11ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 3.1 Ο ΚΥΚΛΟΣ**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και:
α) ακτίνα $\rho = 3$, β) διέρχεται από το σημείο $A(3, -4)$.

2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος:
α) έχει κέντρο $K(2, -3)$ και ακτίνα 4,
β) έχει κέντρο $K(-8, 2)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4, -3)$,
γ) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με $A(-6, 14)$ και $B(2, 8)$,
δ) έχει κέντρο $K(3, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 4x - 3y + 6 = 0$.

3. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ και τα σημεία $A(-6, 4)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(4, 5)$. Να βρείτε:
α) το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C,
β) τη σχετική θέση των σημείων Α, Β και Γ ως προς τον κύκλο C.

4. Να βρείτε τι παριστάνει καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ β) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$
γ) $x^2 + y^2 - 4y + 10 = 0$ δ) $4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y - 15 = 0$

5. Δίνεται τρίγωνο ΠΡΣ με $\Pi(-3, 1)$, $P(5, 5)$ και $\Sigma(2, -4)$. Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΠΡΣ.

6. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + \lambda x - (2\lambda + 10)y + 5\lambda + 15 = 0 \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
β) Να γράψετε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του παραπάνω κύκλου συναρτήσει του λ.
γ) Να αποδείξετε ότι καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση (1) ανήκουν σε μια ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
δ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρείτε.
ε) Να βρείτε το λ, ώστε το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1) να ανήκει στην ευθεία $\zeta: 3x - y + 15 = 0$.
στ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ο κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) έχει ακτίνα ίση με 5.

7. Δίνεται κύκλος C ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $A(-2, 3)$ και $B(2, 5)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y + 5 = 0$. Να βρείτε:
α) την εξίσωση του κύκλου C,
β) τις ευθείες που είναι παράλληλες στην ε και ο κύκλος C ορίζει πάνω σε αυτές χορδή μήκους 6,
γ) το μήκος της χορδής που έχει μέσο το σημείο $M(-1, 3)$.

8. Δίνεται ο κύκλος $C: (x-2)^2+(y-1)^2=10$ και οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: 3x-4y+18=0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: 2x-y-8=0$$

Να βρείτε:

α) τη σχετική θέση του κύκλου C με καθεμία από τις ευθείες ε_1 και ε_2,

β) τα κοινά σημεία του κύκλου C με όποια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 τον τέμνει,

γ) την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $\zeta: \alpha x-y+\alpha+2=0$ να εφάπτεται στον κύκλο C.

9. Δίνεται το σημείο $K(-1, 3)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται:

i) στον άξονα $x'x$, ii) στον άξονα $y'y$.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στους άξονες $x'x$ και $y'y$ και έχει κέντρο το σημείο Λ που ανήκει στο 4ο τεταρτημόριο και για το οποίο ισχύει $|\overrightarrow{K\Lambda}|=2\sqrt{5}$.

10. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2=25$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο του $A(-4, 3)$,

β) τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία:

$$\zeta: 4x-3y+2017=0$$

γ) τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $P(5, 10)$.

11. Δίνεται ο κύκλος:

$$C: (x+1)^2+(y-2)^2=25$$

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C στα σημεία του:

α) $A(3, -1)$ β) $B(4, 2)$ γ) $\Gamma(-1, 7)$

12. Δίνεται ο κύκλος $C: (x-2)^2+(y-1)^2=20$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία:

$$\zeta: 3x-6y-2017=0$$

13. Δίνεται ο κύκλος $C: (x-4)^2+(y+2)^2=25$ και το σημείο $P(9, 8)$.

α) Να αποδείξετε ότι το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C.

β) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο P.

14. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2=15$. Από το σημείο $P(3, 4)$ φέρουμε τις εφαπτομένες στον κύκλο C και έστω A και B τα σημεία επαφής. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της ευθείας AB,

β) την απόσταση του σημείου P από την ευθεία AB.

15. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2+y^2=25$ και $C_2: (x-3)^2+(y-6)^2=4$.

α) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 τέμνονται.

β) Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των κύκλων C_1 και C_2.

16. Δίνεται ο κύκλος $C_1: x^2+y^2=5$ και η εφαπτομένη ε του C_1 στο σημείο του $A(1, 2)$. Θεωρούμε επίσης κύκλο C_2, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά στον C_1 στο σημείο $B(1, -2)$ και στην ευθεία ε στο σημείο Γ. Να βρείτε:

α) την εξίσωση του κύκλου C_2,

β) τις κοινές εφαπτομένες των κύκλων C_1 και C_2.

17. α) Αν το σημείο $A(\kappa, \lambda)$ κινείται στον κύκλο $x^2+y^2=9$, να αποδείξετε ότι και το σημείο $B\left(\frac{\kappa+4}{2}, \frac{\lambda-6}{2}\right)$ κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(2\sigma\upsilon\nu\theta+3, 2\eta\mu\theta-5)$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$.

γ) Αν $\Gamma(-2, 1)$ και $\Delta(4, -1)$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων N του επιπέδου για τα οποία το τρίγωνο ΓΝΔ είναι ορθογώνιο στο N.

18. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$ (1)

Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα,

β) τα μέσα των χορδών του κύκλου C, οι οποίες έχουν ένα άκρο τους το σημείο $A(1, 3)$ του C, ανήκουν σε έναν άλλο κύκλο, του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

19. Δίνεται ο κύκλος $C_1: (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου C_1.

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει το σημείο $A(3, 5)$ από ένα σημείο του κύκλου C_1.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο του C_1 από την ευθεία $\varepsilon: 4x - 3y - 10 = 0$.

δ) Δίνεται ο κύκλος $C_2: (x - 5)^2 + (x + 6)^2 = 4$.

i) Να αποδείξετε ότι καθένας από τους κύκλους C_1 και C_2 είναι εξωτερικός του άλλου.

ii) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του C_1 από ένα σημείο του C_2.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Εξίσωση κύκλου

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων Ο(0, 0) και:

α) ακτίνα $\rho = 3$,

β) διέρχεται από το σημείο $A(-6, 8)$,

γ) εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 2x - y + 5 = 0$.

2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(-2, 3)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, 7)$.

3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(-4, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία:

$$\varepsilon: 3x - 4y + 1 = 0$$

4. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με:

$$A(-2, -1) \quad \text{και} \quad B(6, 3)$$

5. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(5, -3)$ και εφάπτεται:

α) στον άξονα $x'x$, **β)** στον άξονα $y'y$.

6. Δίνεται κύκλος C που εφάπτεται στον άξονα $x'x$, διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(0, 1)$ και το κέντρο του ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου.

7. Θεωρούμε τον κύκλο C_1 που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο $A(4, -3)$ και τον κύκλο C_2 που έχει διάμετρο ΒΓ με $B(3, 2)$ και $\Gamma(-1, 4)$. Να βρείτε:

α) τις εξισώσεις των κύκλων C_1 και C_2,

β) τα σημεία τομής των κύκλων C_1 και C_2.

8. Δίνεται κύκλος με εξίσωση:

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$$

α) Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου.

β) Να εξετάσετε ποια από τα $M(3, 0)$, $N(0, -4)$, $P(3, -7)$ και $\Sigma(1, 1)$ είναι σημεία του κύκλου.

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $O(0, 0)$ είναι εσωτερικό ή εξωτερικό σημείο του κύκλου.

9. Δίνεται κύκλος C με κέντρο $K(4\alpha - 5, \alpha)$, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(5, 6)$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση του κύκλου C,

β) τα σημεία τομής Γ, Δ του κύκλου C με τον άξονα $x'x$,

γ) την εξίσωση του κύκλου C_1 που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ.

10. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία $A(1, 0)$, $B(3, -2)$ και την ευθεία:

$$\varepsilon: x + y + 1 = 0$$

Να βρείτε:

α) την εξίσωση της μεσοκάθετης του τμήματος ΑΒ,

β) την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και έχει το κέντρο του στην ευθεία ε.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

11. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία $K(2, -1)$ και $A(-6, 5)$.

α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο Κ που διέρχεται από το Α έχει εξίσωση:

$$C: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 100$$

β) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο C στο σημείο Α και έχει ακτίνα ίση με το μισό της ακτίνας του C.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

12. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με:

$$A(1, 4), \quad B(-2, 3) \quad \text{και} \quad \Gamma(4, -5)$$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90°$.

β) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Β. Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+Γ=0$

13. Δίνονται οι εξισώσεις:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \qquad (1)$$

και:

$$x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0 \qquad (2)$$

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν κύκλους C_1 και C_2, των οποίων να βρείτε τα κέντρα Κ και Λ και τις ακτίνες ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που είναι ομόκεντρος του C_1 και έχει διπλάσια ακτίνα από αυτόν.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ.

14. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να βρείτε την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται η διάμετρος του κύκλου C και που είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta: 2x + y - 2017 = 0$.

γ) Να βρείτε τα άκρα της παραπάνω διαμέτρου.

δ) Δίνεται η ευθεία:

$$\eta: x - 2y + \lambda = 0$$

Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας η και του κύκλου C για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

15. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y + 6 = 0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να βρείτε το μήκος της χορδής του κύκλου C που έχει μέσο το σημείο $M(2, -1)$.

γ) Να βρείτε τις ευθείες που είναι παράλληλες στη $\zeta: y = 3x + 2017$ και ορίζουν στον κύκλο C χορδές με μήκος 4.

16. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο C, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C εφάπτεται στον ά-

ξονα x′x και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής τους.

γ) Το σημείο M(2, −1) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία Α και Β, ώστε η χορδή ΑΒ του κύκλου να έχει μέσο το Μ.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

17. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + 4y + 2\alpha = 0$$

όπου α πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματικό αριθμό α.

β) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α έτσι, ώστε η ακτίνα του κύκλου αυτού να είναι ίση με 2.

γ) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α έτσι, ώστε το κέντρο του κύκλου να βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση ε: $5x + 3y + 1 = 0$.

δ) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α έτσι, ώστε ο κύκλος να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

18. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + (\lambda - 1)x + (3 - \lambda)y - 2\lambda - 1 = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ανήκουν σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ο κύκλος που παριστάνει η εξίσωση (1) έχει ακτίνα ίση με 4.

19. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - (\lambda - 1)x - (\lambda - 7)y + \lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ, με $\lambda \neq 5$, παριστάνει κύκλο. Κατόπιν να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση όταν $\lambda = 5$.

β) Έστω C_1, C_2 οι κύκλοι που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση όταν $\lambda = 3$ και $\lambda = 9$ αντίστοιχα.

i) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

ii) Να βρείτε το σημείο επαφής των κύκλων.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

20. Δίνεται ο κύκλος C_1 με κέντρο $K(\alpha, \alpha - 4)$, που διέρχεται από τα σημεία $A(-3, -2)$ και $B(2, 3)$. Θεωρούμε και την εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2(\lambda - 1)y + \lambda^2 - 2\lambda - 11 = 0 \quad (1)$$

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C_2.

γ) Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων C_1 και C_2 για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

21. Δίνεται η εξίσωση:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 - 20 + \lambda(3x + y - 10) = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε ποιος από τους κύκλους που παριστάνει η εξίσωση (1) είναι ο μικρότερος.

γ) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία και να βρείτε.

δ) Έστω ότι το κέντρο Κ του κύκλου C που παριστάνει η εξίσωση (1) ανήκει στην ευθεία:

$$\zeta: 2x + y + 8 = 0$$

Να βρείτε:

i) τον αριθμό λ,

ii) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΒ.

Γ. Εφαπτομένες κύκλου

22. Δίνεται ο κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 5$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση του κύκλου C,

β) τις εφαπτομένες του κύκλου C στα σημεία του $A(3, -4)$, $B(0, 5)$ και $\Gamma(-5, 0)$.

23. Δίνεται ο κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C.

β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$ και να βρείτε την εφαπτομένη του στο σημείο αυτό.

γ) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία $\zeta: x + 2y - 21 = 0$.

24. Δίνεται ο κύκλος C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία:

$$\zeta: 3x - 4y - 50 = 0$$

Να βρείτε:

α) την εξίσωση του κύκλου C,

β) τις εφαπτομένες του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $P(-10, 20)$.

25. Δίνεται ο κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων, ο οποίος διέρχεται από το σημείο $A(4, -2)$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση του κύκλου C,

β) σημείο Ρ του κύκλου C στο 1ο τεταρτημόριο, ώστε η εφαπτομένη του κύκλου C στο Ρ να σχηματίζει με τους άξονες x′x και y′y τρίγωνο με εμβαδόν 25 τ.μ.

26. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0, -5)$ και ακτίνα $\rho = 3$.

