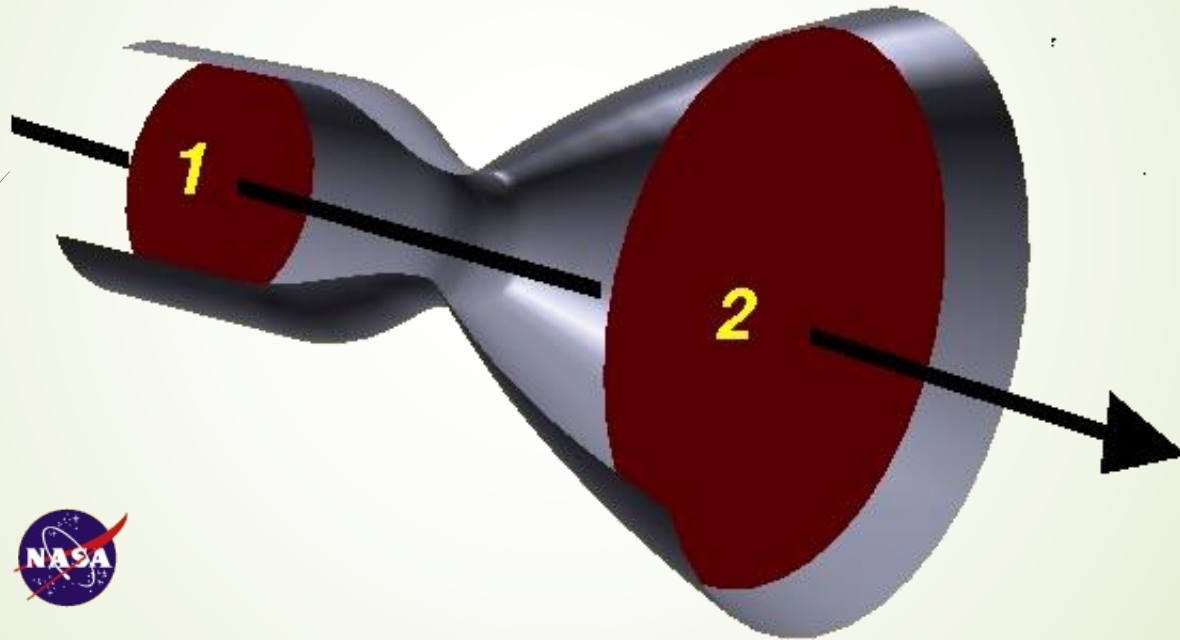


Νόμος του Bernoulli



Ας θυμηθούμε...

2



Η ροή ενός ιδανικού ρευστού είναι **στρωτή**.

Η γραμμή που ενώνει τις διαδοχικές θέσεις ενός στοιχείου ρευστού λέγεται **ρευματική γραμμή**.

Ένα τμήμα ρευστού με μορφή σωλήνα, που η εξωτερική του επιφάνεια ορίζεται από ρευματικές γραμμές, ονομάζεται **φλέβα**.

$$\text{Παροχή φλέβας υγρού } \Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \longrightarrow \Pi = A v$$

Για τη ροή μιας φλέβας ιδανικού ρευστού ισχύουν οι δύο νόμοι:

- **Νόμος της συνέχειας**
- **Νόμος του Bernoulli**

Σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας $\Pi = A v = \text{σταθ.}$

Νόμος του Bernoulli

3

Ο νόμος του Bernoulli αναφέρεται σε δύο οποιαδήποτε σημεία της ίδιας ρευματικής γραμμής μιας φλέβας ρευστού.

Συσχετίζει την πίεση του υγρού, την υψομετρική διαφορά και την ταχύτητα του ρευστού για τα δύο αυτά σημεία.

Ο νόμος (εξίσωση) του Bernoulli αποτελεί έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας στη ροή των ρευστών.



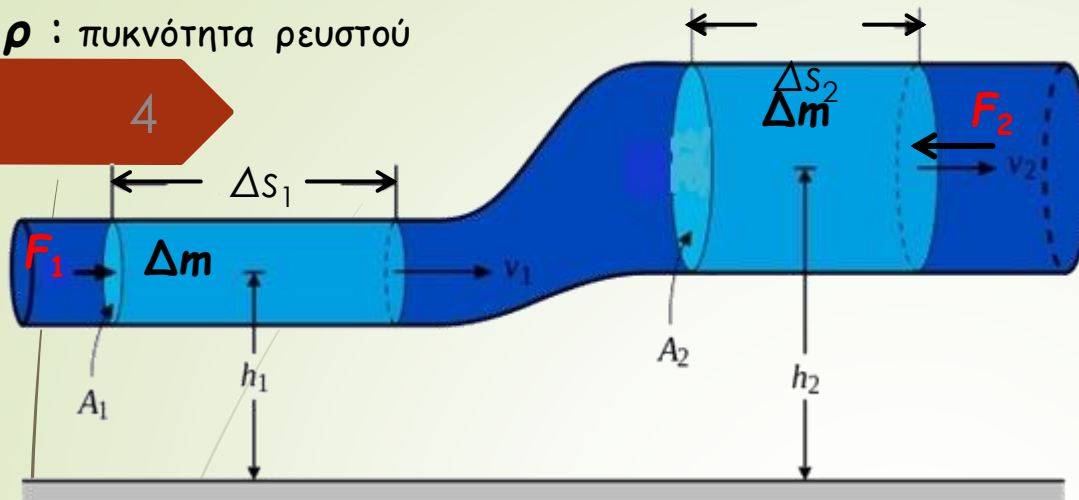
Daniel Bernoulli
(1700 - 1782)



u : ταχύτητα στοιχείου ρευστού

ρ : πυκνότητα ρευστού

4



Μάζα Δm του ρευστού σε δύο διαφορετικές στιγμές κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής. Οι δύο θέσεις έχουν υψομετρική διαφορά $(h_2 - h_1)$.

Εφαρμόζουμε το **Θεώρημα Έργου - Ενέργειας** για τις 2 θέσεις.

$$\Delta K_{1 \rightarrow 2} = W_W + W_{F_1} + W_{F_2} \quad (1)$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} (\Delta m) v_2^2 - \frac{1}{2} (\Delta m) v_1^2 \rightarrow \Delta K = \frac{1}{2} (\rho \Delta V) v_2^2 - \frac{1}{2} (\rho \Delta V) v_1^2 \quad (2)$$

$$W_W = -(\Delta m) g (h_2 - h_1) \rightarrow W_W = -(\rho \Delta V) g (h_2 - h_1) \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} W_{F_1} &= F_1 \Delta s_1 \rightarrow W_{F_1} = p_1 A_1 \Delta s_1 \rightarrow W_{F_1} = p_1 \Delta V \\ W_{F_2} &= -F_2 \Delta s_2 \rightarrow W_{F_2} = -p_2 A_2 \Delta s_2 \rightarrow W_{F_2} = -p_2 \Delta V \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(1) $\xrightarrow{(2), (3), (4)}$

5

$$\frac{1}{2} (\rho \Delta V) v_2^2 - \frac{1}{2} (\rho \Delta V) v_1^2 = -(\rho \Delta V) g (h_2 - h_1) + p_1 \Delta V - p_2 \Delta V$$

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 = -\rho g (h_2 - h_1) + p_1 - p_2$$

$$p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1$$

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{σταθ.} \quad \text{Εξίσωση Bernoulli}$$

p πίεση ή στατική πίεση

$\frac{1}{2} \rho v^2$ κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου ή δυναμική πίεση

$\rho g h$ δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου ή υψομετρική πίεση

Σύμφωνα με την εξίσωση του Bernoulli,

6



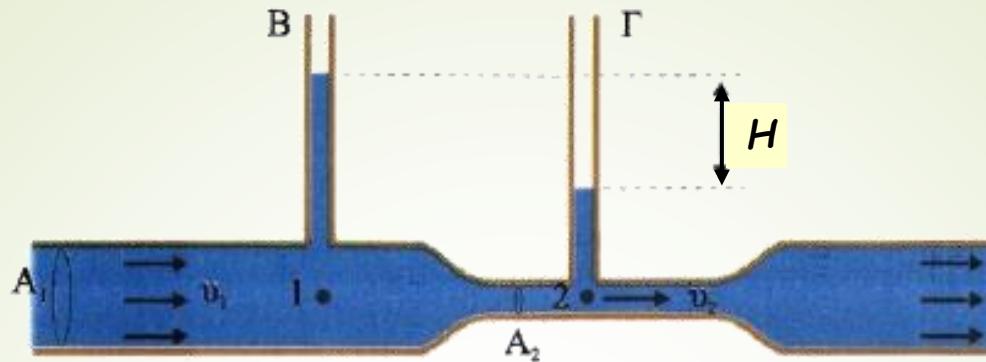
Το **άθροισμα** της **πίεσης**, της **κινητικής ενέργειας** ανά μονάδα όγκου και της **δυναμικής ενέργειας** ανά μονάδα όγκου **έχει σταθερή τιμή**, σε κάθε σημείο της ίδιας ρευματικής γραμμής.

Παρατήρηση

Η εξίσωση του Bernoulli με τη μορφή που παρουσιάσαμε ισχύει μόνο για ιδανικό ρευστό και για δύο σημεία που βρίσκονται στην ίδια ρευματική γραμμή μιας φλέβας ρευστού.

Η μορφή της εξίσωσης Bernoulli για οριζόντιο σωλήνα

7



Αν ο **σωλήνας** είναι **οριζόντιος**, δεν υπάρχει υψομετρική διαφορά h και η εξίσωση Bernoulli $p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{σταθ.}$, γίνεται

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{σταθ.}$$

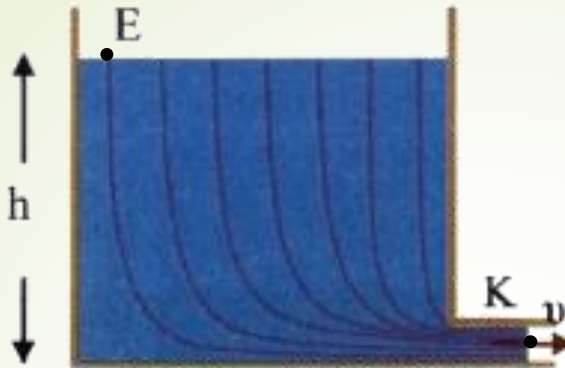
Παρατηρούμε ότι εκεί που **στενεύει ο σωλήνας** (περιοχή A_2)

- η **ταχύτητα αυξάνεται** $v_2 > v_1$ (πύκνωση ρευματικών γραμμών)
- η **πίεση ελαττώνεται** $p_\Gamma < p_B$ (η στάθμη στο στενό σωλήνα Γ πιο χαμηλά)

Θεώρημα Torricelli

(Υπολογισμός της ταχύτητας εκροής υγρού από ανοικτό δοχείο)

8



Το δοχείο είναι ανοικτό στο πάνω μέρος (E) και έχει μικρό άνοιγμα εκροής στο κάτω μέρος (K).

Εφαρμόζουμε το νόμο Bernoulli για τις θέσεις E και K.

$$p_E + \frac{1}{2}\rho v_E^2 + \rho g h_E = p_K + \frac{1}{2}\rho v_K^2 + \rho g h_K \quad (1)$$

$$h_E = h, \quad h_K = 0 \quad (2) \quad p_E = p_K = p_{at} \quad (3)$$

Η ταχύτητα v_E με την οποία κατεβαίνει η στάθμη του υγρού είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα εκροής v_K και γι' αυτό θεωρείται αμελητέα ($v_E=0$). (4)

$$(1) \xrightarrow[(4)]{(2), (3)} \cancel{p}_{at} + \cancel{\rho} g h = \cancel{p}_{at} + \frac{1}{2} \cancel{\rho} v_K^2 \longrightarrow \mathbf{v_K = \sqrt{2gh}}$$

Η σχέση $v_K = \sqrt{2gh}$ αποτελεί τη μαθηματική έκφραση του θεωρήματος Torricelli.

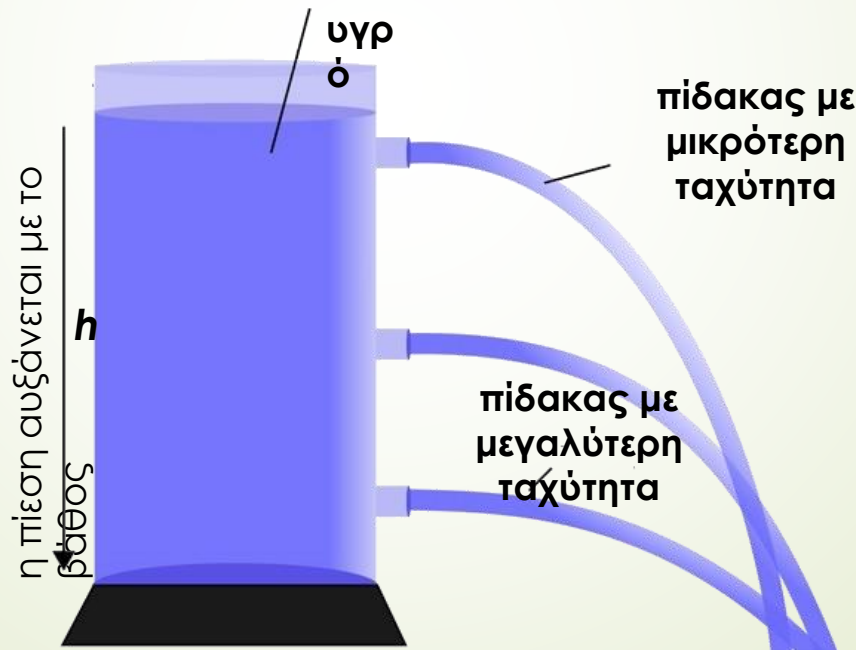


Η ταχύτητα εκροής υγρού από στόμιο που βρίσκεται σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνειά του είναι ίση με την ταχύτητα που θα είχε το υγρό αν έπεφτε ελεύθερα από ύψος h .

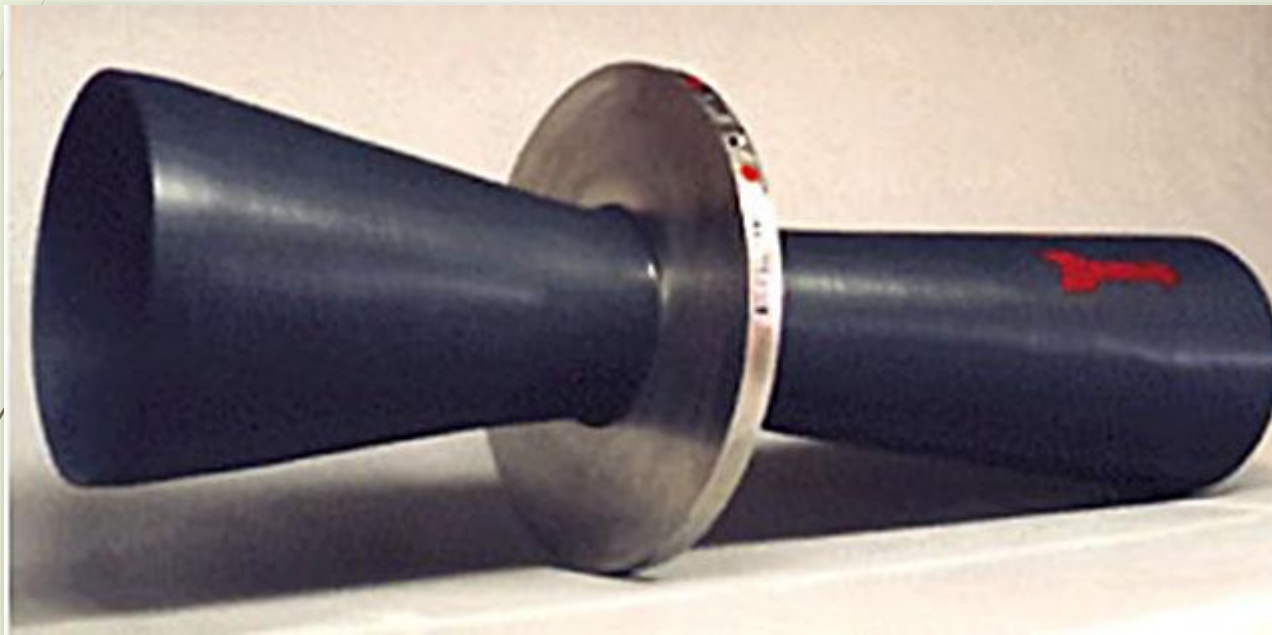
$$v = gt$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

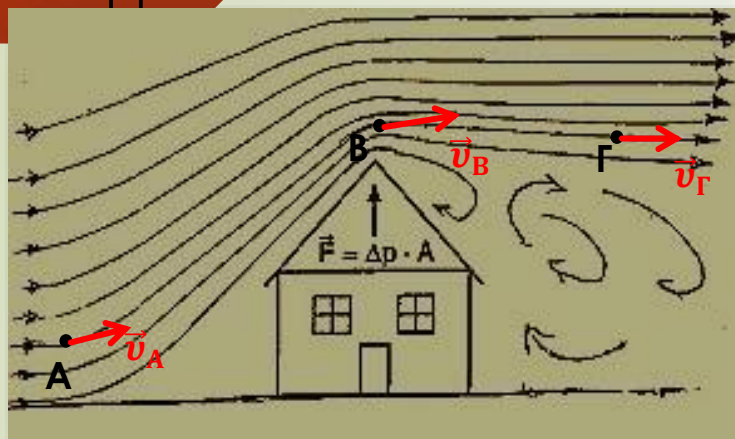


Πρακτικές εφαρμογές του νόμου Bernoulli



Βεντουρίμετρο 6" Westfall Model 2300

Αρπαγή στέγης



Στην περιοχή Β (πάνω από τη στέγη) οι ρευματικές γραμμές είναι πιο πυκνές. Γι' αυτό εκεί, η **ταχύτητα του ανέμου είναι μεγαλύτερη** και **η πίεση μικρότερη**, απ' ότι στα πιο απομακρυσμένα σημεία Α ή Γ, που θεωρούμε ότι η πίεση είναι $p_A = p_\Gamma = p_{at} = 1 \text{ atm}$).

Στο εσωτερικό του σπιτιού που είναι κλειστό, η πίεση είναι επίσης ίση με την ατμοσφαιρική ($p_{at} = 1 \text{ atm}$).

Έτσι, ανάμεσα στο πάνω και το κάτω μέρος της στέγης υπάρχει **διαφορά πίεσης Δp** , με αποτέλεσμα την **πρόκληση δύναμης $\vec{F}$** που τείνει ν' ανυψώσει τη στέγη.

Ροόμετρο του Venturi (Βεντουρίμετρο)

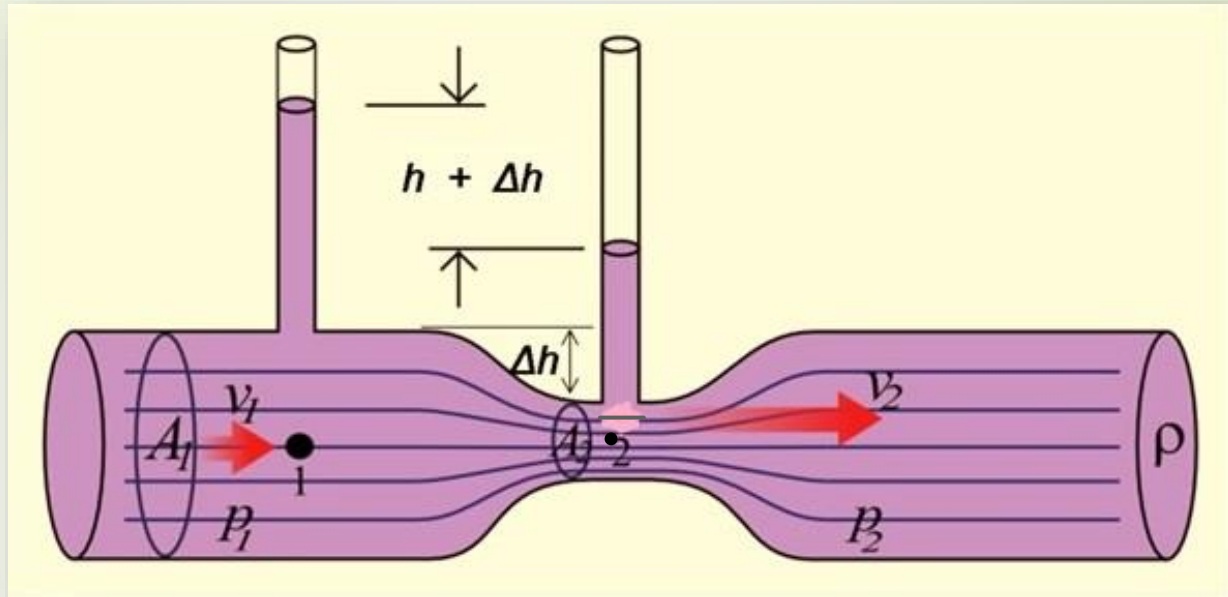
Το **βεντουρίμετρο** ή **σωλήνας του Venturi** είναι μια συσκευή με την οποία μπορούμε να μετρήσουμε την **ταχύτητα ροής ρευστού** σε κάποιο σημείο ενός σωλήνα.



Giovanni Battista
Venturi (1746-1822)



Εφαρμόζουμε την **εξίσωση Bernoulli** και την **εξίσωση συνέχειας** στα σημεία 1 και 2 που βρίσκονται στο ίδιο ύψος, στην ίδια ρευματική γραμμή του ρευστού που βρίσκεται στον σωλήνα.



