8ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ : **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **§ 10.1 – 10.3 ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΑ ΧΩΡΙΑ – ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ**

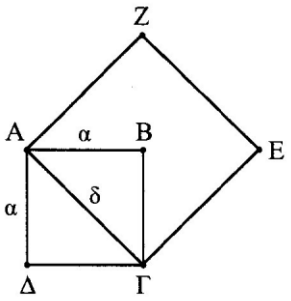
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Εμβαδόν τετραγώνου

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με περίμετρο 12 cm. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου:

α) ΑΒΓΔ β) ΑΓΕΖ



2. Εμβαδόν ορθογωνίου

Σε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι $ΑΔ = 6$ και $ΑΓ = 10$. Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.

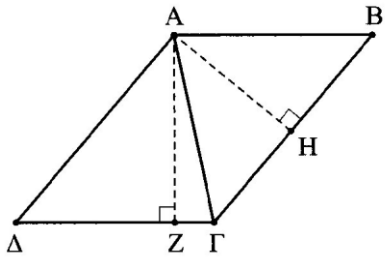
3. Εμβαδόν παραλληλογράμμου

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με περίμετρο 18 cm, και τα ύψη του ΑΖ και ΑΗ. Αν ισχύει ότι $ΑΓ = \sqrt{17}$ και $ΑΖ = 4$, να υπολογίσετε:

α) τις πλευρές ΑΔ και ΓΔ,

β) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ,

γ) το ύψος ΑΗ.

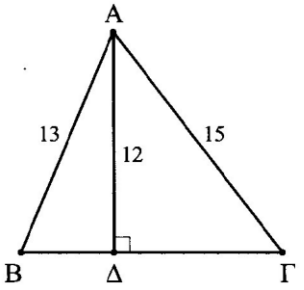


4. Εμβαδόν τριγώνου

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $β = 15$, $γ = 13$ και $υ_α = 12$. Να υπολογίσετε:

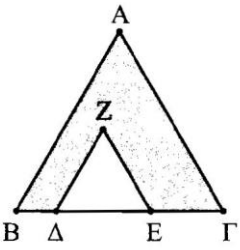
α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ,

β) τα ύψη $υ_β$ και $υ_γ$ του τριγώνου ΑΒΓ.



5. Εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α και στο εσωτερικό του κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΔΕΖ πλευράς $\frac{α}{2}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου είναι $3\sqrt{3}$, να βρείτε την πλευρά α.



6. Εμβαδόν τραπεζίου

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, με βάσεις $\mathrm{AB}=2$ και $\Gamma\Delta=8$, και μη παράλληλες πλευρές $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{B}\Gamma=5$. Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.

7. Εμβαδόν τετραπλεύρου με κάθετες διαγωνίους

Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ, με εμβαδόν 24 τ.μ., στον οποίο ισχύει $\mathrm{A}\Gamma=\mathrm{B}\Delta+2$. Να βρείτε:

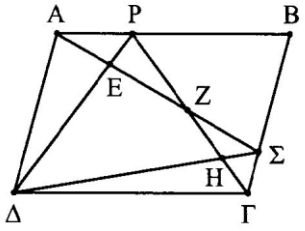
α) τα μήκη των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ,

β) το ύψος του ρόμβου.

8. Αποδεικτική άσκηση

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ρ, Σ τυχαία σημεία των πλευρών ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα. Αν Ε και Ζ είναι τα σημεία τομής της ΣΑ με τις ΡΔ και ΡΓ αντίστοιχα και Η είναι το σημείο τομής των ΡΓ και ΣΔ, να αποδείξετε ότι:

$$(\mathrm{EA}\Delta)+(\Sigma\mathrm{ZH})=(\mathrm{PEZ})+(\mathrm{H}\Delta\Gamma)$$



9. Εμβαδόν τριγώνου και διάμεσος

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΑΜ και ΓΝ, οι οποίες τέμνονται στο Θ.

α) Να αποδείξετε ότι $(\mathrm{AMN})=(\Gamma\mathrm{MN})$.

β) Να αποδείξετε ότι $(\mathrm{A}\Theta\mathrm{N})=(\Gamma\Theta\mathrm{M})$.

γ) Αν Κ είναι το μέσο του ΜΓ, να αποδείξετε ότι $(\mathrm{ANMK})=\dfrac{(\mathrm{AB}\Gamma)}{2}$.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Υπολογιστικές ασκήσεις

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\widehat{A} = 90°$, στο οποίο ισχύουν $(ΑΒΓ) = 600$, $ΑΒ = 40$ και έστω ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Να βρείτε:

α) το μήκος της πλευράς ΑΓ,

β) το μήκος του ύψους ΑΔ,

γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΓ.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με:

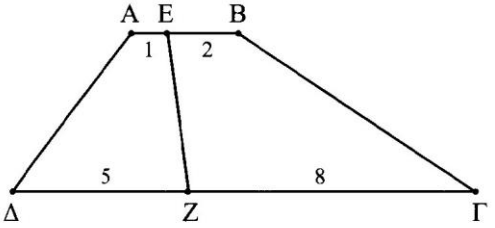
$$ΑΒ = 6, \quad ΑΓ = 3\sqrt{3} \quad \text{και} \quad ΒΓ = 3\sqrt{7}$$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β) Να βρείτε την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου που είναι ισοδύναμο με το ΑΒΓ.

3. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 18 και διαγώνιο ίση με 7. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

4. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, με βάσεις $ΑΒ = 3$ και $ΓΔ = 13$. Θεωρούμε σημεία Ε και Ζ των βάσεων ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, ώστε $ΑΕ = 1$ και $ΔΖ = 5$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

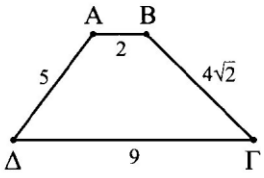


Αν ισχύει ότι $(ΕΒΓΖ) = (ΑΕΖΔ) + 6$, να βρείτε:

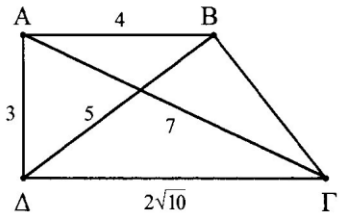
α) το ύψος του τραπεζίου ΑΒΓΔ,

β) το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

5. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, με βάσεις $ΑΒ = 2$, $ΓΔ = 9$ και μη παράλληλες πλευρές $ΑΔ = 5$ και $ΒΓ = 4\sqrt{2}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.



6. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $ΑΒ = 4$, $ΑΔ = 3$, $ΓΔ = 2\sqrt{10}$, $ΑΓ = 7$ και $ΒΔ = 5$.



α) Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο τραπέζιο.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.