β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του παραπάνω κύκλου.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

27. Δίνεται ο κύκλος C με διάμετρο ΑΒ, όπου $A(0, 5)$ και $B(-2, -1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $\Gamma(2, 3)$ ανήκει στον κύκλο C και να βρείτε την εφαπτομένη του C στο Γ.

γ) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C που είναι παράλληλες στην ευθεία ΑΒ.

28. Δίνεται το σημείο $P(-6, -8)$ και η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο

C, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να αποδείξετε ότι το Ρ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C.

γ) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο Ρ.

29. Δίνεται η εξίσωση:

$$(2x-5)^2+(2y+3)^2=32 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να βρείτε τις εφαπτομένες του παραπάνω κύκλου, οι οποίες σχηματίζουν γωνία 45° με τον άξονα x′x.

30. Δίνεται κύκλος C ο οποίος έχει κέντρο το σημείο Κ(2, 4) και ορίζει στην ευθεία:

$$\zeta: 3x-4y+5=0$$

χορδή μήκους 4.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Α(4, 5) ανήκει στον κύκλο C και να βρείτε την εφαπτομένη του C στο Α.

γ) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\overrightarrow{OK}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

31. Οι κύκλοι:

$$C_1: x^2+y^2+\alpha x+\beta y-10=0$$

και:

$$C_2: x^2+y^2+2\alpha x+(2-\beta)y+10=0$$

διέρχονται από το σημείο Α(3, −1). Να βρείτε:

α) τους αριθμούς α και β,

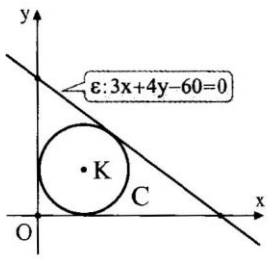
β) τα κέντρα και τις ακτίνες των κύκλων C_1 και C_2,

γ) τις εφαπτομένες ε και ζ των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα στο σημείο Α,

δ) την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε και ζ.

32. Δίνεται κύκλος C ο οποίος εφάπτεται στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy και στην ευθεία:

$$\varepsilon: 3x+4y-60=0$$



Να βρείτε:

α) την εξίσωση του κύκλου C,

β) τις εφαπτομένες του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο Ρ(10, −5).

33. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2+y^2+\lambda x+(2\lambda-4)y-4\lambda-1=0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ κινούνται σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

γ) Αν ο κύκλος C που παριστάνει η εξίσωση (1) διέρχεται από το σημείο Α(1, 2), να βρείτε:

i) τον αριθμό λ, το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου C,

ii) την εφαπτομένη ε του κύκλου C στο σημείο του Α,

iii) τις εφαπτομένες του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία ε.

Δ. Κοινές εφαπτομένες δύο κύκλων

34. Δίνεται ο κύκλος:

$$C_1: x^2+y^2-4x-10y-16=0$$

Θεωρούμε και τον κύκλο C_2 που έχει κέντρο Λ(1, 3) και εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο C_1. Να βρείτε:

α) το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_1,

β) την εξίσωση του κύκλου C_2,

γ) την κοινή εφαπτομένη των κύκλων C_1 και C_2.

35. Δίνεται ο κύκλος:

$$C_1: x^2+y^2+10x-2y+6=0$$

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_1.

β) Έστω C_2 ο κύκλος που διέρχεται από το σημείο Α(0, 6) και εφάπτεται εξωτερικά στον κύκλο C_1 στο σημείο Β(−1, 3). Να βρείτε:

i) την εξίσωση του κύκλου C_2,

ii) την κοινή εφαπτομένη ζ των κύκλων C_1 και C_2 στο Β,

iii) την οξεία γωνία των ευθειών ζ και ΑΒ.

36. Δίνονται οι κύκλοι C_1 και C_2, με κέντρα Ο(0, 0) και Κ(4, 3) αντίστοιχα, οι οποίοι έχουν κοινή εφαπτομένη την ευθεία:

$$\varepsilon: 24x-7y-100=0$$

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων C_1 και C_2.

β) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά και να βρείτε το σημείο επαφής τους Α.

γ) Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των κύκλων C_1 και C_2 στο Α.

δ) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν μια κοινή οριζόντια εφαπτομένη, την οποία και να βρείτε.

37. Δίνεται ο κύκλος:

$$C_1: x^2+y^2+10x-20y+120=0$$

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του C_1.

β) Έστω C_2 ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το κέντρο του C_1. Να βρείτε:

i) την εξίσωση του κύκλου C_2,

ii) τις κοινές εφαπτομένες των κύκλων C_1 και C_2.

Ε. Γεωμετρικοί τόποι

38. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία Α(x, y), Β(3, 2) και Γ(1, 0). Αν τα σημεία αυτά σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη ΒΓ, τότε:

α) να αποδείξετε ότι το Α κινείται στον κύκλο:

$$C: (x-2)^2+(y-1)^2=2$$

β) να βρείτε τις συντεταγμένες του Α, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι και ισοσκελές.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

39. Δίνονται τα σημεία:

$$M(\eta\mu\theta-4,\ \sigma\upsilon\nu\theta+2) \quad \text{με } \theta\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι τα παραπάνω σημεία κινούνται σε

κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

40. Δίνεται ο κύκλος:

$$C: x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$$

α) Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου C.

β) Έστω Α(α, β) ένα σημείο του κύκλου C και Μ σημείο για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{MA} = 4\overrightarrow{KA}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ κινούνται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

41. Έστω η εξίσωση:

$$(x - \lambda + 6)^2 + (y - 2\lambda)^2 = -\lambda^2 + 8\lambda - 12 \quad (1)$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Τι παριστάνει γεωμετρικά σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy η εξίσωση (1) όταν $\lambda = 2$ και τι όταν $\lambda = 6$;

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ από το διάστημα (2, 6) η εξίσωση (1) στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy παριστάνει κύκλο.

γ) Καθώς το λ μεταβάλλεται στο διάστημα (2, 6) να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων οι οποίοι προκύπτουν από την εξίσωση (1) ανήκουν σε ένα ευθύγραμμο τμήμα από το οποίο εξαιρούνται τα άκρα του. ***(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)***

42. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - (3\alpha + 2)x + \alpha^2 - 4 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση παριστάνει κύκλο. Κατόπιν να βρείτε για ποιες τιμές του α ο κύκλος διέρχεται από την αρχή Ο.

β) Έστω C ο κύκλος που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση όταν $\alpha = 2$ και $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο C σε σημείο Α διαφορετικό από το Ο.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Α συναρτήσει του λ.

ii) Να αποδείξετε ότι το μέσο Μ του τμήματος ΟΑ κινείται σε κύκλο σταθερής ακτίνας, ο οποίος διέρχεται από το Ο.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

43. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda + 2)y - \lambda - 13 = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Έστω ότι ο κύκλος C, που παριστάνει η εξίσωση (1), διέρχεται από το σημείο Α(− 3, 2). Να βρείτε:

i) τον αριθμό λ, καθώς και το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C,

ii) τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου C, οι οποίες έχουν ως ένα άκρο τους το σημείο Α(− 3, 2).

Ζ. Μέγιστες και ελάχιστες αποστάσεις

44. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από το σημείο Α(3, 10) και έχει κέντρο το Κ(4, 8).

α) Να αποδείξετε ότι C: $(x - 4)^2 + (y - 8)^2 = 5$ και έπειτα να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Ο και Κ.

β) Από τα σημεία του κύκλου C να βρείτε τις συντεταγμένες:

i) του σημείου που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων,

ii) του σημείου που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

45. Δίνεται ο κύκλος:

$$C_1: x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$$

και ο κύκλος C_2 με κέντρο Λ(− 2, 3), ο οποίος εφάπτεται στον άξονα y′y.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_1.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2.

γ) Να αποδείξετε ότι καθένας από τους κύκλους C_1 και C_2 είναι εξωτερικός του άλλου.

δ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου C_1 στο σημείο του Α(2, 1) εφάπτεται και στον C_2.

ε) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του C_1 από ένα σημείο του C_2.

46. Δίνεται ο κύκλος:

$$C: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0$$

και το σημείο Σ(6, − 8).

α) Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου C.

β) Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου C.

γ) Να βρείτε τα σημεία του κύκλου C που απέχουν τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση από το σημείο Σ.

δ) Έστω ζ η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Σ και τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο με τετμημένη 10. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ζ,

ii) τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο του κύκλου C από την ευθεία ζ,

iii) τις εφαπτομένες του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία ζ.

Η. Συνδυαστικά θέματα

47. Δίνονται οι εξισώσεις:

$$(x + y - 1)(x + y + 1) = 2xy \quad (1)$$

και:

$$(\lambda - 1)x + (2\lambda + 3)y + 2\lambda - 5 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (2)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία. Κατόπιν να αποδείξετε ότι οι ευθείες που προκύπτουν από τη (2) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο να προσδιορίσετε.

γ) Έστω Α και Β τα σημεία τομής του κύκλου C με τους θετικούς ημιάξονες Οx και Οy αντίστοιχα. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, ώστε η ευθεία ΑΒ να προκύπτει από την εξίσωση (2).

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

48. Στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τη γραμμή με εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Έστω Α το αντιδιαμετρικό σημείο του Ο(0, 0) στον κύκλο C.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α.

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη ε του κύκλου C στο σημείο Α.

iii) Αν το σημείο Β(2, α) ανήκει στον κύκλο C, να βρείτε τον αριθμό α, καθώς και την απόσταση του σημείου Β από την εφαπτομένη ε.

δ) Δύο σημεία Ρ και Σ κινούνται πάνω στον κύκλο C έτσι, ώστε $P\Sigma = 6$. Έστω ε_1 και ε_2 οι εφαπτομένες του κύκλου C στα σημεία Ρ και Σ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής Μ των ε_1 και ε_2 κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

49. Δίνονται τα σημεία:

$$A(1, 3), \quad B(-1, 0) \quad \text{και} \quad \Gamma(3, -1)$$

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.

β) Έστω C ο κύκλος με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα $\rho = |\overrightarrow{AB}|$.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής του κύκλου C με την ευθεία ΒΓ.

ii) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο Σ(6, 4).

iii) Θεωρούμε τα σημεία Δ(−2, 1) και Ε(−1, 6). Αν Ρ είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ΔΕ, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$\overrightarrow{PA}^2 - \overrightarrow{P\Delta} \cdot \overrightarrow{PE}$$

είναι σταθερή.

50. Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n = 1, 2, 3, \ldots, 1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του,

β) κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο Α (που είναι η φωλιά τους) του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες,

γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας ε: $x + y - 1 = 0$ στο σημείο Α.

51. Δίνονται ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(3, 3) και ακτίνα $R = \sqrt{8}$, το σημείο Γ(1, 5) και τα σημεία τομής Α και Β της ευθείας ε: $y = x$ με τον κύκλο.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ είναι σημείο του κύκλου και να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο αυτό.

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

δ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

ε) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου που διέρχονται από το σημείο Δ(7, 3).

52. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οxy στο επίπεδο δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2\lambda y = 0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να εκφράσετε το κέντρο και την ακτίνα συναρτήσει του λ.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ο κύκλος που παριστάνει η εξίσωση (1) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Αν ο κύκλος C που παριστάνει η εξίσωση (1) εφάπτεται στην ευθεία ζ: $x - y - 4 = 0$, τότε:

i) να βρείτε τον αριθμό λ,

ii) να αποδείξετε ότι ο κύκλος C τέμνει τους άξονες x′x και y′y σε σημεία Α και Β αντίστοιχα, διαφορετικά από την αρχή Ο τέτοια, ώστε το τρίγωνο ΟΑΒ να είναι ισοσκελές,

iii) να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία ζ.

53. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τον κύκλο C_1: $x^2 + y^2 = 4$ και μια τυχούσα διάμετρό του ΑΒ με $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί ισχύει:

$$x_2 = -x_1 \quad \text{και} \quad y_2 = -y_1$$

β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $N(\kappa, \lambda)$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 5$ είναι ο κύκλος C_2: $x^2 + y^2 = 9$.

γ) Στο καρτεσιανό επίπεδο να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει:

$$4 \le x^2 + y^2 \le 9$$

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

54. Σε καρτεσιανό σύστημα Οxy θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$, $A(-25, 0)$ και $B(-1, 0)$ για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{AM}| = 5|\overrightarrow{BM}|$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει στον κύκλο:

$$C: x^2 + y^2 = 25$$

β) Θεωρούμε το σημείο Σ(7, 1).

i) Να εξετάσετε αν το σημείο Σ βρίσκεται στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό του κύκλου C.

ii) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες από το Σ προς τον κύκλο είναι μεταξύ τους κάθετες.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

55. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$, $A(-2, 0)$ και $B(2, 0)$, ώστε να ισχύει:

$$\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 3\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 20$.