$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (1) \quad \text{εξίσωση Bernoulli}$$

$$\text{εξίσωση συνέχειας} \quad A_1 v_1 = A_2 v_2 \longrightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \quad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \frac{A_1^2}{A_2^2} v_1^2 \longrightarrow$$

$$\rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right) \quad (3)$$

Όμως $p_1 = p_{at} + \rho g h_1$ και $p_2 = p_{at} + \rho g h_2$ (4)

(4) $\xrightarrow[\text{κατά μέλη}]{\text{αφαίρεση}}$ $p_1 - p_2 = \rho g (h_1 - h_2) = \rho g h$ (5)

(3) και (5) $\rightarrow \rho g h = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)$

$$\rightarrow v_1^2 = \frac{2gh}{\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1}$$

Τελικά

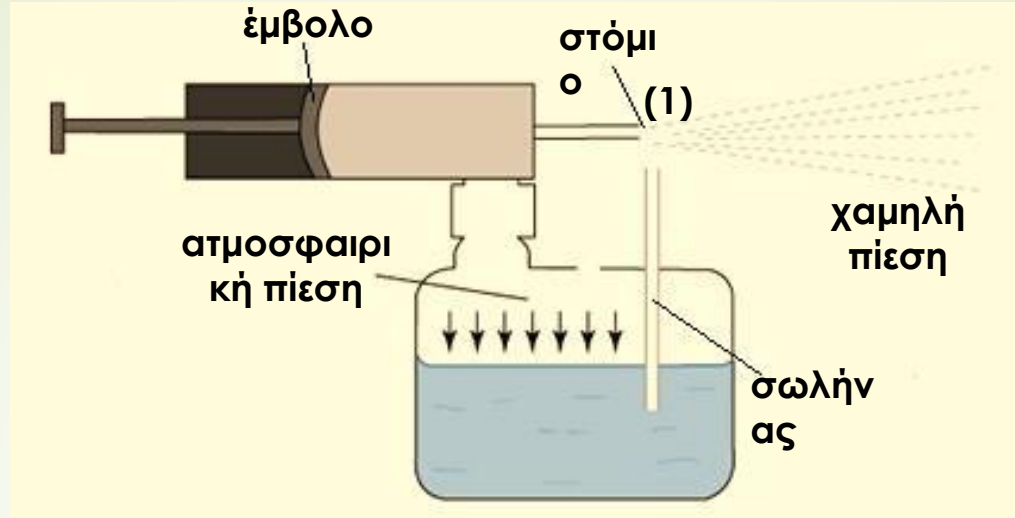
$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1}}$$

Όμοια

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2}}$$

Ψεκαστήρας

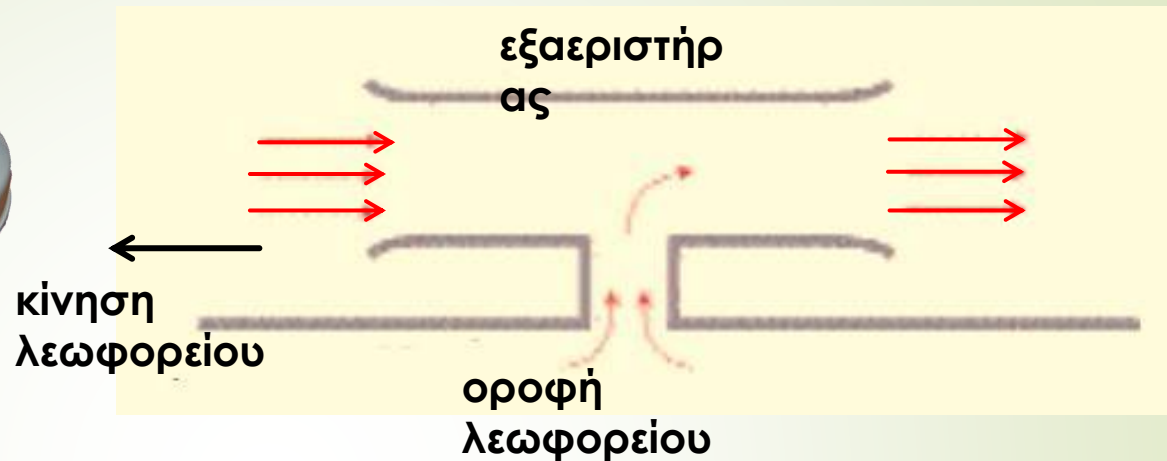
15



- Πιέζοντας γρήγορα το έμβολο δημιουργούμε εκροή αέρα από το στόμιο του σωλήνα.
- Η φλέβα αέρα, που βγαίνει από το στόμιο, ανοίγει, καθώς απομακρύνεται από αυτό.
- Στη θέση (1) (στένωση) η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη και η πίεση μικρότερη.
- Λόγω της υποπίεσης στην (1), το υγρό στο σωλήνα ανυψώνεται, παρασύρεται από το ρεύμα αέρα, σταγονοποιείται κι εκτοξεύεται.

Εξαεριστήρας λεωφορείου

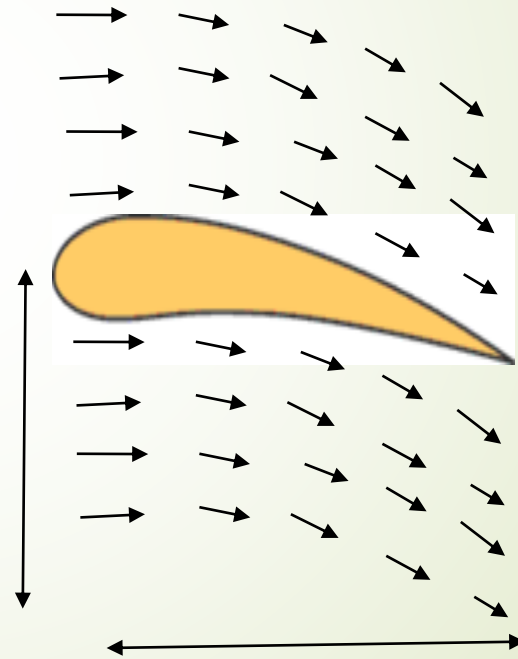
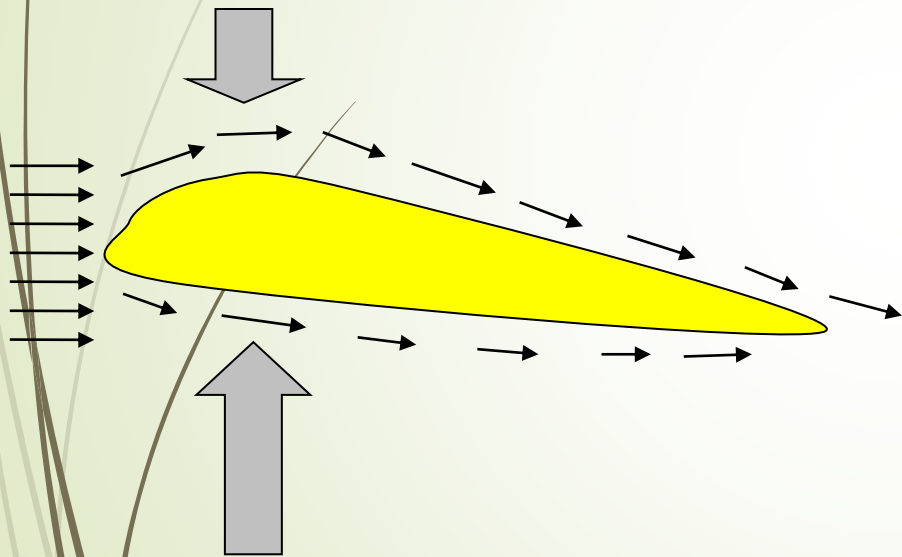
16



Καθώς το λεωφορείο κινείται προς τ' αριστερά, οι ρευματικές γραμμές πυκνώνουν στον εξαεριστήρα, με αποτέλεσμα να δημιουργείται υποπίεση.

Λόγω της υποπίεσης, μάζες αέρα μετακινούνται από το εσωτερικό του λεωφορείου προς τα έξω.

Πώς πετούν τ' αεροπλάνα Φαινόμενο Coanda



➤ Ερωτήσεις στη « Μηχανική των Ρευστών »
με το πρόγραμμα Hot Potatoes

Η ανάρτηση περιέχει ερωτήσεις από το σύνολο του θέματος « Μηχανική των ρευστών ».

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

(Θα βρείτε 2 αρχεία μ' ένα σύνολο 50 ερωτήσεων) [εδώ](#)

➤ Τα θέματα των Πανελλαδικών Εξετάσεων για τη
« Μηχανική των Ρευστών » [εδώ](#).

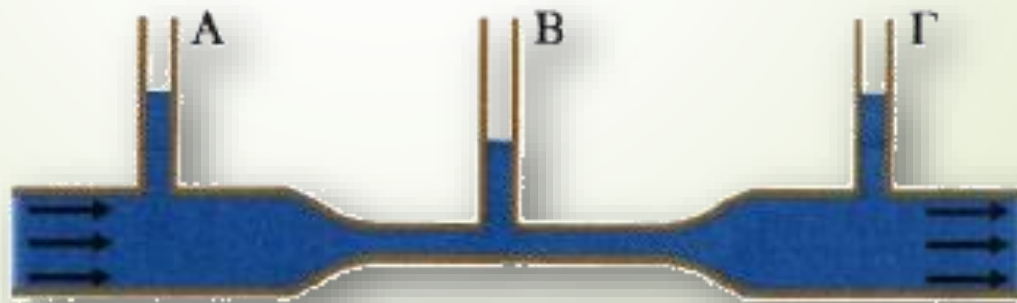
➤ Θέματα σε word για τη « Μηχανική των Ρευστών »
από τα Ψηφιακά Εκπαιδευτικά Βοηθήματα [εδώ](#).



Ερωτήσεις από το βιβλίο
(από σελ. 104)

3.11 Τα πλοία δεν επιτρέπεται να κινούνται παράλληλα, σε μικρή μεταξύ τους απόσταση, γιατί «το ρεύμα τα σπρώχνει να πλησιάσουν πιο πολύ και υπάρχει κίνδυνος να συγκρουστούν». Πώς δικαιολογείται αυτή η πρόταση;

3.12 Εξηγήστε γιατί η στάθμη του νερού στο σωλήνα B είναι πιο χαμηλά από ό,τι στους σωλήνες A και Γ.



3.13 Γιατί οι πιλότοι προτιμούν να απογειώνουν τα αεροπλάνα αντίθετα στον άνεμο;

3.14 Ένα αεροπλάνο που πετάει με σταθερή οριζόντια ταχύτητα σε ύψος h δέχεται δυναμική άνωση A_1 . Το ίδιο αεροπλάνο όταν πετάει με την ίδια ταχύτητα σε ύψος $2h$ δέχεται δυναμική άνωση A_2 για την οποία ισχύει:

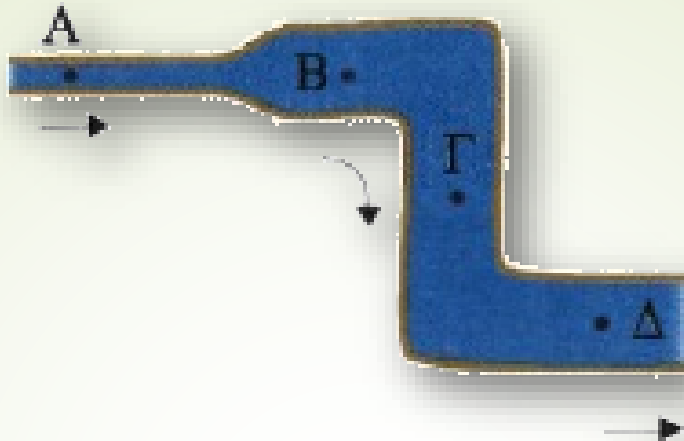
α. $A_1 < A_2$.

β. $A_1 = A_2$.

γ. $A_1 > A_2$.

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

(Το βάρος του αεροπλάνου θεωρείται ότι δεν αλλάζει στα δύο διαφορετικά ύψη).



3.15 Το σχήμα παριστάνει ένα σωλήνα μέσα στον οποίο ρέει νερό. Ταξινομήστε τα σημεία A, B, Γ και Δ κατά τη σειρά με την οποία

α. αυξάνεται η ταχύτητα ροής του νερού.

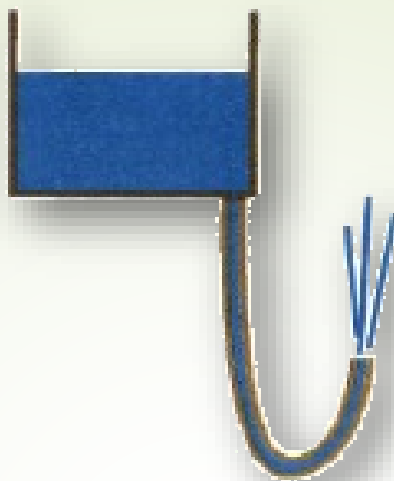
β. αυξάνεται η πίεση.

α. $U_A > U_B = U_\Gamma = U_\Delta$

β. $p_\Delta > p_\Gamma > p_B > p_A$

3.16 Συμπληρώστε τις προτάσεις:

Σύμφωνα με το νόμο του Bernoulli το άθροισμα της πίεσης, της **κινητικής** ενέργειας και της **δυναμικής** ενέργειας ανά μονάδα όγκου έχει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής. Ο νόμος του Bernoulli είναι έκφραση της αρχής **διατήρησης της ενέργειας** στα ρευστά.



3.17 Μέχρι ποιο ύψος θα φτάσει ο πίδακας του νερού; Θεωρήστε ότι η επιφάνεια του νερού στο δοχείο είναι πολύ μεγάλη και ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Αφού δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας, μέχρι το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού.

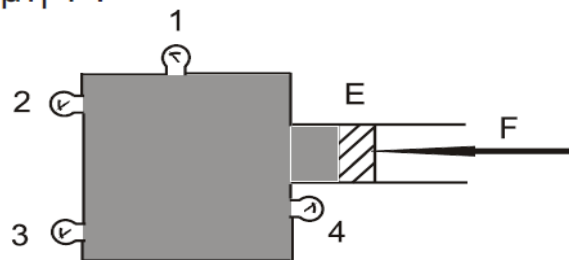


Θέματα Πανελληνίων

1.

26

Το δοχείο του σχήματος 1 είναι γεμάτο με υγρό και κλείνεται με έμβολο Ε στο οποίο ασκείται δύναμη F .



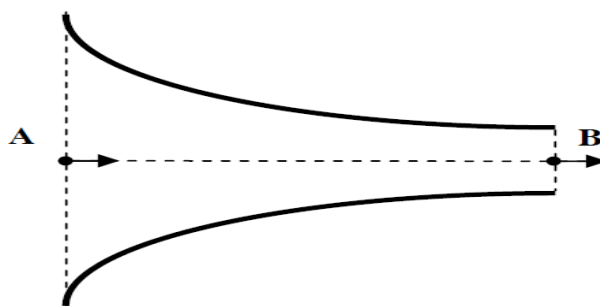
Σχήμα 1

Όλα τα μανόμετρα 1, 2, 3, 4 δείχνουν πάντα

- α) την ίδια πίεση, όταν το δοχείο είναι εντός του πεδίου βαρύτητας
- ☒ β) την ίδια πίεση, όταν το δοχείο βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας
- γ) διαφορετική πίεση, αν το δοχείο βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας
- δ) την ίδια πίεση, ανεξάρτητα από το αν το δοχείο είναι εντός ή εκτός του πεδίου βαρύτητας.

2.

Στον οριζόντιο σωλήνα του σχήματος 1, κατά τη φορά ροής του ιδανικού ρευστού από το σημείο Α στο σημείο Β της ίδιας οριζόντιας ρευματικής γραμμής



Σχήμα 1

- α. η πυκνότητα μειώνεται.
- β. η παροχή του σωλήνα μειώνεται.
- γ. η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ιδανικού ρευστού αυξάνεται.
- ☒ δ. η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ιδανικού ρευστού αυξάνεται.

3. Σε μία φλέβα ρέει ιδανικό ρευστό. Όταν σε μια περιοχή του υγρού οι ρευματικές γραμμές πυκνώνουν, τότε:

- α) η ταχύτητα ροής αυξάνεται και η πίεση ελαττώνεται
- β) η παροχή της φλέβας αυξάνεται και η πίεση αυξάνεται
- γ) η παροχή της φλέβας ελαττώνεται και η πίεση ελαττώνεται
- δ) η ταχύτητα ροής αυξάνεται και η πίεση αυξάνεται.

4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Η ταχύτητα ροής ενός ασυμπίεστου ιδανικού ρευστού κατά μήκος ενός σωλήνα που δεν έχει σταθερή διατομή, είναι μεγαλύτερη εκεί που πυκνώνουν οι ρευματικές γραμμές.

Σ

Η ροή ενός ρευστού είναι στρωτή, όταν παρουσιάζει στροβίλους.

Λ

Η παροχή υγρού σε σωλήνα μετριέται σε $\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.

Σ

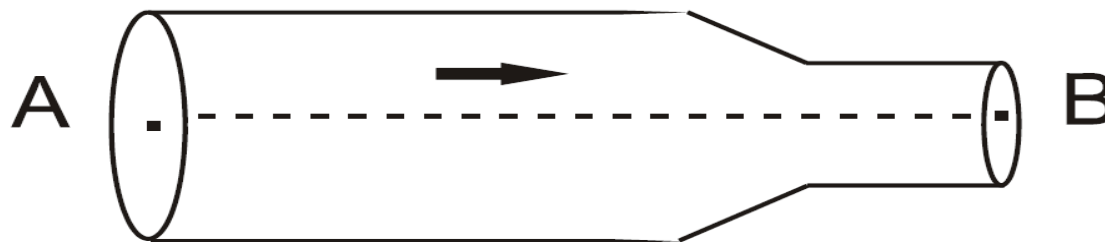
Η εξίσωση της συνέχειας είναι άμεση συνέπεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας στη ροή των ιδανικών ρευστών.

Λ

5.

Στον οριζόντιο σωλήνα, του σχήματος 3, ασυμπίεστο ιδανικό ρευστό έχει στρωτή ροή από το σημείο A προς το σημείο B.

2



Σχήμα 3

Η διατομή A_A του σωλήνα στη θέση A είναι διπλάσια από τη διατομή A_B του σωλήνα στη θέση B. Η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου στο σημείο A έχει τιμή ίση με Λ . Η διαφορά της πίεσης ανάμεσα στα σημεία A και B είναι ίση με:

i. $\frac{3\Lambda}{4}$

ii. 3Λ

iii. 2Λ .

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

$$A_A = 2A_B$$

Εφαρμόζω εξίσωση συνέχειας μεταξύ A και B

$$\Pi_A = \Pi_B \Rightarrow A_A v_A = A_B v_B \Rightarrow 2A_B v_A = A_B v_B \Leftrightarrow v_B = 2v_A \quad (1)$$

Εφαρμόζω Bernoulli μεταξύ A και B

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + 0 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + 0 \Rightarrow P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho v_B^2 - \frac{1}{2}\rho v_A^2$$

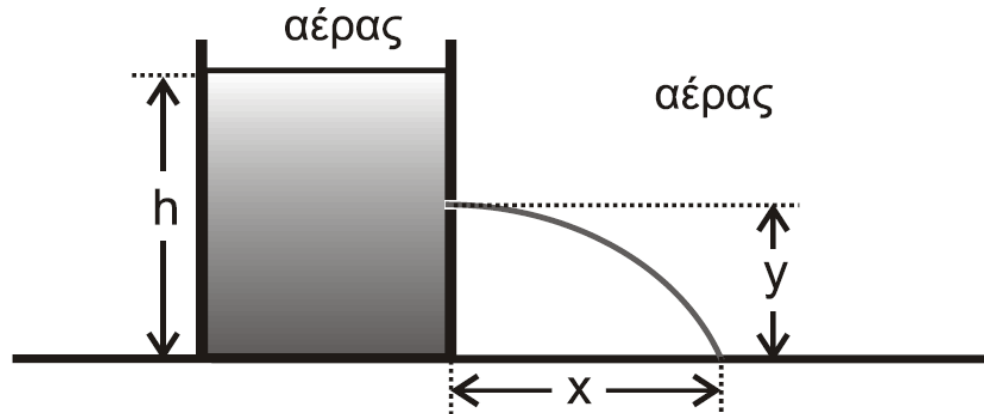
$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho \cdot 4v_A^2 - \frac{1}{2}\rho v_A^2 \Rightarrow P_A - P_B = 4\Lambda - \Lambda \Rightarrow P_A - P_B = 3\Lambda$$

Άρα Σωστό το ii)

6.

30

Δοχείο με κατακόρυφα τοιχώματα περιέχει ένα ασυμπίεστο ιδανικό υγρό. Το ύψος του υγρού στο δοχείο είναι h , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.



Σχήμα 2

Στο δοχείο ανοίγουμε μικρή οπή στο πλευρικό του τοίχωμα, σε ύψος $y = h / 2$ από τη βάση του. Η φλέβα που δημιουργείται, συναντά το έδαφος σε οριζόντια απόσταση x από τη βάση του δοχείου.

Η απόσταση x είναι ίση με :

- i. h ii. $h / 2$ iii. $2 h$

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Η απόσταση της οπής από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού είναι:

$$d = h - y = h - \frac{h}{2} \Rightarrow d = \frac{h}{2} \quad (1)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Torricelli η οριζόντια ταχύτητα εκροής του υγρού είναι:

$$v = \sqrt{2gd} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} v = \sqrt{2g \frac{h}{2}} \Rightarrow v = \sqrt{gh} \quad (2)$$

Η κατακόρυφη κίνηση της φλέβας είναι ελεύθερη πτώση, οπότε ο χρόνος της κίνησης είναι:

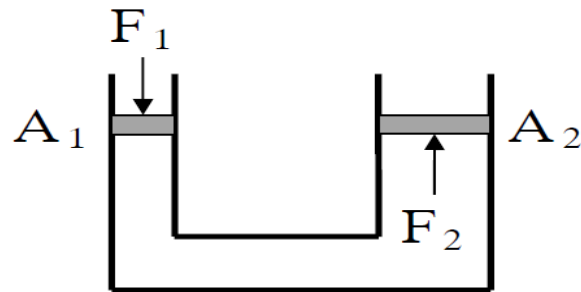
$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{h}{g}} \quad (3)$$

Η οριζόντια κίνηση της φλέβας είναι ευθύγραμμη ομαλή, οπότε η οριζόντια απόσταση x είναι:

$$x = v \cdot t \stackrel{(2)}{\Rightarrow} x = \sqrt{gh} \cdot \sqrt{\frac{h}{g}} \Rightarrow x = \sqrt{gh \cdot \frac{h}{g}} \Rightarrow x = h.$$

Σωστό το i.

Το σχήμα 2 παριστάνει την αρχή λειτουργίας του υδραυλικού ανυψωτήρα, που περιέχει ιδανικό ρευστό.