7. Δίνεται ένα ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ // ΓΔ$, $ΑΒ < ΓΔ$, $\widehat{A} = \widehat{Δ} = 90°$, $ΑΒ = 4$, $ΑΔ = 3$ και $ΒΓ = 5$. Να υπολογίσετε:

α) την προβολή της ΒΓ πάνω στη ΔΓ,

β) το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ,

γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ.

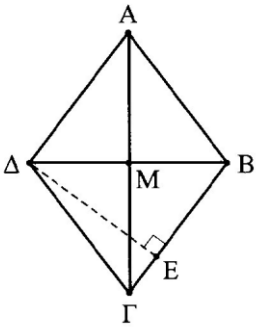
(Θέμα εξετάσεων)

8. Ο ρόμβος ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος έχει εμβαδόν $96\,cm^2$ και διαγώνιο $ΑΓ = 16\,cm$. Να υπολογίσετε το μήκος:

α) της διαγωνίου ΒΔ,

β) της πλευράς του ρόμβου,

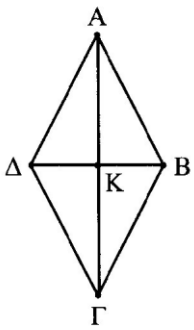
γ) του ύψους ΔΕ του ρόμβου.



9. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ πλευράς $\sqrt{5}$, με $ΑΓ > ΒΔ$. Αν η απόσταση δύο απέναντι πλευρών του ρόμβου είναι $\frac{4\sqrt{5}}{5}$, να βρείτε:

α) το εμβαδόν του ρόμβου,

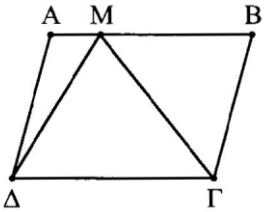
β) τα μήκη των διαγωνίων ΑΓ και ΔΒ.



10. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Μ της πλευράς ΑΒ.

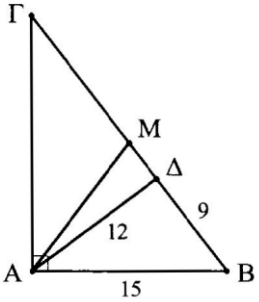
α) Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$(ΜΔΓ) = (ΑΜΔ) + (ΒΜΓ)$$



β) Να βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, όταν $(ΜΔΓ) = 8$ τ.μ. *(Θέμα εξετάσεων)*

11. Στο διπλανό σχήμα δίνονται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $ΑΒ = 15$, το μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ του τριγώνου και το σημείο Δ της ΒΓ, για το οποίο ισχύει $ΑΔ = 12$, $ΒΔ = 9$.



α) Να αποδείξετε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ.

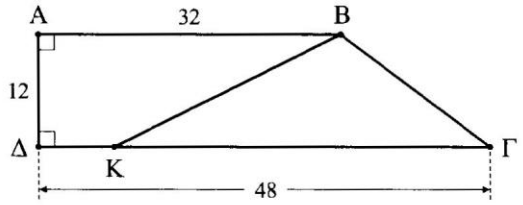
β) Να υπολογίσετε τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να υπολογίσετε την προβολή της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΔ. *(Θέμα εξετάσεων)*

12. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ, με $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90°$, $AB = 32$, $\Gamma\Delta = 48$ και $\Delta A = 12$.

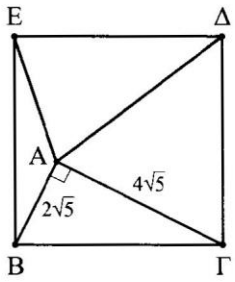
α) Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.

β) Να βρείτε την περίμετρο του ΑΒΓΔ.

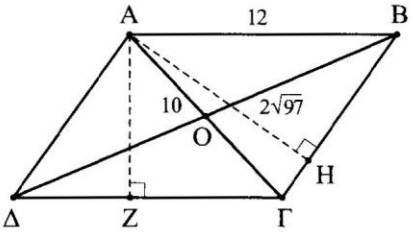


γ) Αν το ΒΚ χωρίζει το τραπέζιο ΑΒΓΔ σε δύο ισοδύναμα χωρία, να βρείτε το μήκος του ΔΚ.

13. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $AB = 2\sqrt{5}$ και $A\Gamma = 4\sqrt{5}$. Κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ, ΑΕΒ.



14. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα ύψη του ΑΖ και ΑΗ, στο οποίο ισχύουν $AB = 12$, $A\Gamma = 10$ και $B\Delta = 2\sqrt{97}$.



Να υπολογίσετε:

α) την πλευρά ΒΓ, **β)** το ύψος ΑΖ,

γ) το εμβαδόν του ΑΒΓΔ,

δ) το ύψος ΑΗ.

15. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, με διαγώνιο:

$$A\Gamma = 6\sqrt{2}$$

Θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς ΓΔ, ώστε $\Delta E = 2$ και έστω Ζ η προβολή του Ε πάνω στην ΑΓ.

α) Να βρείτε το (ΑΒΓΔ).

β) Να βρείτε το (ΑΕΓ).

γ) Να βρείτε το μήκος του ΕΖ.

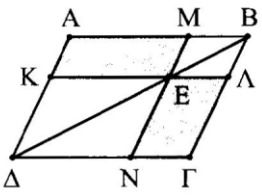
δ) Αν η προέκταση του ΕΖ τέμνει τη ΒΓ στο Η, να βρείτε το (ΑΒΗΕ).

Β. Αποδεικτικές ασκήσεις

16. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Μ και Ν τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$(B\text{M}\Delta\text{N}) = \frac{(A\text{B}\Gamma\Delta)}{2}$$

17. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε της διαγωνίου ΒΔ. Από το Ε φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του,



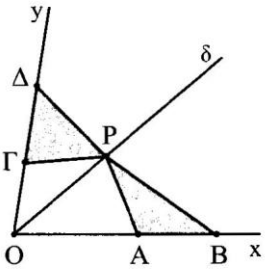
οι οποίες τέμνουν τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ στα σημεία Μ, Λ, Ν, Κ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι τα παραλληλόγραμμα ΑΜΕΚ και ΓΛΕΝ είναι ισοδύναμα.