β) Έστω Γ και Δ σημεία του κύκλου C, ώστε:

$$\left(\frac{\Gamma\Delta}{4}\right)^2 = 5$$

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ και η αρχή των αξόνων Ο είναι συνευθειακά.

ii) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο:

$$\overrightarrow{M\Gamma} \cdot \overrightarrow{M\Delta}$$

όταν το Μ κινείται στον κύκλο.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

56. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\Gamma(1, -3)$ του οποίου η πλευρά ΑΒ βρίσκεται στην ευθεία $x - 7y + 38 = 0$ και το ύψος ΑΔ βρίσκεται στην ευθεία $x + 3y - 12 = 0$. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες της κορυφής Α,

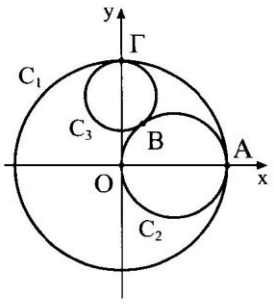
β) την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά ΒΓ και τις συντεταγμένες της κορυφής Β,

γ) τις μεσοκάθετες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ,

δ) την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου C του τριγώνου ΑΒΓ,

ε) την εφαπτομένη ε του κύκλου C στο σημείο Α και την απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία ε.

57. Στο διπλανό σχήμα δίνονται ο κύκλος C_1 που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και διέρχεται από το σημείο $A(6, 0)$, ο κύκλος C_2 που έχει διάμετρο το ΟΑ και ο κύκλος C_3 του οποίου το κέντρο βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα Oy και εφάπτεται εξωτερικά στον C_2 στο Β και εσωτερικά στον C_1 στο Γ.



α) Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων C_1 και C_2.

β) Να αποδείξετε ότι $K(0, 4)$.

γ) Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των C_2 και C_3 στο Β.

58. Δίνεται η ευθεία ε: $3x - 2y + 11 = 0$ και ο κύκλος C_1 με κέντρο $O(0, 0)$, ο οποίος διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε και ο κύκλος C_1 τέμνονται.

β) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C_1 που είναι παράλληλες στην ευθεία ε.

γ) Θεωρούμε κύκλο C_2 ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά στον κύκλο C_1 στο σημείο $A(3, 2)$ και εφάπτεται και στην ευθεία ε.

i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2.

ii) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν 3 κοινές εφαπτομένες και στη συνέχεια να βρείτε το άθροισμα των τετμημένων και το άθροισμα των τεταγμένων των σημείων επαφής των παραπάνω εφαπτομένων με τον κύκλο C_1.

59. Δίνεται κύκλος C, που διέρχεται από το σημείο $A(5, 0)$, και η εφαπτομένη στο σημείο του $B(\beta, 1 - \beta)$ είναι η ευθεία ε: $3x - 4y + 25 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = -3$.

β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C έχει κέντρο την αρχή των αξόνων.

γ) Θεωρούμε σταθερό σημείο $P(\alpha, 0)$ με $\alpha > 5$. Από το Ρ φέρνουμε μεταβλητή ευθεία ζ που τέμνει τον κύκλο C στα σημεία Σ και Τ. Να αποδείξετε ότι το μέσο Μ του ΣΤ κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα ως συνάρτηση του α.

12ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 3.2 Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ και επιπλέον:

α) έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και εστία $E(2, 0)$,

β) έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και διευθετούσα $\delta: x = 1$,

γ) έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και εστία $E(0, -3)$,

δ) έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και η εστία της βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα Oy και απέχει 1 μονάδα από τη διευθετούσα της.

2. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$. Να βρείτε:

α) την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής C,

β) τον αριθμό α, ώστε το σημείο $M(\alpha, \alpha + 2)$ να ανήκει στην παραβολή C,

γ) τα σημεία της παραβολής που απέχουν 10 μονάδες από την εστία της.

3. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων A και B της παραβολής $y = \frac{1}{4}x^2$ που έχουν την ίδια τεταγμένη και ισχύει ότι $\widehat{AOB} = 90°$.

4. Δίνεται η παραβολή C με κορυφή $O(0, 0)$, η οποία έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της παραβολής C,

β) την εφαπτομένη της παραβολής C στο σημείο της A,

γ) την εφαπτομένη της παραβολής C που είναι κάθετη στην ευθεία:

$$\zeta: 2x + y - 2017 = 0$$

δ) τις εφαπτομένες της παραβολής C που διέρχονται από το σημείο:

$$P(-3, -2)$$

5. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες της παραβολής $C_1: y^2 = 16x$ και του κύκλου:

$$C_2: x^2 + y^2 = 8$$

6. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$ και το σημείο της $A(8, 8)$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη ε της παραβολής C στο σημείο της A.

β) Αν δίνεται το σημείο $B(12, 8)$, να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{EAB}$, όπου E η εστία της παραβολής C.

7. Δίνεται παραβολή C η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon_1: x + 3y + 1 = 0$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon_2: x - y - 3 = 0$ εφάπτεται στην παραβολή C και να βρείτε το σημείο επαφής.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon_3: x + 3y - 3 = 0$ τέμνει την παραβολή C σε δύο σημεία, των οποίων να βρείτε τις συντεταγμένες.

8. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 8x$, το σημείο $M(5, -2)$ και η χορδή AB της παραβολής C που έχει μέσο το σημείο M.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των χορδών της παραβολής C που είναι κάθετες στην AB ανήκουν σε ευθεία.

9. Αν η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της A τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο B και τον άξονα $y'y$ στο σημείο K, να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{AEB} = 90^\circ$ β) $EK \perp AB$ γ) $EK^2 = KA \cdot KB$

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Εξίσωση και στοιχεία παραβολής

1. Να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα δ καθεμίας από τις παρακάτω παραβολές:

α) $C_1: y^2 = 20x$ **β)** $C_2: y^2 = -12x$

γ) $C_3: x^2 = 16y$ **δ)** $C_4: x^2 = -24y$

ε) $C_5: y^2 = x$ **στ)** $C_6: 3x^2 = 8y$

2. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων O(0, 0), άξονα συμμετρίας τον x′x και επιπλέον:

α) έχει εστία το σημείο $E_1(3, 0)$,

β) έχει εστία το σημείο $E_2(-7, 0)$,

γ) έχει διευθετούσα την ευθεία $\delta_1: x = 2$,

δ) η εστία της βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα Ox και απέχει 12 μονάδες από τη διευθετούσα.

3. Δίνεται παραβολή C που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον y′y. Επίσης η εστία της C βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα Oy και απέχει 4 μονάδες από τη διευθετούσα της. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της παραβολής C,

β) την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής C,

γ) τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο:

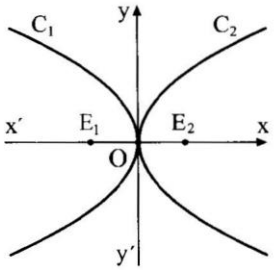
$$M(2\lambda + 3, \lambda + 1)$$

να ανήκει στην παραβολή C,

δ) τα σημεία της παραβολής C που απέχουν $2\sqrt{5}$ μονάδες από την αρχή των αξόνων,

ε) τα σημεία της παραβολής C που απέχουν 10 μονάδες από τη διευθετούσα της.

4. Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται οι παραβολές:



$$C_1: y^2 = -2px$$

και:

$$C_2: y^2 = 2px$$

οι οποίες έχουν εστίες τα σημεία E_1 και E_2 αντίστοιχα. Η απόσταση των σημείων E_1 και E_2 είναι ίση με 4 μονάδες. Να βρείτε:

α) την εστία, τη διευθετούσα και την εξίσωση καθεμιάς από τις παραβολές C_1 και C_2,

β) την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

5. Δίνεται η εξίσωση:

$$y^4 - 16x^2 = 0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παραβολές:

$$C_1: y^2 = 4x \quad \text{και} \quad C_2: y^2 = -4x$$

και να βρείτε για καθεμιά από αυτές την εστία και τη διευθετούσα της.

β) Αν E_1 και E_2 είναι οι εστίες των παραβολών C_1 και C_2 αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

6. Δίνεται παραβολή C η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων O(0, 0), άξονα συμμετρίας τον y′y και διέρχεται από το σημείο A(4, −4). Να βρείτε:

α) την εξίσωση της παραβολής C,

β) την εστία Ε και τη διευθετούσα δ της παραβολής C,

γ) σημείο Β της παραβολής C, διαφορετικό της αρχής των αξόνων, ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{EA}$ και $\overrightarrow{OB}$ να είναι παράλληλα.

Β. Εφαπτομένη παραβολής

7. Θεωρούμε την παραβολή C: $y^2 = 4x$ και την κατακόρυφη ευθεία ε: $x = \frac{p}{2}$, όπου p είναι η παράμετρος της παραβολής C.

α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

β) Αν η ευθεία ε τέμνει την παραβολή C στα σημεία της Β και Γ, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των Β και Γ, καθώς και τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής C στα σημεία της αυτά αντίστοιχα,

ii) να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 ανήκει στη διευθετούσα της C.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

8. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 6x$.

Να βρείτε:

α) την εφαπτομένη της παραβολής C στο σημείο της $A\left(\frac{1}{6}, -1\right)$,

β) την εφαπτομένη της παραβολής C που σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x′x,

γ) τις εφαπτομένες της παραβολής C που διέρχονται από το σημείο M(10, 8).

9. Δίνεται η παραβολή C η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον x′x και διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C.

β) Έστω ε η εφαπτομένη της παραβολής C στο σημείο της Α.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε.

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη ζ της παραβολής C που είναι κάθετη στην ε.

iii) Να αποδείξετε ότι το σημείο επαφής της παραπάνω εφαπτομένης ζ με τη C, το σημείο Α και η εστία Ε της C είναι συνευθειακά σημεία.

10. Δίνεται παραβολή C η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων O(0, 0), άξονα συμμετρίας τον y′y και διέρχεται από το σημείο A(−4, 4). Να βρείτε:

α) την εξίσωση της παραβολής C,

β) την εστία Ε και τη διευθετούσα δ της παραβολής C,

γ) την εφαπτομένη ε της παραβολής C που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\overrightarrow{EA}$,

δ) τις εφαπτομένες της παραβολής που απέχουν απόσταση $\frac{5}{4}$ από την εστία.

11. Δίνεται παραβολή C η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον y′y και εστία:

$$E\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Να βρείτε:

α) την εξίσωση της παραβολής C,

β) την εφαπτομένη της παραβολής C που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x′x,

γ) την εφαπτομένη της παραβολής C που τέμνει τους άξονες x′x και y′y στα σημεία A και B αντίστοιχα έτσι, ώστε:

$$AB = \sqrt{5}$$

Γ. Κοινές εφαπτομένες κύκλου και παραβολής

12. Δίνονται οι παραβολές:

$$C_1: y^2 = 32x \quad \text{και} \quad C_2: x^2 = 4y$$

και έστω A το σημείο τομής των C_1 και C_2, διαφορετικό της αρχής των αξόνων O.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 των παραβολών C_1 και C_2 αντίστοιχα στο σημείο τους A.

γ) Αν η ε_1 τέμνει τη C_2 στο B και η ε_2 τέμνει τη C_1 στο Γ, να αποδείξετε ότι η ευθεία BΓ είναι κοινή εφαπτομένη των C_1 και C_2.

13. Δίνεται η παραβολή C_1 που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων O(0, 0), άξονα συμμετρίας τον y′y και διέρχεται από το σημείο:

$$A\left(2, \frac{1}{2}\right)$$

α) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_1.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την εστία της παραβολής C_1 και σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x′x.

γ) Έστω C_2 ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην παραπάνω ευθεία ζ. Να βρείτε:

i) την εξίσωση του κύκλου C_2,

ii) τις κοινές εφαπτομένες των κωνικών τομών C_1 και C_2.

Δ. Χορδή παραβολής

14. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 6x$ και η ευθεία ε: $y = 3x + \beta$ με $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\beta \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε τέμνει την παραβολή C σε δύο διακεκριμένα σημεία.

β) Έστω ότι η ευθεία ε τέμνει την παραβολή C στα σημεία A και B. Να αποδείξετε ότι καθώς το β παίρνει τις τιμές που βρήκατε στο ερώτημα (α), το μέσο M του τμήματος AB κινείται σε μια ευθεία παράλληλη στον άξονα x′x, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

15. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 8x$ και η ευθεία ε: $y = 2x + \beta$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\beta \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε τέμνει την παραβολή C σε δύο διακεκριμένα σημεία.