Σχήμα 2

Ασκούμε στο μικρό έμβολο του ανυψωτήρα, διατομής A_1 , δύναμη μέτρου F_1 κάθετη σε αυτό. Το μέτρο της δύναμης F_2 , που ασκεί το υγρό στο έμβολο διατομής A_2 , είναι ίσο με:

i. $F_1 \frac{A_2^2}{A_1^2}$

ii. $F_1 \frac{A_1}{A_2}$

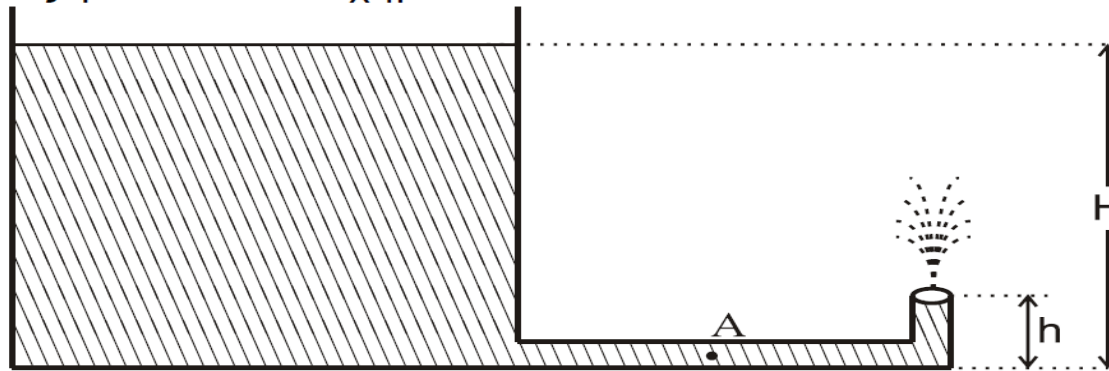
iii. $F_1 \frac{A_2}{A_1}$

Θεωρήστε ότι τα έμβολα είναι αβαρή.

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

8. Ανοιχτό κυλινδρικό δοχείο με κατακόρυφα τοιχώματα περιέχει νερό μέχρι ύψους H . Από τον πυθμένα του πλευρικού τοιχώματος του δοχείου εξέρχεται λεπτός κυλινδρικός σωλήνας σταθερής διατομής. Ο σωλήνας είναι αρχικά οριζόντιος και στη συνέχεια κάμπτεται, ώστε να γίνει κατακόρυφος προς τα πάνω. Το άνοιγμα του σωλήνα βρίσκεται σε ύψος $h = \frac{H}{5}$ πάνω από το επίπεδο του πυθμένα του δοχείου, όπως φαίνεται στο σχήμα 2:



Σχήμα 2

Να θεωρήσετε ότι:

- η ταχύτητα με την οποία κατεβαίνει η στάθμη του νερού στο ανοιχτό δοχείο είναι αμελητέα
- το νερό συμπεριφέρεται ως ιδανικό ρευστό
- η ατμοσφαιρική πίεση παραμένει σταθερή.

Το μέτρο της ταχύτητας v_A με την οποία ρέει το νερό στο σημείο A του οριζόντιου σωλήνα είναι ίσο με:

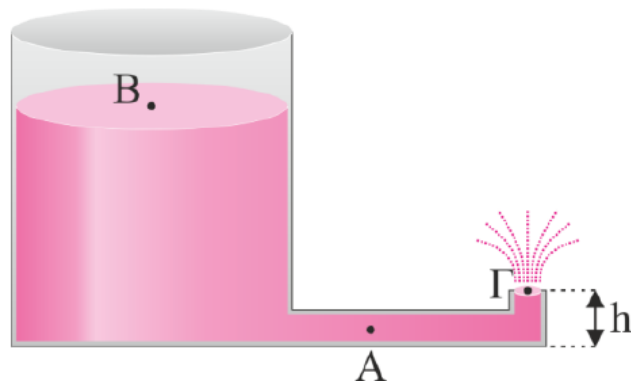
i. $\sqrt{2gh}$

ii. $\sqrt{10gh}$

iii. $2\sqrt{2gh}$.

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Εξίσωση Bernoulli $B \rightarrow \Gamma$:

$$\left. \begin{aligned} p_B + \rho \cdot g \cdot H &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\Gamma^2 + p_\Gamma + \rho gh \\ p_B &= p_\Gamma = p_0, H = 5 \cdot h \end{aligned} \right\} \Rightarrow p_0 + \rho \cdot g \cdot 5h = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\Gamma^2 + p_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_\Gamma = \sqrt{8gh} = 2\sqrt{2gh} \quad (1)$$

όπου p_0 η ατμοσφαιρική πίεση.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των σημείων A και Γ προκύπτει ότι:

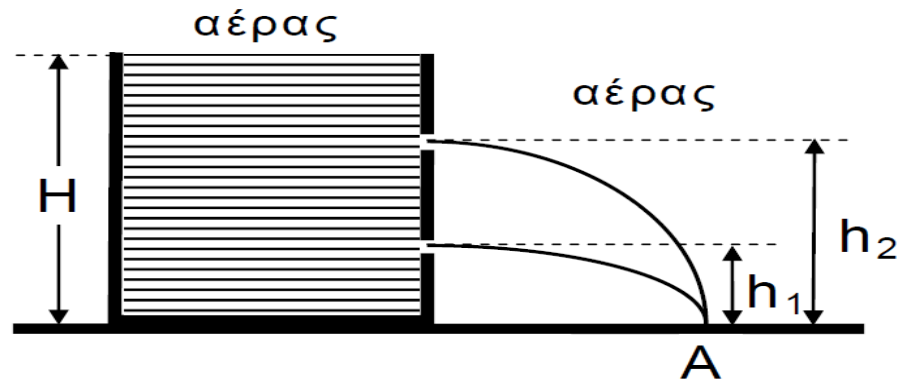
$$\Pi_A = \Pi_\Gamma \Rightarrow A_A \cdot v_A = A_\Gamma \cdot v_\Gamma \xrightarrow{A_A = A_\Gamma} v_A = v_\Gamma = 2\sqrt{2gh}$$

Σωστή απάντηση είναι η (iii)

9.

3.

Ένα δοχείο περιέχει νερό μέχρι ύψους H και βρίσκεται πάνω σε ένα οριζόντιο δάπεδο. Ανοίγουμε δύο μικρές οπές στο δοχείο σε ύψη h_1 και $h_2 = 3 h_1$ πάνω από το οριζόντιο δάπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Οι δύο φλέβες του νερού που εκρέει από τις δύο μικρές οπές συναντούν το δάπεδο στο ίδιο σημείο Α.



Σχήμα 2

Να θεωρήσετε ότι:

- η ταχύτητα με την οποία κατεβαίνει η στάθμη του νερού στο ανοιχτό δοχείο είναι αμελητέα
- το νερό συμπεριφέρεται ως ιδανικό ρευστό
- η ατμοσφαιρική πίεση παραμένει σταθερή.

Η σχέση που ισχύει είναι

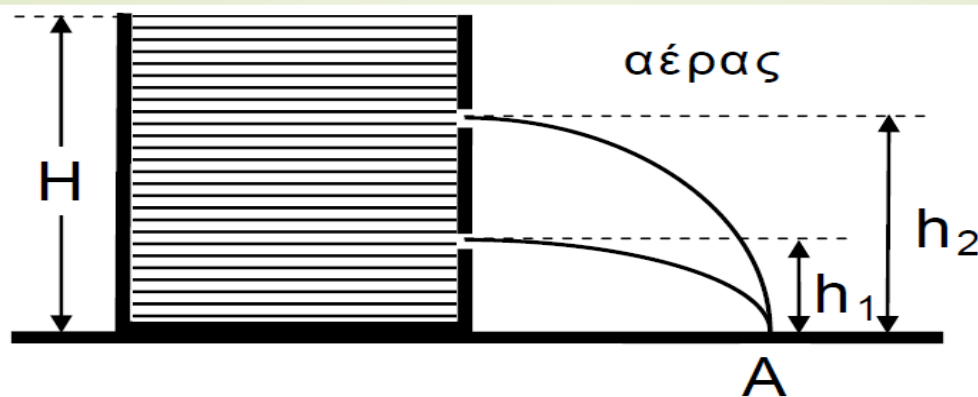
i. $H = 4 h_1$

ii. $H = 5 h_1$

iii. $H = 6 h_1$

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli μεταξύ ενός σημείου B στην ανώτερη ελεύθερη επιφάνεια του νερού και του σημείου 1 (της ίδιας ρευματικής γραμμής με το B) στην έξοδο της χαμηλότερης οπής (1) έχουμε ότι:

$$p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g(H - h_1) = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{p_B = p_1 = p_{atm}}} \text{ και } v_B \cong 0 \Rightarrow \rho g(H - h_1) = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(H - h_1)} \quad (\text{Θεώρημα Torricelli})$$

Όμοια, από το θεώρημα Torricelli για την ταχύτητα εξόδου ενός στοιχείου ρευστού από την υψηλότερη οπή (2), θα έχουμε:

$$v_2 = \sqrt{2g(H - h_2)} = \sqrt{2g(H - 3h_1)}$$

Άρα, για τα βεληνεκή των βολών (τα οποία είναι ίσα) προκύπτει ότι:

$$s_1 = s_2 \Rightarrow v_1 t_1 = v_2 t_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2g(H - h_1)} \cdot \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{2g(H - 3h_1)} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 3h_1}{g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_1(H - h_1) = 3h_1(H - 3h_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H - h_1 = 3H - 9h_1 \Rightarrow 2H = 8h_1 \Rightarrow$$

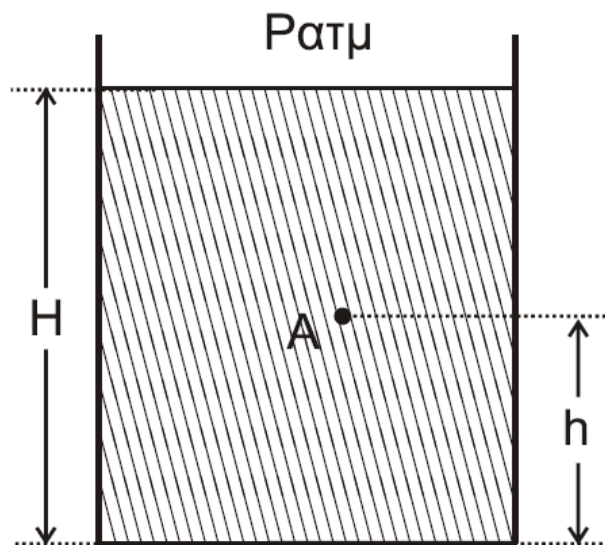
$$\Rightarrow H = 4h_1.$$

Σωστή απάντηση είναι η **i**.

10.

Το ανοιχτό κυλινδρικό δοχείο του σχήματος βρίσκεται εντός πεδίου βαρύτητας με επιτάχυνση βαρύτητας g και περιέχει νερό πυκνότητας ρ . Το ύψος του νερού στο δοχείο είναι H . Στο σημείο A , που απέχει απόσταση h από τον πυθμένα του δοχείου, η υδροστατική πίεση είναι ίση με

- α) $P_{atm} + \rho gh$
- ☒ β) $P_{atm} + \rho g(H-h)$
- γ) ρgh
- δ) $\rho g(H-h)$.



11.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Κατά τη ροή ιδανικού ρευστού σε οριζόντιο σωλήνα, όταν οι ρευματικές γραμμές παρουσιάζουν την ίδια πυκνότητα, η ταχύτητα ροής δεν μεταβάλλεται.

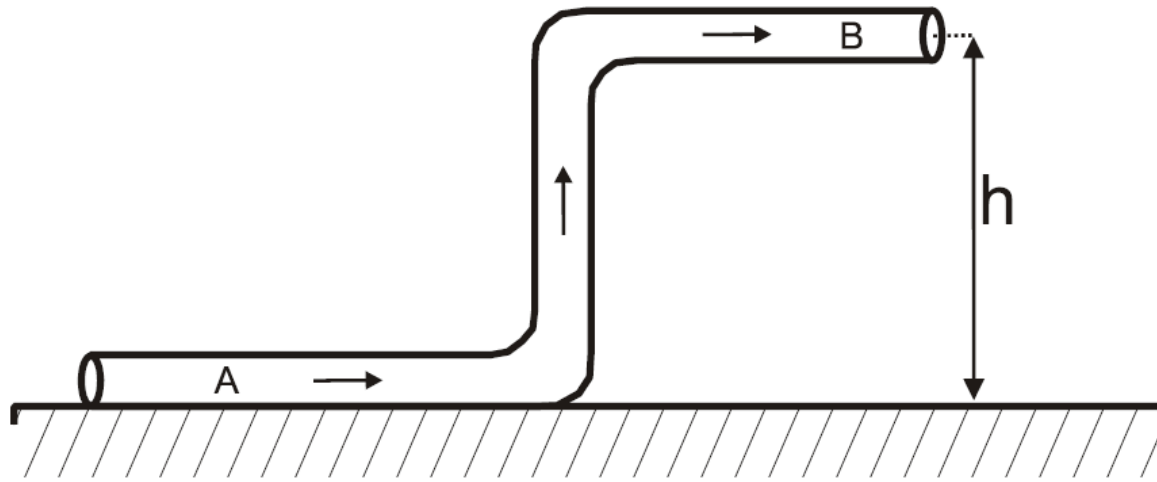
Σ

Όταν ρέει ιδανικό ρευστό με σταθερή παροχή σε οριζόντιο κυλινδρικό σωλήνα μεταβλητής διατομής, στις περιοχές στις οποίες το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής αυξάνεται, η πίεση μειώνεται.

Λ

12.

Το Σχήμα 2 παριστάνει έναν κυλινδρικό σωλήνα μικρής διατομής που βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Ο σωλήνας έχει σταθερή διατομή και στο εσωτερικό του ρέει ιδανικό ρευστό με σταθερή παροχή.



Σχήμα 2

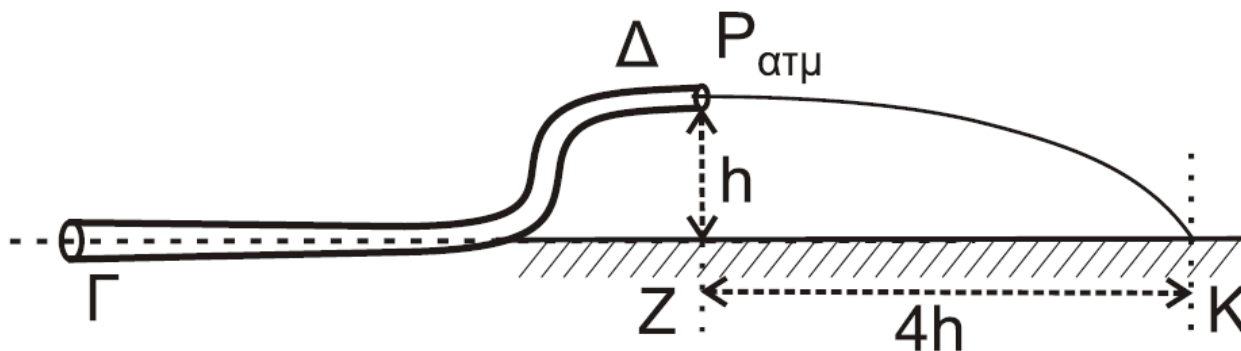
Για τις πιέσεις και τις ταχύτητες στα σημεία A και B του σωλήνα ισχύει:

- α. $p_A = p_B$ και $u_A = u_B$
- β. $p_A > p_B$ και $u_A > u_B$
- γ. $p_A < p_B$ και $u_A = u_B$
- δ. $p_A > p_B$ και $u_A = u_B$

$$P_A + \cancel{\frac{1}{2} \rho \cdot u_A^2} = P_B + \cancel{\frac{1}{2} \rho \cdot u_B^2} + \rho \cdot g \cdot h \xrightarrow{u_A = u_B} P_A = P_B + \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow \mathbf{P_A > P_B}$$

13.

Ο κυλινδρικός σωλήνας ΓΔ του σχήματος αποτελεί τμήμα ενός μεγάλου σωλήνα μεταβλητής διατομής και βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Στον σωλήνα ρέει με σταθερή παροχή ιδανικό υγρό πυκνότητας ρ με φορά από το Γ προς το Δ. Η σχέση των εμβαδών των εγκάρσιων διατομών του σωλήνα στα σημεία Γ και Δ είναι $A_\Gamma = 2 A_\Delta$. Το μέτρο της ταχύτητας με την οποία κινείται το υγρό στο σημείο Γ είναι u_Γ . Τα σημεία Γ και Δ απέχουν υψομετρικά κατά h , όπως φαίνεται στο σχήμα. Η φλέβα του υγρού που εξέρχεται από το στόμιο Δ πέφτει σε σημείο Κ στην προέκταση της οριζόντιας ευθείας που διέρχεται από το σημείο Γ.



Η απόσταση ΖΚ (βεληνεκές) είναι ίση με $4h$.

Η διαφορά πίεσης ΔP μεταξύ των σημείων Γ και Δ ισούται με

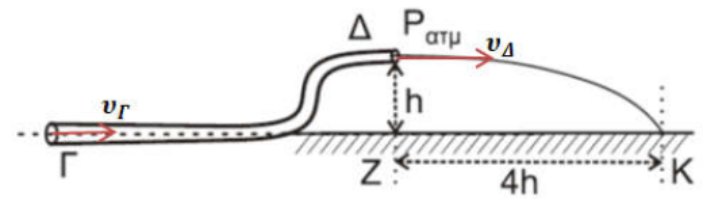
- i. $2\rho u_\Gamma^2$ ii. ρu_Γ^2 iii. $\frac{\rho u_\Gamma^2}{2}$.

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Από την εξίσωση της συνέχειας έχω: $\Pi_\Gamma = \Pi_\Delta \Rightarrow$

$$A_\Gamma v_\Gamma = A_\Delta v_\Delta \Rightarrow 2A_\Delta v_\Gamma = A_\Delta v_\Delta \Rightarrow \boxed{v_\Delta = 2v_\Gamma} \quad (1)$$



Από την οριζόντια βολή μιας στοιχειώδους μάζας υγρού από το Δ στο Κ:

Στον οριζόντιο άξονα x: $x = v_\Delta \cdot t \Rightarrow 4h = v_\Delta \cdot t \Rightarrow t = \frac{4h}{v_\Delta} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} t = \frac{4h}{2v_\Gamma} \Rightarrow \boxed{t = \frac{2h}{v_\Gamma}} \quad (2)$

Στον κατακόρυφο άξονα y: $h = \frac{1}{2}gt^2 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} h = \frac{1}{2}g \cdot \frac{4h^2}{v_\Gamma^2} \Rightarrow \boxed{gh = \frac{v_\Gamma^2}{2}} \quad (3)$

Από το θεώρημα Bernoulli από το Γ στο Δ:

$$P_\Gamma + \frac{1}{2}\rho v_\Gamma^2 + 0 = P_\Delta + \frac{1}{2}\rho v_\Delta^2 + \rho gh \Rightarrow$$

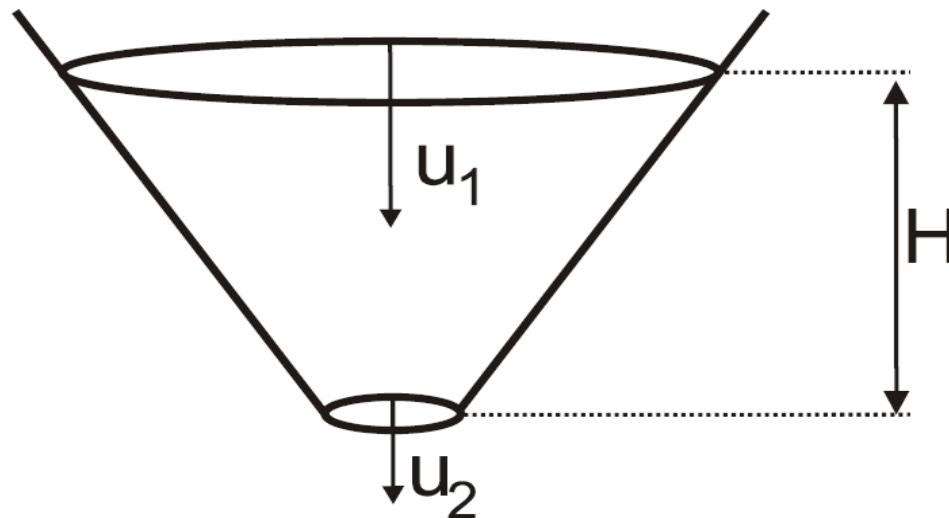
$$P_\Gamma - P_\Delta = \frac{1}{2}\rho v_\Delta^2 - \frac{1}{2}\rho v_\Gamma^2 + \rho gh \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho(4v_\Gamma^2 - v_\Gamma^2) + \rho gh \Rightarrow \boxed{\Delta P = \frac{3}{2}\rho v_\Gamma^2 + \rho gh} \quad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε: $\Delta P = \frac{3}{2}\rho v_\Gamma^2 + \rho \cdot \frac{v_\Gamma^2}{2} \Rightarrow \boxed{\Delta P = 2\rho v_\Gamma^2}$ άρα σωστή η **(i)**.

14.

Σε ανοιχτό κωνικό δοχείο (Σχήμα 5) που περιέχει ιδανικό ρευστό αφαιρούμε τον πυθμένα με αποτέλεσμα το ρευστό να αρχίσει να ρέει. Κάποια χρονική στιγμή το περιεχόμενο ρευστό στο δοχείο έχει ύψος H . Η ταχύτητα του ρευστού στην επιφάνεια είναι ίση με u_1 ενώ η αντίστοιχη ταχύτητα του ρευστού στον πυθμένα είναι ίση με u_2 .