18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ τυχαίο σημείο της διαμέσου του ΑΜ. Από το Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ και ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΑΓ στο Η. Να αποδείξετε ότι:

$$(B\text{M}\Delta\text{Z}) = (\Gamma\text{M}\Delta\text{H})$$

19. Δίνεται γωνία $\widehat{xOy}$ και τυχαίο σημείο Ρ της διχοτόμου της Οδ. Στις ημιευθείες Ox και Oy θεωρούμε τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

$$(P\text{AB}) = (P\Gamma\Delta)$$



20. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

$$(M\text{A}\Gamma) + (M\Delta\text{B}) = \frac{(A\text{B}\Gamma\Delta)}{2}$$

21. Ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ και ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΗ έχουν την ίδια περίμετρο. Να αποδείξετε ότι:

$$(A\text{B}\Gamma\Delta) = \frac{3\sqrt{3}}{4}(\text{EZH})$$

22. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Μ ένα εσωτερικό σημείο του. Να αποδείξετε ότι:

$$(M\text{AB}) + (M\Gamma\Delta) = (M\text{A}\Delta) + (M\text{B}\Gamma)$$

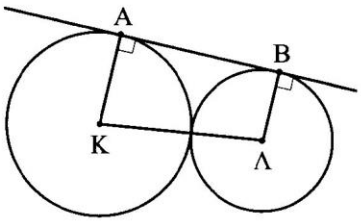
23. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, με βάσεις $AB < \Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε τη ΒΑ κατά τμήμα $AE = BA$ και τη ΔΒ κατά τμήμα $BZ = B\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$(A\text{B}\Gamma\Delta) = (\text{E}A\Delta) + (\text{BZ}\Gamma)$$

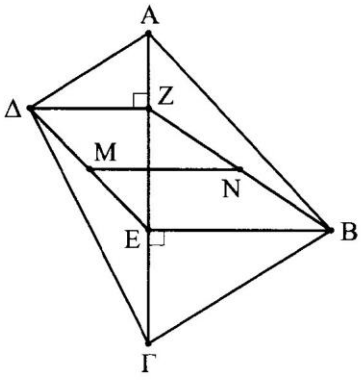
β) Αν η προέκταση της ΑΒ τέμνει τη ΖΓ στο Η, να αποδείξετε ότι $(\text{BZH}) = (\text{BH}\Gamma)$.

24. Στο επόμενο σχήμα οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ), με R > ρ, εφάπτονται εξωτερικά και ΑΒ είναι ένα κοινό εφαπτόμενο τμήμα. Να υπολογιστεί



το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΛΚ ως συνάρτηση των ακτίνων R και ρ των δύο κύκλων.

25. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Ε και Ζ οι προβολές των κορυφών Β και Δ αντίστοιχα πάνω στη διαγώνιο ΑΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

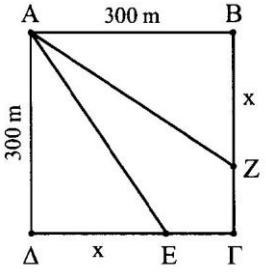


Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΔΕ και ΒΖ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$(ΑΒΓΔ) = ΑΓ \cdot ΜΝ$$

Γ. Προβλήματα

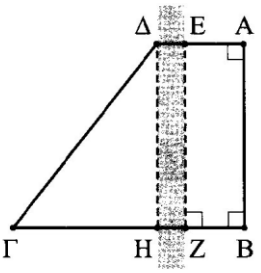
26. Τετραγωνικός αγρός με πλευρά 300 m χωρίζεται σε τρία ισεμβαδικά οικόπεδα, όπως στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε για κάθε οικόπεδο:



α) το εμβαδόν του,

β) την περίμετρό του.

27. Δύο αδέλφια κληρονόμησαν ένα οικόπεδο ΑΒΓΔ σχήματος ορθογώνιου τραπεζίου με βάσεις ΒΓ = 40 m, ΑΔ = 15 m και ύψος ΑΒ = 32 m. Κατά την ένταξη της περιοχής στο σχέδιο πόλεως, το οικόπεδο χωρίστηκε από έναν δρόμο πλάτους ΔΕ = ΗΖ = 5 m (χρωματισμένη περιοχή) σε δύο τμήματα ΑΒΖΕ και ΔΗΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο πρώτος αδελφός πήρε το οικόπεδο ΑΒΖΕ, ενώ ο δεύτερος το ΔΗΓ.

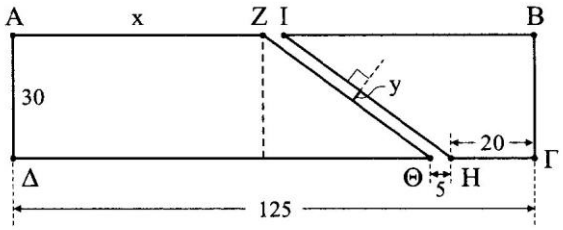


α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα δύο οικόπεδα.

β) Αν ο δεύτερος αδελφός θελήσει να ανταλλάξει το οικόπεδό του με ένα οικόπεδο σχήματος τετραγώνου, ποια θα πρέπει να είναι η πλευρά του, ώστε το εμβαδόν του οικοπέδου, που θα πάρει, να είναι ίσο με το εμβαδόν του οικοπέδου που κληρονόμησε; *(Θέμα εξετάσεων)*

28. Στο οικόπεδο ΑΒΓΔ, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, χαράχθηκε δρόμος ΘΖΙΗ, σχήματος (πλαγίου) παραλληλογράμμου, ο οποίος χωρίζει το οικόπεδο σε δύο τεμάχια ΑΖΘΔ και ΙΒΓΗ έτσι, ώστε το τεμάχιο ΑΖΘΔ να έχει εμβαδόν διπλάσιο από το εμβαδόν του ΙΒΓΗ, δηλαδή (ΑΖΘΔ) = 2(ΙΒΓΗ). Δίνονται ΑΔ = 30, ΔΓ = 125, ΘΗ = 5, ΗΓ = 20.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του δρόμου ΘΖΙΗ.

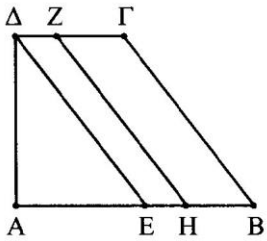


β) Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΑΖ.

γ) Να υπολογίσετε το πλάτος y του δρόμου.

(Θέμα εξετάσεων)

29. Το οικόπεδο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος έχει την πλευρά ΑΒ ίση με 55 m, την πλευρά ΓΔ ίση με 25 m, την πλευρά ΑΔ ίση με 40 m και τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ ορθές. Πρέπει να χαραχθεί ένας δρόμος ΔΕΗΖ, με ΔΕ//ΓΒ και ΖΗ//ΓΒ , ο οποίος θα χωρίσει το οικόπεδο σε δύο τεμάχια ΑΕΔ και ΖΗΒΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να βρεθεί το εμβαδόν του οικοπέδου ΑΒΓΔ.

