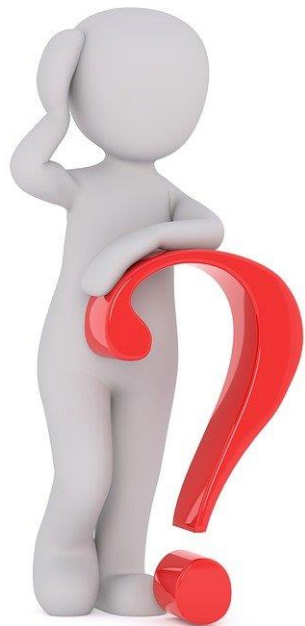




Επαναληπτικό κριτήριο αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

Στις προτάσεις Α1α έως Α4Β να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της πρότασης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση, η οποία τη συμπληρώνει σωστά.

Α1α. Στον οριζόντιο σωλήνα του σχήματος ρέει ένα ιδανικό υγρό. Για τα σημεία 1 και 2 της ίδιας ρευματικής γραμμής ισχύει



- α. $u_1 = u_2$ και $p_1 = p_2$
- β. $u_1 > u_2$ και $p_1 > p_2$
- γ. $u_1 < u_2$ και $p_1 > p_2$
- δ. $u_1 < u_2$ και $p_1 < p_2$

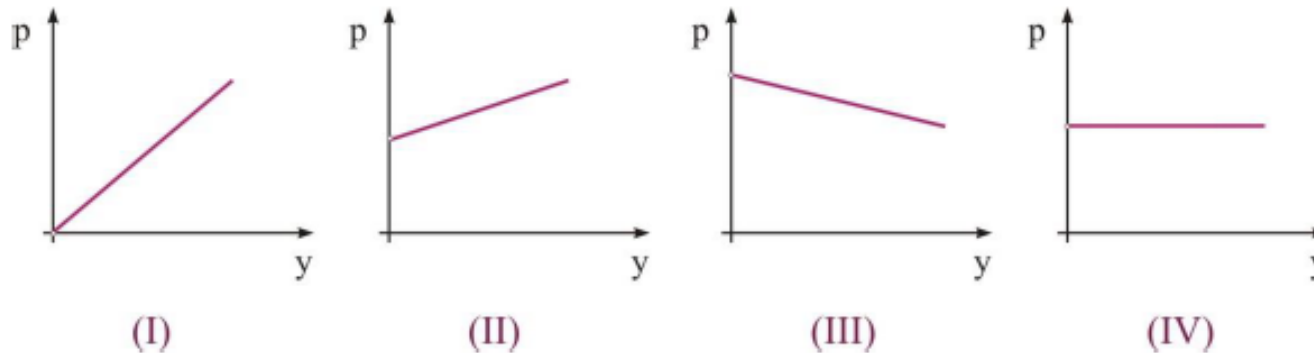
Μονάδες 3

Α1Β. Σε ένα σωλήνα μεταβλητής διατομής που ρέει ιδανικό υγρό, όταν οι δυναμικές γραμμές πυκνώνουν, αυξάνεται

- α. η παροχή του σωλήνα.
- β. η ταχύτητα του υγρού.
- γ. η πυκνότητα του υγρού.
- δ. ο όγκος του υγρού ανά μονάδα χρόνου.

Μονάδες 2

A2α. Έχουμε ένα δοχείο που περιέχει υγρό πυκνότητας ρ και η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού βρίσκεται σε επαφή με τον ατμοσφαιρικό αέρα. Η πίεση σε ένα σημείο του υγρού σε συνάρτηση με το βάθος y από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, δίνεται από την γραφική παράσταση

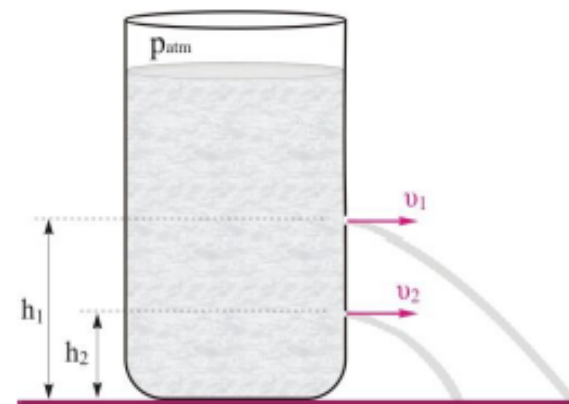


- α) I
- ☒ β) II
- γ) III
- δ) IV.

Μονάδες 3

A2β. Ένα ανοικτό κυλινδρικό δοχείο με μεγάλο εμβαδό βάσης περιέχει νερό. Στο πλευρικό τοίχωμα του δοχείου και στην ίδια κατακόρυφο ανοίγουμε δύο μικρές οπές οι οποίες απέχουν από τη βάση του δοχείου h_1 και h_2 , όπου $h_1 = 2h_2$, όπως στο σχήμα. Για τα μέτρα των ταχυτήτων εκροής του νερού από τις δύο οπές ισχύει

- α. $u_1 = 4 u_2$
- β. $u_1 = u_2$
- ☒ γ. $u_1 < u_2$
- δ. $u_1 = 2 u_2$



Μονάδες 2

A3α. Η ροή σε ένα ρευστό

- α) είναι πάντα τυρβώδης, όταν το ρευστό είναι πραγματικό.
- β) μπορεί να είναι στρωτή ή τυρβώδης, αν το ρευστό είναι ιδανικό.
- ☒ γ) είναι πάντα στρωτή, αν το ρευστό είναι ιδανικό.
- δ) είναι πάντα στρωτή, αν το ρευστό είναι πραγματικό.

Μονάδες 3

A3β. Ρίχνουμε την ίδια ποσότητα νερού σε τρία κυλινδρικά δοχεία που έχουν εμβαδά βάσης A , $2A$ και $3A$ αντίστοιχα. Οι υδροστατικές πιέσεις στις βάσεις των δοχείων είναι αντίστοιχα p_1 , p_2 και p_3 . Οι τρεις πιέσεις συνδέονται με τη σχέση

- α) $p_1 = p_2 = p_3$
- β) $p_1 = p_2 > p_3$
- γ) $p_1 < p_2 < p_3$
- ☒ δ) $p_1 > p_2 > p_3$

Μονάδες 2

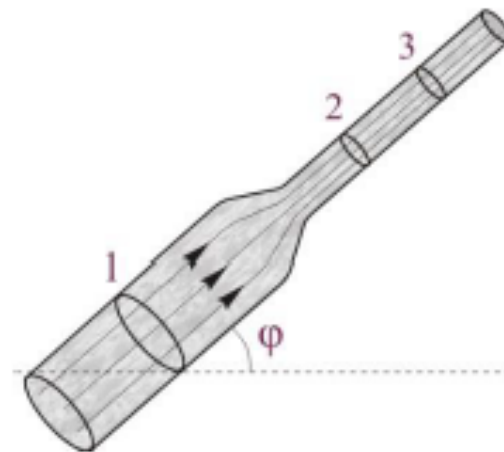
A4α. Ιδανικό υγρό ρέει σε ένα πλάγιο σωλήνα που σχηματίζει γωνία με το οριζόντιο δάπεδο και παρουσιάζει στένωση, όπως στο σχήμα. Για τις παροχές του σωλήνα στις περιοχές 1, 2 και 3 ισχύει

α) $\Pi_1 > \Pi_2 > \Pi_3$

β) $\Pi_1 < \Pi_2 = \Pi_3$

γ) $\Pi_1 > \Pi_2 = \Pi_3$

δ) $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3$



Μονάδες 3

A4β. Η εξίσωση του Bernoulli για οποιαδήποτε σημεία της ίδιας ρευματικής γραμμής γράφεται

α. $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{σταθερό.}$

β. $A \cdot v = \text{σταθερό.}$

γ. $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = p.$

δ. $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \rho gh.$

Μονάδες 2

A5. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη Σωστό, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη Λάθος, για τη λανθασμένη.