Σχήμα 5

Τότε το ύψος H ισούται με:

α) $\frac{u_2^2 - u_1^2}{4g}$

β) $\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}$

γ) $\frac{u_2^2 - u_1^2}{g}$

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

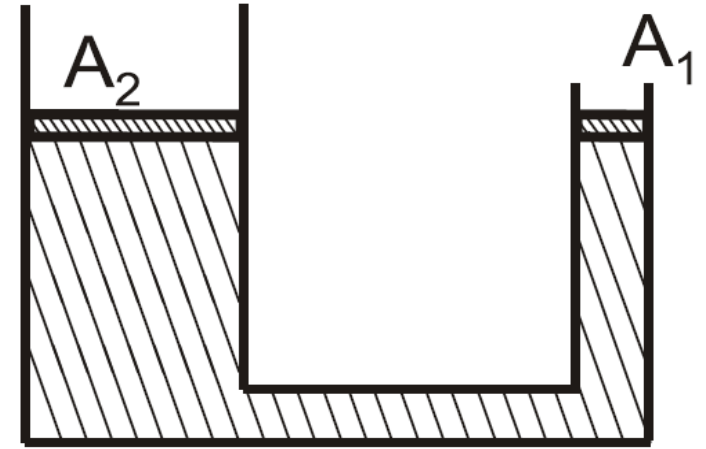
Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Το ΘΕΜΑ Β3 παρουσιάζει μια μικρή διαφοροποίηση. Δεν δίνεται η σχέση των εμβαδών επιφάνειας – πυθμένα κι έτσι δε θα χρειαστεί η εξίσωση της συνέχειας. Η απάντηση απαιτεί μόνο την εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli:

$$p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho gH = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho u_2^2 \Rightarrow H = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}$$

Οπότε σωστό είναι το β.

15. Ένας υδραυλικός ανυψωτήρας της μορφής του Σχήματος 1 έχει δύο αβαρή έμβολα που μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές και περιέχει ιδανικό ασυμπίεστο υγρό. Το μικρό έμβολο έχει εμβαδόν εγκάρσιας διατομής A_1 και το μεγάλο έμβολο έχει εμβαδόν εγκάρσιας διατομής $A_2 = 3 A_1$.



Σχήμα 1

Αρχικά τα έμβολα βρίσκονται ακίνητα στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Ασκούμε δύναμη στο μικρό έμβολο και τη στιγμή που αυτό έχει κατέβει κατά d_1 , το μεγάλο έμβολο έχει ανεβεί κατά d_2 .

Για τις αποστάσεις d_1 και d_2 ισχύει ότι

- α) $d_1 = 1,5 d_2$
- β) $d_1 = 2 d_2$
- γ) $d_1 = 3 d_2$
- δ) $d_1 = 4 d_2$.

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{3A_1} \Rightarrow \mathbf{F_2 = 3 \cdot F_1 \quad (1)}$$

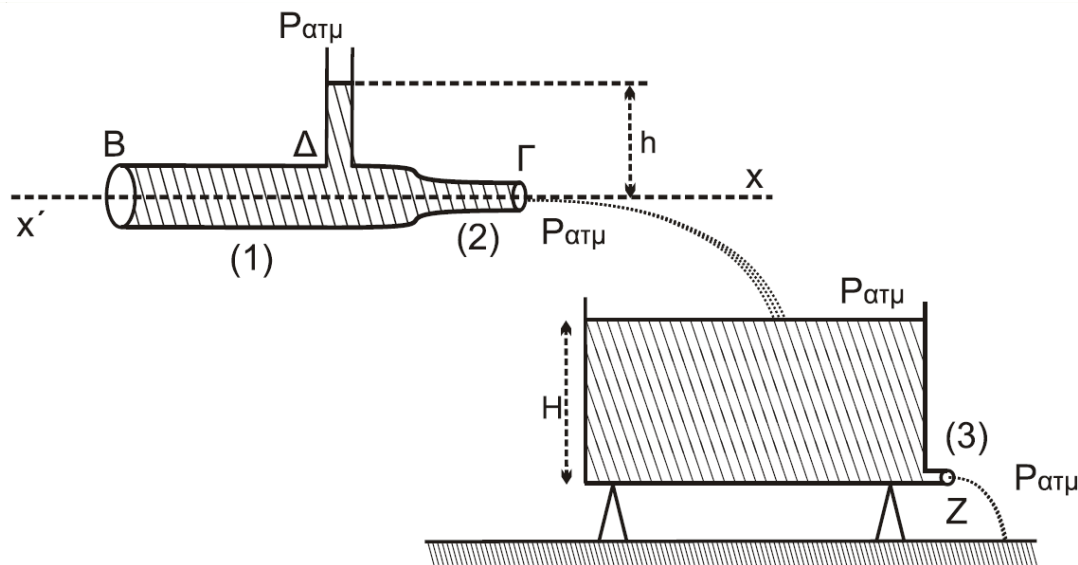
$$W_1 = W_2 \Rightarrow F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2 \xrightarrow{(1)} \cancel{F_1 \cdot d_1} = \cancel{3F_1 \cdot d_2} \Rightarrow \mathbf{d_1 = 3 \cdot d_2}$$

16.

Στον οριζόντιο κυλινδρικό σωλήνα ΒΓ μεταβλητής διατομής του **Σχήματος 3**, ρέει με σταθερή παροχή νερό, το οποίο θεωρείται ιδανικό ρευστό με φορά από το Β προς το Γ. Για τα εμβαδά των εγκάρσιων διατομών των περιοχών (1) και (2), αντίστοιχα, ισχύει $A_1 = 2A_2$. Σε σημείο Δ της περιοχής (1) έχουμε προσαρμόσει ένα λεπτό κατακόρυφο σωλήνα, στον οποίο η ελεύθερη επιφάνεια του νερού βρίσκεται σε ύψος h από την οριζόντια διεύθυνση x' .

Το νερό που εξέρχεται από το στόμιο Γ του σωλήνα χύνεται σε δοχείο μεγάλου όγκου που είναι στερεωμένο σε οριζόντιο έδαφος. Στη βάση του δοχείου στη θέση (3) υπάρχει μικρή οπή Ζ με εμβαδόν διατομής $A_3 = \frac{A_2}{2}$. Λόγω της εξόδου

του νερού από την οπή Ζ το δοχείο δεν μπορεί να γεμίσει και η ελεύθερη επιφάνεια του νερού σταθεροποιείται σε ύψος H (**Σχήμα 3**).



Σχήμα 3

Ο λόγος του ύψους h του νερού στον κατακόρυφο σωλήνα προς το ύψος H του νερού στο δοχείο είναι ίσος με

i. $\frac{3}{4}$

ii. $\frac{3}{8}$

iii. $\frac{3}{16}$.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για την ρευματική γραμμή 1 → 2

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 +$$

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (1), \text{ με } p_2 = p_{atm}$$

$$\text{και } p_1 = p_{atm} + \rho gh \quad (2)$$

Από εξίσωση συνέχειας έχουμε:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow 2A_2 v_1$$

$$= A_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{v_2}{2} \quad (3)$$

Από σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε:

$$p_{atm} + \rho gh + \frac{1}{2}\rho \frac{v_2^2}{4} = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow h = \frac{3v_2^2}{8g} \quad (4)$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου E της επιφάνειας και του σημείου εξόδου (3). Είναι $v_E = 0$

$$p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_E^2 + \rho gH = \frac{1}{2}\rho v_3^2 + p_{atm} \quad (5)$$

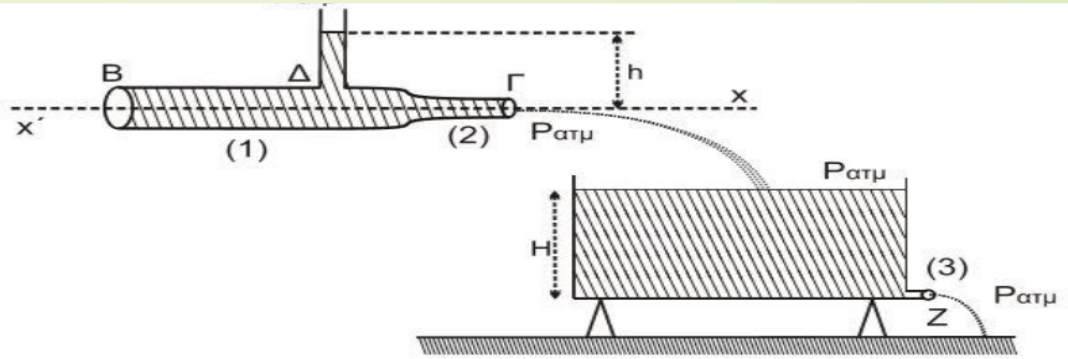
Για τη σταθεροποίηση επιφάνειας του ρευστού, απαιτείται:

$$\Pi_2 = \Pi_3 \Rightarrow \frac{\Delta V_2}{\Delta t} = \frac{\Delta V_3}{\Delta t} \Rightarrow A_2 v_2 = A_3 v_3 \Rightarrow \frac{A_2}{2} v_3 = A_2 v_2 \Rightarrow v_3 = 2v_2 \quad (6)$$

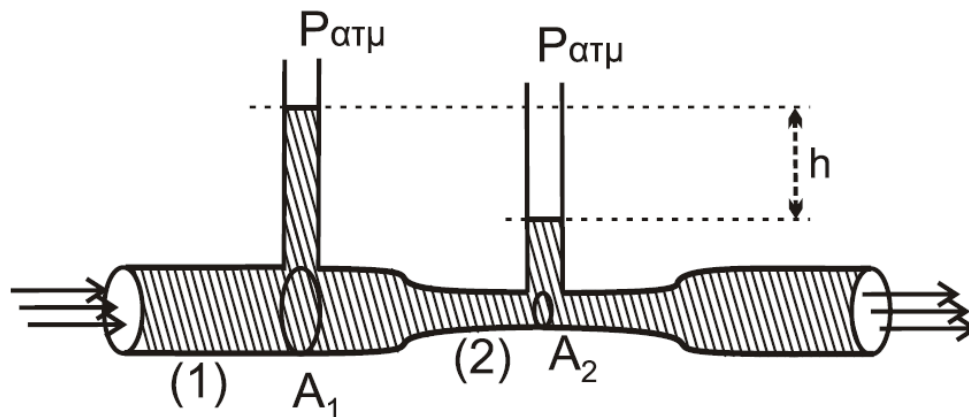
Από τις σχέσεις (5) και (6) έχουμε:

$$\rho gH = \frac{1}{2}\rho 4v_2^2 \Rightarrow H = \frac{2v_2^2}{g} \quad (7)$$

$$\text{Από (4) και (7) έχουμε: } \frac{h}{H} = \frac{\frac{3}{8g}v_2^2}{\frac{2}{g}v_2^2} = \frac{3}{16}$$



Ο σωλήνας στο ροόμετρο Venturi είναι οριζόντιος και διαρρέεται από ιδανικό ρευστό, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.



Σχήμα 3

Η εγκάρσια διατομή στην περιοχή (1) έχει εμβαδόν A_1 και η αντίστοιχη στην περιοχή (2) έχει εμβαδόν A_2 με $\frac{A_1}{A_2} = 2$.

Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με g και η υψομετρική διαφορά της στάθμης του υγρού που περιέχεται στους κατακόρυφους λεπτούς ανοικτούς σωλήνες είναι ίση με h .

Διπλασιάζουμε την ταχύτητα ροής του ιδανικού ρευστού στην περιοχή (1). Η υψομετρική διαφορά της στάθμης του υγρού στους κατακόρυφους λεπτούς ανοικτούς σωλήνες γίνεται ίση με

i. $\frac{1}{2}h$

ii. $2h$

iii. $4h$.

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Εξίσωση Μπερνούλι:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \Rightarrow$$

$$p_{atm} + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_{atm} + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow$$

$$\rho gh_1 - \rho gh_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 \Rightarrow \rho gh = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) \xrightarrow{v_2=2v_1}$$

$$\rho gh = \frac{1}{2}\rho(4v_1^2 - v_1^2) \Rightarrow$$

$$\rho gh = \frac{1}{2}\rho 3v_1^2 \Rightarrow h = \frac{3}{2}\frac{v_1^2}{g}$$

Όταν διπλασιαστεί η v_1 θα τετραπλασιαστεί το $h \Rightarrow$ σωστή η **iii**

18.

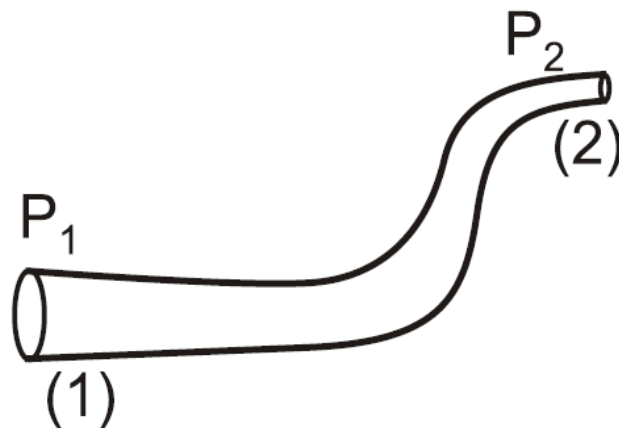
Ιδανικό ρευστό ρέει σε σωλήνα που βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο. Στο **σχήμα 1** απεικονίζεται τμήμα του σωλήνα, και το ιδανικό ρευστό ρέει από τη θέση (1) προς τη θέση (2). Για τις πιέσεις P_1 και P_2 στις δύο αυτές θέσεις του σωλήνα ισχύει ότι

α) $P_1 < P_2$

β) $P_1 = P_2$

☒ γ) $P_1 > P_2$

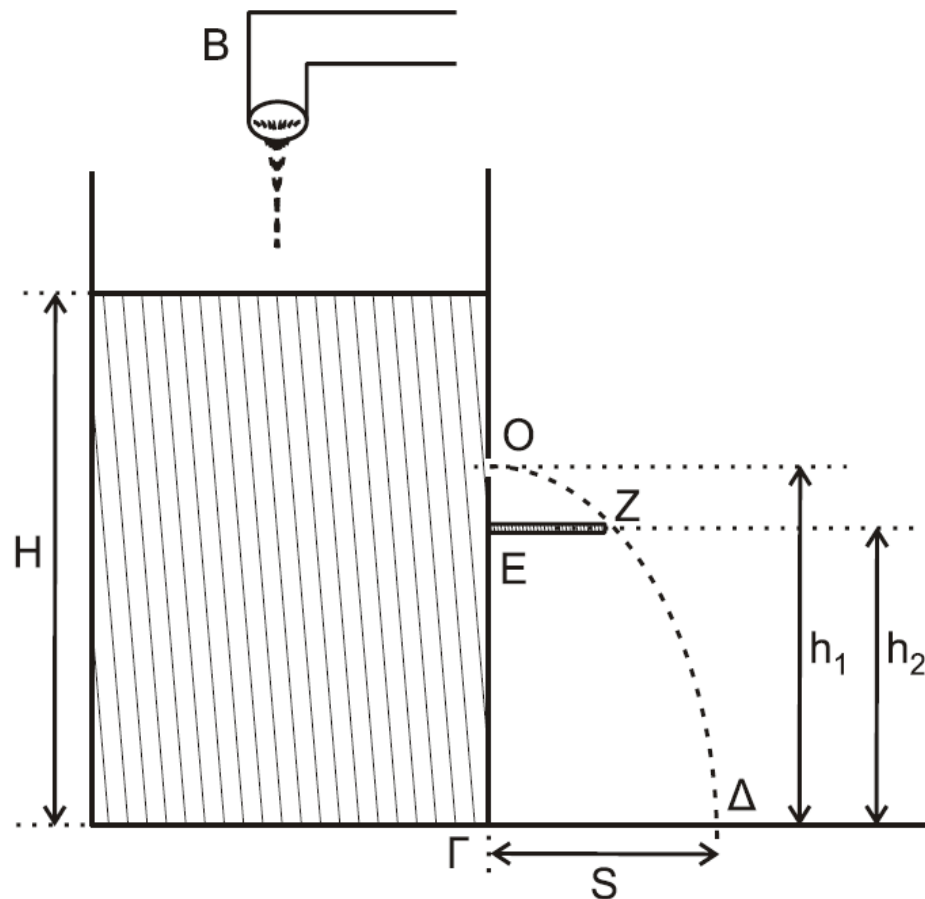
δ) αδυνατούμε να τις συγκρίνουμε.



Σχήμα 1

19.

Στο σχήμα 3, στο ανοιχτό δοχείο μεγάλου όγκου με κατακόρυφα τοιχώματα, πέφτει συνέχεια νερό, το οποίο θεωρείται ιδανικό ρευστό, από μια βρύση B σταθερής παροχής Π . Το δοχείο βρίσκεται σε οριζόντιο έδαφος και δε μπορεί να γεμίσει, γιατί εξέρχεται νερό από μία οπή O, που βρίσκεται σε ένα από τα κατακόρυφα τοιχώματα του δοχείου. Η οπή βρίσκεται σε ύψος h_1 από τη βάση του δοχείου, και το εμβαδόν διατομής της A είναι πολύ μικρότερο από το εμβαδόν της ελεύθερης επιφάνειας του νερού.



Σχήμα 3

Η ελεύθερη επιφάνεια του νερού σταθεροποιείται σε ύψος H από τη βάση του δοχείου. Η λεπτή φλέβα νερού που εξέρχεται από την οπή πέφτει στο οριζόντιο έδαφος σε σημείο Δ , το οποίο απέχει οριζόντια απόσταση $(\Gamma\Delta)=S$ από τη βάση του δοχείου. Σε σημείο E του ιδίου κατακόρυφου τοιχώματος με την οπή, και στην ίδια κατακόρυφο, έχουμε στηρίξει λεπτή οριζόντια ράβδο EZ μήκους $(EZ)=S/2$. Το σημείο E βρίσκεται σε ύψος $h_2 = \frac{21H}{32}$.

Αν η λεπτή φλέβα του νερού διέρχεται οριακά από το άκρο Z της ράβδου, τότε η παροχή Π της βρύσης είναι

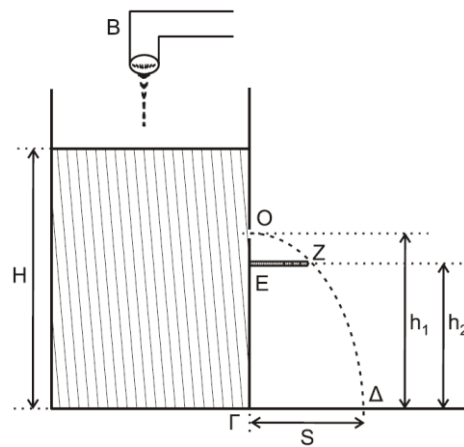
i. $\Pi = \frac{A}{2} \sqrt{gH}$

ii. $\Pi = 2A \sqrt{gH}$

iii. $\Pi = A \sqrt{2gH}$

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.



β) Το μήκος EZ είναι:

$$(EZ) = \frac{S}{2} \Rightarrow v \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (h_1 - h_2)}{g}} = \frac{v}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}} \Rightarrow \frac{2 \cdot (h_1 - h_2)}{g} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot h_1}{g} \Rightarrow$$

$$h_1 - h_2 = \frac{h_1}{4} \Rightarrow 4 \cdot h_1 - 4 \cdot h_2 = h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{4 \cdot h_2}{3} \Rightarrow h_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{21 \cdot H}{32} \Rightarrow h_1 = \frac{7 \cdot H}{8}$$

Εφαρμόζουμε εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής από ένα σημείο της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού μέχρι το O:

$$P_{atm} + \rho \cdot g \cdot H = P_{atm} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow g \cdot H = \frac{1}{2} \cdot v^2 + g \cdot \frac{7 \cdot H}{8} \Rightarrow$$

$$g \cdot H = \frac{1}{2} \cdot v^2 + g \cdot \frac{7 \cdot H}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot v^2 = \frac{g \cdot H}{8} \Rightarrow v^2 = \frac{g \cdot H}{4} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{g \cdot H}}{2}$$

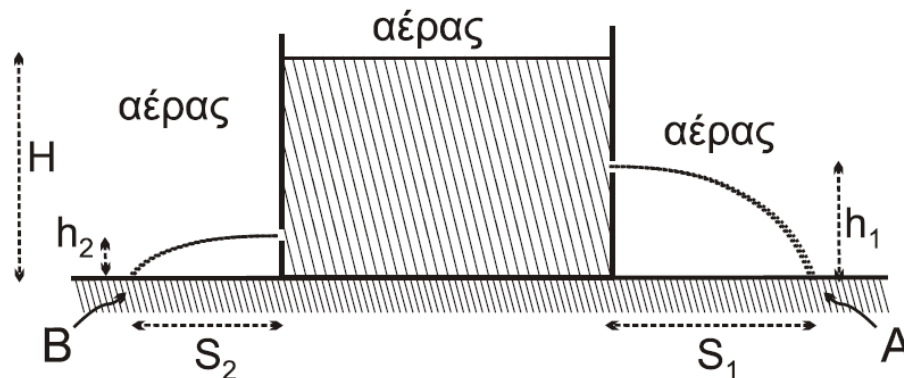
Για τις παροχές της βρύσης και της οπής ισχύει:

$$\Pi = \Pi_0 \Rightarrow \Pi = A \cdot v \Rightarrow \Pi = A \cdot \frac{\sqrt{g \cdot H}}{2}$$

α) Σωστή απάντηση είναι η i.

20.

Ένα ανοικτό κυλινδρικό δοχείο με σταθερά κατακόρυφα τοιχώματα βρίσκεται ακίνητο πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο εντός του πεδίου βαρύτητας και περιέχει νερό μέχρι ύψους H . Ανοίγουμε 2 μικρές οπές στο δοχείο σε ύψος $h_1 = \frac{H}{2}$ και $h_2 = \frac{H}{5}$ πάνω από το οριζόντιο δάπεδο, αντίστοιχα (Σχήμα 3).



Σχήμα 3

Οι δύο φλέβες του νερού που εκρέουν από τις 2 μικρές οπές συναντούν το οριζόντιο δάπεδο στα σημεία A και B σε αποστάσεις S_1 και S_2 από τα άκρα της βάσης του δοχείου, αντίστοιχα.

Θεωρήστε ότι η ταχύτητα με την οποία κατεβαίνει η στάθμη του νερού στο ανοικτό δοχείο είναι αμελητέα, ότι το νερό συμπεριφέρεται ως ιδανικό ρευστό και ότι η ατμοσφαιρική πίεση παραμένει σταθερή.

