονας x′x σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

25. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: \sqrt{3}\cdot x - 3y + 5 = 0$ και το σημείο $P(\sqrt{3}, -4)$. Να βρείτε ευθεία ζ που διέρχεται από το σημείο Ρ και σχηματίζει με την ευθεία ε οξεία γωνία ίση με 60°.

Ε. Η εξίσωση $Ax^2+By^2+\Gamma xy+\Delta x+Ey+Z=0$

26. Δίνεται η εξίσωση:

$$6x^2 - y^2 - xy - x - 2y - 1 = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται πάνω στον άξονα y′y.

γ) Αν η ευθεία $\zeta: 4x + 3y - 7 = 0$ τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε την απόσταση ΑΒ.

27. Δίνεται η εξίσωση:

$$3x^2 + 2y^2 + 7xy + 2x - y - 1 = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

β) Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες του ερωτήματος (α).

28. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2y^2 - xy - 5x - 2y + 4 = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ η οποία διέρχεται από το σημείο Ρ(−3, 1) και τέμνει τις παραπάνω ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία Α και Β, ώστε το Ρ να είναι μέσο του ΑΒ.

29. Δίνεται η εξίσωση:

$$4x^2 + y^2 - 4xy - 4x + 2y - 8 = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2.

β) Έστω Α, Β, Γ και Δ τα σημεία τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 με τους άξονες x′x και y′y. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που έχει κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ και Δ.

Ζ. Συνδυαστικά θέματα

30. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι πλευρές του ΑΒ και ΑΔ βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις:

$$\varepsilon_1: \ 2x + y + 2 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: \ x - 2y + 6 = 0$$

αντίστοιχα. Αν το κέντρο του ΑΒΓΔ είναι το σημείο Κ(−1, −2), να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του σημείου Α και να αποδείξετε ότι Γ(0, −6),

β) την εξίσωση της πλευράς ΓΔ και τις συντεταγμένες της κορυφής Δ. ***(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)***

31. Έστω Α(−1, 1), Β(2, 0) και Γ(−1, 3) τρία σημεία του επιπέδου.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x, y), ώστε:

$$3\overrightarrow{AM}^2 - 5\overrightarrow{BM}^2 + 2\overrightarrow{\Gamma M}^2 = 0$$

είναι η ευθεία $\varepsilon: \ 5x - 3y + 1 = 0$.

β) Να βρείτε ευθεία κάθετη στην ε που διέρχεται από το μέσο Κ του τμήματος ΑΓ.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

32. Θεωρούμε τις εξισώσεις:

$$\varepsilon_\lambda:\ (\lambda-1)x+(\lambda-2)y-\lambda+3=0,\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι καθεμιά από τις ε_λ παριστάνει ευθεία και κατόπιν ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο.

β) Έστω $\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq 2$. Αν η ε_λ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$ αντίστοιχα, τότε:

i) να εκφράσετε τα α, β συναρτήσει του λ,

ii) να βρείτε την ευθεία της παραπάνω μορφής, ώστε να ισχύει $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=2$.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

33. Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda x+(2\lambda-5)y-8\lambda+15=0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο και να βρείτε.

γ) Έστω ε_1 και ε_2 οι ευθείες με εξισώσεις που προκύπτουν από την (1) για $\lambda=2$ και $\lambda=3$ αντίστοιχα. Να βρείτε:

i) τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2,

ii) την ευθεία ε_3 που είναι συμμετρική της ε_1 ως προς την ε_2.

34. Θεωρούμε σημεία $M(\alpha, \alpha+1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι κινούνται στην ευθεία $y=x+1$.

β) Να βρείτε το συμμετρικό $M'(\alpha', \beta')$ του Μ ως προς την ευθεία $x-2y=2$.

γ) Να αποδείξετε ότι το M' κινείται για τις διάφορες τιμές του α στην ευθεία:

$$x-7y-17=0$$

δ) Να εξετάσετε αν οι τρεις ευθείες συντρέχουν και κατόπιν να αιτιολογήσετε το αποτέλεσμα, αφού πρώτα σχεδιάσετε τις τρεις ευθείες.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

35. Έστω ε_1 η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P(-1, 3)$ και τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, ώστε το Ρ να είναι το μέσο του ΑΒ.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1.

β) Θεωρούμε τα σημεία:

$$\Gamma(-5, 1)\quad\text{και}\quad \Delta(2\alpha-7,\ 5-4\alpha)$$

Αν το σημείο Δ ανήκει στην ευθεία ε_1, να βρείτε:

i) τον αριθμό α,

ii) τη μεσοκάθετο ε_2 του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ,

iii) την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2.

36. Έστω ε_1 η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-2, 6)$ και $B(-4, 2)$ και ε_2 η ευθεία που είναι παράλληλη στη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-3, -1)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ε_1 και ε_2.

β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου τομής Μ των ευθειών ε_1 και ε_2 από την αρχή των αξόνων.

γ) Έστω $N(\nu, \mu)$ σημείο της ευθείας ε_2 και Λ το συμμετρικό του Ν ως προς την ε_1.

i) Να εκφράσετε τις συντεταγμένες του Λ ως συνάρτηση του ν.

ii) Για τις διάφορες τιμές του $\nu\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι το Λ κινείται σε ευθεία.