α. Η υδροστατική πίεση σε ένα ορισμένο βάθος ενός υγρού είναι ανάλογη του βάθους, ανάλογη της πυκνότητας του υγρού και ανάλογη της επιτάχυνσης της βαρύτητας. **Σ**

β. Ένας κύλινδρος επιπλέει εν μέρει βυθισμένος σε ένα υγρό. Η υδροστατική πίεση στη κάτω βάση του κυλίνδρου είναι ανάλογη του εμβαδού της βάσης του κυλίνδρου. **Λ**

γ. Ασυμπίεστα θεωρούνται τα ρευστά των οποίων η πυκνότητα δε μεταβάλλεται αν μεταβληθεί η πίεσή τους για μια δεδομένη θερμοκρασία. **Σ**

δ. Δύο ρευματικές γραμμές δεν μπορεί να τέμνονται γιατί στο σημείο τομής τους ένα μόριο του ρευστού θα είχε δύο ταχύτητες. **Σ**

ε. Ο υδραυλικός ανυψωτήρας είναι ένας πολλαπλασιαστής πίεσης. **Λ**

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

B1. Το δοχείο του σχήματος έχει μεγάλη διατομή και περιέχει νερό ύψους H και πυκνότητας ρ . Στο πυθμένα της δεξαμενής υπάρχει ένας οριζόντιος λεπτός σωλήνας. Το άκρο του, Γ , είναι κλειστό και η πίεση του νερού στο σημείο Γ είναι p_1 . Αν ανοίξουμε το άκρο Γ του σωλήνα, το νερό εξέρχεται στην ατμόσφαιρα και η πίεση του νερού στο άκρο Γ γίνεται p_2 .

Η μεταβολή της πίεσης στο άκρο του σωλήνα, Δp , είναι ίση με

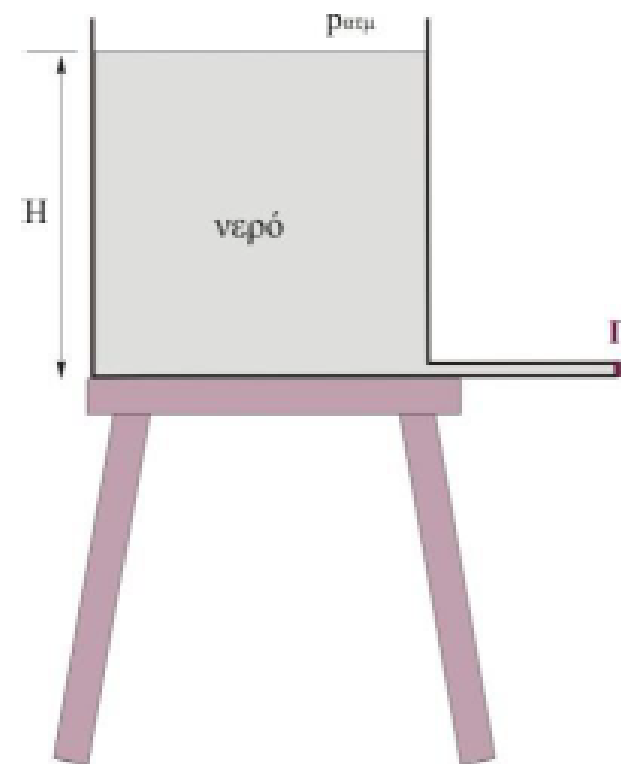
α. $\Delta p = -\rho g H$

β. $\Delta p = +\rho g H$

γ. $\Delta p = -\rho g H + p_{\text{atm}}$

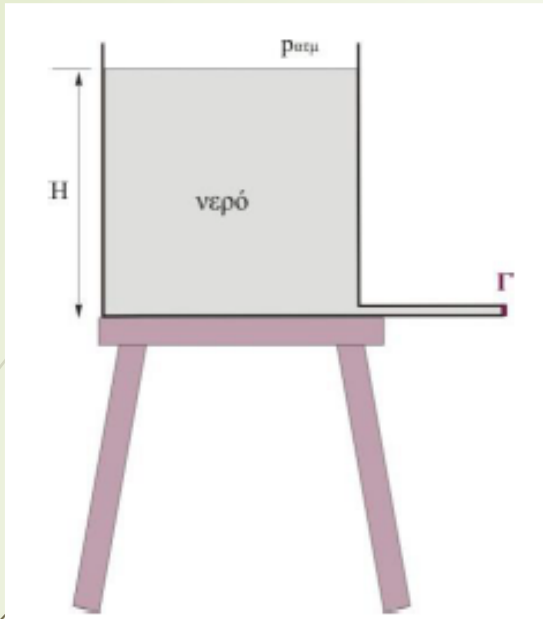
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.



Μονάδες 2

Μονάδες 4



Με κλειστό το άκρο Γ του σωλήνα, έχουμε υγρό σε ισορροπία και η πίεση στο άκρο Γ είναι $p_1 = p_{\text{atm}} + \rho g H$.

Ανοίγοντας το άκρο Γ του οριζόντιου σωλήνα, το νερό βρίσκεται σε επαφή με την ατμόσφαιρα με αποτέλεσμα η πίεση στο Γ να γίνει ίση με $p_2 = p_{\text{atm}}$.

Επομένως η πίεση μεταβλήθηκε κατά $\Delta p = p_2 - p_1 = -\rho g H$.

Σωστή η α

B2. Διαθέτουμε δύο όμοια κυλινδρικά δοχεία, Α, Β, στις βάσεις των οποίων υπάρχουν δύο όμοιες οπές με πολύ μικρό εμβαδό σε σχέση με το εμβαδό βάσης των δοχείων. Οι οπές είναι κλειστές με τάπες. Διαθέτουμε επίσης δύο υγρά με πυκνότητες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 = 4\rho_2$.

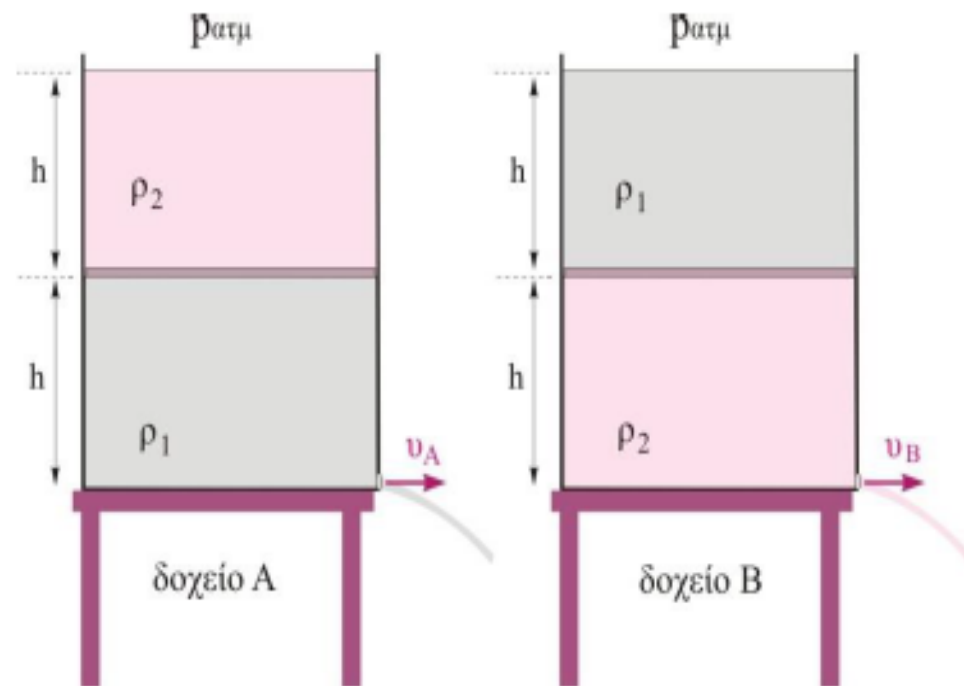
Τοποθετούμε τα υγρά στα δύο δοχεία όπως στο σχήμα, διαχωρισμένα μεταξύ τους με λεπτό αβαρές διάφραγμα που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Το ύψος κάθε στήλης υγρού είναι ίσο με h .