Για τον λόγο των αποστάσεων S_1 και S_2 ισχύει:

i. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{4}$

ii. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{3}$

iii. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

β) Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli σε μια ρευματική γραμμή από την επιφάνεια στο σημείο εξόδου από τη δεξιά οπή:

$$P_{atm} + 0 + \rho g H = P_{atm} + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 \Rightarrow v_1 =$$

$$\sqrt{2g(H - h_1)} = \sqrt{gH}$$

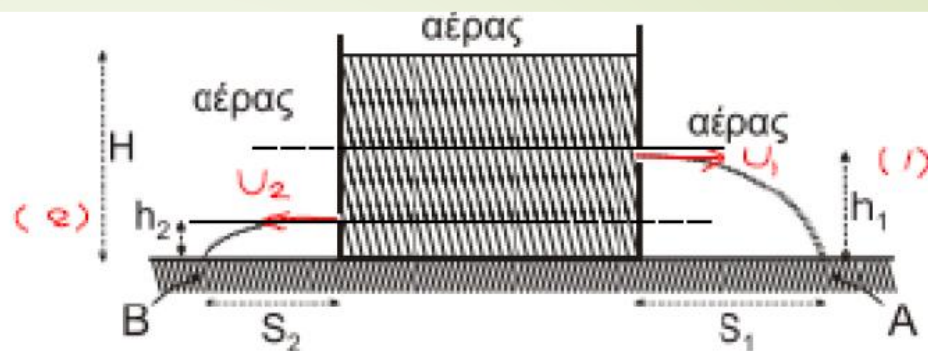
Παρόμοια εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli σε μια ρευματική γραμμή από την επιφάνεια στο σημείο εξόδου από την αριστερή οπή οπότε προκύπτει: $v_2 = \sqrt{2g(H - h_2)} = \sqrt{\frac{8}{5}gH}$

από τις εξισώσεις της οριζόντιας βολής που εκτελεί η κάθε φλέβα νερού προκύπτει:

$$h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{H}{g}} \quad \text{και} \quad h_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2H}{5g}}$$

Ισχύουν οι σχέσεις $s_1 = v_1 t_1$ (1) και $s_2 = v_2 t_2$ (2)

Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει: $\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1 t_1}{v_2 t_2} = \frac{\sqrt{gH} \sqrt{\frac{H}{g}}}{\sqrt{\frac{8}{5}gH} \sqrt{\frac{2H}{5g}}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$

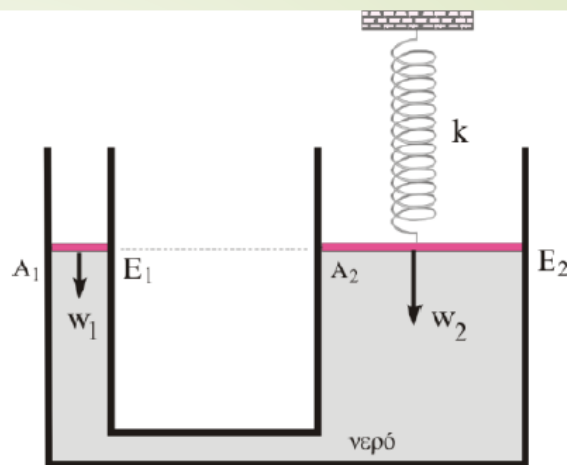


α) Σωστή απάντηση είναι το i.



Προβλήματα Επανάληψης

1. Στον υδραυλικό ανυψωτήρα του διπλανού σχήματος, τα έμβολα E_1 και E_2 έχουν εμβαδό $A_1=10\text{cm}^2$, $A_2=100\text{cm}^2$ και βάρη $w_1=10\text{N}$, $w_2=130\text{N}$, αντίστοιχα. Το έμβολο E_2 συνδέεται με το κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k , το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Τα δύο έμβολα βρίσκονται αρχικά σε ισορροπία στο ίδιο ύψος, με το ελατήριο να είναι επιμηκυμένο από το φυσικό του μήκος κατά $d=30\text{cm}$.



A) Να υπολογίσετε τη σταθερά του ελατηρίου k .

Στο έμβολο E_1 εφαρμόζουμε κατακόρυφα προς τα κάτω μια μεταβλητή δύναμη τελικού μέτρου $F_1=12\text{N}$, με τρόπο ώστε τα έμβολα να μετακινούνται με ταχύτητα σχεδόν μηδενική, τελικά τα έμβολα ισορροπούν σε νέες θέσεις.

Να υπολογίσετε:

B) πόσο μετακινήθηκαν τα δύο έμβολα.

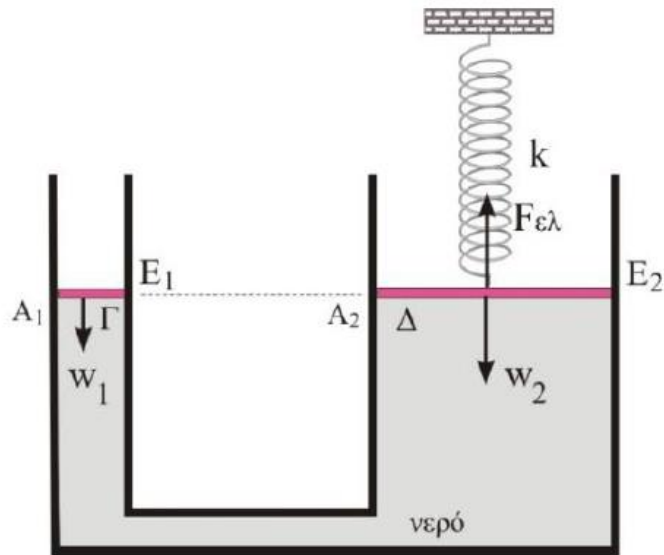
Γ) τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη νέα θέση ισορροπίας.

Δ) το έργο της δύναμης F_2 , που ασκείται από το νερό στο έμβολο E_2 λόγω της υδροστατικής πίεσης, κατά τη μετακίνησή του.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{ m/s}^2$ και η πυκνότητα του νερού $\rho_v=1\text{g/cm}^3$.

A) Να υπολογίσετε τη σταθερά του ελατηρίου k .

56



A) Δύο σημεία Γ και Δ , ακριβώς κάτω από τα δύο έμβολα, βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο υγρού που ισορροπεί, άρα έχουν ίδιες πιέσεις

$$p_{\Gamma} = p_{\Delta} \Rightarrow p_{\alpha\tau\mu} + \frac{w_1}{A_1} = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{w_2 - F_{ελ}}{A_2} \Rightarrow$$

$$\frac{10\text{N}}{10 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} = \frac{130\text{N} - F_{ελ}}{100 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} \Rightarrow F_{ελ} = 30\text{N}.$$

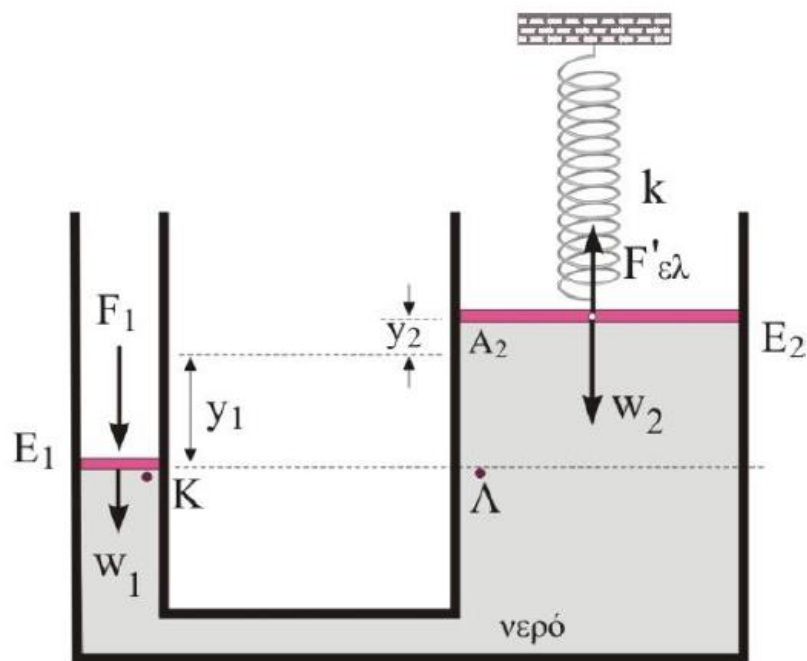
Άρα η σταθερά του ελατηρίου k είναι:

$$F_{ελ} = 30\text{N} \Rightarrow k \cdot d = 30\text{N} \Rightarrow k \cdot 0,3\text{m} = 30\text{N} \Rightarrow k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Στο έμβολο E_1 εφαρμόζουμε κατακόρυφα προς τα κάτω μια μεταβλητή δύναμη τελικού μέτρου $F_1=12\text{N}$, με τρόπο ώστε τα έμβολα να μετακινούνται με ταχύτητα σχεδόν μηδενική, τελικά τα έμβολα ισορροπούν σε νέες θέσεις.

Να υπολογίσετε:

B) πόσο μετακινήθηκαν τα δύο έμβολα.



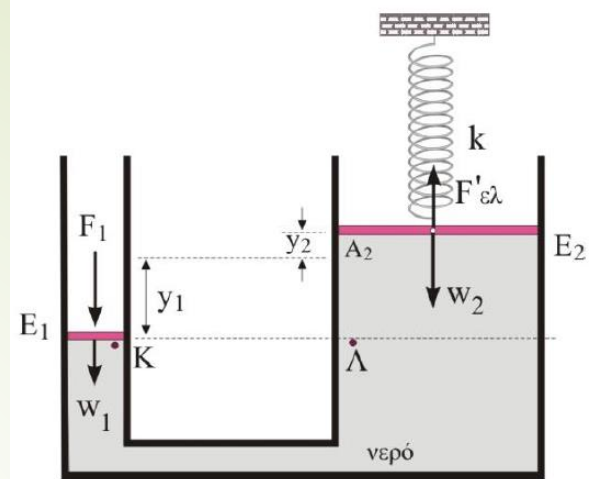
B) Εφαρμόζουμε κατακόρυφα προς τα κάτω και σιγά-σιγά μία δύναμη τελικού μέτρου $F_1 = 12\text{ N}$. Τα δύο έμβολα μετακινούνται από την αρχική τους θέση, μέχρι τη νέα θέση που θα ισορροπήσουν κατά y_1 και y_2 , αντίστοιχα. Το νερό είναι ασυμπίεστο, άρα όσος όγκος νερού κατεβαίνει στον ένα σωλήνα ίσος όγκος νερού ανεβαίνει στον άλλο. Άρα

$$V_1 = V_2 \Rightarrow A_1 \cdot y_1 = A_2 \cdot y_2 \Rightarrow$$

$$10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot y_1 = 100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot y_2 \Rightarrow y_1 = 10y_2.$$

Η δύναμη του ελατηρίου στη νέα θέση είναι

$$F'_{\varepsilon\lambda} = k \cdot (d - y_2) = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,3\text{m} - y_2)$$



Τα σημεία Κ και Λ του υγρού, βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο υγρού που ισορροπεί, άρα έχουν ίδιες πιέσεις

$$p_K = p_\Lambda \Rightarrow \cancel{p_{\text{ατμ}}} + \frac{w_1 + F_1}{A_1} = \cancel{p_{\text{ατμ}}} + \frac{w_2 - F'_{\varepsilon\lambda}}{A_2} + \rho_v \cdot g \cdot (y_1 + y_2) \Rightarrow$$

$$\frac{10\text{N} + 12\text{N}}{10 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} = \frac{130\text{N} - 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,3\text{m} - y_2)}{100 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} + 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (10y_2 + y_2) \Rightarrow$$

$$2,2 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1,3 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} - 0,3 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} + 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \cdot y_2 + 11 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \cdot y_2 \Rightarrow$$

$$1,2 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 12 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \cdot y_2 \Rightarrow y_2 = 0,1\text{m} = 10\text{cm}$$

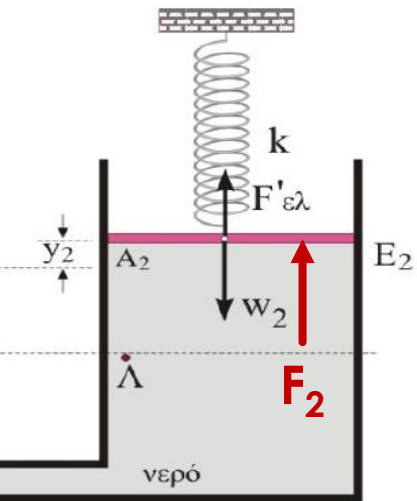
$$\text{και } y_1 = 10y_2 \Rightarrow y_1 = 1\text{m}$$

Γ) τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη νέα θέση ισορροπίας.

Γ) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη νέα θέση θα είναι

$$U_{\varepsilon\lambda, \tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}k \cdot (d - y_2)^2 = \frac{1}{2}100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,3\text{m} - 0,1\text{m})^2 = \frac{1}{2}100 \frac{\text{N}}{\text{m}} 0,04\text{m}^2 \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda, \tau\epsilon\lambda} = 2\text{J}$$

Δ) το έργο της δύναμης F_2 , που ασκείται από το νερό στο έμβολο E_2 λόγω της υδροστατικής πίεσης, κατά τη μετακίνησή του.



Δ) Για να βρούμε το έργο της δύναμης F_2 , που ασκείται από το νερό στο έμβολο E_2 , κατά τη μετακίνησή του θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας μεταξύ των δύο θέσεων. Η ατμοσφαιρική πίεση δεν επηρεάζει την κίνηση του κυλίνδρου καθώς οι δυνάμεις που οφείλονται σε αυτήν αλληλοεξουδετερώνονται.

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{W_2} + W_{F_2} + W_{F_2'} \quad (1)$$

$$K_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} = 0$$

$$W_{W_2} = -w_2 y_2 = -130 \text{ N} \cdot 0,1 \text{ m} \Rightarrow W_{W_2} = -13 \text{ J}$$

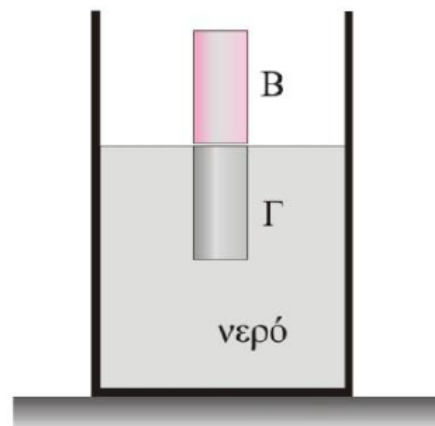
$$W_{F_2'(\alpha\rho\chi \rightarrow \tau\epsilon\lambda)} = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2} 100 (0,3)^2 \text{ J} - 2 \text{ J} \Rightarrow W_{F_2'(\alpha\rho\chi \rightarrow \tau\epsilon\lambda)} = 2,5 \text{ J}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$0 = -13 \text{ J} + 2,5 \text{ J} + W_{F_2} \Rightarrow W_{F_2} = 10,5 \text{ J}$$

2.

Δύο ομογενείς κύλινδροι ισορροπούν με τον άξονά τους κατακόρυφο μέσα σε δοχείο με νερό, μεγάλης επιφάνειας, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο κύλινδρος Γ, μάζας $m_{\Gamma}=0,5\text{kg}$, έχει ύψος $h=50\text{cm}$, εμβαδό βάσης $A=20\text{cm}^2$ και είναι ολόκληρος βυθισμένος μέσα στο νερό. Ο κύλινδρος Β είναι ολόκληρος έξω από το νερό και έχει διαστάσεις ίδιες με τον κύλινδρο Γ.



Να υπολογίσετε:

- Α) την υδροστατική πίεση που επικρατεί στην κάτω βάση του κυλίνδρου Γ, δηλαδή σε βάθος $h=50\text{cm}$ από την επιφάνεια του νερού.
- Β) τη δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος Γ από το νερό εξαιτίας της υδροστατικής πίεσης, καθώς και από τον κύλινδρο Β.
- Γ) την πυκνότητα του κυλίνδρου Β.

Αποσύρουμε απότομα τον κύλινδρο Β. Να υπολογίσετε:

- Δ) την ταχύτητα του κυλίνδρου Γ τη στιγμή που εξέρχεται πλήρως από το νερό. Να θεωρήσετε ότι δεν αλλάζει η στάθμη του νερού κατά την έξοδο του κυλίνδρου Γ απ' αυτό και ότι η δύναμη τριβής που ασκείται από το νερό στον κύλινδρο Γ, κατά την κίνησή του, είναι αμελητέα.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$ και η πυκνότητα του νερού $\rho_v=1\text{g/cm}^3$.

A) την υδροστατική πίεση που επικρατεί στην κάτω βάση του κυλίνδρου Γ, δηλαδή σε βάθος $h = 50 \text{ cm}$ από την επιφάνεια του νερού.

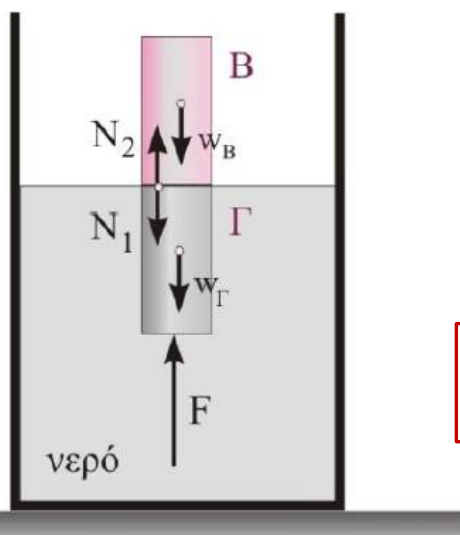
62

A) Η υδροστατική πίεση σε βάθος $h = 50 \text{ cm}$ από την επιφάνεια του νερού είναι

$$p_{\text{υδρ}} = \rho_v \cdot g \cdot h = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5 \text{m} \Rightarrow p_{\text{υδρ}} = 5000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

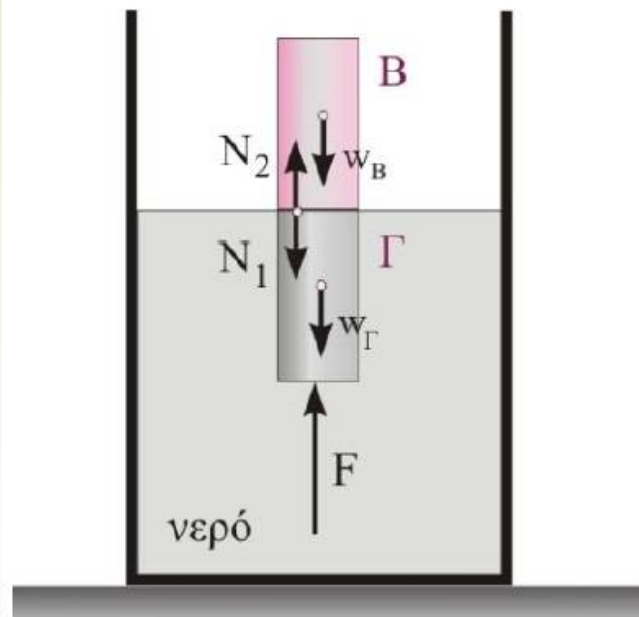
$$(\rho_v = 1 \text{ g/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3)$$

B) τη δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος Γ από το νερό εξαιτίας της υδροστατικής πίεσης, καθώς και από τον κύλινδρο Β.



B) Οι δυνάμεις που δέχεται ο κύλινδρος Γ στα πλευρικά τοιχώματα αλληλοεξουδετερώνονται. Έτσι η μόνη δύναμη που δέχεται από το νερό εξαιτίας της υδροστατικής πίεσης είναι η F , στην κάτω βάση του, που έχει φορά κατακόρυφα προς τα πάνω.

$$F = p_{\text{υδρ}} \cdot A = 5000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 20 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 = 10 \text{N}.$$



Ο κύλινδρος Γ δέχεται ακόμα το βάρος του w_Γ και την δύναμη επαφής N_1 από τον κύλινδρο Β. Εφόσον ο κύλινδρος Γ ισορροπεί ισχύει:

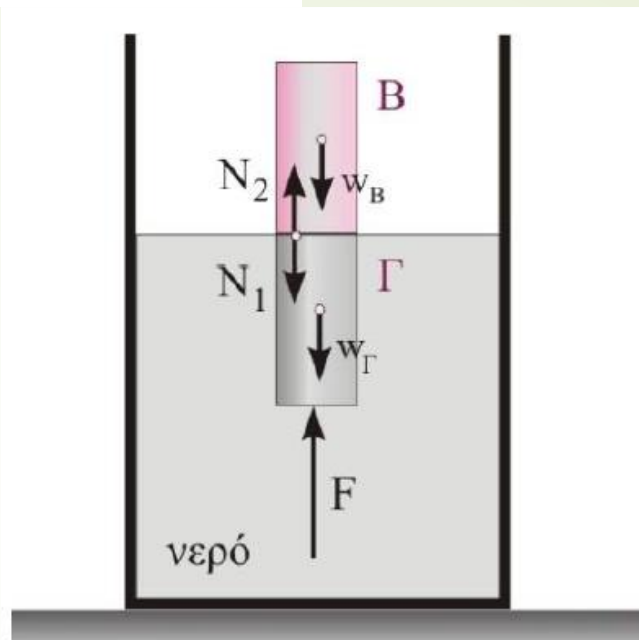
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = N_1 + w_\Gamma \Rightarrow F = N_1 + m_\Gamma \cdot g \Rightarrow$$

$$10\text{N} = N_1 + 0,5\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow N_1 = 5\text{N}.$$

Άρα η δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος Γ από τον κύλινδρο Β είναι $N_1 = 5\text{N}$.

Γ) την πυκνότητα του κυλίνδρου Β.