δ) Έστω ζ ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P(-1, 3)$ και τέμνει τις ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία Δ και Ζ αντίστοιχα, ώστε το Ρ να είναι μέσο του ΔΖ. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ζ,

ii) την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ζ.

37. Θεωρούμε την ευθεία:

$$\varepsilon_1:\ 2x+y+2017=0$$

και την εξίσωση:

$$(2x+y)^2-3(2y-x)^2=0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες ε_2 και ε_3, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

β) Για τις παραπάνω ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 να αποδείξετε ότι:

i) σχηματίζουν τρίγωνο,

ii) το τρίγωνο που σχηματίζουν είναι ισόπλευρο.

38. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε τις διαφορετικές ευθείες:

$$\varepsilon_1:\ \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1\quad\text{και}\quad \varepsilon_2:\ \frac{x}{\beta}+\frac{y}{\alpha}=1$$

με $\alpha, \beta\in\mathbb{R}^*$.

α) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1\,//\,\varepsilon_2\Leftrightarrow\alpha+\beta=0$.

β) Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, να αποδείξετε ότι το σημείο τομής τους ανήκει στη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

γ) Αν οι ευθείες ε_1, ε_2 και:

$$\varepsilon_3:\ 15x-5y-4\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}=0$$

διέρχονται από το ίδιο σημείο, να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο λόγος $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

39. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με μέτρα 2 και 6 αντίστοιχα και $\varphi\in[0, \pi]$ η μεταξύ τους γωνία. Επίσης δίνεται η εξίσωση:

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+12)x+(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-12)y-5=0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\varphi\in[0, \pi]$.

β) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, να αποδείξετε ότι $\vec{\beta}=3\vec{\alpha}$.

γ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $\vec{\beta}=-3\vec{\alpha}$.

δ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στη διχοτόμο πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\vec{\beta}\perp\vec{\alpha}$.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

40. Δίνονται μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και η εξίσωση:

$$(|\vec{\beta}| - 2|\vec{\alpha}|)x + (|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| - |4\vec{\beta} - 5\vec{\alpha}|)y -$$

$$- \big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big| + |4\vec{\beta} - 5\vec{\alpha}| = 0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι ομόρροπα, η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.

β) Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι ομόρροπα. Επιπλέον η ευθεία με εξίσωση (1) διέρχεται από τα σημεία $K(0, 1)$ και $\Lambda(-9, 0)$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, **ii)** $\vec{\beta} = -4\vec{\alpha}$,

iii) η εξίσωση (1) γράφεται $x - 9y + 9 = 0$.

41. Δίνονται μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$$\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \quad \text{και} \quad |\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\alpha}|}{2}$$

Θεωρούμε επίσης το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, με $\kappa \in \mathbb{R}$, και την εξίσωση:

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})x - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})y + (2\vec{\beta} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{\gamma} = 0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

γ) Αν η ευθεία με εξίσωση την (1) έχει συντελεστή διεύθυνσης 2, να αποδείξετε ότι θα διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

9ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 2.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε την απόσταση του σημείου $A(-2, 3)$ από την ευθεία:

α) $x + y + 1 = 0$ β) $y = 2x - 3$

γ) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ δ) $5x + 3y + 1 = 0$

2. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων Ο και απέχουν από το σημείο $A(-1, 3)$ απόσταση ίση με 1.

3. Οι ευθείες:

$$\varepsilon_1 : \alpha x + (\alpha - 6)y + \alpha + 2 = 0$$

και:

$$\varepsilon_2 : (\alpha - 2)x + (\alpha - 5)y - \alpha - 3 = 0$$

είναι παράλληλες. Να βρείτε:

α) τον αριθμό α,

β) την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2.

4. Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών:

$$\varepsilon_1 : 2x - y - 5 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : 2x - y + 3 = 0$$

5. Δύο παράλληλες ευθείες απέχουν απόσταση ίση με 8 και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία $\varepsilon : 3x - 4y - 12 = 0$. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών αυτών.

6. α) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $3x - 4y + 1 = 0$ και $5x + 12y + 4 = 0$.

β) Ποια από τις παραπάνω διχοτόμους αντιστοιχεί στην οξεία γωνία που σχηματίζουν οι δύο ευθείες;

7. Δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(-6, 2)$ και $\Gamma(0, 10)$. Να βρείτε:

α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ,

β) σημείο Δ της ευθείας $\varepsilon : 2x - y - 3 = 0$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ΒΓΔ να έχει εμβαδόν ίσο με 19 τ.μ.

8. Δίνονται τα σημεία $A(-1, -2)$ και $B(3, 1)$. Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $(MAB) = 8$ τ.μ.

9. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : 3x - 4y - 5 = 0$ και το σημείο $M(-4, 2)$. Να βρείτε:

α) την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας ε από την αρχή των αξόνων,

β) ποιο σημείο της ευθείας ε απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο Μ.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Απόσταση σημείου από ευθεία

1. Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(-1, 3)$ ισαπέχει από τις ευθείες:

$$\varepsilon: 12x + 5y + 10 = 0 \quad \text{και} \quad \zeta: 3x + 4y - 14 = 0$$

2. Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων στο οποίο απεικονίζεται ο χάρτης του Νομού Αρκαδίας. Τα χωριά Δόξα (Δ), Λευκοχώρι (Λ) και Κακουρέικα (Κ) έχουν αντίστοιχες συντεταγμένες $\Delta(-2, 2)$, $\Lambda(2, -1)$ και $K(-1, -10)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα χωριά Δόξα (Δ) και Λευκοχώρι (Λ).