β) Έστω ότι η ευθεία ε τέμνει την παραβολή C στα σημεία A και B και έστω M το μέσο του AB.

i) Να γράψετε τις συντεταγμένες του M συναρτήσει του β.

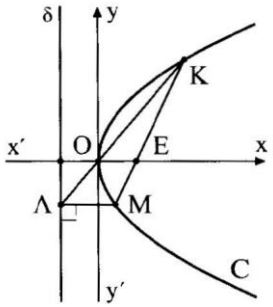
ii) Αν το σημείο M απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $2\sqrt{5}$, να βρείτε τον αριθμό β.

Ε. Θεωρητικές ασκήσεις

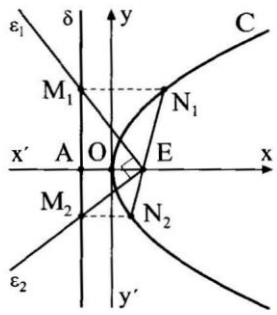
16. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 2px$ και έστω E η εστία της και $M(x_1, y_1)$ ένα σημείο της διαφορετικό από την κορυφή της O(0, 0). Έστω επίσης Λ η προβολή του M στη διευθετούσα δ της παραβολής C. Αν η ευθεία ΛO τέμνει την παραβολή C στο σημείο K (διαφορετικό του O), τότε:

α) να εκφράσετε τις συντεταγμένες των σημείων M, Λ και K ως συνάρτηση των p και y_1,

β) να αποδείξετε ότι τα σημεία K, E και M είναι συνευθειακά.



17. Δίνεται παραβολή C: $y^2 = 2px$ και έστω E η εστία της. Δύο κάθετες ευθείες ε_1 και ε_2 που διέρχονται από την εστία E τέμνουν τη διευθετούσα δ της παραβολής C στα σημεία M_1 και M_2 αντίστοιχα. Από τα M_1 και M_2 φέρουμε ευθείες παράλληλες στον άξονα x′x που τέμνουν την παραβολή C στα σημεία N_1 και N_2 αντίστοιχα. Αν y_1 και y_2 είναι οι τεταγμένες των M_1 και M_2 αντίστοιχα, τότε:



α) να αποδείξετε ότι:

$$y_1 y_2 = -p^2$$

β) να εκφράσετε τις συντεταγμένες των N_1 και N_2 συναρτήσει των y_1 και p,

γ) να αποδείξετε ότι τα σημεία N_1, E και N_2 είναι συνευθειακά.

Ζ. Συνδυαστικά θέματα

18. Δίνεται παραβολή C που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον y′y και εστία $E\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C.

β) Θεωρούμε τα σημεία A και B της διευθετούσας της παραβολής C με τετμημένες 2 και 7 αντίστοιχα. Έστω επίσης ζ η ευθεία που διέρχεται από το B και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{AE}$. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ζ,

ii) τα σημεία τομής Γ και Δ της ευθείας ζ με την παραβολή C,

iii) τις εφαπτομένες ε_1 και ε_2 της παραβολής C στα σημεία της Γ και Δ,

iv) την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι παραπάνω εφαπτομένες ε_1 και ε_2.

19. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C_1, ο οποίος έχει το κέντρο του στην ευθεία:

$$\varepsilon: x - y - 1 = 0$$

Έστω επίσης A(5, 3) και B(1, 5) δύο σημεία του κύκλου C_1.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$C_1: (x-1)^2 + y^2 = 25$$

β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_2 που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και εστία το κέντρο του κύκλου C_1.

γ) Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία τομής των C_1 και C_2, τότε:

i) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής C_2 στα σημεία αυτά,

ii) να αποδείξετε ότι οι ε_1 και ε_2 τέμνονται σε σημείο που ανήκει στον κύκλο C_1.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

20. Δίνεται παραβολή C_1 με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον x′x, η οποία διέρχεται από το σημείο A(8, 8). Θεωρούμε επίσης κύκλο C_2, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A και B(5, 7) και στο κοινό τους σημείο A οι κωνικές τομές C_1 και C_2 έχουν κοινή εφαπτομένη.

α) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_1.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2.

γ) Θεωρούμε σημείο Γ της παραβολής C_1 (διαφορετικό του A) τέτοιο, ώστε τα σημεία A, Γ και η εστία E της C_1 να είναι συνευθειακά.

i) Να βρείτε το σημείο Γ.

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής C_1 στο Γ εφάπτεται και στον κύκλο C_2.

21. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία A(−2, −2) και B(0, −4), την παραβολή $y^2 = 4x$ και έστω M(x, y) τυχαίο σημείο της παραβολής.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $(MAB) = \frac{1}{4}(y^2 + 4y + 16)$

ii) $(MAB) \geq 3$

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του M, ώστε το εμβαδόν (MAB) του τριγώνου MAB να γίνεται ελάχιστο.

γ) Έστω ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν M(1, −2). Να εξετάσετε αν η εφαπτομένη της παραβολής στο M είναι παράλληλη στην πλευρά AB του τριγώνου MAB.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

22. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$.

α) Να βρείτε:

i) την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής,

ii) τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\sqrt{2}$,

iii) την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x - 2$.

β) Θεωρούμε σημείο A της παραβολής, διαφορετικό από την αρχή των αξόνων O(0, 0), και έστω B η προβολή του A στη διευθετούσα δ.

i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

ii) Να βρείτε το A, ώστε το τρίγωνο ABE να είναι ισόπλευρο.

23. Δίνεται η παραβολή C_1: $y^2 = 24x$ και έστω ε η εφαπτομένη της C_1 στο σημείο της $A(x_0, 4)$.

α) Να βρείτε την εστία E_1 και τη διευθετούσα δ_1 της παραβολής C_1.

β) Να βρείτε το x_0, καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης ε.

γ) Θεωρούμε παραβολή C_2 με κορυφή O(0, 0), άξονα συμμετρίας τον x′x και εστία E_2 για την οποία ισχύει:

$$3\overrightarrow{KO} = 4\overrightarrow{KE}_2 - \overrightarrow{KE}_1$$

για οποιοδήποτε σημείο K.

i) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OE}_1 = 4\overrightarrow{OE}_2$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_2.

iii) Να βρείτε σημείο της παραβολής C_2 που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την ευθεία ε.

24. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 2px$. Η εφαπτομένη της C στο σημείο της $A\left(x_0, \frac{p}{2}\right)$ διέρχεται από το σημείο B(−3, −5).

α) Να βρείτε τον αριθμό p.

β) Να βρείτε τις εφαπτομένες της παραβολής C που σχηματίζουν με την ευθεία ζ: $y = 3x + 2017$ οξεία γωνία ίση με 45°.

γ) Δίνεται σημείο Σ το οποίο κινείται στην παραβολή C. Να αποδείξετε ότι το σημείο M για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{M\Sigma}$ (όπου O η αρχή των αξόνων) κινείται σε μια παραβολή, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

25. Δίνεται παραβολή C: $y^2 = 2px$ με $p > 0$. Η εφαπτομένη της C στο σημείο της με τεταγμένη 2 απέχει $\sqrt{2}$ μονάδες από την εστία της.

α) Να αποδείξετε ότι $p = 2$.

β) Θεωρούμε σημεία A και B της παραβολής C, ώστε το τρίγωνο OAB να είναι ισόπλευρο, όπου O η αρχή των αξόνων. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

γ) Μια ευθεία ζ: $y = \lambda x + \beta$, με $\lambda \neq 0$, τέμνει την παραβολή C σε δύο διαφορετικά σημεία Σ και T.

i) Να αποδείξετε ότι $\beta\lambda < 1$.

ii) Να αποδείξετε ότι το μέσο του ΣT είναι το:

$$M\left(\frac{2 - \lambda\beta}{\lambda^2}, \frac{2}{\lambda}\right)$$

iii) Αν $\beta = 0$, να αποδείξετε ότι καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$ το παραπάνω σημείο M κινείται σε παραβολή.

13ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 3.3 Η ΕΛΛΕΙΨΗ**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει:
- α) εστίες $E'(-4, 0)$ και $E(4, 0)$ και μήκος μικρού άξονα 6,
- β) εστίες $E'(0, -2)$ και $E(0, 2)$ και μήκος μεγάλου άξονα 12,
- γ) εστίες δύο σημεία του άξονα $x'x$, συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων, εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{21}}{5}$ και διέρχεται από το σημείο $M(5, 2)$.

2. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων:
- α) $x^2 + 4y^2 = 4$
- β) $169x^2 + 144y^2 = 24.336$

3. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ και το σημείο $M(1, 2)$.
- α) Να αποδείξετε ότι το $M(1, 2)$ είναι εσωτερικό σημείο της έλλειψης C.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της έλλειψης C που έχει ως μέσο το σημείο M.

4. Δίνεται η έλλειψη $C: x^2 + \frac{y^2}{12} = 1$. Να βρείτε:
- α) την εφαπτομένη της έλλειψης C στο σημείο της $K\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$,
- β) τις εφαπτομένες της έλλειψης C που είναι κάθετες στην ευθεία:
$$\zeta: x - 2y + 2017 = 0$$
- γ) τις εφαπτομένες της έλλειψης C που διέρχονται από το σημείο $P(1, 6)$.

5. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες της έλλειψης $C_1: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ και του κύκλου:
$$C_2: (x - 3)^2 + y^2 = 5$$

6. Δίνεται έλλειψη C της οποίας οι εστίες ανήκουν στον άξονα $x'x$ και είναι σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C, αν αυτή εφάπτεται στην ευθεία $y = -\frac{2}{3}x + 4$ στο σημείο $M(3, 2)$.

7. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$.
- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 4$ εφάπτεται στην έλλειψη C.
- β) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $\zeta: y = \lambda x - 2\lambda$ να εφάπτεται στην έλλειψη C.

8. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.
- α) Από το σημείο $P(10, 18)$ φέρουμε τις εφαπτομένες ε_1 και ε_2 στην έλλειψη C και έστω A και B τα σημεία επαφής. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

β) Θεωρούμε τα σημεία $\Gamma(x_3, y_3)$ και $\Delta(x_4, y_4)$ της έλλειψης C και έστω ε_3 και ε_4 οι εφαπτομένες της C στα Γ και Δ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο σημείο $M(x_0, y_0)$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΓΔ συναρτήσει των x_0 και y_0.

ii) Αν η ευθεία ΓΔ διέρχεται από την εστία Ε (με θετική τετμημένη) της C, να βρείτε την τετμημένη x_0 του Μ.

9. Δίνεται η έλλειψη:

$$C: \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{\kappa^2} = 1$$

η οποία διέρχεται από το σημείο $M(5, 4)$.

α) Να βρείτε την τιμή του κ^2.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της έλλειψης C στο σημείο της Μ.

γ) Αν E' και Ε είναι οι εστίες της έλλειψης C, να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{E'ME}$.

10. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(5\eta\mu\varphi, 3\sigma\upsilon\nu\varphi)$, με $\varphi \in \mathbb{R}$, κινείται σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε τις εστίες και την εκκεντρότητα.

11. Έστω ε και ε' οι εφαπτομένες της έλλειψης $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $0 < \beta < \alpha$, στις κορυφές της $A(\alpha, 0)$ και $A'(-\alpha, 0)$ αντίστοιχα και ζ η εφαπτομένη της C σε ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$. Αν η ζ τέμνει τις ε και ε' στα σημεία Γ και Γ' αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $A\Gamma \cdot A'\Gamma' = \beta^2$,

β) ο κύκλος με διάμετρο το $\Gamma\Gamma'$ διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Εξίσωση και στοιχεία έλλειψης

1. Για καθεμία από τις παρακάτω ελλείψεις να βρείτε τις εστίες, τα μήκη του μικρού και του μεγάλου άξονα, την εκκεντρότητα και τις κορυφές:

α) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ **β)** $x^2+\frac{y^2}{9}=1$

γ) $3x^2+2y^2=24$ **δ)** $x^2+50y^2=50$

ε) $4x^2+12y^2=1$

2. Δίνεται έλλειψη C της οποίας οι εστίες είναι σημεία του άξονα x′x, συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Αν η έλλειψη C έχει μήκος μεγάλου άξονα $6\sqrt{5}$ και μήκος μικρού άξονα 12, να βρείτε:

α) την εξίσωση της έλλειψης C,

β) τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις κορυφές της έλλειψης C.

3. Δίνεται η έλλειψη C η οποία έχει εστίες $E'(0,-6)$ και $E(0,6)$ και μήκος μικρού άξονα 4. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της έλλειψης C,

β) το μήκος του μεγάλου άξονα, την εκκεντρότητα και τις κορυφές της έλλειψης C.