64



Γ) Στον κύλινδρο Β ασκούνται το βάρος του w_B και η δύναμη επαφής N_2 από τον κύλινδρο Β, η οποία ως δράση - αντίδραση έχει ίσο μέτρο με τη N_1 . Για την ισορροπία του κυλίνδρου Β έχουμε

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow w_B = N_2 = N_1 = 5\text{N} \Rightarrow m_B \cdot g = 5\text{N} \Rightarrow$$

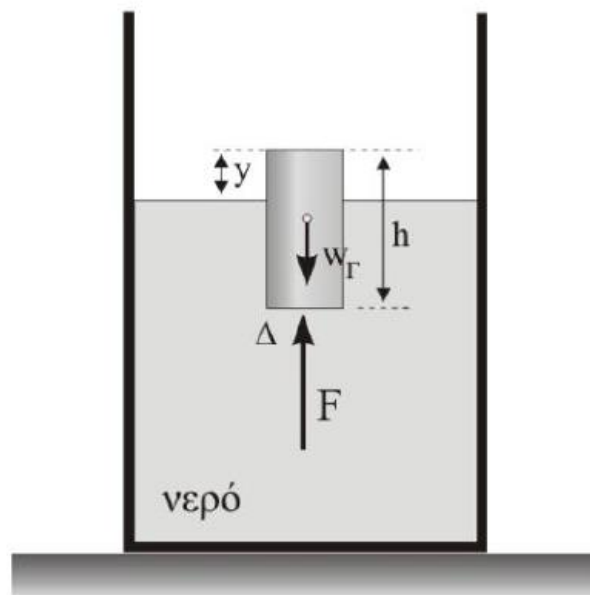
$$m_B \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 5\text{N} \Rightarrow m_B = 0,5\text{kg}$$

Άρα η πυκνότητα του κυλίνδρου Β, που έχει ίδιες διαστάσεις και όγκο με τον κύλινδρο Γ, είναι

$$\rho_B = \frac{m_B}{V_B} = \frac{m_B}{A \cdot h} = \frac{0,5\text{kg}}{20 \cdot 10^{-4}\text{m}^2 \cdot 0,5\text{m}} = \frac{0,5\text{kg}}{10^{-3}\text{m}^3} = 500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \Rightarrow \rho_B = 0,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

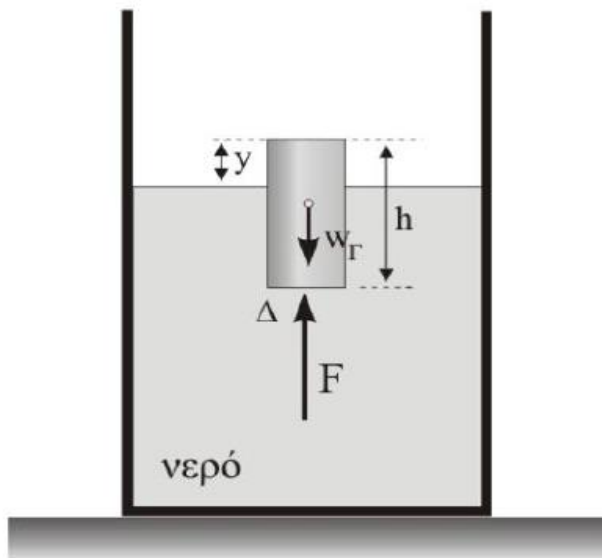
Αποσύρουμε απότομα τον κύλινδρο Β. Να υπολογίσετε:

Δ) την ταχύτητα του κυλίνδρου Γ τη στιγμή που εξέρχεται πλήρως από το νερό.
Να θεωρήσετε ότι δεν αλλάζει η στάθμη του νερού κατά την έξοδο του κυλίνδρου Γ απ' αυτό και ότι η δύναμη τριβής που ασκείται από το νερό στον κύλινδρο Γ, κατά την κίνησή του, είναι αμελητέα.



Δ) Αποσύροντας απότομα τον κύλινδρο Β, ο κύλινδρος Γ αρχίζει να ανέρχεται υπό την επίδραση των δυνάμεων της μεταβλητής F και του βάρους w_{Γ} . Για να βρούμε την ταχύτητα του κυλίνδρου τη στιγμή που αυτός εξέρχεται από το νερό θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας από τη θέση που ο κύλινδρος ξεκινά χωρίς αρχική ταχύτητα μέχρι τη θέση που εξέρχεται πλήρως από το νερό με ταχύτητα u.

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_{\Gamma}} + W_F \quad (1)$$



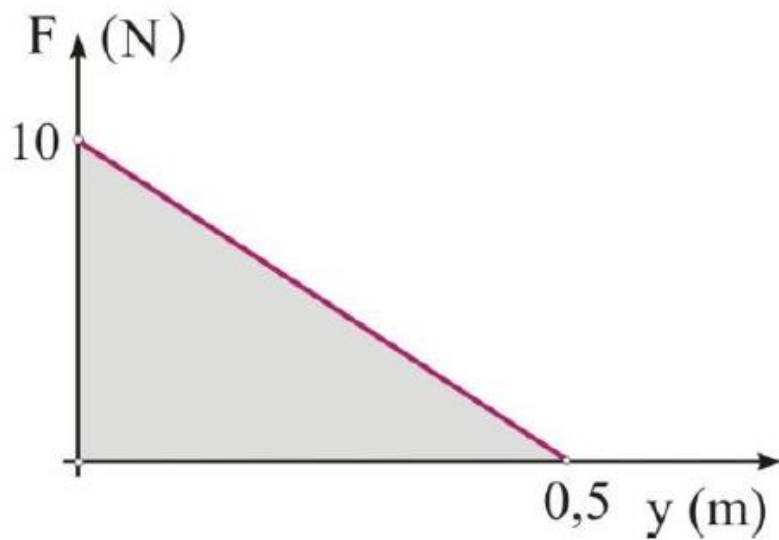
Πρέπει να υπολογίσουμε το έργο της μεταβλητής δύναμης F . Έστω μια τυχαία θέση στην άνοδο του κυλίνδρου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο κύλινδρος έχει μετατοπιστεί κατά y , άρα είναι βυθισμένος κατά $h-y$ μέσα στο νερό. Σε ένα σημείο Δ ακριβώς στη βάση του κυλίνδρου η υδροστατική πίεση είναι

$$p_{υδρ} = \rho_v \cdot g \cdot (h - y) = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (0,5\text{m} - y) \Rightarrow$$

$$p_{υδρ} = 10^4 \cdot (0,5 - y) \text{ (S.I.) με } 0 \leq y \leq 0,5\text{m}$$

και η δύναμη F που ασκεί το νερό στον κύλινδρο είναι

$$F = p_{υδρ} \cdot A = 10^4 \cdot (0,5 - y) \cdot 20 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 \Rightarrow F = 10 - 20y \text{ (S.I.) με } 0 \leq y \leq 0,5\text{m}$$



Για να βρούμε το έργο της F θα κάνουμε τη γραφική της παράσταση σε συνάρτηση με την μετατόπιση y . Το σκιασμένο εμβαδό ισούται με το έργο της μεταβλητής δύναμης του νερού.

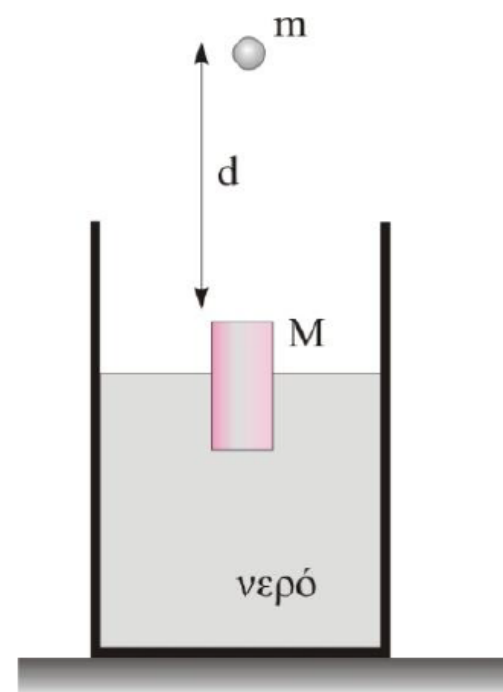
$$W_F = \frac{1}{2} 10\text{N} \cdot 0,5\text{m} = 2,5\text{J}.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{W_{\Gamma}} + W_F \Rightarrow \frac{1}{2} m_{\Gamma} \cdot v^2 - 0 = -m_{\Gamma} \cdot g \cdot h + W_F \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2} 0,5 \text{kg} \cdot v^2 = -0,5 \text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5 \text{m} + 2,5 \text{J} = 0 \Rightarrow \boxed{v = 0}$$

Ο κύλινδρος Γ εξέρχεται οριακά από το νερό.

3. Ομογενής κύλινδρος, μάζας $M = 0,1\text{kg}$, έχει ύψος $h = 20\text{cm}$, εμβαδό βάσης $A = 10\text{cm}^2$ και ισορροπεί με τον άξονά του κατακόρυφο μέσα σε δοχείο με νερό, μεγάλης επιφάνειας, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Μια σημειακή μεταλλική σφαίρα, μάζας $m = 0,05\text{ kg}$, αφήνεται από απόσταση $d = 45\text{cm}$ πάνω από τον κύλινδρο και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά μ' αυτόν.



Να υπολογίσετε:

A) τη δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος από το νερό στη θέση ισορροπίας του εξαιτίας της υδροστατικής πίεσης και το βάθος στο οποίο βρίσκεται η βάση του.

B) τη συνολική πίεση στην κάτω βάση του κυλίνδρου, στη θέση ισορροπίας του.

Γ) σε ποιο ύψος πάνω από τη στάθμη του νερού θα ανέλθει η σημειακή μεταλλική σφαίρα μετά την κρούση.

Δ) την ταχύτητα του κυλίνδρου τη στιγμή που εισέρχεται ολόκληρος στο νερό.

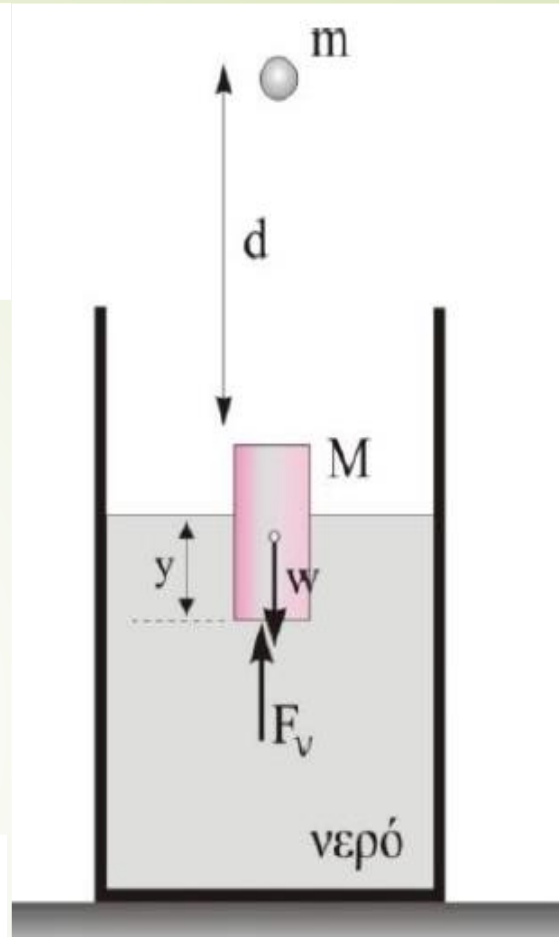
Θεωρείστε ότι δεν αλλάζει η στάθμη του νερού κατά την βύθιση του κυλίνδρου σ' αυτό και ότι η δύναμη αντίστασης που ασκείται από το νερό στον κύλινδρο, κατά την κίνησή του, είναι αμελητέα.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{ m/s}^2$, η ατμοσφαιρική πίεση $p_{\text{atm}} = 10^5\text{ Pa}$ και η πυκνότητα του νερού $\rho_v = 1\text{g/cm}^3$.

Να υπολογίσετε:

A) τη δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος από το νερό στη θέση ισορροπίας του εξαιτίας της υδροστατικής πίεσης και το βάθος στο οποίο βρίσκεται η βάση του.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_v = w = M \cdot g = 0,1\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow F_v = 1\text{N}$$



Έστω ότι ο κύλινδρος είναι βυθισμένος κατά y μέσα στο νερό. Η υδροστατική πίεση σε βάθος y από την επιφάνεια του νερού είναι $p_{υδρ} = \rho_v \cdot g \cdot y$ και για την κατακόρυφη προς τα πάνω δύναμη, F_v , ισχύει:

$$F_v = p_{υδρ} \cdot A \Rightarrow F_v = \rho_v \cdot g \cdot y \cdot A \Rightarrow y = \frac{F_v}{\rho_v \cdot g \cdot A} = \frac{1\text{N}}{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} \Rightarrow y = 0,1\text{m}$$

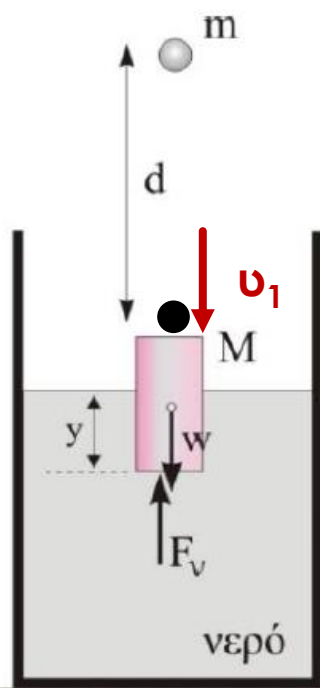
$$(\rho_v = 1 \text{ g/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3)$$

Β) τη συνολική πίεση στην κάτω βάση του κυλίνδρου, στη θέση ισορροπίας του.

Β) Η συνολική πίεση στην κάτω βάση του κυλίνδρου, στη θέση ισορροπίας του είναι ίση με το άθροισμα της ατμοσφαιρικής πίεσης και της υδροστατικής πίεσης

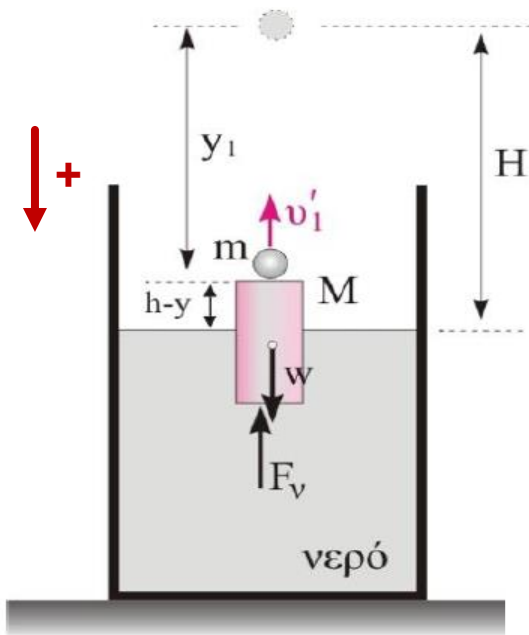
$$p_{ολ} = p_{ατμ} + \rho_v \cdot g \cdot y = 10^5 \frac{N}{m^2} + 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,1m \Rightarrow p_{ολ} = 101 \cdot 10^3 \frac{N}{m^2}$$

Γ) σε ποιο ύψος πάνω από τη στάθμη του νερού θα ανέλθει η σημειακή μεταλλική σφαίρα μετά την κρούση.



$$E_{μηχ,αρχ} = E_{μηχ,τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow$$

$$0 + m \cdot g \cdot d = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot d} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,45 m} \Rightarrow v_1 = 3 \frac{m}{s}$$



$$v_1' = \frac{m-M}{m+M} v_1 = \frac{0,05\text{kg} - 0,1\text{kg}}{0,05\text{kg} + 0,1\text{kg}} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1' = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2' = \frac{2m}{m+M} v_1 = \frac{2 \cdot 0,05\text{kg}}{0,05\text{kg} + 0,1\text{kg}} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2' = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η σφαίρα μετά την κρούση θα ανέλθει κατακόρυφα y_1 μέχρι να σταματήσει. Το y_1 υπολογίζεται με εφαρμογή της Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ των δύο θέσεων. Θεωρούμε στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας την πάνω βάση του κυλίνδρου:

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

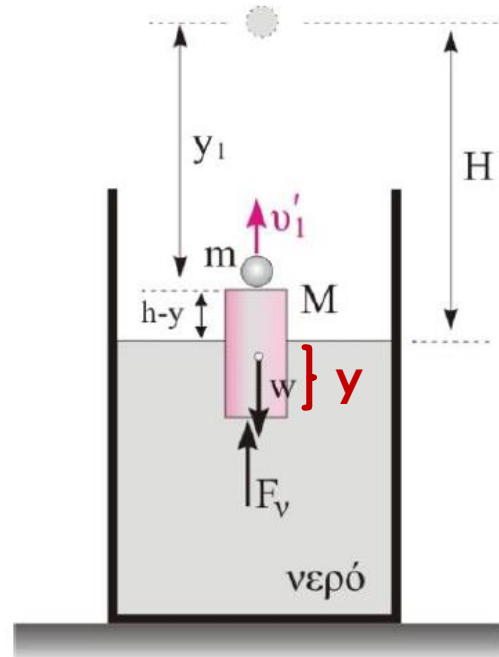
$$\frac{1}{2} m \cdot (v_1')^2 + 0 = 0 + m \cdot g \cdot y_1 \Rightarrow y_1 = \frac{(v_1')^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow$$

$$y_1 = 0,05\text{m}.$$

$$H = h - y + y_1 = 20\text{cm} - 10\text{cm} + 5\text{cm} \Rightarrow H = 15\text{cm}$$

Δ) την ταχύτητα του κυλίνδρου τη στιγμή που εισέρχεται ολόκληρος στο νερό.

Θεωρείστε ότι δεν αλλάζει η στάθμη του νερού κατά την βύθιση του κυλίνδρου σ' αυτό και ότι η δύναμη αντίστασης που ασκείται από το νερό στον κύλινδρο, κατά την κίνησή



Για να βρούμε την ταχύτητα του κυλίνδρου τη στιγμή που εισέρχεται ολόκληρος στο νερό θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας από τη θέση που ο κύλινδρος ξεκινάει με αρχική ταχύτητα u_1' μέχρι τη θέση που εισέρχεται ολόκληρος στο νερό με ταχύτητα u .

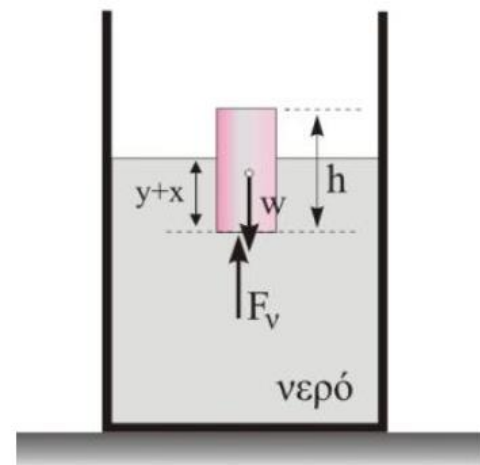
$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_W + W_{F_v} \quad (1)$$

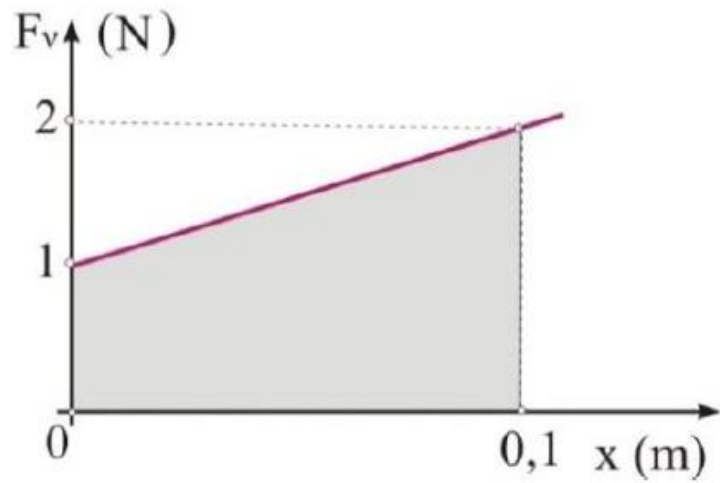
$$p_{\text{υδρ}} = \rho_v \cdot g \cdot (y + x) = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (0,1\text{m} + x) \Rightarrow$$

$$p_{\text{υδρ}} = 10^4 \cdot (0,1 + x) \text{ (S.I.) με } 0\text{m} \leq x \leq 0,1\text{m}$$

Άρα το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νερό στον κύλινδρο είναι:

$$F_v = p_{\text{υδρ}} \cdot A = 10^4 \cdot (0,1 + x) \cdot 10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \Rightarrow F_v = 1 + 10x \text{ (S.I.) με } 0\text{m} \leq x \leq 0,1\text{m}$$



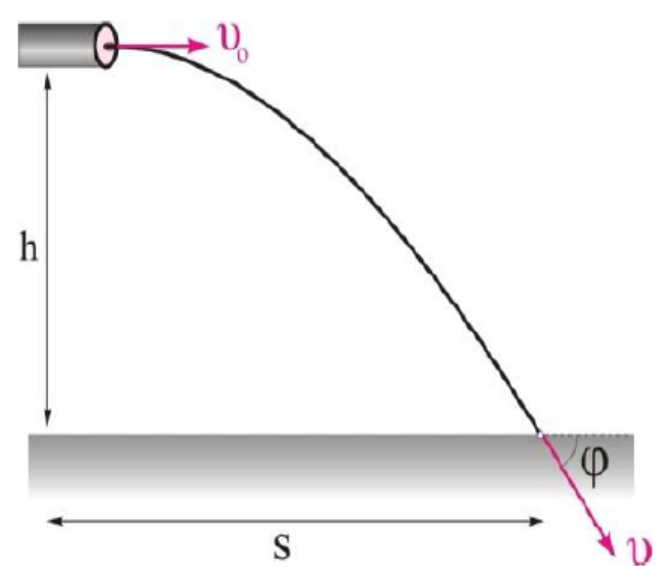


$$W_{F_v} = -\frac{1\text{N} + 2\text{N}}{2} \cdot 0,1\text{m} = -0,15\text{J}.$$

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχη}} = W_w + W_{F_v} \Rightarrow \frac{1}{2}M \cdot v^2 - \frac{1}{2}M \cdot (v_2')^2 = M \cdot g \cdot (h - y) + W_{F_v} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}0,1\text{kg} \cdot v^2 - \frac{1}{2}0,1\text{kg} \cdot \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 0,1\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,1\text{m} - 0,15\text{J} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4. Ένας οριζόντιος κυκλικός σωλήνας εσωτερικής ακτίνας r_1 εκτοξεύει νερό από ύψος $h=15\text{m}$. Το νερό εξέρχεται του σωλήνα με ταχύτητα u_0 , τη χρονική στιγμή $t=0$ και όταν φτάνει στο έδαφος η επιφάνεια διατομής της φλέβας του έχει ακτίνα r_2 ίση με $\frac{r_1}{\sqrt{2}}$. Στο σημείο πτώσης του νερού στο έδαφος είναι τοποθετημένο ένα δοχείο όγκου $V=\pi\sqrt{3}L$, το οποίο γεμίζει τη χρονική στιγμή $t_2=2\sqrt{3}\text{s}$. Θεωρούμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα.