β) Να βρείτε την απόσταση του Κ από την ευθεία ε.

γ) Να εξετάσετε, με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, ποιο από τα χωριά Δόξα και Λευκοχώρι απέχει τη μικρότερη απόσταση από τα Κακουρέικα.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(3, 2)$, $B(-3, 1)$ και $\Gamma(4, 0)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΒ.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΓΔ, καθώς και την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται αυτό. ***(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)***

4. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 3$. Να βρείτε:

α) την απόσταση του σημείου $A(6, -1)$ από την ευθεία ε,

β) τα σημεία της ευθείας ε που απέχουν από την ευθεία $\zeta: 12x - 5y + 7 = 0$ απόσταση ίση με 2.

5. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: \lambda x - y + \lambda + 3 = 0$ και $\zeta: (\lambda - 1)x + 3y - 4\lambda - 1 = 0$. Το σημείο $A(2, -1)$ απέχει από την ευθεία ε απόσταση $2\sqrt{5}$ και από την ευθεία ζ απόσταση $\sqrt{10}$.

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ.

β) Δίνεται τετράγωνο ΕΒΓΔ τέτοιο, ώστε:

- το Ε είναι σημείο της ευθείας ζ με τετμημένη 12,
- τα σημεία Β και Γ ανήκουν στην ευθεία ε.

Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΒΓΔ.

6. Η ευθεία:

$$\varepsilon: \lambda x - 4y + \lambda + 2 = 0$$

απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 1. Να βρείτε:

α) τον αριθμό λ,

β) τα σημεία του άξονα $x'x$ που απέχουν από την ευθεία ε απόσταση ίση με 2,

γ) τα σημεία του άξονα $y'y$ που ισαπέχουν από την ευθεία ε και από την αρχή των αξόνων.

7. Δίνονται οι κάθετες ευθείες:

$$\varepsilon_1: \lambda x + (3 - \lambda)y + \alpha = 0 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_2: (\lambda - 1)x + (\lambda - 4)y + \frac{9\alpha + 3}{\alpha + 7} = 0$$

όπου $\alpha \neq -7$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

β) Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $A(1, 5)$, του οποίου δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες ε_1 και ε_2.

i) Να αποδείξετε ότι το σημείο Α δεν ανήκει στις ευθείες ε_1 και ε_2.

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Β. Προσδιορισμός εξίσωσης ευθείας

8. Να βρείτε τις ευθείες που είναι παράλληλες στην ευθεία $\zeta: 3x + y - 2017 = 0$ και απέχουν από το σημείο $A(-4, 2)$ απόσταση ίση με $2\sqrt{10}$.

9. Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y + 2 = 0$ και το σημείο $A(-2, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το Α δεν ανήκει στην ε και να βρείτε την απόστασή του από αυτή.

β) Να βρείτε όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες στην ε και απέχουν από το Α απόσταση ίση με 3 μονάδες. ***(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)***

10. Δίνονται τα σημεία:

$$A(\alpha, \beta) \quad \text{και} \quad B(\beta - 1, 2\alpha) \quad \text{με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AB} = (4, -8)$. Να βρείτε:

α) τους αριθμούς α και β,

β) τις ευθείες που διέρχονται από το $P(-2, -3)$ και ισαπέχουν από τα σημεία Α και Β.

11. Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda x + (\lambda - 2)y - 3\lambda + 2 = 0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται από σταθερό σημείο Ρ.

γ) Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Ρ του ερωτήματος (β) και ισαπέχουν από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(3, 7)$.

Γ. Απόσταση παραλλήλων ευθειών

12. Οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: \lambda x + (2 - \lambda)y - 24 = 0 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_2: (\lambda - 4)x + (5 - \lambda)y + 18 = 0$$

είναι παράλληλες. Να βρείτε:

α) τον αριθμό λ,

β) την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2.

13. Έστω ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(2, -1)$ και $B(4, 3)$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της ευθείας ε,

β) τις ευθείες που είναι παράλληλες στην ε και απέχουν από αυτήν απόσταση ίση με $2\sqrt{5}$.

14. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες:

$$\varepsilon_1: y = \lambda x - \lambda \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y = \lambda x + 4 - 3\lambda$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$, των οποίων η απόσταση είναι ίση με 2. Να βρείτε:

α) τον αριθμό λ,

β) τα σημεία του άξονα $y'y$ που απέχουν από την ευθεία ε_2 απόσταση ίση με 3.

15. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2xy - 3\lambda x + 3\lambda y + 2\lambda^2 = 0$$

με λ διαφορετικό του 0.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, καθεμία από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1.