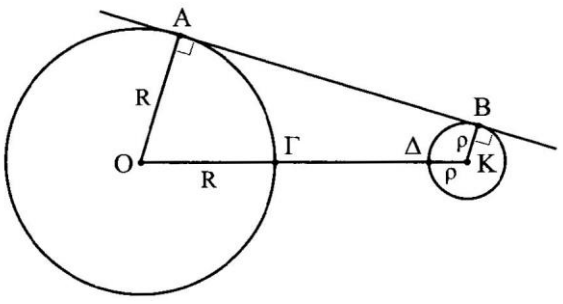
β) Να βρεθεί το εμβαδόν του τεμαχίου ΑΕΔ.

γ) Να βρεθεί το ΔΖ έτσι, ώστε το τεμάχιο ΖΗΒΓ να έχει το ίδιο εμβαδόν με το τεμάχιο ΑΕΔ.

δ) Ποιο είναι το πλάτος του δρόμου ΔΕΗΖ στην περίπτωση (γ); *(Θέμα εξετάσεων)*

Δ. Συνδυαστικά θέματα

30. Στο επόμενο σχήμα ο κύκλος με κέντρο Ο έχει ακτίνα R = 7 m, ενώ ο κύκλος με κέντρο Κ έχει



ακτίνα $\rho = 2\,\text{m}$. Η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι $\Gamma\Delta = 4\,\text{m}$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του κοινού εφαπτόμενου ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΚΟ.

(Θέμα εξετάσεων)

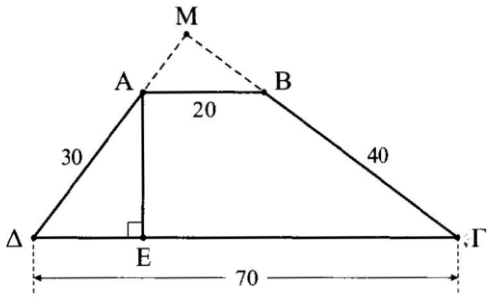
31. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα έτσι, ώστε:

$$AE = BZ = \frac{2}{3}\alpha$$

α) Να αποδείξετε ότι $AZ \perp \Delta E$.

β) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α, τα εμβαδά των τεσσάρων χωρίων στα οποία χωρίζεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ από τις ΑΖ και ΔΕ.

32. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, με βάσεις $AB = 20$ και $\Gamma\Delta = 70$ και μη παράλληλες πλευρές $B\Gamma = 40$ και $A\Delta = 30$.



α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ είναι κάθετες.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

γ) Αν ΑΕ είναι ύψος του ΑΒΓΔ, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΔΕ.

9ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 10.4 ΑΛΛΟΙ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Εμβαδόν τριγώνου συναρτήσει των πλευρών του

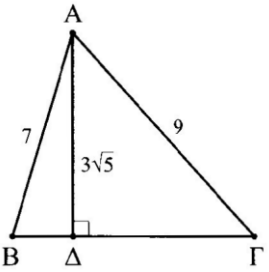
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\alpha = 14$, $\beta = 15$ και $\gamma = 13$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

2. Εμβαδόν τριγώνου συναρτήσει των ακτίνων εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος, με $AB = 7$, $A\Gamma = 9$ και ύψος $A\Delta = 3\sqrt{5}$. Να βρείτε:

α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ,

β) τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.



3. Τριγωνομετρικός τύπος εμβαδού τριγώνου - Νόμος των ημιτόνων

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\beta = 5$, $\gamma = 3$ και $\widehat{A} = 120^\circ$. Να βρείτε:

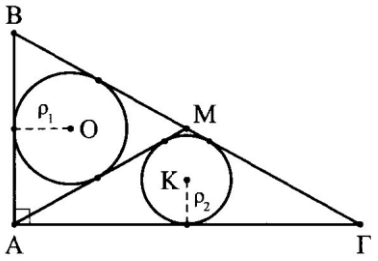
α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ,

β) το ημΒ και το ημΓ.

4. Απόδειξη μετρικών σχέσεων με τη βοήθεια εμβαδών

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\widehat{A} = 90^\circ$, και η διάμεσός του ΑΜ. Αν ρ_1 και ρ_2 είναι οι ακτίνες των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΜ και ΑΓΜ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \gamma}$$



Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Υπολογιστικές ασκήσεις

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\beta = 6$, $\gamma = 4$ και $\hat{A} = 30°$. Να υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ,

β) τα ύψη υ_β και υ_γ του τριγώνου ΑΒΓ.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδόν 8 τ.μ., στο οποίο ισχύουν $A\Gamma = 2AB$ και $\hat{A} = 150°$. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών ΑΒ και ΑΓ.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\alpha = 10$, $\beta = 12$ και $\gamma = 14$. Να υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ,

β) την ακτίνα του εγγεγραμμένου και την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ,

γ) το ημΓ.

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με:

$$AB = A\Gamma = 1 \quad \text{και} \quad B\Gamma = \sqrt{3}$$

Να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $\hat{A}$,

β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ,

γ) τη διάμεσο $BM = \mu_\beta$. *(Θέμα εξετάσεων)*

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = \sqrt{39}$, με $\alpha = 12$ και $\beta = 3\sqrt{13}$. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοδύναμο με ισόπλευρο τρίγωνο ΚΛΜ πλευράς 6. Να υπολογίσετε:

α) την πλευρά γ, **β)** τη γωνία $\hat{B}$.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 120°$, $\beta = 2$ και $\gamma = 4$. Να υπολογίσετε:

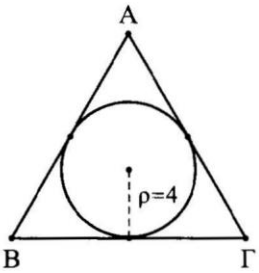
α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ,

β) την πλευρά α,

γ) την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ,

δ) το ημΓ.

7. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α, του οποίου ο εγγεγραμμένος κύκλος έχει ακτίνα $\rho = 4$. Να βρείτε την πλευρά και το εμβαδόν του ΑΒΓ.



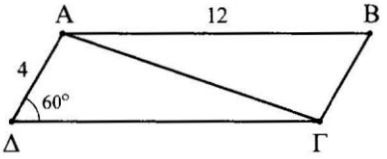
8. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\alpha = 6$, $\gamma = 4$ και εμβαδόν $E = 6\sqrt{3}$ τ.μ. Να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $\hat{B}$,

β) την πλευρά β,

γ) την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

9. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με $AB = 12$, $A\Delta = 4$ και $\hat{\Delta} = 60°$.



Να υπολογίσετε:

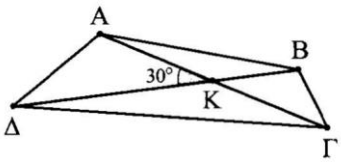
α) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ,

β) το μήκος της διαγωνίου ΑΓ,

γ) την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΓΔ.