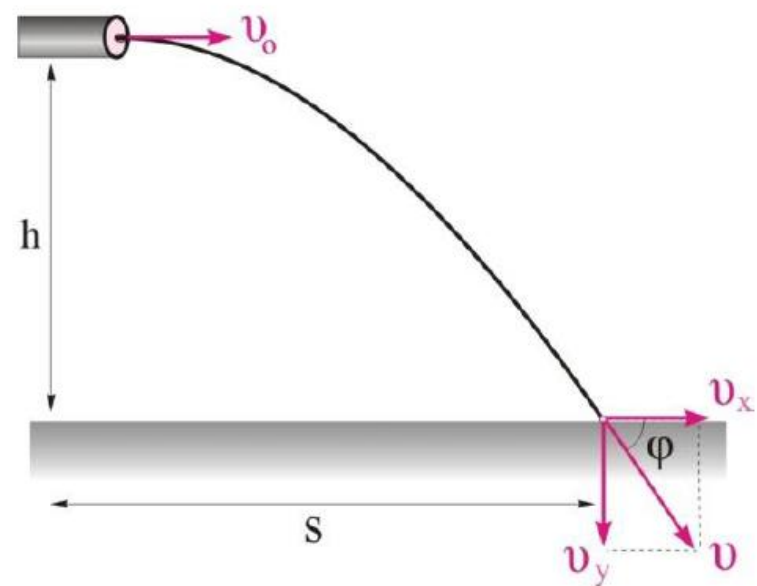
Να υπολογίσετε:

- A) τη χρονική διάρκεια της πτώσης του νερού μέχρι να φθάσει στο έδαφος.
- B) την ταχύτητα u_0 εξόδου του νερού από το σωλήνα.
- Γ) την οριζόντια απόσταση S του σημείου που χτυπάει το νερό στο έδαφος από την έξοδο του σωλήνα και τη γωνία ϕ με το οριζόντιο επίπεδο, υπό την οποία προσκρούει το νερό.
- Δ) την εσωτερική ακτίνα r_1 του σωλήνα.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{ m/s}^2$.

Να υπολογίσετε:

A) τη χρονική διάρκεια της πτώσης του νερού μέχρι να φθάσει στο έδαφος.

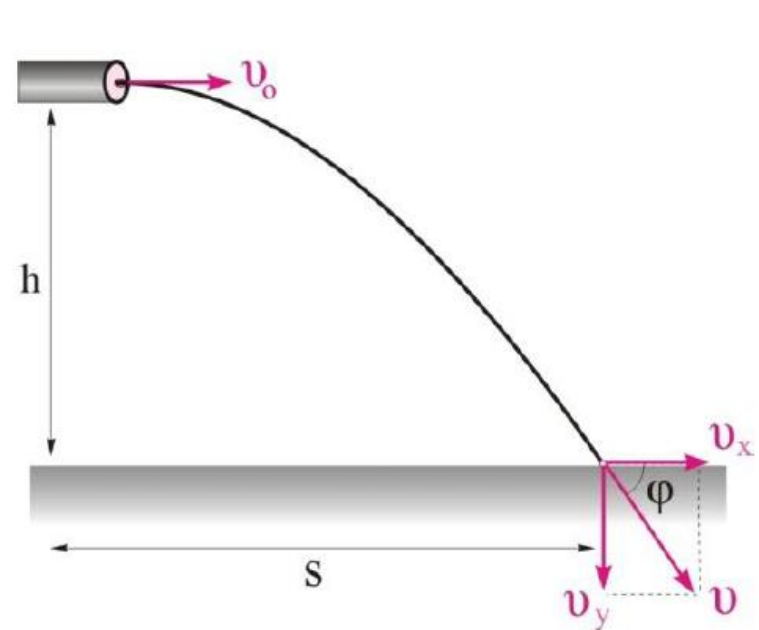


$$h = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15\text{m}}{10\text{m/s}^2}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{3}\text{s}$$

B) την ταχύτητα u_0 εξόδου του νερού από το σωλήνα.

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 \cdot u_0 = A_2 \cdot u \Rightarrow \pi \cdot r_1^2 \cdot u_0 = \pi \cdot r_2^2 \cdot u \Rightarrow u = \frac{r_1^2 \cdot u_0}{r_2^2} \Rightarrow$$

$$u = \frac{r_1^2 \cdot u_0}{\left(\frac{r_1}{\sqrt{2}}\right)^2} \Rightarrow u = 2u_0. \quad (1)$$



Η ταχύτητα του νερού όταν θα φθάσει στο έδαφος είναι

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} . \quad (2)$$

Η ταχύτητα που θα έχει το νερό την ίδια στιγμή στον κατακόρυφο άξονα, v_y , είναι:

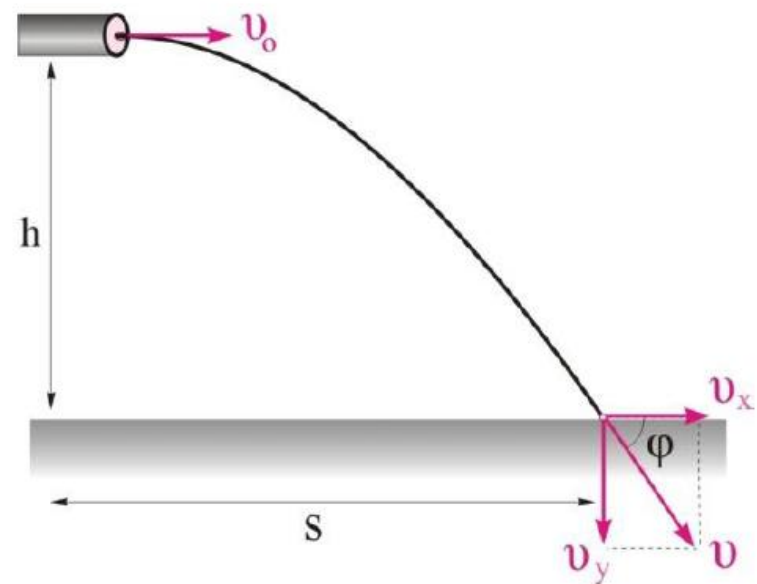
$$v_y = g \cdot t_1 = 10 \text{ m/s}^2 \cdot \sqrt{3} \text{ s} \Rightarrow v_y = 10\sqrt{3} \text{ m/s} . \quad (3)$$

Έτσι η σχέση (1) με χρήση και των σχέσεων (2) και (3) γίνεται

$$v = 2v_0 \Rightarrow \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2v_0 \Rightarrow \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = 2v_0 \Rightarrow v_0^2 + v_y^2 = 4v_0^2 \Rightarrow$$

$$3v_0^2 = (10\sqrt{3} \text{ m/s})^2 \Rightarrow v_0^2 = 100 \Rightarrow v_0 = 10 \text{ m/s} .$$

Γ) την οριζόντια απόσταση S του σημείου που χτυπάει το νερό στο έδαφος από την έξοδο του σωλήνα και τη γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο, υπό την οποία προσκρούει το νερό.



Γ) Η οριζόντια απόσταση S του σημείου που χτυπάει το νερό στο έδαφος από την έξοδο του σωλήνα είναι:

$$S = v_0 \cdot t_1 = 10 \text{ m/s} \cdot \sqrt{3} \text{ s} \Rightarrow S = 10\sqrt{3} \text{ m.}$$

Η γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο υπό την οποία προσκρούει το νερό είναι

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{v_y}{v_0} = \frac{10\sqrt{3} \text{ m/s}}{10 \text{ m/s}} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Δ) την εσωτερική ακτίνα r_1 του σωλήνα.

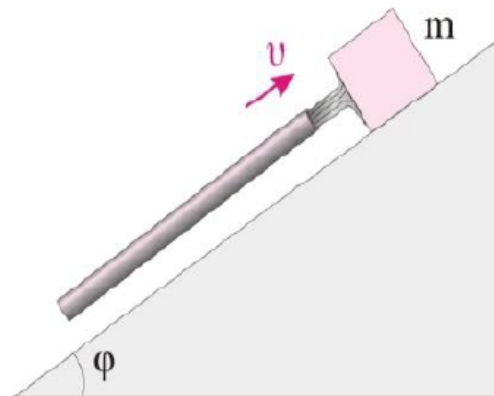
Δ) Η παροχή του σωλήνα είναι ίση με την παροχή σε όλο το μήκος της φλέβας του νερού. Εφόσον το δοχείο όγκου $V = \pi \cdot \sqrt{3} L$ γεμίζει τη χρονική στιγμή $t_2 = 2\sqrt{3}s$ και με δεδομένο ότι το νερό χρειάστηκε χρονικό διάστημα $t_1 = \sqrt{3}s$ για να φτάσει στο έδαφος η παροχή θα είναι

$$\Pi = \frac{V}{t_2 - t_1} = \frac{\pi \cdot \sqrt{3} L}{\sqrt{3} s} \Rightarrow \Pi = \pi \frac{L}{s} = \pi \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

$$\Pi_1 = A_1 \cdot v_0 = \pi \cdot r_1^2 \cdot v_0 \Rightarrow r_1^2 = \frac{\Pi_1}{\pi \cdot v_0} \Rightarrow r_1 = \sqrt{\frac{\Pi_1}{\pi \cdot v_0}} \Rightarrow$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{\pi \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}}{\pi \cdot 10 \text{ m} / \text{s}}} \Rightarrow r_1 = 10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}.$$

5. Ένας σωλήνας εσωτερικής διατομής $A=10 \text{ cm}^2$ με τη βοήθεια πιεστικής αντλίας εκτοξεύει νερό με ρυθμό 1L κάθε δευτερόλεπτο, παράλληλα σε πλάγιο δάπεδο, γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$ και κατεύθυνση προς τα πάνω. Το νερό προσπίπτει κάθετα στην πλευρική επιφάνεια ενός σώματος μάζας $m=0,5\text{kg}$, που παραμένει ακίνητο πάνω στο πλάγιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Το σώμα παρουσιάζει με το δάπεδο συντελεστή στατικής τριβής μ_s . Το νερό μετά την πρόσκρουσή του στο σώμα πέφτει προς το δάπεδο χωρίς ταχύτητα και απομακρύνεται.

Να υπολογίσετε:

- A)** την ταχύτητα με την οποία εξέρχεται το νερό από το σωλήνα.
- B)** την ισχύ της αντλίας που προωθεί το νερό, αν θεωρήσουμε ότι η δυναμική του ενέργεια δεν μεταβάλλεται.
- Γ)** τη δύναμη που ασκεί το νερό στο σώμα κατά την πρόσκρουσή του σε αυτό.
- Δ)** τον ελάχιστο συντελεστή στατικής τριβής μ_s , ώστε το σώμα να παραμένει ακίνητο.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10 \text{ m/s}^2$, $\eta\mu 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και η πυκνότητα του νερού $\rho =1 \text{ g/cm}^3$.

Να υπολογίσετε:

A) την ταχύτητα με την οποία εξέρχεται το νερό από το σωλήνα.

80

A) Η παροχή του σωλήνα είναι

$$\Pi = \frac{V}{t} = \frac{1\text{L}}{1\text{s}} \Rightarrow \Pi = 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Από την παροχή του σωλήνα βρίσκουμε την ταχύτητα u με την οποία εξέρχεται το νερό από το σωλήνα

$$\Pi = A \cdot v \Rightarrow v = \frac{\Pi}{A} = \frac{10^{-3} \text{m}^3 / \text{s}}{10 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} \Rightarrow v = 1 \text{m} / \text{s}.$$

B) την ισχύ της αντλίας που προωθεί το νερό, αν θεωρήσουμε ότι η δυναμική του ενέργεια δεν μεταβάλλεται.

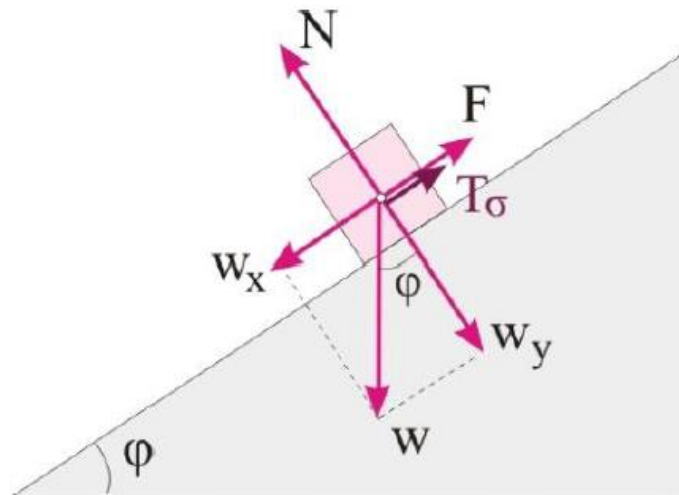
$$P = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta \left(\frac{1}{2} m \cdot v^2 \right)}{\Delta t} = \frac{1}{2} v^2 \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{1}{2} v^2 \cdot \frac{\Delta(\rho \cdot V)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$P = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \cdot \Pi = \frac{1}{2} 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (1 \text{m} / \text{s})^2 \cdot (10^{-3} \text{m}^3 / \text{s}) \Rightarrow P = \frac{1}{2} \text{W}.$$

$$(\rho = 1 \text{ g/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3)$$

Γ) τη δύναμη που ασκεί το νερό στο σώμα κατά την πρόσκρουσή του σε αυτό.

81



Γ) Η δύναμη, F , που ασκεί το νερό με την πρόσκρουσή του στο σώμα είναι αντίθετη της δύναμης, F' , που δέχεται το νερό από το σώμα, ως δράση - αντίδραση. Η δύναμη, F' , που δέχεται το νερό από το σώμα ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ορμής του νερού. Παίρνοντας θετικά την κατεύθυνση της αρχικής ταχύτητας του νερού έχουμε:

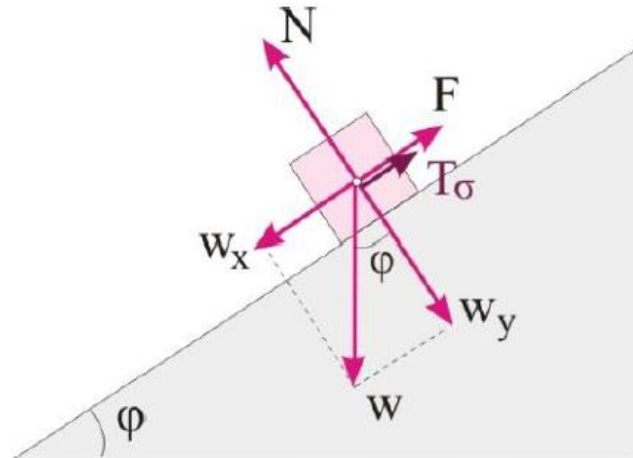
$$F' = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-\Delta m v}{\Delta t} = -v \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} = -v \cdot \frac{\Delta(\rho \cdot V)}{\Delta t} = -\rho \cdot v \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$F' = -\rho \cdot v \cdot \Pi = -10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1 \text{ m/s} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s} \Rightarrow F' = -1 \text{ N}.$$

Άρα το σώμα δέχεται δύναμη μέτρου $F=1\text{N}$ στην κατεύθυνση της ταχύτητας του νερού.

Δ) τον ελάχιστο συντελεστή στατικής τριβής μ_s , ώστε το σώμα να παραμένει ακίνητο.

82



Δ) Το βάρος του σώματος είναι

$$w = m \cdot g = 0,5\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \Rightarrow w = 5\text{N}$$

και οι συνιστώσες του βάρους

$$w_x = m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi = 5\text{N} \cdot \eta\mu 30^\circ \Rightarrow w_x = 2,5\text{N}$$

$$w_y = m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 5\text{N} \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ = 5\text{N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow w_y = 2,5\sqrt{3}\text{N}.$$

Η συνιστώσα του βάρους w_x είναι μεγαλύτερη της F και για να μην κινηθεί το σώμα προς τα κάτω, η στατική τριβή πρέπει να είναι προς τα πάνω και να έχει τιμή που θα βρούμε από την ισορροπία του σώματος

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow w_x = F + T_\sigma \Rightarrow T_\sigma = w_x - F = 2,5\text{N} - 1\text{N} \Rightarrow T_\sigma = 1,5\text{N}$$

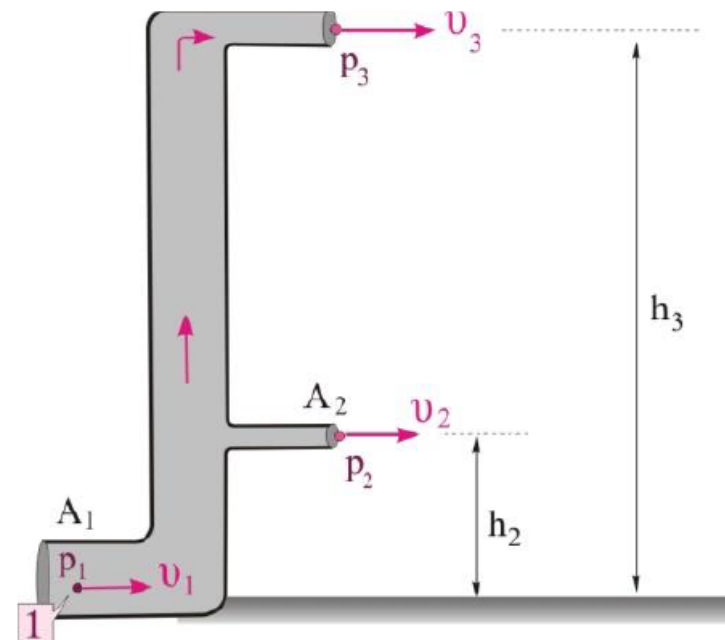
Η στατική τριβή είναι μικρότερη ή ίση της μέγιστης στατικής τριβής, που δίνεται από τη σχέση

$$T_{\sigma, \max} = \mu_\sigma \cdot N = \mu_\sigma \cdot w_y$$

Άρα, ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής, ώστε το σώμα να παραμένει ακίνητο θα είναι:

$$T_\sigma \leq T_{\sigma, \max} \Rightarrow T_\sigma \leq \mu_\sigma \cdot w_y \Rightarrow \mu_\sigma \geq \frac{T_\sigma}{w_y} \Rightarrow \mu_{\sigma, \varepsilon\lambda} = \frac{1,5\text{N}}{2,5\sqrt{3}\text{N}} \Rightarrow \mu_{\sigma, \varepsilon\lambda} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

6. Ένας κατακόρυφος σωλήνας σταθερής διατομής $A_1=10\text{cm}^2$, τροφοδοτεί με νερό δύο οριζόντιους σωλήνες διατομής $A_2=3\text{cm}^2$ και $A_3=4\text{cm}^2$, οι οποίοι εκτοξεύουν νερό προς το έδαφος. Οι οριζόντιοι σωλήνες βρίσκονται σε ύψη h_2 και h_3 αντίστοιχα. Το νερό αρχίζει να ανέρχεται στον κατακόρυφο σωλήνα με ταχύτητα $u_1=3\text{m/s}$ και εξέρχεται από τους δύο οριζόντιους σωλήνες με ταχύτητες $u_2=6\text{m/s}$ και u_3 , αντίστοιχα. Οι χρόνοι που βρίσκεται το νερό στο αέρα μέχρι να κτυπήσει στο έδαφος είναι t_2 και $t_3=2t_2$, αντίστοιχα.



Να υπολογίσετε:

- A) την ταχύτητα u_3 με την οποία το νερό εξέρχεται από τον ψηλότερο οριζόντιο σωλήνα.
- B) τα ύψη h_2 και h_3 στα οποία βρίσκονται οι δύο οριζόντιοι σωλήνες.
- Γ) την πίεση του νερού p_1 στη βάση του κατακόρυφου σωλήνα (σημείο 1).
- Δ) ποιο ποσοστό % της συνολικής ποσότητας νερού που τροφοδοτεί ο κατακόρυφος σωλήνας φτάνει στον ψηλότερο οριζόντιο σωλήνα.

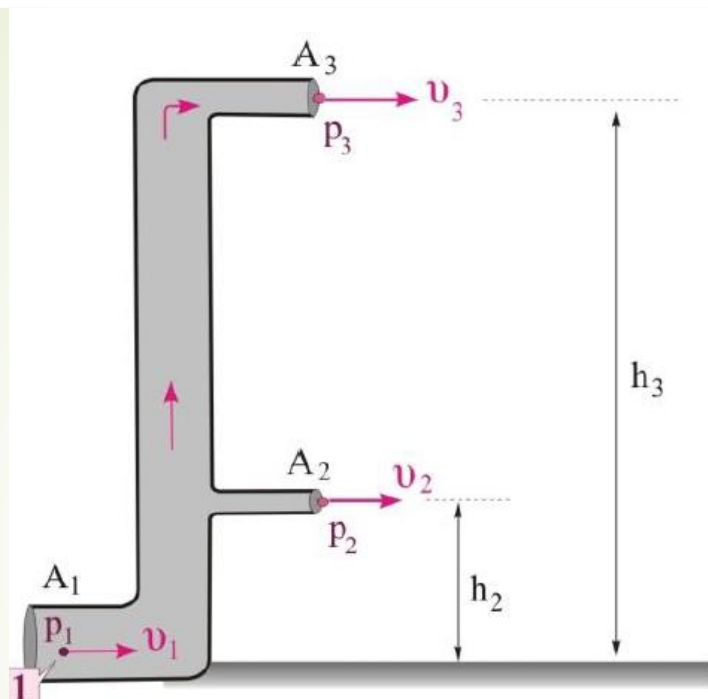
Να θεωρήσετε το νερό ιδανικό ρευστό.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$, η πυκνότητα του νερού $\rho=1000\text{kg/m}^3$ και η ατμοσφαιρική πίεση $p_{\text{atm}}=10^5\text{N/m}^2$.

Να υπολογίσετε:

A) την ταχύτητα u_3 με την οποία το νερό εξέρχεται από τον ψηλότερο οριζόντιο σωλήνα.