β) Αν το εμβαδόν του τετραγώνου, του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του ερωτήματος (α), είναι ίσο με 2, να βρείτε την τιμή του λ.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

16. Δίνεται ευθεία ε η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: 6x - 3y - 13 = 0$ και ισαπέχει από τα σημεία $A(1, -4)$ και $B(5, 2)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

β) Θεωρούμε τραπέζιο ΚΛΜΝ τέτοιο, ώστε:

- οι πλευρές ΚΛ και ΜΝ να βρίσκονται πάνω στις ευθείες ε και ζ,
- τα μήκη των ΚΛ και ΜΝ να είναι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - \sqrt{180} \cdot x + \lambda^2 + 1 = 0$$

όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΚΛΜΝ.

Δ. Μεσοπαράλληλη – Διχοτόμος

17. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες:

$$\varepsilon_1: y = 3x - 1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y = 3x + 9$$

Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών ε_1 και ε_2.

18. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: 3x - 4y + 1 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: 8x - 6y + 5 = 0$$

Να βρείτε:

α) τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2,

β) ποια από τις παραπάνω διχοτόμους αντιστοιχεί στην οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2.

19. Δίνονται τα σημεία $A(3, 1)$ και $B(13, 6)$. Έστω ε_1 η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} = (3, 6)$ και ε_2 η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β. Να βρείτε:

α) τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2,

β) την απόσταση του Β από την ευθεία ε_1,

γ) τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2.

20. Οι ευθείες $\varepsilon_1: (\lambda - 1)x + \lambda y + 1 - 3\lambda = 0$ και $\varepsilon_2: (4 - \lambda)x + (6 - \lambda)y - \lambda = 0$ είναι παράλληλες. Να βρείτε:

α) τον αριθμό λ,

β) ευθεία ε_3, ώστε η ε_2 να είναι η μεσοπαράλληλη των ε_1 και ε_3.

21. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε τα σημεία $A(\lambda - 1, \lambda + 2)$ και $B(\mu + 3, \mu)$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β κινούνται στις ευθείες $\varepsilon_1: y = x + 3$ και $\varepsilon_2: y = x - 3$ αντίστοιχα.

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών ε_1 και ε_2. ***(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)***

22. Δίνεται το σημείο $A\left(4, \frac{7 - \alpha}{3}\right)$ και η ευθεία:

$$\zeta: \alpha x - 3y + 12 = 0$$

Ισχύει ότι $d(A, \zeta) = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$.

β) Δύο παράλληλες ευθείες απέχουν απόσταση ίση με 8 και έχουν ως μεσοπαράλληλη την ευθεία ζ. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών αυτών.

9.43 Οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: \lambda x + (\lambda - 12)y - 2\lambda = 0 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_2: (\lambda - 2)x + (\lambda - 6)y + 3\lambda + 1 = 0$$

είναι παράλληλες. Να βρείτε:

α) τον αριθμό λ,

β) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $d(M, \varepsilon_1) = 2d(M, \varepsilon_2)$.

Ε. Εμβαδόν τριγώνου

23. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$ και τα σημεία $A(2, 0)$ και $B(6, -3)$.

α) Να προσδιορίσετε σημείο Γ της ευθείας ε, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ.

β) Έστω $\Gamma(11, 12)$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. ***(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)***

24. Δίνονται τα σημεία $A(8, 3)$ και $B(6, -1)$. Να βρείτε σημείο Γ του άξονα x′x, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να έχει εμβαδόν 7 τ.μ.

25. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: x + y - 2 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: 2x - y - 1 = 0$$

Να βρείτε τις ευθείες που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\vec{v} = (2, 2)$ και σχηματίζουν με τις ε_1 και ε_2 τρίγωνο με εμβαδόν 12 τ.μ.

26. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Αν $\overrightarrow{B\Gamma} = (8, 4)$ και $\overrightarrow{AM} = (1, -3)$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

27. Δίνονται τα σημεία:

$$A(0, 2), \quad B(1, 5) \quad \text{και} \quad \Gamma(t - 1, 3t - 2), \quad t \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ.

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία ΑΒ, καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι ανεξάρτητα του t.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

28. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$$\overrightarrow{AB} = (\lambda, \lambda + 1) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda - 1)$$

όπου $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -2$, και Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = (2\lambda, \lambda)$.

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = \left(\frac{2}{\lambda}, -\lambda\right)$.

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β) να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

29. Δίνονται τα σημεία:

$$A(3, 4), \quad B(5, 7) \quad \text{και} \quad \Gamma(2\mu + 1, 3\mu - 2) \quad \text{με } \mu \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ.

β) Να αποδείξετε ότι:

i) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δεν εξαρτάται από το μ,

ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ. ***(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)***

30. Δίνεται η ευθεία ε: $x - 4y - 7 = 0$ και τα σημεία $A(-2, 4)$ και $B(2, 6)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Μ της ευθείας ε, το οποίο ισαπέχει από τα σημεία Α και Β.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = (MAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις:

$$x - 2y - 5 = 0 \quad \text{και} \quad x - 2y + 25 = 0$$

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

31. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B(1, 6)$. Η πλευρά ΑΓ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $3x + 4y + 7 = 0$ και το ύψος ΓΔ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $x - 5y + 15 = 0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α και Γ.

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$(MAB) = \frac{(AB\Gamma)}{2}$$

Ζ. Ελάχιστη απόσταση σημείου ευθείας από σταθερό σημείο

32. Δίνεται η ευθεία ε: $x + 2y - 6 = 0$.

Να βρείτε:

α) τη μικρότερη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας ε από την αρχή των αξόνων,

β) ποιο σημείο της ευθείας ε απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο $M(2, -3)$.

33. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 4)$ και $B(8, -1)$.

α) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

β) Έστω ε η ευθεία που διέρχεται από τα Α και Β. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ε,

ii) ποιο σημείο της ευθείας ε απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο $\Gamma(5, 3)$.

34. Οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: \lambda x + (\lambda - 1)y - 5 = 0 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_2: (\lambda + 1)x - (\lambda + 4)y - 15 = 0$$

είναι κάθετες. Να βρείτε:

α) τον αριθμό λ,

β) το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2,

γ) την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας ε_1 από την αρχή των αξόνων Ο, καθώς και ποιο είναι το σημείο αυτό.

35. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε σημείο Μ και έστω Μ′ το συμμετρικό σημείο του Μ ως προς την ευθεία $y = x$ για τα οποία σημεία το διάνυσμα:

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} - 5\vec{i}$$

είναι παράλληλο στον άξονα y′y.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ κινείται σε ευθεία ε, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

β) Να βρείτε ποιο σημείο της παραπάνω ευθείας ε απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων Ο.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση που μπορεί να απέχει ένα σημείο της παραπάνω ευθείας ε από το σημείο $\Sigma(-4, 3)$.

Η. Συνδυαστικά θέματα

36. Θεωρούμε τα σημεία $A(\lambda + 1, 2\lambda)$, $B(2 - \lambda, 4)$ και $\Gamma(-1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ τα σημεία σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Έστω ότι για το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $(AB\Gamma) = 3$ τ.μ.

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$ ή $\lambda = 2$.

ii) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{\Gamma B}$ όταν $\lambda = 1$.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

37. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με $A(2, 3)$ και εμβαδόν 25 τ.μ. Επίσης η πλευρά ΒΓ βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $3x - 4y + \alpha = 0$, με $\alpha < 0$, και η τετμημένη του Γ είναι μικρότερη του 5.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -19$.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β έχει συντεταγμένες $(5, -1)$.

γ) Να βρείτε τις κορυφές Γ και Δ.

δ) Να βρείτε σημείο Ε της ευθείας ΑΓ για το οποίο ισχύει $(E\Gamma\Delta) = 25$ τ.μ.

38. Δίνονται τα σημεία:

$$A\left(1, -\frac{3}{2}\right), \quad B(2, -1) \quad \text{και}$$

$$\Gamma\left(\mu, \frac{\mu - 4}{2}\right), \text{ όπου } \mu \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

γ) Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε:

$$\mu\overrightarrow{B\Gamma} = -\overrightarrow{AB}$$

δ) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα (γ) να αποδείξετε ότι $(OB\Gamma) = 1$ τ.μ., όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων. ***(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)***

39. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε τις ευθείες:

$$\varepsilon_\lambda: x + (\lambda + 2)y - \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο Μ.

β) Να αποδείξετε ότι $d(O, \varepsilon_\lambda) \leq \sqrt{10}$.

γ) Να βρείτε ποια από τις ευθείες της παραπάνω μορφής απέχει τη μέγιστη απόσταση από το Ο.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

40. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1 : 2x - y - 10\lambda + 16 = 0 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_2 : 10x + y - 2\lambda - 4 = 0, \quad \text{όπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους Μ.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία:

$$\varepsilon : 8x + y - 6 = 0$$

γ) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ,

ii) αν Κ είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ζ, να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{9}{4}$ τ.μ.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

41. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $A(3, 7)$ και εμβαδόν 40 τ.μ. Δίνεται ότι η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $4x - 3y - 11 = 0$, το $M(5, 3)$ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και η τετμημένη του Β είναι μικρότερη του 5.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β και Γ έχουν συντεταγμένες $(-1, -5)$ και $(11, 11)$ αντίστοιχα.

β) Να βρείτε τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να βρείτε σημείο Ν της πλευράς ΑΒ το οποίο απέχει από τη ΒΓ απόσταση 3.

42. Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 2)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(0, 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$, ώστε:

$$\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 - 2\overrightarrow{\Gamma M}^2 = 3$$

είναι η ευθεία $\varepsilon : x - 2y + 1 = 0$.

β) Να βρείτε:

i) σημείο Κ στον άξονα $x'x$, ώστε το συμμετρικό του ως προς την ευθεία του ερωτήματος (α) να είναι σημείο Λ του άξονα $y'y$,

ii) το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΣ, όπου Σ είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

43. α) Αν δύο πλευρές ενός τετραγώνου βρίσκονται πάνω στις ευθείες:

$$\varepsilon_1 : Ax + By + \Gamma_1 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : Ax + By + \Gamma_2 = 0$$

να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ισούται με:

$$E = \frac{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2}{A^2 + B^2}$$

β) Δύο πλευρές ενός τετραγώνου, εμβαδού 20 τ.μ., βρίσκονται πάνω στις ευθείες:

$$\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda + 3)y + 6\kappa - 17 = 0$$

και:

$$\varepsilon_2 : (2\lambda + 1)x + (2\lambda + 4)y + \kappa^2 + 2 = 0$$

i) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

ii) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ.

44. Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$, $A(-1, 3)$ και $B(2, -1)$, ώστε να σχηματίζουν τρίγωνο με εμβαδόν $(MAB) = 4$ τ.μ.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι δύο ευθείες ε_1 και ε_2 παράλληλες μεταξύ τους.

β) Να βρείτε την απόσταση των ε_1 και ε_2.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα Α και Β είναι η μεσοπαράλληλη των ε_1 και ε_2. Πώς αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό;

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

45. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\Gamma(-2, -1)$, στο οποίο η πλευρά ΑΒ βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $2x + y - 10 = 0$ και το ύψος ΑΔ βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση:

$$x + 3y - 15 = 0$$

Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες της κορυφής Α,

β) τις εξισώσεις των πλευρών ΑΓ και ΒΓ,

γ) τις συντεταγμένες της κορυφής Β,

δ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

46. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που είναι παράλληλο προς την ευθεία $\varepsilon : y = x$, με $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $x_1 < x_2$. Αν το σημείο $M(3, 5)$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και το γινόμενο των τετμημένων των σημείων Α και Β ισούται με 5, τότε:

α) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β,

β) να αποδείξετε ότι $(OAB) = 4$ τ.μ., όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων,

γ) να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = 2(OAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις:

$$x - y - 2 = 0 \quad \text{και} \quad x - y + 6 = 0$$

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

47. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές ε_1 και ε_2, οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

β) Αν $\varepsilon_1 : x + y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + y - 4 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε των ε_1 και ε_2.

γ) Αν Α είναι σημείο της ευθείας ε_1 με τεταγμένη το 2 και Β σημείο της ευθείας ε_2 με τετμημένη το 1, τότε να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β,

ii) τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ να είναι τετράγωνο.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

48. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B(3, -2)$ και $A\Gamma = 15$. Επίσης ισχύει ότι $\det\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Gamma}\right) = -75$ και η προβολή του Β στην ευθεία ΑΓ είναι το σημείο $\Delta(x, x-4)$ με $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = 5$.

β) Να αποδείξετε ότι $x = 6$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΓ.

δ) Αν επιπλέον το μέσο της πλευράς ΑΓ είναι το $M\left(8, \frac{1}{2}\right)$ και η τετμημένη του Α είναι μικρότερη από την τετμημένη του Γ, να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες των κορυφών Α και Γ,

ii) τη γωνία $\widehat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

49. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(x, 2)$ και $B(x-6, x-4)$.

α) Να αποδείξετε ότι $(OAB) \geq \frac{3}{2}$.

β) Έστω ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ παίρνει την ελάχιστη τιμή του. Θεωρούμε επίσης σημείο Γ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{\Gamma A} = 7\vec{i} + 14\vec{j}$.

i) Να αποδείξετε ότι $x = 3$.

ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(-4, -12)$.

iii) Να εξετάσετε αν η γωνία $\widehat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι οξεία ή αμβλεία.

iv) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ΑΒ και ΑΓ.

v) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται η εσωτερική διχοτόμος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

$10^{ο}$ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ : **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ $2^{ου}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

.1 Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις:

$$\varepsilon_1 : 3x - 2y + 1 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : 2x + 3y - 8 = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε_1 είναι κάθετη στην ευθεία ε_2.

β) Υποθέτουμε ότι το σημείο $A(\alpha, 2)$ ανήκει στην ευθεία ε_1 και το σημείο $B(-5, \beta)$ ανήκει στην ευθεία ε_2.

i) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

ii) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $3x - y + 3 = 0$.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2.

δ) Δίνεται το σημείο $\Gamma(8, 6)$. Να βρείτε σημείο Δ της ε_2, ώστε η ε_1 να διέρχεται από το μέσο του ΓΔ.

.2 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : (2\lambda - 1)x + y - 5 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\lambda^2 + 3)x - y - 15 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$, καθώς και το σημείο $A(2, -1)$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες τέμνονται.

β) Αν οι ευθείες τέμνονται στο σημείο Α, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Έστω $\lambda = 2$ και Β, Γ τα σημεία που οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνουν τον άξονα y′y. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

.3 Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ η πλευρά ΑΒ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση:

$$3x - 7y + 27 = 0$$

και η πλευρά ΑΔ στην ευθεία με εξίσωση:

$$4x + y + 5 = 0$$

Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του παραλληλόγραμμου τέμνονται στο σημείο $K\left(2, \frac{5}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες (6, 2).

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά ΒΓ.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η διαγώνιος ΒΔ.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.

.4 Θεωρούμε σημεία $M(\alpha, \alpha + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι κινούνται στην ευθεία $y = x + 1$.

β) Να βρείτε το συμμετρικό $M'(\alpha', \beta')$ του Μ ως προς την ευθεία $x - 2y = 2$.

γ) Να αποδείξετε ότι το Μ′ κινείται για τις διάφορες τιμές του α στην ευθεία:

$$x - 7y - 17 = 0$$

δ) Να εξετάσετε αν οι τρεις ευθείες συντρέχουν και κατόπιν να αιτιολογήσετε το αποτέλεσμα, αφού πρώτα σχεδιάσετε τις τρεις ευθείες.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

.5 Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1 : x + \mu y + 1 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : 2\mu x + 2y + \lambda = 0$$

με $\mu, \lambda \geq 0$. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και έχουν απόσταση μεταξύ τους ίση με $2\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των λ και μ.

β) Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ τα σημεία $B(\alpha, \alpha + 1)$ και $\Gamma(3\alpha, 9 - \alpha)$ ισαπέχουν από την ευθεία ε_2.

γ) Θεωρούμε την ευθεία $\zeta : x - 3y + 11 = 0$. Να βρείτε σημείο Δ της ε_1, ώστε το συμμετρικό του Δ ως προς την ευθεία ζ να ανήκει στην ε_2.

.6 Δίνονται τα σημεία $A(-3, 1)$ και $B(1, -1)$. Έστω ε η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και ζ η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x′x.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε και ζ.

β) Έστω Γ το σημείο τομής των ευθειών ε και ζ και Δ το συμμετρικό του Γ ως προς το Β. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ,

ii) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΔ,

iii) την οξεία γωνία ω που σχηματίζουν οι ευθείες ΑΒ και ΑΔ.

.7 Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1 : 3x + y + 3 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : x + 2y - 4 = 0$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2.

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Β και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ, να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ,

ii) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(KB\Gamma) = (AB\Gamma)$ ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις. ***(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)***

.8 Θεωρούμε τις ευθείες:

$$\zeta : y = 3x - 13, \quad \varepsilon_1 : \lambda x + (3 - \lambda)y + 3 = 0$$

και:

$$\varepsilon_2 : (\lambda - 1)x + (\lambda - 4)y + 4 = 0$$

Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.

β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 από την ευθεία ζ.

γ) Αν Κ και Λ είναι τα σημεία τομής της ευθείας ζ με τις ε_1 και ε_2 αντίστοιχα, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

δ) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1, 0)$, ώστε οι ευθείες ζ και ε_2 να είναι μεσοκάθετες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ,

ii) τη γωνία $\widehat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

.9 Δίνονται τα σημεία:

$$A(\alpha, -1) \quad \text{και} \quad \Gamma(-4, 7\alpha + 3) \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}$$

και η ευθεία $\varepsilon : 2x - y + 10 = 0$, η οποία διέρχεται από το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Κ, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΓ.

γ) Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ΑΓ και ε.

δ) Θεωρούμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Δ.

.10 Δίνεται η ευθεία $\zeta : 6x - 8y + 3 = 0$ και η εξίσωση:

$$(2\lambda + 1)x - (\lambda - 2)y + \lambda - 7 = 0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.

β) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες που έχουν εξίσωση την (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο Α, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ζ.

δ) Θεωρούμε ευθεία ε που έχει εξίσωση την (1), η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία ζ. Να βρείτε:

i) τον αριθμό λ,

ii) τη μεσοπαράλληλη των ευθειών ε και ζ,

iii) τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $P(2, 0)$ και τέμνουν τις ε και ζ στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα έτσι, ώστε $B\Gamma = \frac{15}{8}$.

.11 Για την τελετή λήξης της Ολυμπιάδας του Σίδνεϊ, προτάθηκε να παραταχθούν οι αθλητές κάθε χώρας σε ευθείες που όλες θα διέρχονται από το σημείο στο οποίο θα σταθεί ο σημαιοφόρος της ελληνικής ομάδας. Για να γνωρίζουν οι αθλητές τις θέσεις τους, έγινε μια τοποθέτησή τους σε χάρτη, σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, στην οποία διαπιστώθηκαν τα εξής:

- οι θέσεις δύο Ελλήνων αθλητών είναι τα σημεία $K(8, 2)$ και $\Lambda(14, 4)$,
- η ευθεία πάνω στην οποία θα βρίσκονται οι αθλητές της τελευταίας από τις 199 ομάδες, που είναι η ομάδα της Αυστραλίας, έχει εξίσωση $y = -x + 6$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου που θα σταθεί ο σημαιοφόρος της Ελληνικής ομάδας.

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $A(2, 3)$ μπορεί να είναι η θέση κάποιου αθλητή της ελληνικής ομάδας.

γ) Να βρείτε την απόσταση του παραπάνω σημείου Α από την ευθεία της ομάδας της Αυστραλίας.

.12 Τα σχέδια κατασκευής του υπόγειου σιδηρόδρομου (ΜΕΤΡΟ) μιας πόλης, σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Οxy, περιλαμβάνουν:

- τη γραμμή Γ_1, που είναι ευθεία και διέρχεται από τους σταθμούς $\Sigma(5, 10)$ και $T(2, 1)$,
- τη γραμμή Γ_2, που είναι ευθεία παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} = (2, -1)$ και διέρχεται από τον σταθμό $P(-3, 2)$.

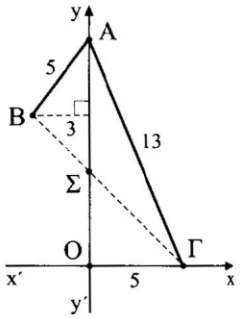
α) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής Γ_1 στη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής Γ_2 στην ίδια μορφή με το ερώτημα (α).