Β. Αποδεικτικές ασκήσεις

10. Οι διαγώνιοι κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ σχηματίζουν γωνία 30°.



Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma\Delta) = \dfrac{A\Gamma \cdot B\Delta}{4}$.

11. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με $AB = A\Gamma$. Προεκτείνουμε τη βάση ΒΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν ίσες ακτίνες.

12. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με εμβαδόν Ε, στο οποίο ισχύει ότι:

$$\frac{1}{\eta\mu B} + \frac{1}{\eta\mu\Gamma} = \frac{\alpha^2}{E}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\beta + \gamma = 2\alpha$,

β) $\rho R = \dfrac{\beta\gamma}{6}$, όπου ρ και R οι ακτίνες του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ,

γ) $\dfrac{1}{\upsilon_\beta} + \dfrac{1}{\upsilon_\gamma} = \dfrac{2}{\upsilon_\alpha}$.

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω τ η ημιπερίμετρός του. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 \geq 4(\tau - \beta)(\tau - \gamma)$

β) $\alpha\beta\gamma \geq 8(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)$

γ) $R \geq 2\rho$, όπου ρ και R οι ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ.

Γ. Συνδυαστικά θέματα

14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $AB = 5$, $A\Gamma = 12$ και $B\Gamma = 13$.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{A} = 90°$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΒ.

δ) Αν Μ είναι το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ, να βρείτε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΜΑΓ.

15. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\beta = 14$, $\gamma = 12$ και εμβαδόν $E = 24\sqrt{10}$ τ.μ., ενώ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του είναι $\rho = \sqrt{10}$. Να υπολογίσετε:

α) το μήκος της πλευράς α,

β) την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ,

γ) το μήκος της διαμέσου ΑΜ,

δ) την ακτίνα του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΜΒ.

16. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με μήκη πλευρών $\gamma = 2$, $\beta = 1 + \sqrt{2}$ και εμβαδόν:

$$(AB\Gamma) = \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της πλευράς α είναι ίσο με $\sqrt{3}$.

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ πάνω στην πλευρά ΒΓ.

(Θέμα εξετάσεων)

17. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Μ στο εσωτερικό του. Αν οι ευθείες ΜΑ, ΜΒ και ΜΓ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στα σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΜΒΓ και ΜΖΕ είναι όμοια,

β) $\dfrac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \dfrac{MA \cdot MB \cdot M\Gamma}{M\Delta \cdot ME \cdot MZ}$.

10ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ :	**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**§ 10.5 ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Λόγος εμβαδών τριγώνων με ίσες βάσεις ή με ίσα ύψη

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος του ΒΔ και τυχαίο σημείο Ε του ΒΔ. Από το Α φέρουμε ευθεία παράλληλη στη ΒΓ και θεωρούμε τυχαίο σημείο της Ζ, διαφορετικό του Α. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\text{ΑΕΓ})}{(\text{ΑΒΖ})} = \frac{\text{ΒΓ}\cdot\text{ΕΔ}}{\text{ΑΖ}\cdot\text{ΒΔ}}$$

2. Λόγος εμβαδών ομοίων πολυγώνων

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΑΒ τέτοιο, ώστε $\text{ΑΔ} = 2\text{ΔΒ}$. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να βρείτε τον λόγο $\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΒΓΕΔ})}$.

3. Λόγος εμβαδών τριγώνων με δύο γωνίες ίσες ή παραπληρωματικές

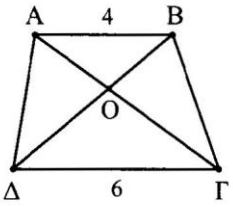
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ, ΓΑ, ΒΓ αντίστοιχα, κατά τμήματα:

$$\text{ΑΔ} = \frac{2}{3}\text{ΑΒ}, \quad \text{ΑΕ} = \frac{1}{6}\text{ΑΓ}, \quad \text{ΓΖ} = \frac{1}{2}\text{ΒΓ}$$

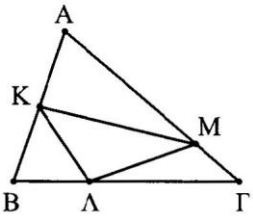
και θεωρούμε σημείο Η της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε $\text{ΑΗ} = \frac{2}{3}\text{ΑΓ}$. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΓΖΗ})}$.

Α. Υπολογιστικές ασκήσεις

1. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις $AB=4$ cm και $\Gamma\Delta=6$ cm. Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ, να βρείτε τον λόγο $\frac{(OAB)}{(O\Gamma\Delta)}$.



2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδόν 24 τ.μ. Στις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Κ, Λ, Μ έτσι, ώστε:



$$AK=\frac{1}{2}AB,\quad B\Lambda=\frac{1}{3}B\Gamma,\quad \Gamma M=\frac{1}{4}A\Gamma$$

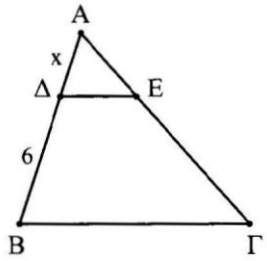
Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΚΜ, ΒΚΛ, ΓΛΜ και ΚΛΜ.

3. Στο διπλανό σχήμα είναι:

$$B\Delta=6,\quad \Delta E//B\Gamma$$

και:

$$(\Delta E\Gamma B)=8(A\Delta E)$$



Να βρείτε:

α) τον λόγο $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$,

β) το μήκος x του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα τέτοια, ώστε:

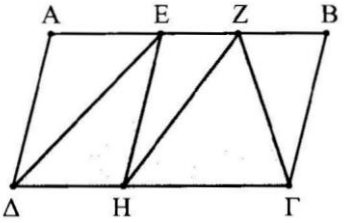
$$B\Delta=\frac{1}{3}AB\quad \text{και}\quad AE=\frac{3}{5}A\Gamma$$

Αν ισχύει ότι $(B\Gamma E\Delta)=6$ τ.μ., να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΑΓ τέτοιο, ώστε $\Gamma\Delta=\frac{1}{3}A\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα $\Gamma E=\frac{2}{7}B\Gamma$. Αν ισχύει ότι $(AB\Delta)=14$ τ.μ., να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων:

α) ΑΒΓ **β)** ΑΓΕ

6. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τυχαία σημεία Ε και Ζ της πλευράς ΑΒ.