Τη χρονική στιγμή $t=0$ βγάζουμε ταυτόχρονα τις δύο τάπες από τα δοχεία. Αν με u_A, u_B συμβολίσουμε τις ταχύτητες εκροής των δύο οπών, τη χρονική στιγμή $t=0$ αυτές συνδέονται με τη σχέση

- α) $u_A = u_B$
- β) $u_A = 2u_B$
- γ) $u_B = 2u_A$

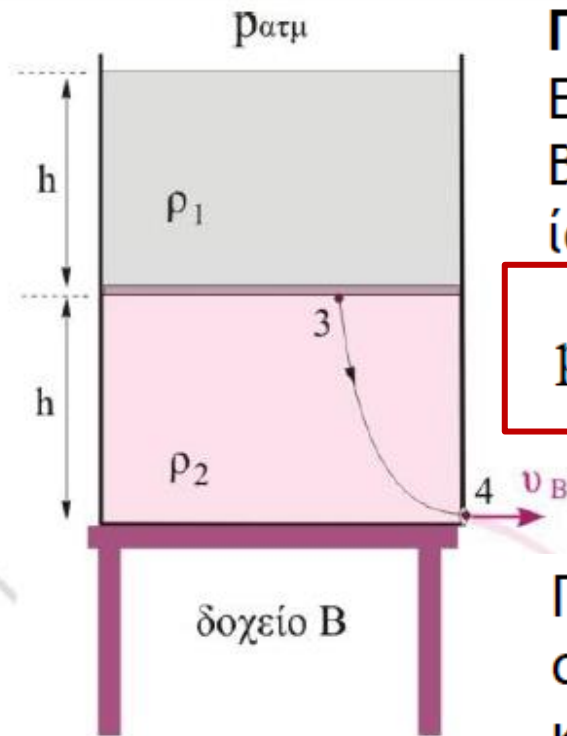
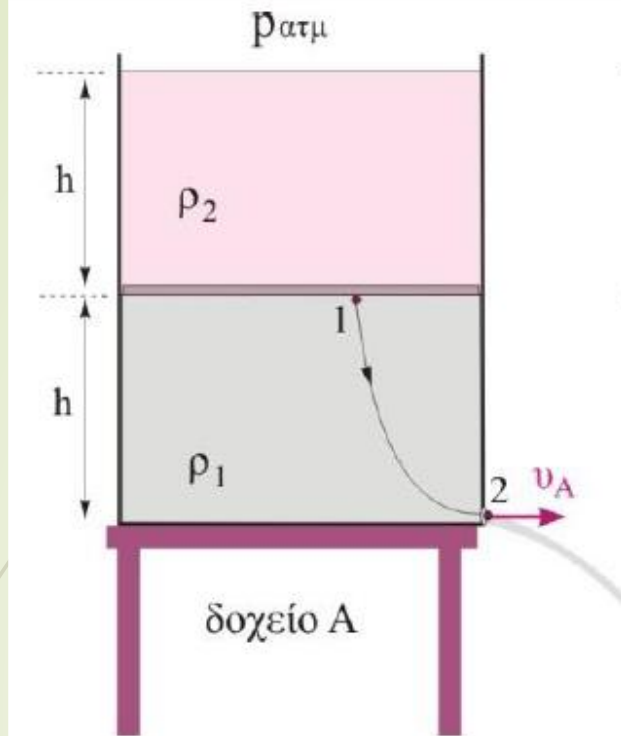
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.



Μονάδες 2

Μονάδες 4



Για το δοχείο A

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία 1 και 2 της ίδιας ρευματικής γραμμής.

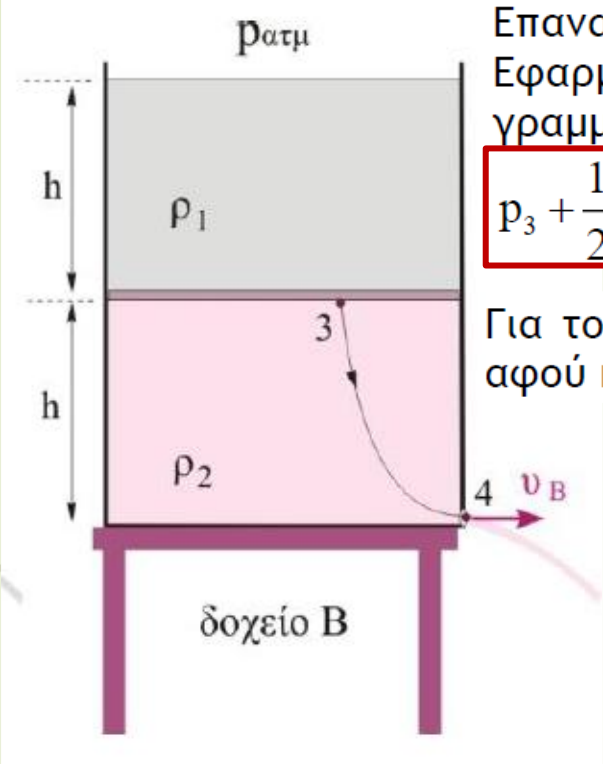
$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + \rho_1 g h = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2} \rho_1 v_A^2$$

Για το σημείο 1 που βρίσκεται κάτω από το διάφραγμα ισχύει $p_1 = p_2 g h + p_{\alpha\tau\mu}$ και $v_1 = 0$ αφού η επιφάνεια βάσης του δοχείου είναι πολύ μεγαλύτερη αυτής της οπής.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση

Bernoulli παίρνουμε

$$(\rho_1 + \rho_2) g h = \frac{1}{2} \rho_1 v_A^2 \quad (1)$$



Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία για το δοχείο Β.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία 3 και 4 της ίδιας ρευματικής γραμμής.

$$p_3 + \frac{1}{2} \rho_2 v_3^2 + \rho_2 gh = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2} \rho_2 v_B^2$$

Για το σημείο 3 που βρίσκεται κάτω από το διάφραγμα ισχύει $p_3 = p_1 gh + p_{\alpha\tau\mu}$ και $v_3 = 0$, αφού η επιφάνεια βάσης του δοχείου είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτή της οπής.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Bernoulli παίρνουμε

$$(\rho_1 + \rho_2) gh = \frac{1}{2} \rho_2 v_B^2, \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τις (1), (2) παίρνουμε $\frac{1}{2} \rho_1 v_A^2 = \frac{1}{2} \rho_2 v_B^2$ ή $4v_A^2 = v_B^2$ ή $v_B = 2v_A$

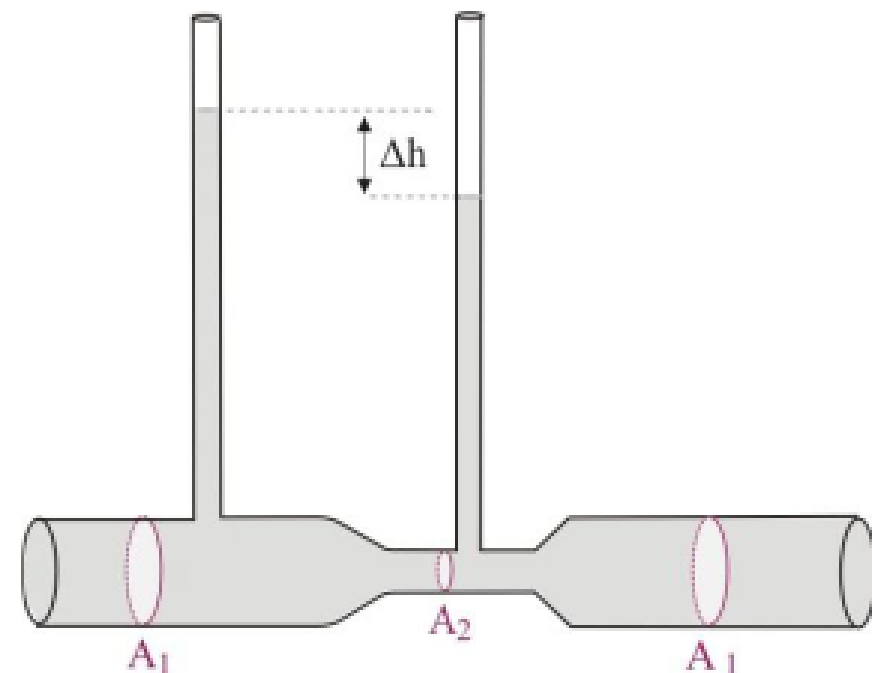
Σωστή η **γ**

B3. Ένας γεωργός για να ελέγχει την παροχή νερού μέσα σε ένα σωλήνα άρδευσης κάνει το εξής. Σε ένα οριζόντιο τμήμα του σωλήνα που έχει στένωση προσαρμόζει δυο λεπτούς κατακόρυφους διαφανείς σωλήνες, όπως φαίνεται στο σχήμα. Όταν η παροχή του σωλήνα είναι Π_1 , οι στήλες νερού στους κατακόρυφους σωλήνες παρουσιάζουν υψομετρική διαφορά Δh_1 . Αν η παροχή νερού μέσα στο σωλήνα διπλασιαστεί, οι στήλες νερού στους κατακόρυφους σωλήνες θα παρουσιάσουν υψομετρική διαφορά Δh_2 για την οποία ισχύει