4. Δίνεται έλλειψη C της οποίας οι εστίες είναι σημεία του άξονα y′y, συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Αν η έλλειψη C έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{5}$ και μήκος μικρού άξονα 8, να βρείτε τις εστίες της και την εξίσωσή της.

5. Δίνονται οι ελλείψεις:

$$C_1:\ x^2+4y^2=20 \quad \text{και} \quad C_2:\ 4x^2+y^2=20$$

Να αποδείξετε ότι:

α) οι ελλείψεις C_1 και C_2 έχουν την ίδια εκκεντρότητα,

β) τα σημεία τομής των ελλείψεων C_1 και C_2 ανήκουν στον κύκλο $C:\ x^2+y^2=8$.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

6. Θεωρούμε την έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'(-\sqrt{5},0)$ και $E(\sqrt{5},0)$ και μεγάλο άξονα μήκους 6 μονάδων.

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης.

β) Αν M είναι σημείο της έλλειψης για το οποίο ισχύει $ME'=2ME$, τότε:

i) να βρείτε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ME′ και ME,

ii) να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{E'ME}$ είναι ορθή.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

7. Δίνεται έλλειψη C της οποίας οι εστίες είναι σημεία του άξονα x′x, συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Η έλλειψη C διέρχεται από το σημείο $A(3,1)$ και ο μικρός άξονάς της έχει μήκος $\sqrt{8}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C και την εκκεντρότητά της.

β) Αν E είναι η εστία της έλλειψης C με θετική τετμημένη, να βρείτε σημείο M της C, ώστε τα σημεία A, E και M να είναι συνευθειακά.

Β. Εφαπτομένες έλλειψης

8. Δίνονται ο κύκλος $C_1:\ x^2+y^2=20$, η έλλειψη $C_2:\ \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ και η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon:\ x=4$.

Αν Γ και Δ είναι τα σημεία του πρώτου τεταρτημορίου στα οποία η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 αντίστοιχα, να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ,

β) τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C_1 στο σημείο του Γ και της έλλειψης C_2 στο σημείο της Δ, καθώς και το σημείο τομής των εφαπτομένων αυτών. ***(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)***

9. Δίνεται η έλλειψη C με εστίες:

$$E'\left(0,-2\sqrt{11}\right) \quad \text{και} \quad E\left(0,2\sqrt{11}\right)$$

και μήκος μεγάλου άξονα $8\sqrt{3}$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της έλλειψης C,

β) τις εφαπτομένες της έλλειψης C που είναι παράλληλες στην ευθεία:

$$\zeta:\ 6x-3y+2017=0$$

γ) τις εφαπτομένες της έλλειψης C που διέρχονται από το σημείο $P(2,4)$.

10. Δίνεται η έλλειψη C με εστίες $E'(-2,0)$ και $E(2,0)$ και μια κορυφή της $A\left(2\sqrt{2},0\right)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C.

β) Αν B είναι το άκρο του μικρού άξονα της C με θετική τετμημένη, να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης C που είναι παράλληλες στο $\overrightarrow{AB}$.

γ) Να βρείτε τις εφαπτομένες της C σε σημεία της που ανήκουν στο 1ο τεταρτημόριο, οι οποίες σχηματίζουν με τους άξονες x′x και y′y τρίγωνο με εμβαδόν:

$$\frac{8\sqrt{6}}{3}\ \text{τ.μ.}$$

11. Δίνεται έλλειψη C της οποίας οι εστίες είναι σημεία του άξονα x′x, συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Η έλλειψη C εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon:\ y=-x+3$ στο σημείο $A(2,1)$.

α) Να βρείτε:

i) την εξίσωση της έλλειψης C,

ii) τις εφαπτομένες της έλλειψης C που είναι κάθετες στην ευθεία ε.

β) Αν ζ είναι μια τυχαία εφαπτομένη της έλλειψης C και E′, E είναι οι εστίες της, να υπολογίσετε το γινόμενο:

$$d(E',\zeta)\cdot d(E,\zeta)$$

12. Δίνεται έλλειψη $C_1:\ \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, με $\alpha>\beta>0$, και κύκλος $C_2:\ x^2+y^2=\frac{\beta^2}{3}$. Ο κύκλος C_2 διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης C_1.

α) Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης C_1.

β) Δίνεται επιπλέον ότι ο μεγάλος άξονας της έλλειψης C_1 έχει μήκος 8.

i) Να αποδείξετε ότι:

$$C_1: \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

ii) Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης C_1 που απέχουν $\frac{6}{\sqrt{5}}$ μονάδες από την εστία της με θετική τετμημένη.

iii) Θεωρούμε την ευθεία $\zeta: y=\lambda x$, με $\lambda>0$, που τέμνει την έλλειψη C_1 και τον κύκλο C_2 στα σημεία Α και Β αντίστοιχα του 1ου τεταρτημορίου. Να αποδείξετε ότι $AB>2$.

Γ. Γεωμετρικοί τόποι

13. Έστω τρίγωνο ΜΒΓ, με $B(0,-6)$ και $\Gamma(0,6)$, το οποίο έχει περίμετρο ίση με 30. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της κορυφής Μ.

14. Δίνεται ο κύκλος:

$$C: x^2+y^2-6x-72=0$$

α) Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου C.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(12,0)$ ανήκει στον κύκλο C και να βρείτε την εφαπτομένη του ε στο σημείο αυτό.

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, των οποίων η απόστασή τους από το κέντρο Κ είναι ίση με το μισό της απόστασής τους από την εφαπτομένη ε.

15. Θεωρούμε τα σημεία του επιπέδου:

$$M(4\sigma\upsilon\nu\varphi,\ 5\eta\mu\varphi) \quad \text{με} \quad \varphi\in[0,2\pi)$$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της προηγούμενης έλλειψης στο σημείο:

$$M(4\sigma\upsilon\nu\varphi,\ 5\eta\mu\varphi) \quad \text{με } \varphi\in[0,2\pi)$$

γ) Έστω $E(\varphi)$, με $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της προηγούμενης έλλειψης στο σημείο:

$$M(4\sigma\upsilon\nu\varphi,\ 5\eta\mu\varphi)$$

με τους άξονες x′x και y′y. Να αποδείξετε ότι:

$$E(\varphi)\geq 20$$

16. Δίνεται η έλλειψη C_1 με εστίες $E_1'(-1,0)$ και $E_1(1,0)$ και εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_1.

β) Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης C_1 που είναι κάθετες στην ευθεία $\zeta: 2x-y+2017=0$.

γ) Το σημείο $N(\alpha,\beta)$ κινείται στην έλλειψη C_1. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{ON}$ κινείται σε έλλειψη C_2, της οποίας να βρείτε τις εστίες και την εκκεντρότητα.

δ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Ρ από τα οποία οι εφαπτομένες που άγονται προς την έλλειψη C_1 είναι μεταξύ τους κάθετες.

Δ. Θεωρητικές ασκήσεις

17. Δίνεται η έλλειψη:

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad \text{με } \alpha>\beta>0$$

και έστω Β′ και Β τα άκρα του μικρού άξονά της και Ε η εστία της με θετική τετμημένη. Αν ισχύει ότι $\widehat{BEB'}=90^\circ$, να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης C.

18. Δίνεται η έλλειψη:

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

με $\alpha>\beta>0$. Έστω ε η εφαπτομένη της σε ένα σημείο της $M(x_1,y_1)$, διαφορετικό από τις κορυφές της, και Κ το σημείο τομής της ε με τον άξονα x′x. Φέρουμε ευθεία ζ κάθετη στην ε στο σημείο Μ, η οποία τέμνει τον άξονα x′x στο Λ.

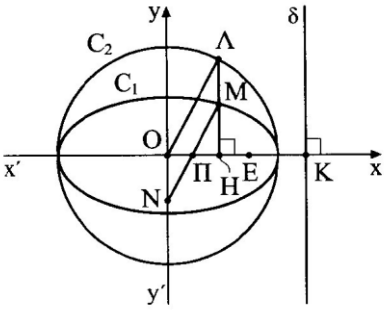
α) Να αποδείξετε ότι $OK\cdot O\Lambda=\gamma^2$.

β) Αν Ν είναι η προβολή του Μ στον άξονα x′x, να αποδείξετε ότι $\frac{O\Lambda}{ON}=\varepsilon^2$, όπου ε η εκκεντρότητα της έλλειψης C.

19. Δίνεται η έλλειψη $C_1:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, η εστία της $E(\gamma,0)$ και η ευθεία $\delta: x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$, η οποία τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο Κ. Θεωρούμε επίσης τον κύκλο:

$$C_2: x^2+y^2=\alpha^2$$

και ένα σημείο του $\Lambda(\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi,\ \alpha\cdot\eta\mu\varphi)$. Από το Λ φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα x′x, που τέμνει την έλλειψη C_1 στο Μ και τον άξονα x′x στο Η, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{HM}=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\overrightarrow{H\Lambda}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{1-\varepsilon^2}\cdot\overrightarrow{EK}$, όπου ε η εκκεντρότητα της έλλειψης C_1.

γ) Από το σημείο Μ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΟΛ, που τέμνει τους άξονες x′x και y′y στα σημεία Π και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{M\Pi}|=\beta$ και $|\overrightarrow{MN}|=\alpha$.

Ε. Συνδυαστικά θέματα

20. Δίνεται η έλλειψη C_1 με εστίες $E'(-\gamma,0)$ και $E(\gamma,0)$, με $\gamma>0$, η οποία έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και μήκος μεγάλου άξονα $4\sqrt{2}$. Θεωρούμε και την εξίσωση:

$$x^2+y^2+12x+16=0 \qquad (1)$$

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_1.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C_2, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

γ) Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες του προηγούμενου κύκλου C_2 και της έλλειψης C_1.

21. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία M(x, y) για τα οποία ισχύει η ισότητα:

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}+\frac{16}{9}\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)=0$$

όπου A(−3, 0) και B(3, 0).

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M ανήκουν στον κύκλο:

$$C_1:\ x^2+y^2=25$$

β) Αν Γ και Δ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C_1 με τον άξονα x′x, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_2 η οποία έχει μεγάλο άξονα το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ και εστίες τα σημεία A και B,

ii) να παραστήσετε γραφικά τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2. ***(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)***

22. Δίνεται έλλειψη C_1 της οποίας οι εστίες είναι σημεία του άξονα x′x, συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων O. Το μήκος του μικρού άξονα της έλλειψης C_1 ισούται με την εστιακή απόσταση.

α) Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης C_1.

β) Θεωρούμε την ευθεία ζ που διέρχεται από την εστία E της C_1 με θετική τετμημένη και σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x′x. Αν η ευθεία ζ τέμνει την έλλειψη C_1 στα σημεία Σ και T, να βρείτε το συν$(\widehat{\Sigma OT})$.

γ) Έστω ότι για τα παραπάνω σημεία Σ και T ισχύει ότι $\Sigma T=\frac{4\sqrt{6}}{3}$. Θεωρούμε και την παραβολή:

$$C_2:\ y^2=12x$$

i) Να αποδείξετε ότι $C_1:\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

ii) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής C_2.

iii) Έστω M το σημείο της παραβολής C_2 με τεταγμένη 6. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_2 στο M εφάπτεται και στην έλλειψη C_1.

iv) Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης C_1 που διέρχονται από την εστία της παραβολής C_2.

23. Δίνεται η εξίσωση:

$$\frac{x^2}{\lambda^2-4\lambda+8}+\frac{y^2}{6-\lambda}=1 \qquad (1)$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη της οποίας οι εστίες βρίσκονται στον άξονα x′x.

β) Έστω ότι η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη C_1 της οποίας οι εστίες βρίσκονται στον άξονα x′x και ο μεγάλος άξονας έχει μήκος $4\sqrt{2\lambda-6}$. Θεωρούμε και τον κύκλο:

$$C_2:\ x^2+y^2+2x-9=0$$

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda=4$.

ii) Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ του κύκλου C_2.

iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των κωνικών τομών C_1 και C_2.

iv) Έστω ε_1 και ε_2 οι εφαπτομένες των C_1 και C_2 αντίστοιχα στο κοινό τους σημείο που ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2.

14ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 3.4 Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-13, 0)$ και $E(13, 0)$ και κορυφές τα σημεία $A(5, 0)$ και $A'(-5, 0)$.

β) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0, -10)$ και $E(0, 10)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{3}$.

γ) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-\sqrt{5}, 0)$ και $E(\sqrt{5}, 0)$ και επιπλέον διέρχεται από το σημείο $M(2\sqrt{2}, 1)$.

δ) Όταν έχει ασύμπτωτες τις ευθείες:

$$y = \frac{4}{3}x \quad \text{και} \quad y = -\frac{4}{3}x$$

και διέρχεται από το σημείο $M(3\sqrt{2}, 4)$.