Θεωρούμε σημείο Η της πλευράς ΓΔ τέτοιο, ώστε:

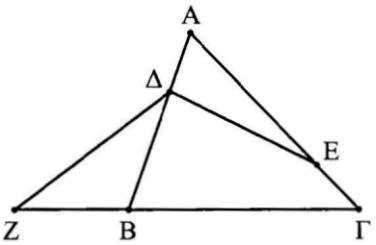
$$\Delta H=\frac{2}{5}\Delta\Gamma$$

Αν ισχύει ότι $(\Delta EH)=4$ τ.μ., να βρείτε το εμβαδόν:

α) του τριγώνου ΖΗΓ,

β) του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ.



Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τέτοια, ώστε:

$$A\Delta=\frac{1}{3}AB\quad \text{και}\quad \Gamma E=\frac{1}{4}A\Gamma$$

Προεκτείνουμε την πλευρά ΓΒ κατά τμήμα $BZ=\frac{1}{2}\Gamma B$. Αν ισχύει ότι $(B\Delta Z)=8$ τ.μ., να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τέτοια, ώστε:

$$A\Delta=\lambda AB\quad \text{και}\quad AE=\left(\lambda-\frac{1}{6}\right)A\Gamma$$

με $\frac{1}{6}<\lambda<1$. Αν ισχύει ότι $(AB\Gamma)=6(A\Delta E)$, να βρείτε τον λ.

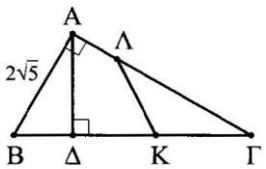
9. Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$ και $\widehat{zOx}$ έτσι, ώστε $\widehat{xOy}=\widehat{yOz}=150°$. Στις ημιευθείες Ox, Oy, Oz παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα, έτσι ώστε $OA=2$, $OB=4$ και $O\Gamma=6$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΑ.

β) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(OAB)}{(OB\Gamma)}$.

(Θέμα εξετάσεων)

10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A}=90°$ και $AB=2\sqrt{5}$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και θεωρούμε σημεία Κ και Λ των πλευρών ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα τέτοια, ώστε:



$$BK=\frac{3}{5}B\Gamma\quad \text{και}\quad \Gamma\Lambda=3\Lambda A$$

Αν ισχύει ότι $(\Gamma K\Lambda)=6$ τ.μ., να υπολογίσετε:

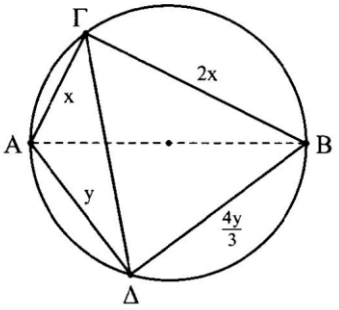
α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ,

β) τα μήκη των τμημάτων ΑΓ, ΒΓ, ΒΔ, ΓΔ και ΑΔ.

11. Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ και σημεία του Γ και Δ τέτοια, ώστε:

$$\Gamma B = 2\Gamma A \quad \text{και} \quad \Delta B = \frac{4}{3}\Delta A$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Αν είναι $(A\Gamma\Delta) = 6$ τ.μ., να βρείτε:

α) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ,

β) την περίμετρο του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ.

Β. Αποδεικτικές ασκήσεις

12. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα τέτοια, ώστε:

$$A\Delta = \frac{2}{3}AB, \quad BE = \frac{1}{2}B\Gamma, \quad \Gamma Z = \frac{3}{5}\Gamma A$$

Να αποδείξετε ότι $(A\Delta Z) = (\Delta EZ)$.

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα, ώστε:

$$B\Delta = \frac{1}{3}AB, \quad BE = \frac{1}{4}B\Gamma, \quad \Gamma Z = \frac{5}{8}A\Gamma$$

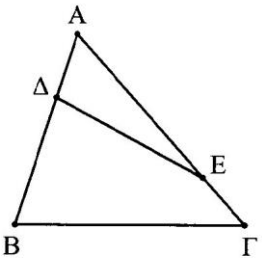
Επίσης προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ κατά τμήμα $AH = \frac{2}{9}AB$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΒΕ και ΑΗΖ είναι ισοδύναμα.

14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα τέτοια, ώστε:

$$A\Delta = \frac{1}{3}AB$$

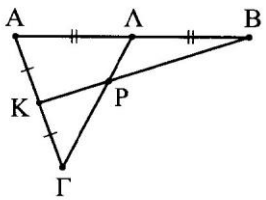
και:

$$\Gamma E = \frac{1}{4}A\Gamma$$



Να αποδείξετε ότι $(B\Gamma E\Delta) = 3(A\Delta E)$.

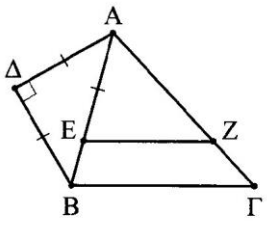
15. Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΓ και ΑΒ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι:



α) ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσος με 1,

β) αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΛΓ και ΚΒ, τότε τα τρίγωνα ΒΛΡ και ΚΓΡ έχουν ίσα εμβαδά.

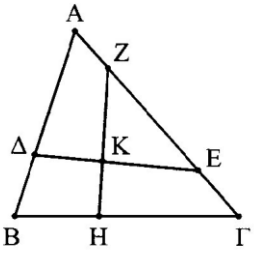
16. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά αυτού κατασκευάζουμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς ΑΒ, ώστε $AE = A\Delta$. Από το Ε φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΖ και το τραπέζιο ΒΓΖΕ είναι ισοδύναμα.



17. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε σημείο Δ της ΑΒ, σημείο Η της ΒΓ και σημεία Ε και Ζ της ΑΓ τέτοια, ώστε:

$$A\Delta = \frac{2}{3}AB, \quad BH = \frac{3}{8}B\Gamma,$$

$$\Gamma E = \frac{1}{4}A\Gamma, \quad \Gamma Z = \frac{4}{5}A\Gamma$$



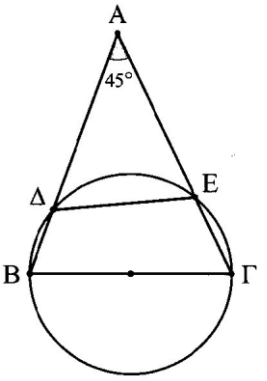
α) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$.

β) Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΔΕ και ΖΗ, να αποδείξετε ότι είναι ισοδύναμα τα τετράπλευρα ΑΔΚΖ και ΓΕΚΗ.

18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με:

$$\hat{A} = 45^\circ$$

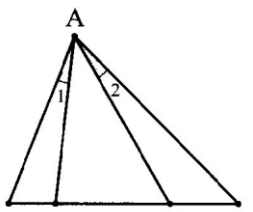
Ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ και το τετράπλευρο ΒΓΕΔ έχουν ίσα εμβαδά.



19. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$(AMN) = \frac{3}{8}(AB\Gamma\Delta)$$

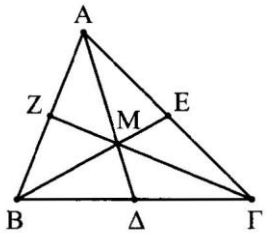
20. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε της πλευράς ΒΓ τέτοια, ώστε $\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Gamma AE}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:



α) $\frac{AB \cdot A\Delta}{AE \cdot A\Gamma} = \frac{\Delta B}{E\Gamma}$

β) $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \cdot \frac{EB}{E\Gamma} = \frac{AB^2}{A\Gamma^2}$

21. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Μ στο εσωτερικό του. Οι προεκτάσεις των ΑΜ, ΒΜ, ΓΜ τέμνουν τις ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

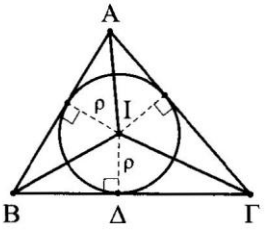


Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{(ΑΒΜ)}{(ΑΓΜ)} = \frac{ΒΔ}{ΓΔ}$ **β)** $\frac{ΒΔ}{ΓΔ} \cdot \frac{ΑΖ}{ΒΖ} \cdot \frac{ΓΕ}{ΑΕ} = 1$

Γ. Συνδυαστικά θέματα

22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου (Ι, ρ) με την πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:



α) οι γωνίες $\widehat{ΑΙΒ}$ και $\widehat{ΔΙΓ}$ είναι παραπληρωματικές,

β) $\frac{ΙΑ \cdot ΙΒ}{ΙΓ \cdot ΙΔ} = \frac{ΑΒ}{ΓΔ}$, **γ)** $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} \cdot \frac{ΒΔ}{ΓΔ} = \frac{ΙΒ^2}{ΙΓ^2}$.

23. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α, εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε το σημείο Ε έτσι, ώστε $ΕΓ = \frac{α}{3}$ και προεκτείνουμε την ΑΕ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = \frac{α\sqrt{7}}{3}$.

β) Να αποδείξετε ότι $ΕΖ = \frac{2\sqrt{7} \cdot α}{21}$.

γ) Να βρείτε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΑΕΒ και ΓΕΖ. *(Θέμα εξετάσεων)*

24. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της πλευράς ΑΒ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το μέρος του Β κατά ευθύγραμμο τμήμα $ΒΔ = \frac{ΒΓ}{2}$ και φέρουμε την ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι $(ΔΕΒ) = \frac{1}{2}(ΑΔΒ)$.

β) Να βρείτε τους λόγους $\frac{(ΔΕΒ)}{(ΑΒΓ)}$ και $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΓ)}$.

γ) Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $(ΒΔΕ) = (ΑΜΕ)$.

(Θέμα εξετάσεων)

25. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Κ της πλευράς ΒΓ. Από το Κ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο Λ. Από το Λ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Μ.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{ΚΓ}{ΒΚ} = \frac{ΒΜ}{ΑΜ}$.

β) Αν $(ΑΜΛ) = Ε_1, (ΓΚΛ) = Ε_2$ και $(ΒΚΛΜ) = Ε$, να αποδείξετε ότι $Ε = 2\sqrt{Ε_1 \cdot Ε_2}$.

26. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια, ώστε να είναι:

$$ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ, \quad ΒΕ = λΒΓ, \quad ΓΖ = λΓΑ$$

όπου $0 < λ < 1$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{(ΑΔΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1-λ}{3}$,

β) $\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{3λ^2 - 4λ + 2}{3}$,

γ) αν $λ = \frac{2}{3}$, το τρίγωνο ΔΕΖ έχει το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν. *(Θέμα εξετάσεων)*

27. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα τέτοια, ώστε:

$$ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ \quad \text{και} \quad ΓΕ = \frac{1}{4}ΑΓ$$

Οι προεκτάσεις των ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Ζ.

α) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΒΓΕΔ)}{(ΑΒΓ)}$.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(ΓΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΓΖ}{4ΒΓ} \quad \text{και} \quad \frac{(ΒΔΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{2ΒΖ}{3ΒΓ}$$

γ) Να αποδείξετε ότι $ΓΖ = \frac{ΒΓ}{5}$.

δ) Να βρείτε τον λόγο $\frac{ΕΖ}{ΔΕ}$.

$10^{ο}$ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ : **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΟ $10^{ο}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟ**

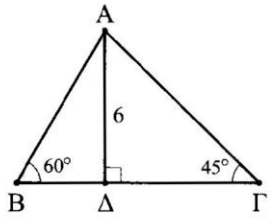
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

.1 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στο οποίο ισχύει ότι $\widehat{A} = 5\widehat{\Delta}$ και η περίμετρός του ισούται με $6 \cdot A\Delta$. Αν το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι $16\,cm^2$, να βρείτε:

α) τις πλευρές του ΑΒΓΔ,

β) τα ύψη του ΑΒΓΔ.

.2 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\widehat{B} = 60°$ και $\widehat{\Gamma} = 45°$, ενώ το ύψος του ΑΔ έχει μήκος 6 cm. Να βρείτε:



α) τις πλευρές του ΑΒΓ,

β) το εμβαδόν του ΑΒΓ,

γ) τα ύψη $υ_β$ και $υ_γ$ του ΑΒΓ,

δ) την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ.

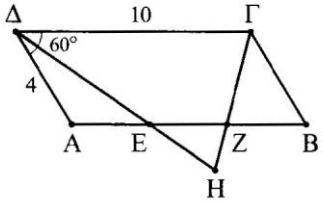
.3 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με $AB = A\Gamma = \beta$ και $\widehat{A} = 45°$. Φέρουμε ευθεία (ε) κάθετη προς την ΑΓ στο Α, η οποία τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Ε. Πάνω στην ευθεία (ε) παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $A\Delta = A\Gamma$, με το σημείο Α να βρίσκεται μεταξύ των Ε και Δ. Να βρείτε:

α) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ συναρτήσει του β,

β) τον λόγο $\dfrac{(AEB)}{(E\Gamma\Delta)}$,

γ) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΕ συναρτήσει του β.

.4 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με $AB = 10$, $A\Delta = 4$ και $\widehat{\Delta} = 60°$. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ έτσι, ώστε $AE = EZ = ZB$.



Αν Η είναι το σημείο τομής των ευθειών ΔΕ και ΓΖ, να υπολογιστούν:

α) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ,

β) το εμβαδόν του τραπεζίου ΓΔΕΖ,

γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΕΖΗ.