- α) $\Delta h_2 = \Delta h_1$
- β) $\Delta h_2 = 2\Delta h_1$
- γ) $\Delta h_2 = 4\Delta h_1$

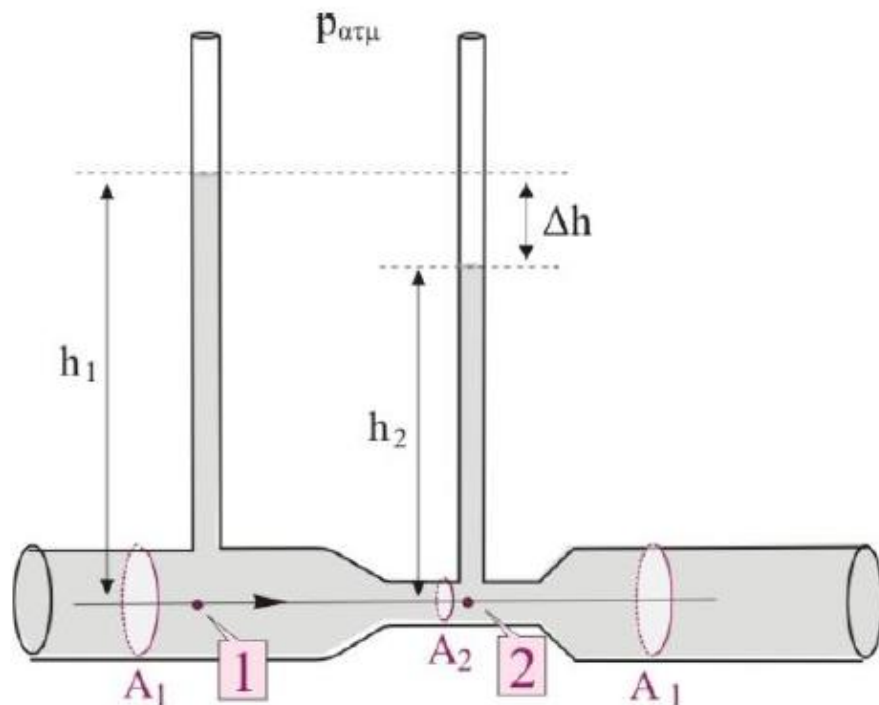
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.



Μονάδες 2

Μονάδες 4



Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία 1 και 2 της ίδιας οριζόντιας ρευματικής γραμμής.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (1)$$

$$\text{όπου } p_1 = \rho g h_1 + p_{\alpha\tau\mu}, \quad (2) \quad \text{και}$$

$$p_2 = \rho g h_2 + p_{\alpha\tau\mu}, \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις (2), (3) στην (1) παίρνουμε

$$\rho g h_1 + p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h_2 + p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \text{ή} \quad \rho g (h_1 - h_2) = \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) \quad \text{ή}$$

$$2g \cdot \Delta h = v_2^2 - v_1^2 \quad \text{ή} \quad \Delta h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

Αν η παροχή διπλασιαστεί, θα διπλασιαστεί το μέτρο των ταχυτήτων v_1 , v_2 και η διαφορά ύψους θα γίνει

$$\Delta h' = \frac{(2v_2)^2 - (2v_1)^2}{2g} = \frac{4(v_2^2 - v_1^2)}{2g} \quad \text{ή} \quad \Delta h' = 4\Delta h$$

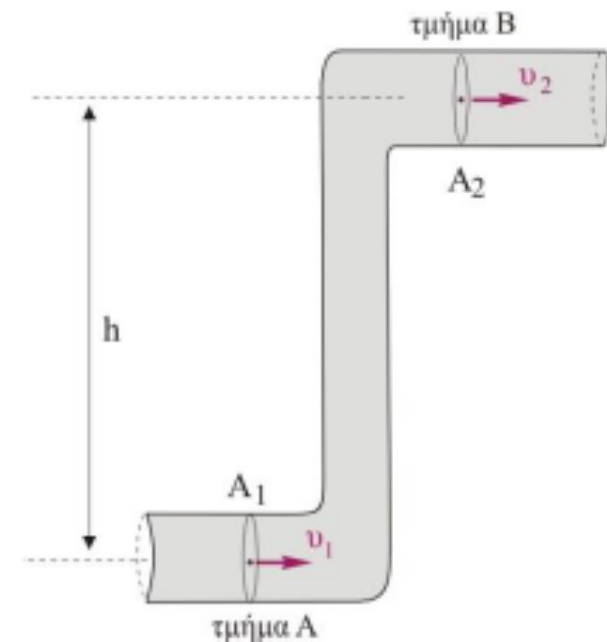
Σωστή η **γ**

B4. Στο σωλήνα του σχήματος που είναι μεταβλητής διατομής ρέει ιδανικό υγρό. Η προσφερόμενη ενέργεια ανά μονάδα όγκου για τη μετακίνηση του υγρού από το τμήμα Α στο τμήμα Β είναι μικρότερη από την προκαλούμενη αύξηση της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου του υγρού. Οι διατομές A_1 και A_2 συνδέονται με τη σχέση

- α) $A_1 = A_2$
- β) $A_1 < A_2$
- γ) $A_1 > A_2$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

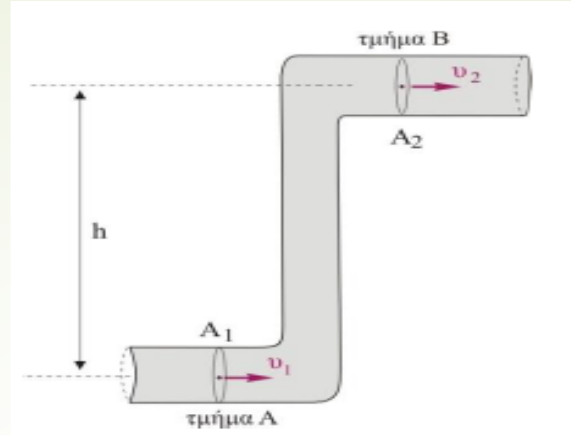
Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.