2. Να βρείτε τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής:

α) $9x^2 - 16y^2 = 144$ β) $x^2 - y^2 = 4$ γ) $144x^2 - 25y^2 = 3600$

3. Δίνεται η υπερβολή $C: 3x^2 - y^2 = 3$. Να βρείτε:

α) τις εστίες και την εκκεντρότητα της υπερβολής C,

β) την εξίσωση της χορδής της υπερβολής C που έχει μέσο το σημείο $M(5, -3)$.

4. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. Να βρείτε:

α) την εφαπτομένη της υπερβολής C στο σημείο της $A(4, 6)$,

β) τις εφαπτομένες της υπερβολής C που είναι παράλληλες στην ευθεία:

$$\zeta: 6x + 3y - 2017 = 0$$

γ) τις εφαπτομένες της υπερβολής C που διέρχονται από το σημείο $P(2, 6)$.

5. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες της υπερβολής $C_1: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ και του κύκλου:

$$C_2: x^2 + (y-3)^2 = 5$$

6. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ και έστω E', E οι εστίες της. Αν είναι $M(4, 3)$, να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{E'ME}$.

7. Δίνονται τα σημεία $M(x, y)$, $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$ για τα οποία ισχύουν:

$$|\overrightarrow{ME'}||\overrightarrow{ME}| - |\overrightarrow{OM}|^2 = 1$$

όπου O η αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι:

α) το σημείο M κινείται σε υπερβολή C, της οποίας να βρείτε την εξίσωση,

β) το σημείο $K\left(\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \sqrt{5}\cdot\varepsilon\varphi\theta\right)$, με $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ανήκει στην υπερβολή C.

8. Έστω ε και ε′ οι εφαπτομένες της υπερβολής $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στις κορυφές της Α και Α′ αντίστοιχα. Αν Γ και Γ′ είναι τα σημεία στα οποία μια τρίτη εφαπτομένη της υπερβολής τέμνει τις ε και ε′ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\text{ΑΓ} \cdot \text{Α}'\Gamma' = \beta^2$,

β) ο κύκλος με διάμετρο το ΓΓ′ διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Εξίσωση και στοιχεία υπερβολής

1. Για καθεμία από τις παρακάτω υπερβολές να βρείτε τις εστίες, τις κορυφές, την εκκεντρότητα, τις ασύμπτωτες και τις κορυφές του ορθογωνίου βάσης:

α) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ **β)** $y^2-\frac{x^2}{4}=1$

γ) $25x^2-y^2=25$ **δ)** $9x^2-4y^2=36$

ε) $4y^2-16x^2=1$

2. Δίνεται ισοσκελής υπερβολή C της οποίας οι εστίες είναι σημεία του άξονα x′x συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Αν η υπερβολή C διέρχεται από το σημείο $M\left(4,\ 2\sqrt{2}\right)$, να βρείτε:

α) την εξίσωση της υπερβολής C,

β) τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής C.

3. Δίνεται υπερβολή C της οποίας οι εστίες είναι σημεία του άξονα x′x, συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Αν η εστιακή απόσταση είναι 12 και η απόσταση των κορυφών της C είναι ίση με 6, να βρείτε:

α) τις εστίες και την εκκεντρότητα της C,

β) την εξίσωση της C.

4. Δίνεται υπερβολή C της οποίας οι εστίες είναι σημεία του άξονα y′y συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Αν η υπερβολή C διέρχεται από τα σημεία $M(4,\ 6)$ και $N\left(2,\ 3\sqrt{2}\right)$, να βρείτε:

α) την εξίσωση της υπερβολής C,

β) τις εστίες, τις κορυφές και την εκκεντρότητα της υπερβολής C.

5. Μια έλλειψη C_1 έχει εκκεντρότητα ίση με $\frac{4}{5}$ και τις ίδιες εστίες με την υπερβολή:

$$C_2:\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$C_1:\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

β) Να παραστήσετε γραφικά την έλλειψη C_1 και την υπερβολή C_2 σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy.

(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

6. Δίνεται η υπερβολή:

$$C:\ \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\alpha^2+5}=1$$

η οποία έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\sqrt{\frac{5}{2}}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2=10$.

β) Έστω E′ και E οι εστίες της υπερβολής C. Να βρείτε σημείο M της C τέτοιο, ώστε:

$$\widehat{E'ME}=90^\circ$$

7. Δίνεται υπερβολή C με εστίες $E'(0,\ -5)$ και $E(0,\ 5)$ και εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{5}{3}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C.

β) Να βρείτε τις κορυφές A′, A και τις ασύμπτωτες ζ_1 και ζ_2 της υπερβολής C.

γ) Να βρείτε την απόσταση της εστίας E από τις ασύμπτωτες ζ_1 και ζ_2 της C.

δ) Το σημείο $M(4\lambda-2,\ 3\lambda)$ ανήκει στην υπερβολή C. Να βρείτε:

i) τον αριθμό λ,

ii) το άθροισμα:

$$d(M,\ \zeta_1)+d(M,\ \zeta_2)$$

όπου ζ_1 και ζ_2 οι ασύμπτωτες της υπερβολής C.

Β. Εφαπτομένες υπερβολής

8. Δίνεται η υπερβολή C με εστίες:

$$E'(-3,\ 0)\quad \text{και}\quad E(3,\ 0)$$

και εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\sqrt{18}}{2}$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της υπερβολής C,

β) τις εφαπτομένες της υπερβολής C στα σημεία της με τεταγμένη 7,

γ) το σημείο τομής των παραπάνω εφαπτομένων.

9. Δίνεται η υπερβολή $C:\ \frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{4}=1$. Να βρείτε τις εφαπτομένες της υπερβολής C, οι οποίες:

α) διέρχονται από το σημείο $P(-1,\ -1)$,

β) σχηματίζουν γωνία 45° με τον άξονα x′x.

10. Δίνεται η υπερβολή C με εστίες:

$$E'(-2,\ 0)\quad \text{και}\quad E(2,\ 0)$$

και εκκεντρότητα $\varepsilon=2$.

α) Να βρείτε:

i) την εξίσωση της υπερβολής C,

ii) τις εφαπτομένες της υπερβολής C που είναι κάθετες στην ευθεία $\zeta:\ 3x-6y+2017=0$,

iii) τις εφαπτομένες της υπερβολής C που διέρχονται από το σημείο $P(3,\ 5)$.

β) Η ευθεία $\zeta_1:\ y=\lambda x+\lambda-1$, με $\lambda\neq\pm\sqrt{3}$, και η υπερβολή C έχουν μοναδικό κοινό σημείο. Να αποδείξετε ότι:

i) $\lambda=2$,

ii) η ευθεία ζ_1 εφάπτεται στην υπερβολή C.

γ) Θεωρούμε την ευθεία $\zeta_2:\ \sqrt{3}\cdot x-y+\sqrt{3}=0$.

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ζ_2 και η υπερβολή C έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

ii) Να εξετάσετε αν η ευθεία ζ_2 εφάπτεται στην υπερβολή C.

11. Δίνεται η υπερβολή C που έχει εστίες $E'(-5,\ 0)$ και $E(5,\ 0)$ και εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C.

β) Να βρείτε τις εφαπτομένες της υπερβολής C των οποίων η απόσταση από την εστία E είναι ίση με 5.

γ) Έστω ζ η εφαπτομένη της υπερβολής C σε τυχαίο σημείο της Σ, διαφορετικό από τις κορυφές της. Αν η ζ τέμνει τον άξονα x′x στο K και η προβολή του Σ στον άξονα x′x είναι το Λ, να υπολογίσετε το γινόμενο $OK\cdot O\Lambda$.

12. Δίνεται η υπερβολή $C_1:\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ και η εξίσωση:

$$x^2+y^2+2y-1=0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Έστω C_2 ο κύκλος που παριστάνει η εξίσωση (1). Να βρείτε:

i) τις εφαπτομένες της υπερβολής C_1 που διέρχονται από το κέντρο του κύκλου C_2,

ii) τις κοινές εφαπτομένες των κωνικών τομών C_1 και C_2.

13. Δίνεται η υπερβολή:

$$C_1: \frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{\lambda^2 + 20} = 1$$

της οποίας οι εστίες είναι:

$$E'(-2\sqrt{13}, 0) \quad \text{και} \quad E(2\sqrt{13}, 0)$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda^2 = 16$.

β) Να βρείτε τις κορυφές και τις ασύμπτωτες της υπερβολής C_1.

γ) Θεωρούμε υπερβολή C_2 της οποίας οι εστίες είναι σημεία του άξονα x′x, συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Αν η C_2 διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{10}{3}, 4\right)$ και έχει την ίδια εκκεντρότητα με τη C_1, να βρείτε:

i) την εξίσωση της υπερβολής C_2,

ii) την εφαπτομένη ε της υπερβολής C_2 στο M,

iii) τις εφαπτομένες της υπερβολής C_1 που είναι παράλληλες στην παραπάνω εφαπτομένη ε.

Γ. Γεωμετρικοί τόποι

14. Δίνονται τα σημεία $M(x, y)$, $E'(-5, 0)$ και $E(5, 0)$ για τα οποία ισχύουν:

$$|\overrightarrow{OM}|^2 - |\overrightarrow{ME'}||\overrightarrow{ME}| = 7$$

όπου O η αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι:

α) το σημείο M κινείται σε υπερβολή C, της οποίας να βρείτε την εξίσωση,

β) το σημείο $K\left(2t + \frac{2}{t}, \frac{3t}{2} - \frac{3}{2t}\right)$, με $t \in \mathbb{R}^*$, ανήκει στην παραπάνω υπερβολή.

15. Να αποδείξετε ότι καθώς το θ μεταβάλλεται, με $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, το σημείο $M\left(\frac{5}{\sigma\upsilon\nu\theta}, 7\varepsilon\varphi\theta\right)$ ανήκει σε υπερβολή, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

16. Δίνεται ο κύκλος:

$$C_1: (x-3)^2 + y^2 = 4$$

και το σημείο $\Lambda(-3, 0)$. Να αποδείξετε ότι:

α) το σημείο Λ είναι εξωτερικό του κύκλου C_1,

β) τα κέντρα M των κύκλων που διέρχονται από το σημείο Λ και εφάπτονται εξωτερικά στον κύκλο C_1 ανήκουν σε κλάδο υπερβολής, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Δ. Θεωρητικές ασκήσεις

17. Θεωρούμε την ισοσκελή υπερβολή:

$$C: x^2 - y^2 = \alpha^2$$

και τα σημεία της $K(x_1, y_1)$ και $\Lambda(x_1, -y_1)$. Έστω επίσης ε η εφαπτομένη της C στο K.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ΟΛ είναι κάθετες, όπου O η αρχή των αξόνων.

β) Αν οι ευθείες ε και ΟΛ τέμνονται στο M, να αποδείξετε ότι $O\Lambda \cdot OM = \alpha^2$.

18. Δίνεται η έλλειψη:

$$C: \beta^2x^2 + \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$$

και η υπερβολή:

$$C_1: \frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta} = \alpha - \beta \quad \text{με } \alpha > \beta > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι οι C και C_1 έχουν τις ίδιες εστίες.

β) Αν ε και ε_1 είναι οι εκκεντρότητες των C και C_1 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\varepsilon^2 = \varepsilon_1^2(2 - \varepsilon_1^2)$.

γ) Αν $M(x_1, y_1)$ κοινό σημείο των C και C_1, να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C και C_1 στο M είναι κάθετες.

Ε. Συνδυαστικά θέματα

19. **α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της υπερβολής που τέμνει τον άξονα x′x στα σημεία $A'(-2, 0)$ και $A(2, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(2\sqrt{5}, 2)$ είναι η:

$$C_1: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2 με διάμετρο το τμήμα A′A.

γ) Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές κοινές εφαπτομένες της υπερβολής C_1 και του κύκλου C_2 είναι οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: x = -2 \text{ και } \varepsilon_2: x = 2$$

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

20. Δίνεται υπερβολή C_1 της οποίας οι εστίες είναι σημεία του άξονα y′y, συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Επίσης η υπερβολή C_1 διέρχεται από τα σημεία $M(-3, 2)$ και $N(12, 7)$.

α) Να βρείτε:

i) την εξίσωση της υπερβολής C_1,

ii) τις εστίες και την εκκεντρότητα της υπερβολής C_1,

iii) τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{AN}$, αν A είναι η κορυφή της υπερβολής C_1 με θετική τεταγμένη,

iv) την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες της υπερβολής C_1.