γ) Στο σημείο $O(0, 0)$ πρέπει να κατασκευαστεί ένας νέος σταθμός που θα εξυπηρετεί μια συγκεκριμένη περιοχή. Δεδομένου ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους γραμμής είναι το ίδιο για όλες τις

περιοχές, με ποια από τις γραμμές Γ_1 και Γ_2 πρέπει να συνδεθεί ο νέος σταθμός, ώστε η γραμμή σύνδεσής του να έχει το μικρότερο κόστος;

.13 Στο διπλανό σχεδιάγραμμα, με καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy, τα σημεία Α, Β και Γ παριστάνουν τις θέσεις τριών κοινοτήτων ενός δήμου. Στο ίδιο σχεδιάγραμμα, ο άξονας y′y παριστάνει μια εθνική οδό και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΓ δύο επαρχιακούς δρόμους που συνδέουν την κοινότητα Α με τις κοινότητες Β και Γ και έχουν μήκη 5 Km και 13 Km αντίστοιχα. Πρόκειται να κατασκευαστεί ένας επαρχιακός δρόμος ΒΓ που θα συνδέει τις κοινότητες Β και Γ, ο οποίος στο σχεδιάγραμμα παριστάνεται με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ. Αν οι αποστάσεις των κοινοτήτων Β και Γ από την εθνική οδό y′y είναι 3 Km και 5 Km αντίστοιχα, να βρείτε:



α) τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β και Γ,

β) το μήκος του επαρχιακού δρόμου ΒΓ,

γ) την εξίσωση της ευθείας ΒΓ και στη συνέχεια τις συντεταγμένες του σημείου Σ στο οποίο ο επαρχιακός δρόμος ΒΓ συναντά την εθνική οδό.

.14 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2(xy - 2x - 2y) + 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.

β) Έστω $\varepsilon_1 : x + y = 1$ και $\varepsilon_2 : x + y = 3$ οι δύο ευθείες.

i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζεται από τους άξονες και τις ευθείες.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή Ο και τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Α και Β, ώστε $AB = 2$. ***(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)***

.15 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\Gamma(-3, -2)$, στο οποίο η πλευρά ΑΒ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $3x + y - 9 = 0$ και η διάμεσος ΑΜ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $x - 3y + 7 = 0$. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες της κορυφής Α,

β) την εξίσωση της ευθείας ΑΓ,

γ) τις συντεταγμένες της κορυφής Β,

δ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ,

ε) τα σημεία του άξονα x′x που απέχουν από την ευθεία ΒΓ απόσταση ίση με $2\sqrt{5}$,

στ) τη γωνία $\widehat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

.16 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με εξισώσεις διαγωνίων:

$$A\Gamma : y = x + 4 \quad \text{και} \quad B\Delta : y = 5x - 4$$

Επίσης ισχύει ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = (2, -2)$ και η ευθεία ε που διέρχεται από το Γ και είναι κάθετη στη ΒΔ τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο με τεταγμένη 10. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του κέντρου Κ του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ,

β) την εξίσωση της ευθείας ε,

γ) τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Α,

δ) τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Δ,

ε) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$MB^2 - M\Delta^2 = 48$$

στ) τα σημεία της ευθείας ΑΒ που απέχουν από την ευθεία ΑΓ απόσταση ίση με $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

.17 Έστω ε_1 η ευθεία που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{v} = (-2, 4)$ και διέρχεται από το σημείο $A(10, 5)$ και ε_2 η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $B(3, -1)$ και $\Gamma(-6, 2)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2.

β) Θεωρούμε τις ευθείες:

$$\zeta_1 : (\lambda - 3)x + (\lambda - 4)y - 28 = 0$$

και:

$$\zeta_2 : \lambda x + (\lambda - 2)y - 12 = 0$$

οι οποίες είναι παράλληλες. Να βρείτε:

i) τον αριθμό λ,

ii) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1, ε_2 και ζ_1,

iii) τα σημεία Μ της ευθείας ζ_2 για τα οποία ισχύει ότι $d(M, \varepsilon_1) = \sqrt{2} \cdot d(M, \varepsilon_2)$.

.18 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ και $\delta_1 : y = x - 1$ και έστω Α το σημείο τομής τους. Θεωρούμε ευθεία ε_2 που διέρχεται από το Α τέτοια, ώστε η ευθεία δ_1 να διχοτομεί μια από τις γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2.

α) Να βρείτε το σημείο Α.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_2.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ_2 που διχοτομεί την άλλη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2.

δ) Έστω $\overrightarrow{KM} = (3, 4)$. Αν το σημείο Κ κινείται στην ευθεία ε_2, να αποδείξετε ότι το σημείο Μ κινείται σε ευθεία ζ, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

.19 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και εμβαδόν 15 τ.μ. Είναι $A(-4, -1)$, η πλευρά ΒΓ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $2x + y - 6 = 0$ και η τετμημένη του Β είναι μεγαλύτερη από την τετμημένη του Γ.

α) Να αποδείξετε ότι το μέσο της πλευράς ΒΓ είναι το $M(2, 2)$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

γ) Αν Δ είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΓ, να βρείτε τη γωνία $\widehat{\Delta B\Gamma}$.

.20 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και η εξίσωση:

$$6\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}x - 4|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|y - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία ε.

β) Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι η ευθεία ε είναι ο άξονας x′x.

γ) Αν η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

δ) Αν η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $B(3, 2)$, να βρείτε:

i) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$,

ii) την απόσταση του σημείου:

$$M\left(\frac{|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|^2 - |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}, -1\right)$$

από την ευθεία ε.