Μονάδες 2

Μονάδες 5

Σωστή η β



Η προσφερόμενη ενέργεια ανά μονάδα όγκου για τη μετακίνηση του υγρού από το τμήμα Α στο τμήμα Β ισούται με το άθροισμα των μεταβολών της δυναμικής ενέργειας λόγω βαρύτητας και της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου.

$$\frac{\Delta E_{\text{πρ}}}{\Delta V} = \frac{\Delta U}{\Delta V} + \frac{\Delta K}{\Delta V}$$

Επομένως, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου είναι

$$\frac{\Delta K}{\Delta V} = \frac{\Delta E_{\text{πρ}}}{\Delta V} - \frac{\Delta U}{\Delta V}$$

Από την εκφώνηση, η προσφερόμενη ενέργεια ανά μονάδα όγκου για τη μετακίνηση του υγρού από το τμήμα Α στο τμήμα Β είναι μικρότερη από την προκαλούμενη αύξηση της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου του υγρού, άρα

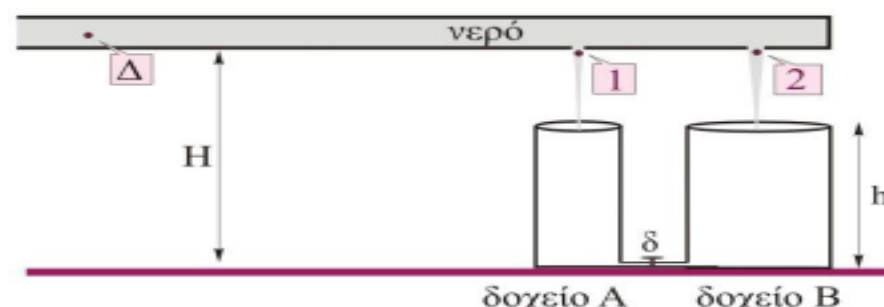
$$\frac{\Delta K}{\Delta V} < 0 \quad \text{ή} \quad K_2 < K_1 \quad \text{ή} \quad v_2 < v_1$$

Εφόσον η παροχή διατηρείται σταθερή ισχύει

$$\Pi_A = \Pi_B \quad \text{ή} \quad A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \text{ή} \quad A_2 > A_1$$

ΘΕΜΑ Γ

Ένας μακρύς οριζόντιος σωλήνας με εμβαδό διατομής $A=0,06\text{m}^2$ βρίσκεται σε ύψος H πάνω από οριζόντιο δάπεδο, διαρρέεται από νερό και το δεξιό του άκρο είναι κλειστό. Ο σωλήνας έχει στο τέλος του δύο οπές με εμβαδά $A_1=10\text{cm}^2$, $A_2=20\text{cm}^2$ κάτω από τις οποίες υπάρχουν δύο κυλινδρικά δοχεία με εμβαδά βάσης A_A και $A_B=1,5 A_A$ αντίστοιχα και ύψος h , ($h<H$). Οι βάσεις των δύο δοχείων συνδέονται μεταξύ τους με λεπτό οριζόντιο σωλήνα, ο οποίος διαθέτει διακόπτη, δ , που αρχικά είναι κλειστός. Η ταχύτητα εκροής του νερού από την οπή εμβαδού $A_1=10\text{cm}^2$ είναι $u_1=10\text{m/s}$.



Γ1. Να βρείτε την ταχύτητα εκροής του νερού από την οπή εμβαδού $A_2=20\text{cm}^2$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε την κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του νερού στα σημεία εκροής του από τις οπές.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του νερού στον οριζόντιο σωλήνα καθώς και την πίεση σε ένα εσωτερικό σημείο της περιοχής Δ , αυτού.

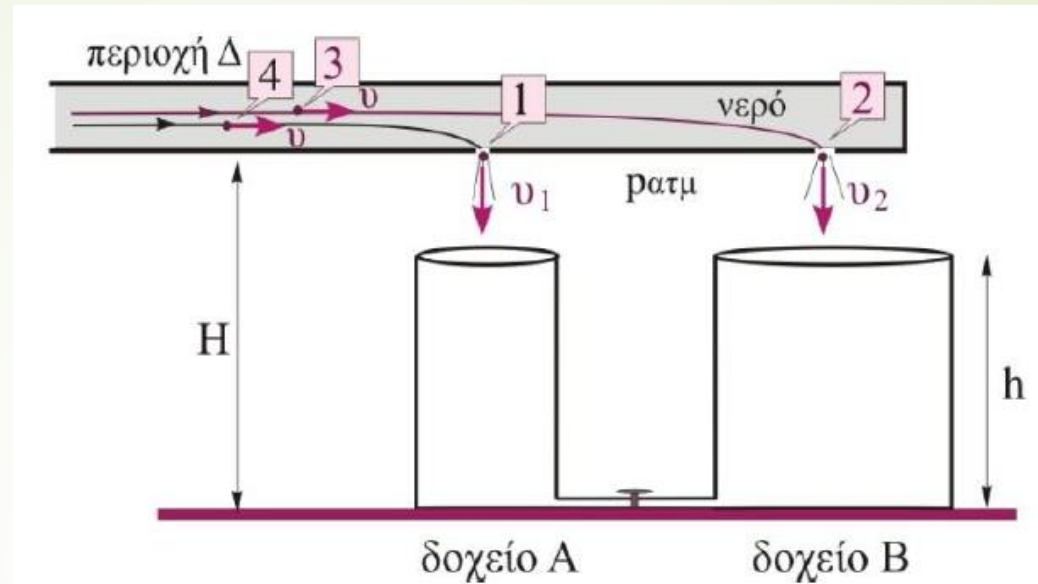
Μονάδες 6

Γ4. Όταν το ύψος του νερού στο πρώτο δοχείο είναι $h_A=1,2\text{m}$ διακόπτουμε την παροχή νερού και ανοίγουμε τον διακόπτη. Να βρεθεί τελικά σε τι ύψος θα φτάσει το νερό σε κάθε δοχείο.

Μονάδες 7

Δίνονται: Η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$, η ατμοσφαιρική πίεση $P_{\text{ατμ.}}=10^5\text{N/m}^2$ και η πυκνότητα του νερού $\rho=10^3\text{Kg/m}^3$. Θεωρούμε ότι το νερό είναι ιδανικό ρευστό.

Γ1. Να βρείτε την ταχύτητα εκροής του νερού από την οπή εμβαδού $A_2=20 \text{ cm}^2$.



$$p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho gH = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gH \Rightarrow p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (1)$$

$$p_4 + \frac{1}{2}\rho v_4^2 + \rho gH = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gH \Rightarrow p_4 + \frac{1}{2}\rho v_4^2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \quad (2)$$

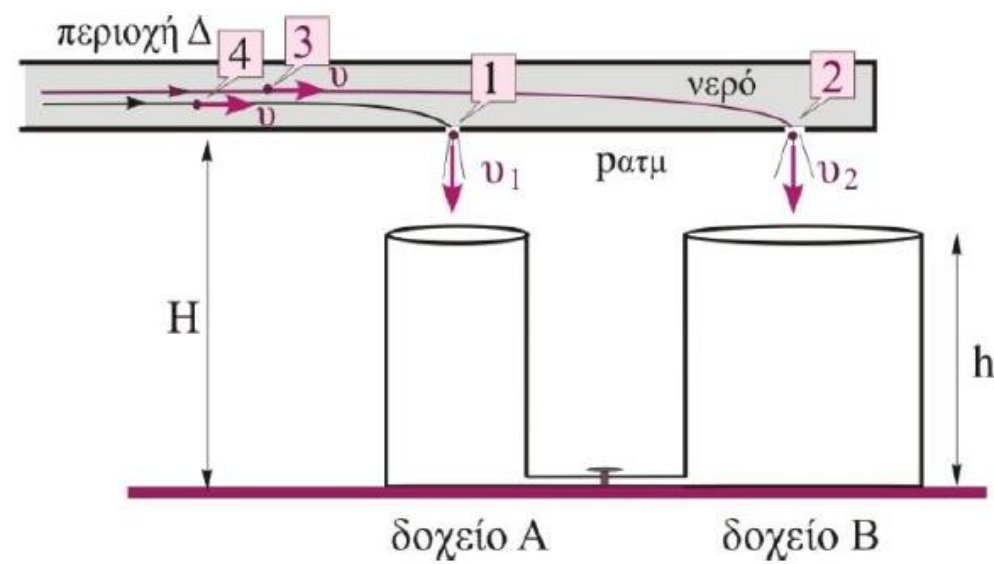
Στην περιοχή Δ οι πιέσεις στα σημεία 3 και 4 είναι ίδιες, επομένως, συγκρίνοντας τις (1) και (2), προκύπτει ότι $u_1=u_2=10\text{m/s}$.

Γ2. Να βρείτε την κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του νερού στα σημεία εκροής του από τις οπές.

Γ2) Η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του νερού στα σημεία εκροής του από τις τρύπες δίνεται από τη σχέση

$$\frac{K}{\Delta V} = \frac{\frac{1}{2} \Delta m \cdot v^2}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \quad \text{ή} \quad \boxed{\frac{K}{\Delta V} = 50.000 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}}$$

Γ3. Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του νερού στον οριζόντιο σωλήνα καθώς και την πίεση σε ένα εσωτερικό σημείο της περιοχής Δ, αυτού.