β) Θεωρούμε ισοσκελή υπερβολή C_2 που έχει τις ίδιες εστίες με τη C_1.

i) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C_2.

ii) Έστω P τυχαίο σημείο της C_2, διαφορετικό από τις κορυφές της, ε η εφαπτομένη της C_2 στο P και ζ η ευθεία που είναι κάθετη στην ε στο σημείο P. Αν η ε τέμνει τον άξονα x′x στο Λ και η ζ τέμνει τους άξονες x′x και y′y στα Σ και T αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΛΣT είναι ισοσκελές με βάση ΣT.

21. Δίνεται η παραβολή $C_1: y^2 = -8x$ και η υπερβολή C_2 με εστίες $E'(-8, 0)$ και $E(8, 0)$ και κορυφές $A'(-4, 0)$ και $A(4, 0)$.

α) Να βρείτε την εστία E_1 και τη διευθετούσα δ της παραβολής C_1.

β) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C_2.

γ) Να βρείτε τις εφαπτομένες της υπερβολής C_2 που

είναι παράλληλες στο διάνυσμα:

$$\vec{v} = (3, -6)$$

δ) Έστω ε η εφαπτομένη της υπερβολής C_2 στο σημείο της $M(8, 12)$ και Κ το σημείο τομής της ευθείας ΟΜ με τη διευθετούσα δ της C_1. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ΚΕ είναι κάθετες.

ε) Έστω ζ η εφαπτομένη της παραβολής C_1 στο σημείο της με τεταγμένη -12. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της εφαπτομένης ζ,

ii) την οξεία γωνία που σχηματίζουν η εφαπτομένη ζ και η εφαπτομένη ε της C_2 στο $M(8, 12)$.

22. Δίνεται υπερβολή:

$$C_1: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

με $0 < \alpha < \beta$, της οποίας οι ασύμπτωτες σχηματίζουν οξεία γωνία ίση με $60°$.

α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή C_1 έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = 2$.

β) Έστω επίσης ότι η υπερβολή C_1 έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη:

$$C_2: \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

i) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C_1.

ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των κωνικών τομών C_1 και C_2.

iii) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_1 και C_2 στο κοινό τους σημείο του 1ου τεταρτημορίου είναι κάθετες.

iv) Να βρείτε τις εφαπτομένες της υπερβολής C_1 που διέρχονται από το σημείο $P(-2, 6)$.

v) Έστω ζ_1 η εφαπτομένη της έλλειψης C_2 στο $N(-4, 6)$ και ζ_2 η εφαπτομένη της υπερβολής C_1 στο $M(-4, -6)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ζ_1 και ζ_2.

23. Δίνεται η υπερβολή $C_1: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ και ο κύκλος $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 4y - 5 = 0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_2.

β) Να βρείτε τις εφαπτομένες της υπερβολής C_1 που διέρχονται από το κέντρο του κύκλου C_2.

γ) Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου C_2 στο σημείο του $\Gamma(4, -1)$. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ε,

ii) τις εφαπτομένες της υπερβολής C_1 που είναι κάθετες στην ε.

δ) Έστω ζ_1 η εφαπτομένη της υπερβολής C_1 σε σημείο της Μ, διαφορετικό από τις κορυφές της, και ζ_2 η ευθεία που είναι κάθετη στη ζ_1 στο σημείο Μ. Αν η ευθεία ζ_2 τέμνει τους άξονες x′x και y′y στα σημεία Σ και Τ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι καθώς το Μ κινείται στην υπερβολή C_1, το μέσο Ν του ΣΤ κινείται σε άλλη υπερβολή, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

24. Δίνεται υπερβολή C με εστίες $E'(0, -5)$ και $E(0, 5)$, η οποία διέρχεται από το σημείο $K(-3, 4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C και την εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της C στο Κ.

β) Έστω Λ σημείο της C, διαφορετικό του Κ, και τέτοιο, ώστε τα σημεία Κ, Ε και Λ να είναι συνευθειακά. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Λ και την εξίσωση της εφαπτομένης ε_2 της C στο Λ.

γ) Να βρείτε την απόσταση της εστίας Ε′ από την παραπάνω εφαπτομένη ε_2 της C στο Λ.

δ) Έστω Μ το σημείο τομής των προηγούμενων εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της C στα Κ και Λ αντίστοιχα. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου Μ,

ii) τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{K\Lambda}$ και $\overrightarrow{KM}$.

ε) Έστω $P(x_2, y_2)$ σημείο του κλάδου της υπερβολής C που βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x. Θεωρούμε επίσης την ευθεία $\zeta: y = \frac{x}{2}$.

i) Να αποδείξετε ότι $x_2 < 2y_2$.

ii) Να αποδείξετε ότι $d(P, \zeta) \geq \sqrt{5}$.

iii) Να βρείτε το σημείο Ρ του κλάδου της υπερβολής C που βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x, το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από την ευθεία ζ.

15ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 3.5 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $Ax^2+By^2+Γx+Δy+E=0$**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σε σύστημα Oxy θεωρούμε τον κύκλο C: $(x+3)^2+(y-4)^2=25$ και το σημείο $A(1,-2)$. Θεωρούμε νέο σύστημα συντεταγμένων $O'XY$, που προκύπτει με παράλληλη μεταφορά των αξόνων του συστήματος Oxy, ώστε το O' να είναι το κέντρο του κύκλου C. Στο νέο σύστημα αξόνων $O'XY$, να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του σημείου A,

β) την εξίσωση του κύκλου C.

2. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $y^2+8x-4y+12=0$ παριστάνει παραβολή, της οποίας να βρείτε την κορυφή, την εστία και τη διευθετούσα,

β) η εξίσωση $5x^2+9y^2-20x+54y+56=0$ παριστάνει έλλειψη, της οποίας να βρείτε το κέντρο, τις εστίες και τις κορυφές,

γ) η εξίσωση $3x^2-y^2+12x+8y-7=0$ παριστάνει υπερβολή, της οποίας να βρείτε το κέντρο, τις εστίες και τις κορυφές.

3. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2+2y^2-8x+8y+18=0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C που παριστάνει η εξίσωση (1) στο σημείο της $K(2,-1)$.

4. Να βρείτε τον αριθμό λ, ώστε η ευθεία ε: $x-y+\lambda=0$ να εφάπτεται στην παραβολή:

$$C: y^2-4x-2y-7=0$$

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν παραβολές, των οποίων να βρείτε τις κορυφές, τις εστίες και τις διευθετούσες.

α) $y^2 - 4x - 6y - 11 = 0$

β) $x^2 - 2x - 8y - 15 = 0$

γ) $y^2 + 12x + 2y - 23 = 0$

2. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν ελλείψεις, των οποίων να βρείτε το κέντρο, τις εστίες και τις κορυφές.

α) $3x^2 + 4y^2 - 18x + 8y + 19 = 0$

β) $2x^2 + y^2 + 16x - 4y + 28 = 0$

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν υπερβολές, των οποίων να βρείτε το κέντρο, τις εστίες και τις κορυφές.

α) $3x^2 - y^2 - 18x - 2y + 14 = 0$

β) $4x^2 - 5y^2 + 32x + 20y + 124 = 0$

4. Δίνεται η εξίσωση:

$$y^2 - 8x - 2y - 23 = 0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει παραβολή, της οποίας να βρείτε την κορυφή, την εστία και τη διευθετούσα.

β) Να βρείτε τον αριθμό β, ώστε η ευθεία:

$$\varepsilon: x - y + \beta = 0$$

να εφάπτεται στην παραβολή C που παριστάνει η εξίσωση (1).

5. Δίνεται η εξίσωση:

$$4x^2 + 3y^2 - 24x + 6y - 9 = 0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη, της οποίας να βρείτε το κέντρο, τις εστίες και τις κορυφές.

β) Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης C που παριστάνει η εξίσωση (1), οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία:

$$\zeta: 10x + 5y - 2017 = 0$$

6. Δίνεται η εξίσωση:

$$y^2 - 8x + 4y + 28 = 0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει παραβολή, της οποίας να βρείτε την κορυφή, την εστία και τη διευθετούσα.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής C που παριστάνει η εξίσωση (1) στο σημείο της M(5, 2).

7. Δίνονται οι παραβολές:

$$C_1: y = x^2 - x + 2 \quad \text{και} \quad C_2: y = x^2$$

α) Να βρείτε τα κοινά τους σημεία.

β) Να βρείτε τη συνθήκη, ώστε η ευθεία:

$$\varepsilon: y = \lambda x + \beta$$

να είναι εφαπτόμενη στην παραβολή C_1.

γ) Να βρείτε τη συνθήκη, ώστε η ευθεία:

$$\varepsilon: y = \lambda x + \beta$$

να είναι εφαπτόμενη στην παραβολή C_2.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία εφάπτεται συγχρόνως στις δύο παραβολές. Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία επαφής της κοινής εφαπτομένης με τις C_1 και C_2, να βρείτε τις συντεταγμένες τους.

8. α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία:

$$\varepsilon: y = \lambda x + \kappa \quad \text{με } \lambda \neq 0$$

εφάπτεται στην έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, αν και μόνο αν:

$$\beta^2 + \lambda^2\alpha^2 = \kappa^2$$

β) Δίνεται η εξίσωση:

$$5x^2 + 9y^2 - 10x + 36y - 4 = 0 \qquad (1)$$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη, της οποίας να βρείτε το κέντρο, τις εστίες και τις κορυφές.

ii) Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης C_1, που παριστάνει η εξίσωση (1), οι οποίες διέρχονται από το σημείο M(4, 1).

16^{ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ : **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 3^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

.1 Δίνεται ο κύκλος C_1 με διάμετρο AB, όπου $A(-2, -4)$ και $B(2, 4)$, και ο κύκλος:

$$C_2: x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$$

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1.

β) Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ του κύκλου C_2.

γ) Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι C_1 και C_2 τέμνονται σε δύο σημεία Γ και Δ, όπου το τμήμα ΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου C_2.

δ) Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτομένες των κύκλων C_1 και C_2 στο κοινό τους σημείο του 1ου τεταρτημορίου.

ε) Θεωρούμε σημείο P τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{KP} = 3\overrightarrow{KO}$, όπου O η αρχή των αξόνων και K το κέντρο του κύκλου C_2. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου P,

ii) τις εφαπτομένες του κύκλου C_1 που διέρχονται από το σημείο P.

.2 α) Δίνεται η εξίσωση:

$$(x - 1)(x - 3) + (y - 3)(y - 5) = 0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

β) Σε τοπογραφικό σχεδιάγραμμα, με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, τα σημεία $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $\Gamma(3, 5)$ και $\Delta(1, 5)$ παριστάνουν τις θέσεις τεσσάρων δήμων. Να αποδείξετε ότι μπορεί να χαραχθεί περιφερειακός κυκλικός δρόμος που να διέρχεται από τους τέσσερις δήμους.

γ) Αν θεωρήσουμε ότι στο ίδιο σύστημα αξόνων του ερωτήματος (β), οι συντεταγμένες ενός αυτοκινήτου K για κάθε χρονική στιγμή t (με $t > 0$) είναι $(t, t + 2)$, να βρείτε αν η γραμμή στην οποία κινείται το αυτοκίνητο K συναντά τον κυκλικό περιφερειακό δρόμο και αν ναι, σε ποια σημεία.

.3 Δίνεται η παραβολή $C_1: y^2 = 3x$ και ο κύκλος $C_2: x^2 + y^2 = 4$.

α) Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες της παραβολής C_1 και του κύκλου C_2.

β) Έστω A και B τα σημεία τομής των C_1 και C_2. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες των σημείων A και B,

ii) τις εφαπτομένες ε_1 και ε_2 του κύκλου C_2 στα σημεία του A και B,

iii) την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι παραπάνω εφαπτομένες ε_1 και ε_2.

.4 Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = \alpha x$ διέρχεται από το σημείο $A(2, 4)$, όπου $\alpha \in \mathbf{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(2, 0)$.

β) Έστω E′ το συμμετρικό της εστίας E ως προς τον άξονα y′y. Αν $M(x, y)$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο για το οποίο ισχύει:

$$\overrightarrow{ME}^2 = \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{E'E}$$

να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ και ακτίνα 2.

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του παραπάνω κύκλου που διέρχονται από το σημείο A.

.5 Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από τα σημεία $A(0, 2)$, $B(-2, 4)$ και $\Gamma(0, 6)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$C: x^2 + (y - 4)^2 = 4$$

β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του κύκλου C.

γ) Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτομένες του ερωτήματος (β), να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2.

(Τράπεζα Θεμάτων - 4ο θέμα)

.6 Δίνεται η παραβολή $C_1: y^2 = 2px$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(9, -6)$.

α) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής C_1.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη ε_1 της C_1 στο σημείο της A.