.5 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 8 cm και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Έστω Κ, Λ οι προβολές του Μ στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Έστω επίσης Π, Ρ οι προβολές των Κ, Λ, αντίστοιχα, στη ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $MK + M\Lambda = 4\sqrt{3}\,cm$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του ΚΛΡΠ.

.6 Δίνονται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, με $AB // \Gamma\Delta$, $AB = 4$, $A\Delta = 2$ και $\widehat{\Delta} = 60°$.

α) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

β) Θεωρούμε σημείο Ε της βάσης ΑΒ τέτοιο, ώστε $AE = 3EB$. Οι ΔΕ και ΓΕ τέμνουν τη διάμεσο του τραπεζίου στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα.

i) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΖΗ.

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του ΕΒΓΔ.

iii) Αν οι προεκτάσεις των ΔΕ και ΓΒ τέμνονται στο Ρ, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΡΕΒ.

.7 Θεωρούμε δύο εφεξής γωνίες:

$$\widehat{xOy} = \widehat{yOz} = 120°$$

Στις πλευρές Ox, Oy και Oz θεωρούμε σημεία Α, Β και Γ αντίστοιχα, ώστε $OA = 2$, $OB = 6$ και $O\Gamma = 10$. Να υπολογίσετε:

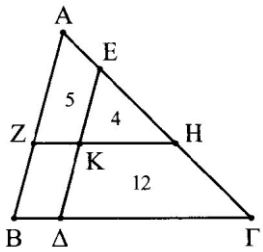
α) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΓ,

β) την απόσταση του σημείου Ο από την ευθεία ΒΓ,

γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

.8 Στο διπλανό σχήμα είναι $E\Delta // AB$, $ZH // B\Gamma$ και ισχύουν $(AEKZ) = 5$, $(EHK) = 4$ και:

$$(\Gamma\Delta KH) = 12$$



α) Να αποδείξετε ότι το Η είναι το μέσο του ΓΕ.

β) Να βρείτε τον λόγο $\dfrac{AE}{AH}$.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΒΔΚΖ.

.9 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε της πλευράς ΑΒ. Έστω Ζ και Η τα συμμετρικά του Ε ως προς τα Α και Β αντίστοιχα και Κ το σημείο τομής των ΓΖ και ΔΗ.

α) Να βρείτε τον λόγο $\dfrac{(K\Gamma\Delta)}{(KZH)}$.

β) Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma\Delta) = 6(K\Gamma\Delta)$.

.10 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις $\text{ΑΒ} = \alpha$ και $\text{ΓΔ} = 2\alpha$, ενώ το ύψος του είναι $\frac{3}{2}\alpha$. Έστω επίσης Μ το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι $(\text{ΜΑΔ}) = (\text{ΜΒΓ})$.

β) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α, τα εμβαδά των τριγώνων ΜΑΒ, ΜΓΔ, ΜΒΓ και ΜΑΔ.

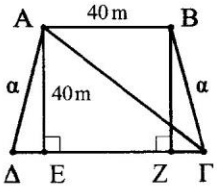
.11 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, με $\text{ΑΒ}//\text{ΓΔ}$. Έστω Μ και Ν τα μέσα των βάσεων ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα και Ο σημείο του τμήματος ΜΝ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΟΑΔ έχουν ίσα εμβαδά.

β) Αν το Ο είναι μέσο του τμήματος ΜΝ, να αποδείξετε ότι $(\text{ΑΟΔ}) = \frac{1}{4}(\text{ΑΒΓΔ})$.

(Θέμα εξετάσεων)

.12 Όταν το οικόπεδο του διπλανού σχήματος συμπεριελήφθει στο σχέδιο πόλης, οι δύο δρόμοι που χαράχθηκαν απέκοψαν τέτοιο τμήμα της έκτασής του, ώστε ο λόγος του αρχικού εμβαδού του προς το εμβαδόν που αποκόπηκε να είναι $\frac{5}{1}$.



α) Να υπολογίσετε:

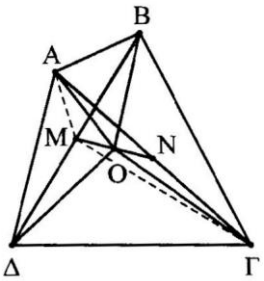
i) το μήκος του ΔΕ ως συνάρτηση του α,

ii) την πλευρά α,

iii) το εμβαδόν που αποκόπηκε από τη χάραξη των δρόμων.

β) Αν το οικόπεδο που μένει μετά τη χάραξη των δρόμων έχει αξία 40.000 €, πόση είναι η αποζημίωση του οικοπεδούχου από την απαλλοτρίωση αυτή;

.13 Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Τα Μ και Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα και Ο είναι το μέσο του ΜΝ. Να αποδείξετε ότι:



α) $2(\text{ΟΑΒ}) = (\text{ΑΒΔ}) + (\text{ΟΒΔ}) - (\text{ΑΜΝ})$

β) $(\text{ΟΑΒ}) + (\text{ΟΓΔ}) = (\text{ΟΒΓ}) + (\text{ΟΑΔ})$

.14 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και έστω Κ, Λ τα μέσα των ΒΓ, ΑΔ αντίστοιχα. Η κάθετη από το Β προς την ΑΚ τέμνει την ΑΚ στο Ε και τη ΓΛ στο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι το ΑΚΖΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

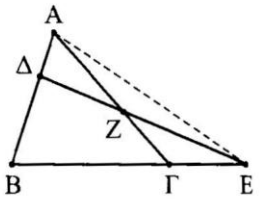
β) Να αποδείξετε ότι $(\text{ΑΒΚΖ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒΓΔ})$.

γ) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ και ΛΖ συναρτήσει του α.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΚΖΛ συναρτήσει του α.

.15 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, σημείο Δ της πλευράς ΑΒ τέτοιο, ώστε $\text{ΑΔ} = \frac{1}{3}\text{ΑΒ}$ και σημείο Ε στην προέκταση της ΒΓ τέτοιο, ώστε:

$$\text{ΓΕ} = \frac{1}{2}\text{ΒΓ}$$



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι ισοδύναμα.

β) Να αποδείξετε ότι $\text{ΖΑ} \cdot \text{ΖΔ} = \text{ΖΓ} \cdot \text{ΖΕ}$.

γ) Να βρείτε τον λόγο $\frac{(\text{ΑΓΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}$.

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\text{ΑΖΕ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{\text{ΑΖ}}{2\text{ΑΓ}}$$

και:

$$\frac{(\text{ΑΔΖ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{\text{ΑΖ}}{3\text{ΑΓ}}$$

ε) Να βρείτε τους λόγους $\frac{\text{ΖΕ}}{\text{ΔΖ}}$ και $\frac{\text{ΖΓ}}{\text{ΑΖ}}$.