Γ3) Η παροχή του σωλήνα είναι σταθερή, επομένως σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας έχουμε:

$$\Pi_3 = \Pi_1 + \Pi_2 \quad \text{ή} \quad A v_\Delta = A_1 v_1 + A_2 v_2 \quad \text{ή}$$

$$v_\Delta = \frac{A_1 v_1 + A_2 v_2}{A} = \frac{(10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 + 20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{600 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \quad \text{ή} \quad v_\Delta = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

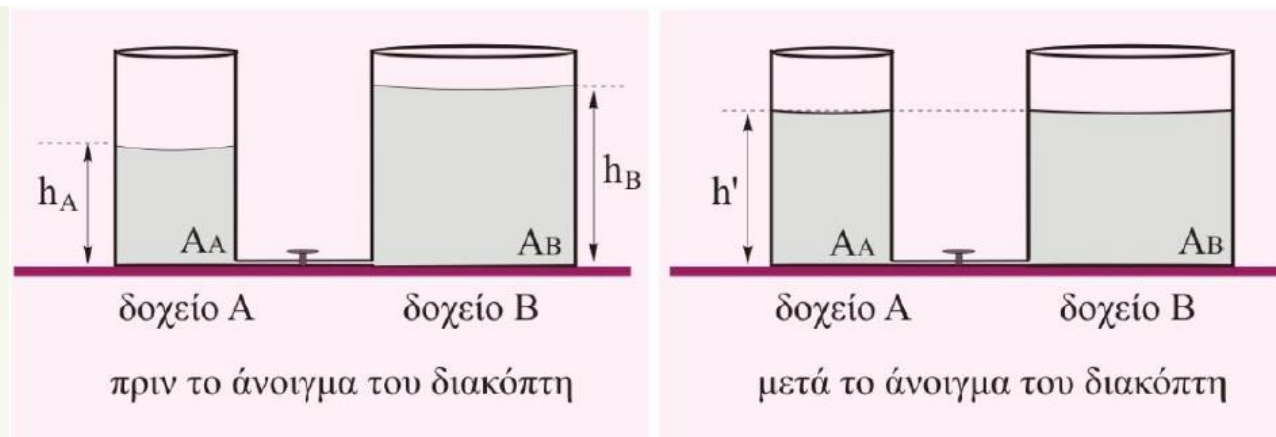
$$p_3 + \frac{1}{2} \rho v_3^2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (1)$$

Η πίεση στο Δ (p_3) θα υπολογιστεί από τη σχέση (1)

$$p_3 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_3^2) = 100.000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} + \frac{1}{2} 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left(\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right) \quad \text{ή}$$

$$p_3 = 149.875 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Γ4. Όταν το ύψος του νερού στο πρώτο δοχείο είναι $h_A=1,2\text{m}$ διακόπτουμε την παροχή νερού και ανοίγουμε τον διακόπτη. Να βρεθεί τελικά σε τι ύψος θα φτάσει το νερό σε κάθε δοχείο.



Γ4) Η αιτία κίνησης των ρευστών είναι η διαφορά πίεσης. Η ροή του νερού από το ένα δοχείο προς το άλλο θα σταματήσει όταν οι πιέσεις εκατέρωθεν του διακόπτη γίνουν ίσες. Αυτό θα συμβεί όταν η ελεύθερες στάθμες του νερού στα δύο δοχεία φθάσουν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.

Αρχικά, βρίσκουμε το ύψος του νερού στο δοχείο B, όταν στο πρώτο δοχείο είναι $h_A=1,2\text{m}$.

Αν με V_A , V_B , συμβολίσουμε τον όγκο νερού που συλλέγεται αντίστοιχα στα δοχεία A και B, τότε για το λόγο τους ισχύει:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{\Pi_B \Delta t}{\Pi_A \Delta t} = \frac{A_B v_2}{A_A v_1} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = 2 \Rightarrow \frac{A_B h_B}{A_A h_A} = 2 \Rightarrow \frac{1,5 A_A h_B}{A_A h_A} = 2 \Rightarrow$$

$$h_B = \frac{2}{1,5} h_A = \frac{2}{1,5} 1,2\text{m} \Rightarrow h_B = 1,6\text{m}$$

Αν με m_A , m_B , συμβολίσουμε τις μάζες νερού που συλλέγονται αντίστοιχα στα δοχεία A και B και m'_A , m'_B τις μάζες νερού που αποκτούν τελικά τα δοχεία, τότε από την αρχή διατήρησης της ύλης μπορούμε να γράψουμε:

$$m_A + m_B = m'_A + m'_B \Rightarrow \rho V_A + \rho V_B = \rho V'_A + \rho V'_B \Rightarrow$$

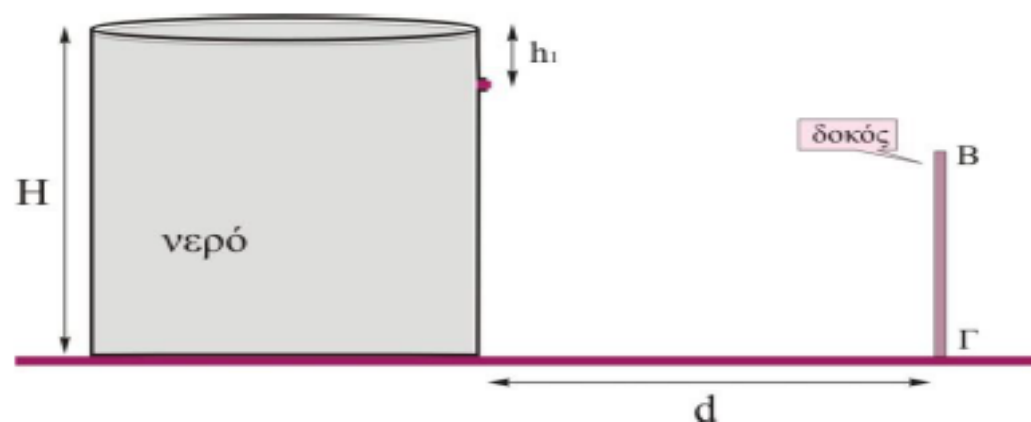
$$A_A h_A + A_B h_B = A_A h' + A_B h' \Rightarrow h' = \frac{A_A h_A + A_B h_B}{A_A + A_B} = \frac{A_A h_A + 1,5 A_A h_B}{A_A + 1,5 A_A} \Rightarrow$$

$$h' = \frac{h_A + 1,5 h_B}{1 + 1,5} = \frac{1,2\text{m} + 1,5 \cdot 1,6\text{m}}{2,5} \Rightarrow h' = 1,44\text{m}$$

ΘΕΜΑ Δ

Μια ανοικτή κυλινδρική δεξαμενή με μεγάλη ακτίνα βάσης και ύψος $H=25\text{m}$ βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο στην επιφάνεια της Γης και είναι γεμάτη με νερό. Στην πλευρική επιφάνεια της δεξαμενής και σε βάθος $h_1=5\text{m}$ από την επιφάνεια του νερού υπάρχει μια μικρή οπή με εμβαδό $A_{\text{οπ}}=\sqrt{5}\text{cm}^2$ η οποία είναι κλεισμένη με μια τάπα.

Στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με τη βάση της δεξαμενής και σε απόσταση $d=24\text{m}$ από τη δεξαμενή υπάρχει μια ακίνητη λεπτή κατακόρυφη δοκός ύψους $h_{\text{δοκού}}=15\text{m}$ η οποία είναι στερεωμένη σε οδηγό, ο οποίος οδηγός μπορεί να κινείται στο οριζόντιο επίπεδο διατηρώντας τη δοκό διαρκώς κατακόρυφη. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ αφαιρούμε την τάπα

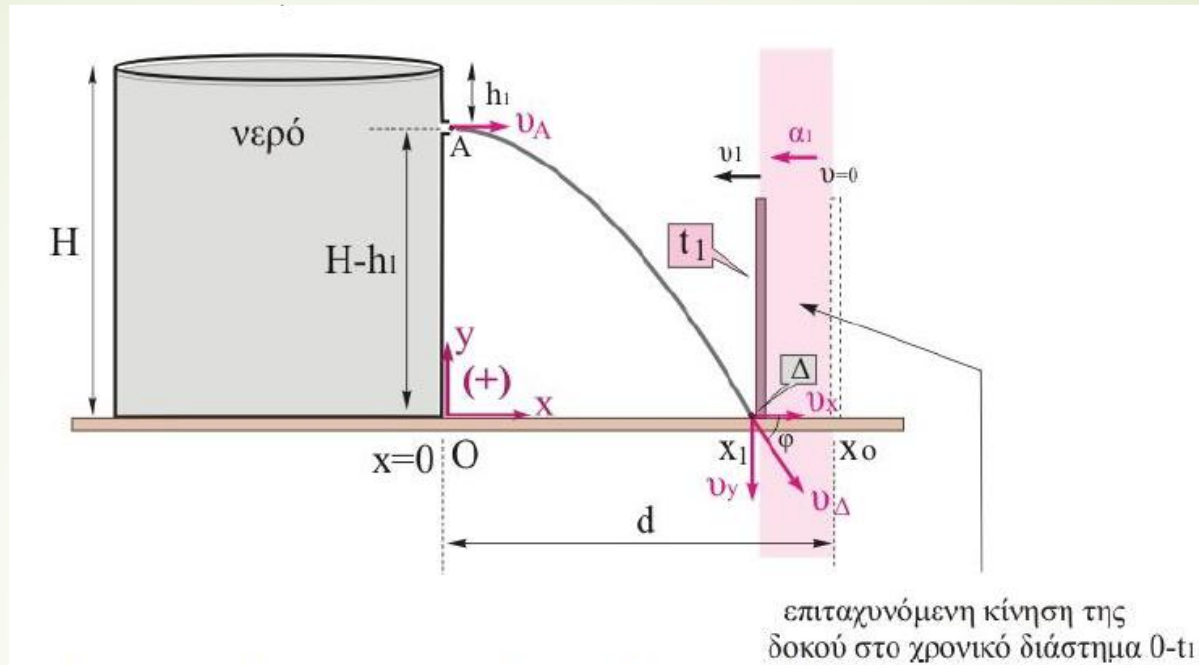


από την οπή και ταυτόχρονα επιταχύνουμε τη δοκό με σταθερή επιτάχυνση, a_1 , προς τη δεξαμενή. Τη χρονική στιγμή t_1 , η πρώτη σταγόνα νερού που φτάνει στο έδαφος συναντά τη δοκό στο χαμηλότερο σημείο της, Γ. Στη συνέχεια επιβραδύνουμε ομαλά τη δοκό με επιτάχυνση a_2 και αυτή σταματά τη χρονική στιγμή t_2 σε μια θέση όπου η φλέβα νερού περνά οριακά πάνω από ψηλότερο σημείο της δοκού, Β. Να βρείτε:

- Δ1. την ταχύτητα του νερού τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος (μέτρο και κατεύθυνση).
- Δ2. το εμβαδόν, A , της κάθετης διατομής της φλέβας λίγο πριν αυτή φτάσει στο έδαφος.
- Δ3. την επιτάχυνση a_1 της δοκού.
- Δ4. την επιτάχυνση a_2 της δοκού και να σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες το διάγραμμα της ταχύτητας της δοκού σε συνάρτηση με το χρόνο από τη στιγμή $t=0$ μέχρι τη στιγμή $t=10\text{s}$.

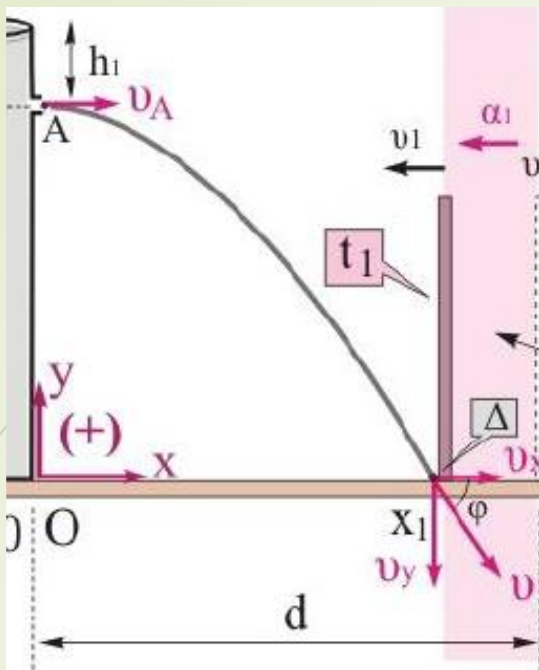
Δίνονται: Η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$, η ατμοσφαιρική πίεση $P_{\text{ατμ.}}=10^5\text{N/m}^2$, η πυκνότητα του νερού $\rho_{\text{νερού}}=10^3\text{Kg/m}^3$ και ότι σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου το ύψος του νερού στη δεξαμενή παραμένει σταθερό.

Δ1. την ταχύτητα του νερού τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος (μέτρο και κατεύθυνση).



Δ1. Όταν η τάπα αφαιρεθεί, το νερό που θα βγει από την οπή θα εκτελέσει οριζόντια βολή από ύψος $H - h_1$ με ταχύτητα v_A της οποίας το μέτρο βρίσκεται από το θεώρημα Torricelli (το ύψος του νερού στη δεξαμενή παραμένει σταθερό).

Προκύπτει $v_A = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5\text{m}}$ ή $v_A = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$



Άξονας Ox: $u_x = u_A = 10 \text{ m/s}$

Άξονας Oy: $v_y = -g \cdot t$

$$H - h_1 = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \Rightarrow 25 \text{ m} - 20 \text{ m} = \frac{1}{2} 10 \text{ m/s}^2 t^2$$

$$\Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

$$v_y = -g \cdot t = -10 \text{ m/s}^2 \cdot 2 \text{ s} \Rightarrow v_y = -20 \text{ m/s}$$

Το μέτρο της ταχύτητας της φλέβας λίγο πριν κτυπήσει στο δάπεδο, σημείο Δ, είναι

$$v_\Delta = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \quad \text{ή} \quad v_\Delta = \sqrt{5} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

με κατεύθυνση που σχηματίζει με το οριζόντιο δάπεδο γωνία φ για την οποία ισχύει:

$$\tan \varphi = \frac{v_y}{v_x} = -2$$

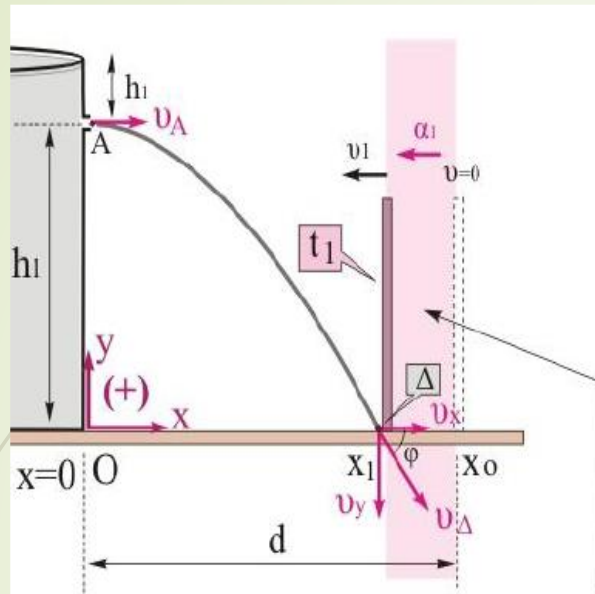
Δ2. το εμβαδόν, A , της κάθετης διατομής της φλέβας λίγο πριν αυτή φτάσει στο έδαφος.

Δ2. Από την εξίσωση συνέχειας, για τη φλέβα νερού έχουμε

$$\Pi = \text{σταθ} \quad \text{ή} \quad A_{\text{οπ}} \cdot v = A \cdot v_{\Delta} \quad \text{ή} \quad A = \frac{A_{\text{οπ}} \cdot v}{v_{\Delta}} = \frac{\sqrt{5} \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\sqrt{5} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \text{ή}$$

$$A = 10^{-4} \text{ m}^2$$

Δ3. την επιτάχυνση α_1 της δοκού.