γ) Θεωρούμε σημείο B της παραβολής C_1, που βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο, για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BO} = 28$,

όπου Ο η αρχή των αξόνων. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου Β,

ii) την εφαπτομένη ε_2 της παραβολής C_1 στο σημείο της Β,

iii) την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτομένες ε_1 και ε_2 της C_1 στα σημεία της Α και Β αντίστοιχα.

δ) Δίνεται και ο κύκλος C_2, με κέντρο $K(-1, 4)$, ο οποίος εφάπτεται στην εφαπτομένη ε_1 της παραβολής C_1 στο Α.

i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2.

ii) Αν Δ είναι το σημείο επαφής της εφαπτομένης ε_1 με τον κύκλο C_2, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΔ.

iii) Να αποδείξετε ότι η παραβολή C_1, ο κύκλος C_2 και η ευθεία ζ: $y = -2$ διέρχονται από το ίδιο σημείο Γ, το οποίο και να βρείτε.

iv) Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου C_2 στο παραπάνω σημείο Γ.

.7 Δίνονται τα σημεία $A(2, 2)$, $B(5, 0)$, $\Gamma(3, -6)$ και $O(0, 0)$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.

β) Θεωρούμε σημείο Δ για το οποίο ισχύει:

$$\overrightarrow{O\Delta} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$$

και έλλειψη C με εστίες $E'(0, -\sqrt{3})$ και $E(0, \sqrt{3})$, η οποία διέρχεται από το σημείο Δ. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου Δ,

ii) την εξίσωση και την εκκεντρότητα της έλλειψης C,

iii) την εφαπτομένη της έλλειψης C στο σημείο της Δ,

iv) τις εφαπτομένες της έλλειψης C που διέρχονται από το σημείο $A(2, 2)$.

.8 Θεωρούμε τα σημεία $E'(-2, 0)$ και $E(2, 0)$ και έστω C ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$ME' + ME = 8$$

α) Να αποδείξετε ότι η C είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

β) Δίνεται το σημείο $\Lambda(2, 3)$.

i) Να αποδείξετε ότι το σημείο Λ ανήκει στην έλλειψη C και να βρείτε την εφαπτομένη της C στο Λ.

ii) Να βρείτε την ευθεία που διχοτομεί τη γωνία $\widehat{E'\Lambda E}$.

γ) Δίνεται σημείο $P(\mu, \mu + 6)$, με $\mu \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $|\overrightarrow{E'P}| = 2\sqrt{2}$. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου Ρ,

ii) τις εφαπτομένες της έλλειψης C που διέρχονται από το σημείο Ρ.

δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο $\Sigma(4\sigma\upsilon\nu\theta, 2\sqrt{3} \cdot \eta\mu\theta)$ ανήκει στην έλλειψη C.

ε) Έστω ζ η εφαπτομένη της C στο $\Sigma(4\sigma\upsilon\nu\theta, 2\sqrt{3} \cdot \eta\mu\theta)$ με $\eta\mu\theta \neq 0$. Αν η ζ τέμνει τον άξονα y′y στο Ν, τότε:

i) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΝΕ′Ε είναι ίσο με $\frac{4\sqrt{3}}{|\eta\mu\theta|}$,

ii) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Σ, ώστε το τρίγωνο ΝΕ′Ε να έχει ελάχιστο εμβαδόν.

.9 Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 9$.

α) Αν το σημείο $P(x_0, y_0)$ ανήκει στον παραπάνω κύκλο, να αποδείξετε ότι το σημείο:

$$M\left(\frac{5}{3}x_0, \frac{4}{3}y_0\right)$$

ανήκει σε έλλειψη, της οποίας να υπολογίσετε την εκκεντρότητα.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την παραπάνω έλλειψη.

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής του ερωτήματος (β), καθώς και τη γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες.

.10 Δίνεται η εξίσωση:

$$\frac{x^2}{20 - \lambda} + \frac{y^2}{2 - \lambda} = 1 \qquad (1)$$

η οποία παριστάνει υπερβολή με τις εστίες στον άξονα x′x.

α) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο πραγματικός αριθμός λ.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι υπερβολές που παριστάνει η εξίσωση (1), για τις παραπάνω τιμές του λ, έχουν τις ίδιες εστίες.

γ) Έστω C η ισοσκελής υπερβολή που παριστάνει η εξίσωση (1). Να βρείτε:

i) τον αριθμό λ,

ii) τις εφαπτομένες της υπερβολής C που διέρχονται από το σημείο $P(-3, -6)$.

.11 Θεωρούμε τα σημεία $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$ και έστω C_1 ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$|ME' - ME| = 2$$

α) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής C_1.

β) Να βρείτε τις εφαπτομένες της γραμμής C_1 που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\vec{v} = (2, -6)$.

γ) Θεωρούμε τον κύκλο:

$$C_2: x^2 + y^2 + 2x + 8y + 7 = 0$$

και έστω Κ το κέντρο του.

i) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_2.

ii) Να βρείτε τις εφαπτομένες της γραμμής C_1 που διέρχονται από το κέντρο του κύκλου C_2.

iii) Να αποδείξετε ότι το σημείο $\Delta(2, -5)$ ανήκει στον κύκλο C_2 και να βρείτε την εφαπτομένη του C_2 στο Δ.

iv) Να βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\overrightarrow{KE'}, \overrightarrow{K\Delta}}\right)$, όπου $\Delta(2, -5)$.

.12 Δίνεται η υπερβολή C_1 με εστίες:

$$E'(-4, 0) \quad \text{και} \quad E(4, 0)$$

η οποία διέρχεται από το σημείο $M(4, 6)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C_1.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της υπερβολής C_1, καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθεμία από αυτές με τον άξονα x′x.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της C_1 στο σημείο της Μ.

δ) Θεωρούμε τον κύκλο C_2, με κέντρο $K(-1, 1)$, ο οποίος διέρχεται από την κορυφή Α της υπερβολής C_1 με θετική τετμημένη.

i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2.

ii) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C_2 διέρχεται από την εστία E' της C_1 και να βρείτε την εφαπτομένη ε_2 του C_2 στο E'.

iii) Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτομένες ε_1 (της C_1 στο Μ) και ε_2 (του C_2 στο E').

ε) Αν το σημείο $P(3\lambda - 8, -\lambda)$ ανήκει στον παραπάνω κύκλο C_2, να βρείτε:

i) τον αριθμό λ,

ii) τις εφαπτομένες της υπερβολής C_1 που διέρχονται από το σημείο Ρ.

.13 Δίνονται οι κύκλοι:

$$C_1: x^2 + (y - 2)^2 = 4 \quad \text{και} \quad C_2: (x - 3)^2 + y^2 = 9$$

με κέντρα K_1 και K_2 αντίστοιχα και ακτίνες ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα. Έστω επίσης Α το σημείο τομής του C_1 με τον άξονα y′y, Β το σημείο τομής του C_2 με τον άξονα x′x και Γ το σημείο τομής των C_1 και C_2, όπου Α, Β και Γ σημεία διαφορετικά από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη του C_1 στο $O(0, 0)$ και την εφαπτομένη του C_2 στο $O(0, 0)$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β και Γ και να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $K_1\Gamma$ εφάπτεται στον κύκλο C_2.

δ) Θεωρούμε τα σημεία Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MO}^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι κύκλος C_3, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα,

ii) ο παραπάνω κύκλος C_3 είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τετραπλεύρου $OK_1\Gamma K_2$.

.14 Δίνεται κύκλος C που διέρχεται από τα σημεία $A(4, 2)$ και $B(-2, -4)$ και η εφαπτομένη ε του C στο Α έχει εξίσωση:

$$\alpha x + (\alpha - 1)y - 10 = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C.

γ) Έστω $M(\kappa, \lambda)$ σημείο του κύκλου C. Να αποδείξετε ότι:

i) $|\kappa\lambda| \leq 10$ **ii)** $\frac{1}{\kappa^2} + \frac{1}{\lambda^2} \geq \frac{1}{5}$

.15 Δίνεται κύκλος C_1 με κέντρο $K(14, 10)$ ο οποίος ορίζει πάνω στην ευθεία $\zeta: x + 2y - 24 = 0$ χορδή μήκους $8\sqrt{5}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1.

β) Θεωρούμε κύκλο C_2 ο οποίος διέρχεται από το σημείο $A(2, 6)$ και εφάπτεται εξωτερικά στον κύκλο C_1 στο σημείο $B(6, 4)$.

i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2.

ii) Έστω ε η κοινή εφαπτομένη των κύκλων C_1 και C_2 στο κοινό τους σημείο. Αν είναι $\Gamma(0, -6)$ και $\Delta(8, 0)$ και Μ είναι τυχαίο σημείο της ε, να βρείτε την τιμή της παράστασης $M\Gamma^2 - M\Delta^2$.

iii) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C_2 που είναι παράλληλες στην ευθεία ΚΒ.

.16 Δίνονται τα σημεία Α(8, 6) και Μ(x, y) για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{OM}^2 + \lambda \cdot \det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}\right) = 25(1 - \lambda^2) \quad (1)$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και Ο η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι κύκλος C, του οποίου η ακτίνα είναι ανεξάρτητη του λ.

β) Έστω ότι το κέντρο Κ του προηγούμενου κύκλου C ανήκει στην ευθεία ζ: $2x + y + 4 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\widehat{KOA} = 90°$.

iii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β(− 6, 3), Γ(− 1, 8) και Δ(− 2, 11) ανήκουν στον κύκλο C και να βρείτε τις εφαπτομένες του C στα σημεία αυτά.

iv) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ΟΒ και ΓΔ και στη συνέχεια την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές.

.17 Δίνεται κύκλος C που διέρχεται από το σημείο Α(5, 6) και εφάπτεται στον άξονα y′y στο σημείο Β(0, 1).

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ.

γ) Δίνονται τα σημεία Γ(9, 14) και Δ(12, 5). Επίσης θεωρούμε σημείο Ρ της ευθείας ΑΒ και τυχαίο σημείο Σ για τα οποία ισχύει:

$$(\lambda - 2)\overrightarrow{\Sigma P} + (\kappa - 3)\overrightarrow{\Sigma\Gamma} - (\lambda + \kappa - 5)\overrightarrow{\Sigma\Delta} = \overrightarrow{0}$$

με $\kappa \neq 3$ και $\lambda \neq 2$.

i) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του Ρ είναι (10, 11).

ii) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο Ρ.

.18 Δίνεται ο κύκλος C_1 που έχει διάμετρο ΟΣ, όπου Σ(−4, 2) και Ο η αρχή των αξόνων.

α) Να βρείτε:

i) την εξίσωση του κύκλου C_1,

ii) την εφαπτομένη ε_1 του κύκλου C_1 στο Σ,

iii) τις εφαπτομένες του κύκλου C_1 που είναι κάθετες στην παραπάνω ευθεία ε_1.

β) Θεωρούμε τον κύκλο C_2 που εφάπτεται εξωτερικά στον κύκλο C_1 στο Ο(0, 0) και είναι ίσος με τον C_1.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του C_2 είναι:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$$

ii) Θεωρούμε χορδή ΟΑ του κύκλου C_1, η οποία δεν είναι οριζόντια ούτε κατακόρυφη, και χορδή ΟΒ του κύκλου C_2, η οποία είναι κάθετη στην ΟΑ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων C_1 και C_2.

.19 Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + (\alpha + 4)y + 2 = 0 \quad (1)$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

β) Έστω ότι ισχύει $\alpha < -2$. Μια ευθεία ζ_1 διέρχεται από το κέντρο του κύκλου C, που έχει εξίσωση την (1), σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x′x και τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α και Β έτσι, ώστε το τρίγωνο ΑΟΒ να έχει εμβαδόν 8 τ.μ. (όπου Ο η αρχή των αξόνων).

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$.

ii) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο Ρ(3, 5).

γ) Έστω C ο κύκλος που έχει εξίσωση την (1) για $\alpha = -6$. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$\mu(x - y - 3) + x + 2y = 0 \quad (2)$$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία ζ_2 για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω ευθεία ζ_2 τέμνει τον κύκλο C για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

iii) Να βρείτε για ποια τιμή του μ η παραπάνω ευθεία ζ_2 τέμνει τον κύκλο C σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία.

.20 Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda - 2)y + \lambda + 1 = 0 \quad (1)$$

α) Να εξετάσετε τι παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Έστω ότι $\lambda < 0$ και η ευθεία ε: $y = -1$ εφάπτεται στον κύκλο C που έχει εξίσωση την (1). Θεωρούμε και το σημείο Α(3, 1).

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -4$.

ii) Να αποδείξετε ότι το Α είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου C.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και ορίζει στον κύκλο C χορδή μέγιστου μήκους.

iv) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και ορίζει στον κύκλο C χορδή ελάχιστου μήκους.