Δ3. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ που αφαιρούμε την τάπα, η δοκός ξεκινά από τη θέση $x_0=24\text{m}$ και τη στιγμή $t_1=2\text{s}$ φτάνουν ταυτόχρονα στο σημείο Δ (θέση x_1) η πρώτη σταγόνα και η βάση της δοκού.

Η θέση x_1 αντιστοιχεί στην οριζόντια μετατόπιση της σταγόνας και βρίσκεται με αντικατάσταση στη σχέση (2), $t=t_1=2\text{s}$.

$$x_1 = 10 \cdot t_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2\text{s} \quad \text{ή} \quad \boxed{x_1 = 20\text{m}}$$

επιταχυνόμενη κίνηση της
δοκού στο χρονικό διάστημα $0-t_1$

Η δοκός στο ίδιο χρονικό διάστημα ($0\text{s}-2\text{s}$) εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα και η κίνησή της περιγράφεται από τις εξισώσεις :

$$v_{\text{δοκ}} = \alpha_1 \cdot t \quad 0\text{s} \leq t \leq 2\text{s} \quad (5)$$

$$x_{\delta} = x_0 + \frac{1}{2} \alpha_1 \cdot t^2 \quad \text{ή} \quad x_{\delta} = 24 + \frac{1}{2} \alpha_1 \cdot t^2 \text{ (SI) με } 0\text{s} \leq t \leq 2\text{s} \quad (6)$$

Η επιτάχυνση α_1 βρίσκεται με αντικατάσταση στη σχέση (6), $x_{\delta} = x_1 = 20\text{m}$ και $t=t_1=2\text{s}$, προκύπτει,

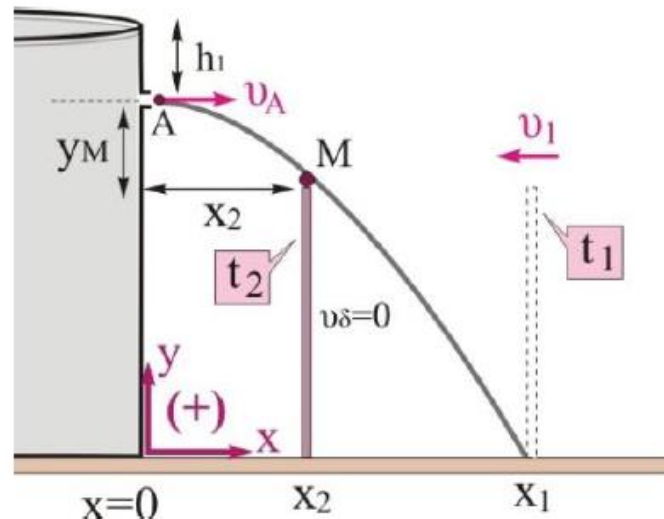
$$20\text{m} = 24\text{m} + \frac{1}{2} \alpha_1 \cdot (2\text{s})^2 \quad \text{ή} \quad \boxed{\alpha_1 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει την κατεύθυνση του διανύσματος της επιτάχυνσης.

Δ4. την επιτάχυνση a_2 της δοκού και να σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες το διάγραμμα της ταχύτητας της δοκού σε συνάρτηση με το χρόνο από τη στιγμή $t=0$ μέχρι τη στιγμή $t=10s$.

Δ4. Τη στιγμή t_1 η δοκός έχει αποκτήσει ταχύτητα, v_1 , που βρίσκεται από τη σχέση (5), αν αντικαταστήσουμε $t=t_1=2s$ και $\alpha_1 = -2 \frac{m}{s^2}$, προκύπτει

$$v_{\text{δοκ}} = \alpha_1 \cdot t \Rightarrow v_1 = -2 \frac{m}{s^2} \cdot 2s \quad \text{ή} \quad v_1 = -4 \frac{m}{s}$$



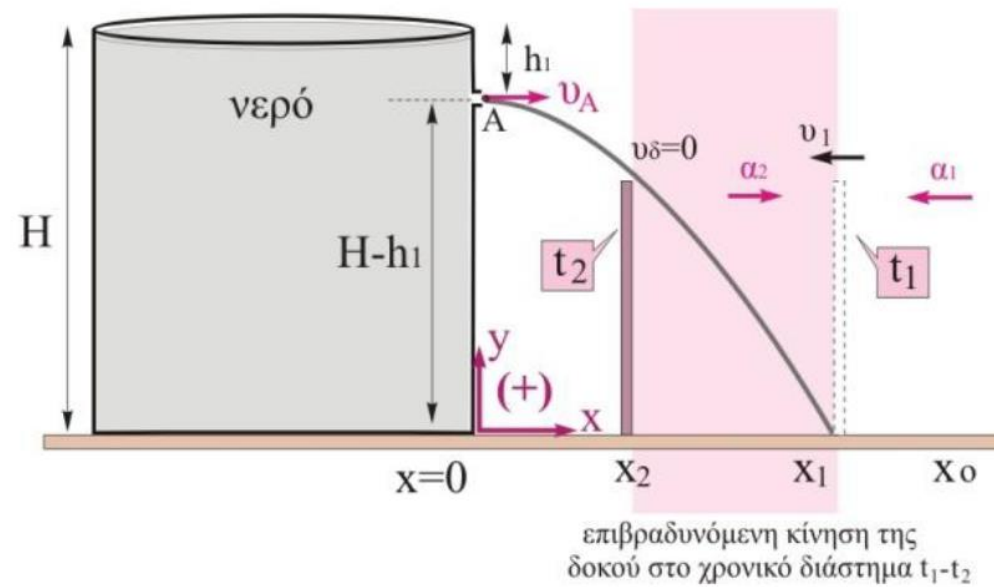
Από τη στιγμή t_1 και μετά η δοκός επιβραδύνεται ομαλά και σταματά τη χρονική στιγμή t_2 στη θέση x_2 όπου η φλέβα νερού περνά οριακά πάνω από ψηλότερο σημείο της σημείο M, (βλέπε σχήμα).

Το σημείο M έχει συντεταγμένες, $x_M = x_2$ και $y_M = h_{\text{δοκού}} = 15m$

Από την εξίσωση τροχιάς της φλέβας νερού, υπολογίζουμε την απόσταση x_2 .

Ο συνδυασμός των σχέσεων (2) και (4) δίνει:

$$y = 20 - 5 \left(\frac{x}{10} \right)^2 \Rightarrow y = 20 - \frac{5}{100} x^2 \quad 15 = 20 - \frac{5}{100} x_2^2 \Rightarrow x_2 = 10m$$



Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση της δοκού στη φάση της επιβραδυνόμενης κίνησης είναι

$$v_{\delta\sigma\kappa} = v_1 + \alpha_2 \Delta t \quad \text{ή} \quad v_{\delta\sigma\kappa} = -4 + \alpha_2 (t - 2) \text{ (SI)} \quad (7)$$

$$x_{\delta} = x_1 + v_{\delta\sigma\kappa} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_2 \cdot \Delta t^2 \quad \text{ή} \quad x_{\delta} = 20 - 4(t - 2) + \frac{1}{2} \alpha_2 \cdot (t - 2)^2 \text{ (SI)} \quad (8)$$

Όταν $v_{\delta\sigma\kappa} = 0$, $x_{\delta} = 10\text{m}$.

Έτσι, οι σχέσεις (7) και (8) γίνονται αντίστοιχα:

$$0 = -4 + \alpha_2 (t - 2) \text{ (SI)} \quad , \quad 10 = 20 - 4(t - 2) + \frac{1}{2} \alpha_2 \cdot (t - 2)^2 \text{ (SI)}$$

$$\alpha_2 = 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{και} \quad t = 7\text{s}$$

Άρα, η συνάρτηση που περιγράφει την ταχύτητα της δοκού σε σχέση με το χρόνο είναι:

$$v_{\text{δοκ}} = \begin{cases} -2t(\text{SI}) & 0 \leq t \leq 2\text{s} \\ -4 + 0,8(t - 2)(\text{SI}) & 2\text{s} \leq t \leq 7\text{s} \end{cases}$$