85



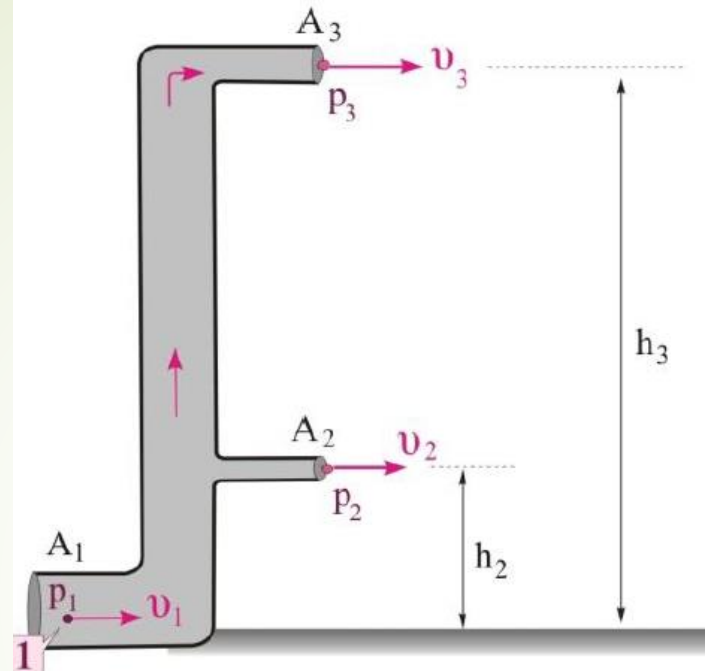
A) Από την εξίσωση της συνέχειας θα υπολογίσουμε την ταχύτητα u_3 με την οποία το νερό εξέρχεται από τον ψηλότερο οριζόντιο σωλήνα

$$\Pi_1 = \Pi_2 + \Pi_3 \Rightarrow A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 + A_3 \cdot v_3 \Rightarrow v_3 = \frac{A_1 \cdot v_1 - A_2 \cdot v_2}{A_3} \Rightarrow$$

$$v_3 = \frac{10\text{cm}^2 \cdot 3\text{m/s} - 3\text{cm}^2 \cdot 6\text{m/s}}{4\text{cm}^2} \Rightarrow v_3 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

B) τα ύψη h_2 και h_3 στα οποία βρίσκονται οι δύο οριζόντιοι σωλήνες.

86



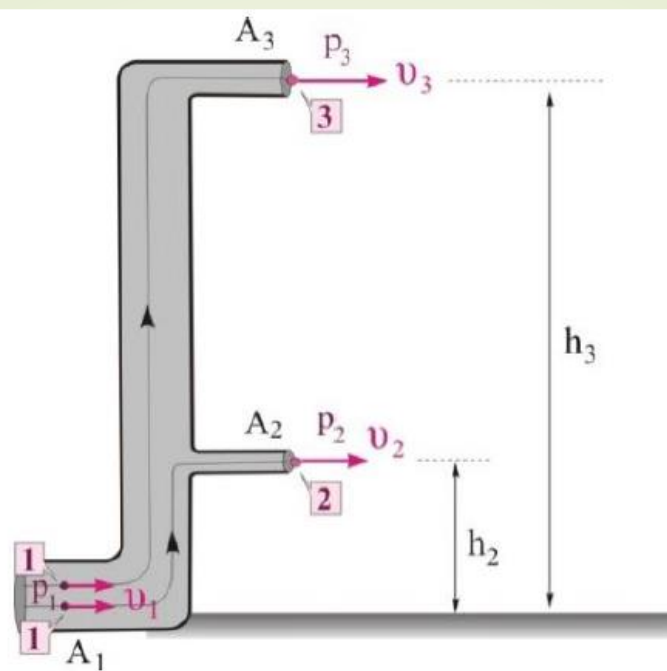
$$t_3 = 2t_2$$

$$h_2 = \frac{1}{2} g t_2^2$$

$$h_3 = \frac{1}{2} g t_3^2 \Rightarrow h_3 = \frac{1}{2} g (2t_2)^2 \Rightarrow h_3 = 4 \frac{1}{2} g t_2^2 \Rightarrow$$

$$h_3 = 4h_2$$

(1)



Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια ρευματική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία 1 και 2, θεωρώντας σαν επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια του ρευστού το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο 1.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad (2)$$

Ομοίως εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια ρευματική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία 1 και 3

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g h_3 \quad (3)$$

Οι πιέσεις p_2 και p_3 , στα σημεία 2 και 3 είναι ίσες με την ατμοσφαιρική, αφού το νερό από τους δύο σωλήνες εξέρχεται στον αέρα.

$$p_2 = p_3 = p_{\alpha\tau\mu} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Στις σχέσεις **(2)** και **(3)** τα πρώτα μέλη είναι ίσα, άρα θα είναι και τα δεύτερα. Χρησιμοποιώντας και τη σχέση (1) υπολογίζουμε τα ύψη h_2 και h_3 που βρίσκονται οι δύο οριζόντιοι σωλήνες

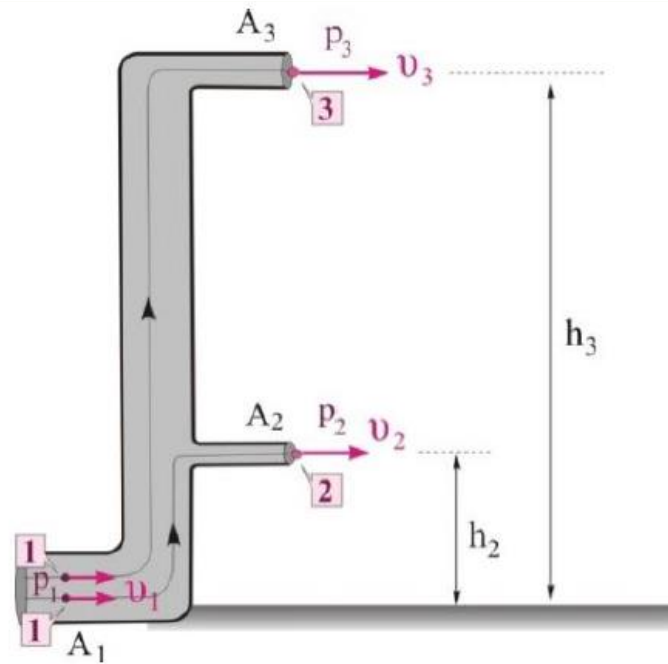
$$\cancel{p_2} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = \cancel{p_3} + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g h_3 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g h_3 \Rightarrow \boxed{h_3 = 4h_2}$$

$$v_2^2 + 2gh_2 = v_3^2 + 2g4h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{v_2^2 - v_3^2}{6g} = \frac{\left(6\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(3\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{6 \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow \boxed{h_2 = 0,45\text{m.}}$$

Από τη σχέση **(1)** προκύπτει $\boxed{h_3 = 4h_2 = 1,8\text{m.}}$

Γ) την πίεση του νερού p_1 στη βάση του κατακόρυφου σωλήνα (σημείο 1).

89



Γ) Από τη σχέση (2) βρίσκουμε την πίεση του νερού p_1 στη βάση του κατακόρυφου σωλήνα (σημείο 1).

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 \Rightarrow p_1 = p_{\text{ατμ}} + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow$$

$$p_1 = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} + 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,45\text{m} + \frac{1}{2} 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(\left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right) \Rightarrow p_1 = 1,18 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

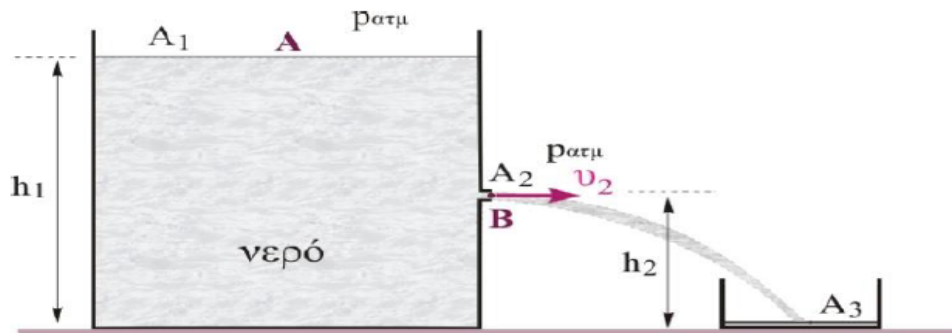
Δ) ποιο ποσοστό % της συνολικής ποσότητας νερού που τροφοδοτεί ο κατακόρυφος σωλήνας φτάνει στον ψηλότερο οριζόντιο σωλήνα.

90

$$\frac{m_3}{m_1} \cdot 100\% = \frac{\rho V_3}{\rho V_1} \cdot 100\% = \frac{V_3}{V_1} \cdot 100\% = \frac{\Pi_3 t}{\Pi_1 t} \cdot 100\% = \frac{\Pi_3}{\Pi_1} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\frac{m_3}{m_1} \cdot 100\% = \frac{A_3 \cdot v_3}{A_1 \cdot v_1} \cdot 100\% = \frac{4\text{cm}^2 \cdot 3\text{m/s}}{10\text{cm}^2 \cdot 3\text{m/s}} \cdot 100\% \Rightarrow \boxed{\frac{m_3}{m_1} \cdot 100\% = 40\% .}$$

7. Το δοχείο που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, είναι ανοικτό, έχει διατομή με μεγάλη επιφάνεια A_1 και είναι γεμάτο με νερό σε βάθος $h_1=1,75$ m. Στο σημείο B του πλευρικού τοιχώματος, που βρίσκεται σε ύψος $h_2=1,25$ m από τον πυθμένα, υπάρχει μικρό άνοιγμα εμβαδού διατομής



$A_2 = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ cm}^2$, που είναι κλεισμένο με πώμα. Η διατομή A_2 είναι πολύ μικρότερη από την επιφάνεια του δοχείου, A_1 . Τη χρονική στιγμή $t=0$ αφαιρούμε το πώμα. Το νερό από το άνοιγμα εξέρχεται με οριζόντια ταχύτητα u_2 και με την πτώση του γεμίζει μικρό άδειο δοχείο όγκου $V=1$ L που βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με τον πυθμένα του δοχείου.

Να υπολογίσετε:

- A)** την ταχύτητα u_2 με την οποία το νερό εξέρχεται στον αέρα.
- B)** τη χρονική στιγμή που θα γεμίσει το μικρό δοχείο.
- Γ)** το εμβαδό της διατομής A_3 της φλέβας του νερού στο σημείο που φτάνει στο μικρό δοχείο.

Αν η ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο μεγάλο δοχείο έχει επιφάνεια διατομής $A_1=100\text{cm}^2$ και τοποθετήσουμε πάνω της έμβολο μάζας $m=15\text{kg}$

- Δ)** να υπολογίσετε ξανά τη χρονική στιγμή που θα γεμίσει το μικρό δοχείο, αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία θεωρώντας ότι το μεγάλο δοχείο παραμένει γεμάτο με νερό σε βάθος $h_1=1,75$ m.

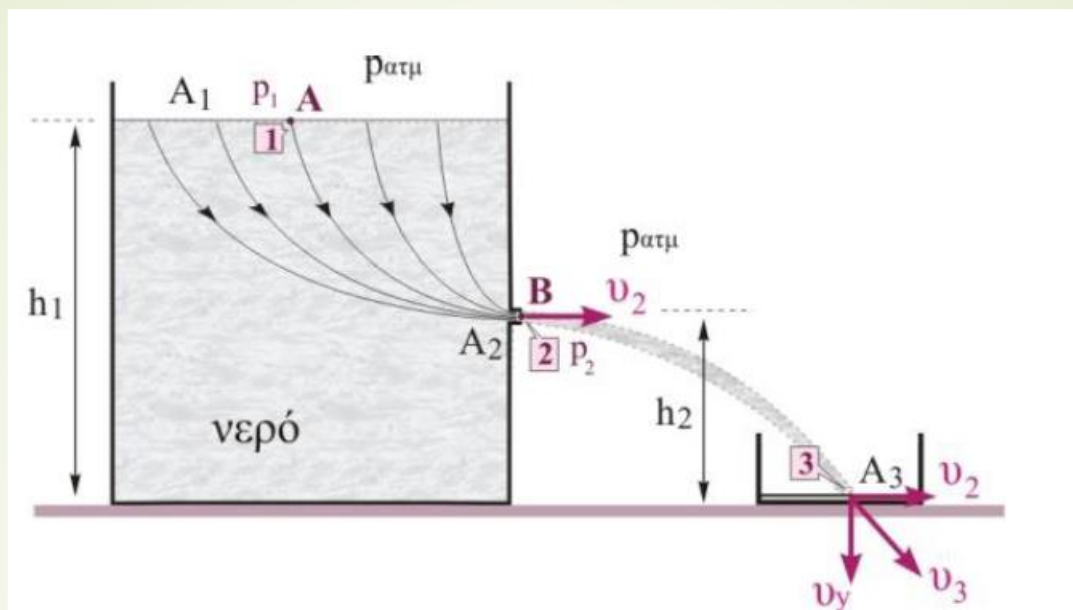
Να θεωρήσετε το νερό ιδανικό ρευστό.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$, η πυκνότητα του νερού $\rho=10^3\text{kg/m}^3$ και η ατμοσφαιρική πίεση $p_{\text{atm}}=10^5\text{N/m}^2$.

Να υπολογίσετε:

A) την ταχύτητα u_2 με την οποία το νερό εξέρχεται στον αέρα.

92



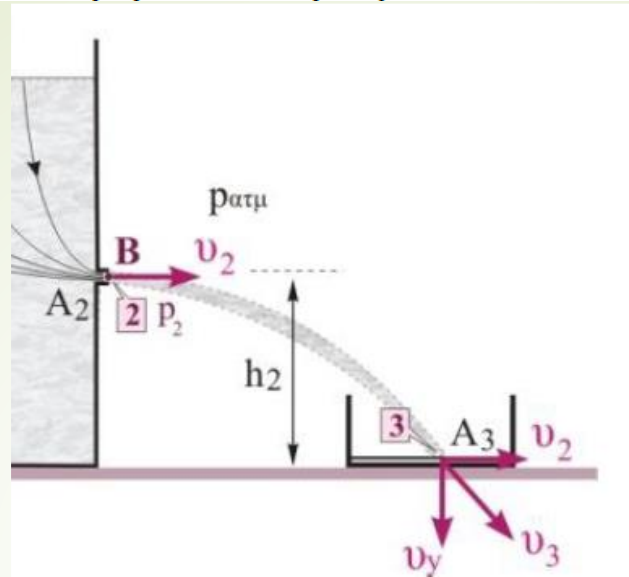
Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια ρευματική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία A και B. Επειδή η διατομή A_2 είναι πολύ μικρότερη από την επιφάνεια του δοχείου A_1 θεωρούμε ότι η ταχύτητα u_1 με την οποία κατεβαίνει η ελεύθερη επιφάνεια του νερού είναι μηδενική, $u_1=0$.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho g(h_1 - h_2) = p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 \Rightarrow \rho g(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}\rho u_2^2 \Rightarrow$$

$$u_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5\text{m}} \Rightarrow u_2 = \sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (\text{Θεώρημα Torricelli})$$

Β) τη χρονική στιγμή που θα γεμίσει το μικρό δοχείο.

93



$$h_2 = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,25\text{m}}{10\text{m/s}^2}} \Rightarrow t_1 = 0,5\text{s}.$$

Η παροχή της φλέβας του νερού στο σημείο Β, στο σημείο εξόδου από το δοχείο, είναι

$$\Pi_2 = A_2 \cdot v_2 \Rightarrow \Pi_2 = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot 10^{-4} \text{m}^2 \cdot \sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Pi_2 = 5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 0,5 \frac{\text{L}}{\text{s}}.$$

Η παροχή της φλέβας του νερού παραμένει σταθερή μέχρι την πρόσπτωση του νερού στο μικρό δοχείο, άρα το χρονικό διάστημα Δt που χρειάζεται για να γεμίσει το δοχείο είναι

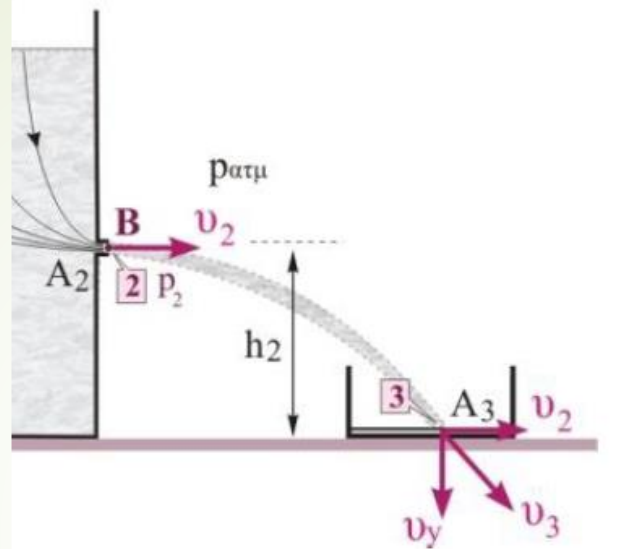
$$\Pi_2 = \frac{V}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{V}{\Pi_2} = \frac{1\text{L}}{0,5\text{L/s}} \Rightarrow \Delta t = 2\text{s}.$$

Κατά συνέπεια το μικρό δοχείο θα γεμίσει τη χρονική στιγμή

$$t_2 = t_1 + \Delta t = 0,5\text{s} + 2\text{s} \Rightarrow t_2 = 2,5\text{s}.$$

Γ) το εμβαδό της διατομής A_3 της φλέβας του νερού στο σημείο που φτάνει στο μικρό δοχείο.

94



Γ) Η παροχή κατά μήκος της φλέβας του νερού είναι σταθερή και από την εξίσωση της συνέχειας, από την έξοδο της δεξαμενής μέχρι και ελάχιστα πριν την πρόσκρουση του νερού στο μικρό δοχείο, με ταχύτητα u_3 , έχουμε

$$\Pi_2 = \Pi_3 \Rightarrow A_2 \cdot u_2 = A_3 \cdot u_3 \quad (1)$$

Η ταχύτητα του νερού όταν θα φθάσει στο έδαφος είναι

$$u_3 = \sqrt{u_2^2 + u_y^2} \quad (2)$$

$$v_y = g t_1 = 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0,5 \text{ s} \Rightarrow v_y = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3)$$

Έτσι η σχέση (2) γίνεται

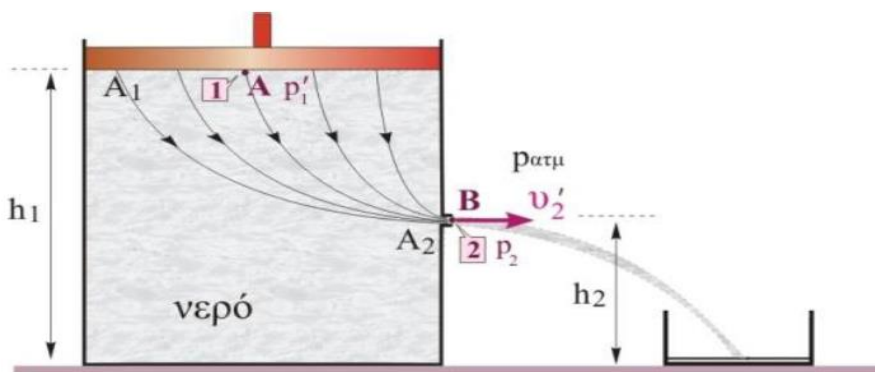
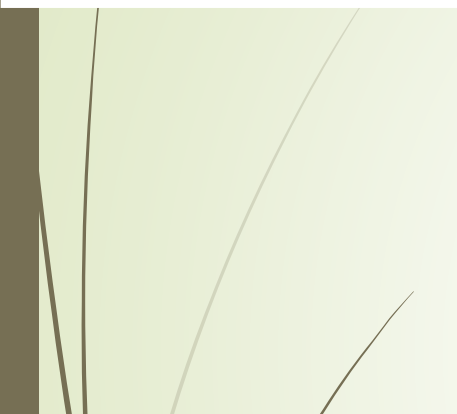
$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \Rightarrow v_3 = \sqrt{35} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η σχέση (1) τελικά δίνει

$$\Pi_2 = \Pi_3 \Rightarrow A_2 \cdot v_2 = A_3 \cdot v_3 \Rightarrow A_3 = \frac{A_2 \cdot v_2}{v_3} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ cm}^2 \cdot \sqrt{10} \text{ m/s}}{\sqrt{35} \text{ m/s}} \Rightarrow A_3 = \frac{\sqrt{35}}{7} \text{ cm}^2.$$

Αν η ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο μεγάλο δοχείο έχει επιφάνεια διατομής $A_1=100\text{cm}^2$ και τοποθετήσουμε πάνω της έμβολο μάζας $m=15\text{kg}$

Δ) να υπολογίσετε ξανά τη χρονική στιγμή που θα γεμίσει το μικρό δοχείο, αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία θεωρώντας ότι το μεγάλο δοχείο παραμένει γεμάτο με νερό σε βάθος $h_1=1,75\text{ m}$.



$$p_1' = p_{\alpha\tau\mu} + p_{\varepsilon\mu\beta} = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{W_{\varepsilon\mu\beta}}{A_1} = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{m \cdot g}{A_1} \quad (4)$$

Το θεώρημα Bernoulli με χρήση της σχέσης (4) δίνει

$$p_1' + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g(h_1 - h_2) = p_2 + \frac{1}{2}\rho(v_2')^2 \Rightarrow$$

$$p_{\alpha\tau\mu} + \frac{m g}{A_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g(h_1 - h_2) = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho(v_2')^2 \Rightarrow \frac{m g}{A_1} + \rho g(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}\rho(v_2')^2 \Rightarrow$$

$$\frac{15\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2}{100 \cdot 10^{-4}\text{m}^2} + 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5\text{m} = \frac{1}{2} 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (v_2')^2 \Rightarrow v_2' = \sqrt{40} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2\sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η χρονική διάρκεια της πτώσης του νερού είναι ίδια με πριν

$$h_2 = \frac{1}{2}g \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,25\text{m}}{10\text{m/s}^2}} \Rightarrow t_1 = 0,5\text{s}.$$

Η παροχή της φλέβας του νερού στο σημείο Β, στο σημείο εξόδου από το δοχείο, είναι

$$\Pi' = A_2 \cdot v_2' \Rightarrow \Pi' = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot 10^{-4}\text{m}^2 \cdot 2\sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Pi' = 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 1 \frac{\text{L}}{\text{s}}.$$

Η παροχή της φλέβας του νερού παραμένει σταθερή μέχρι την πρόσπτωση του νερού στο μικρό δοχείο, άρα το χρονικό διάστημα $\Delta t'$ που χρειάζεται για να γεμίσει το δοχείο είναι

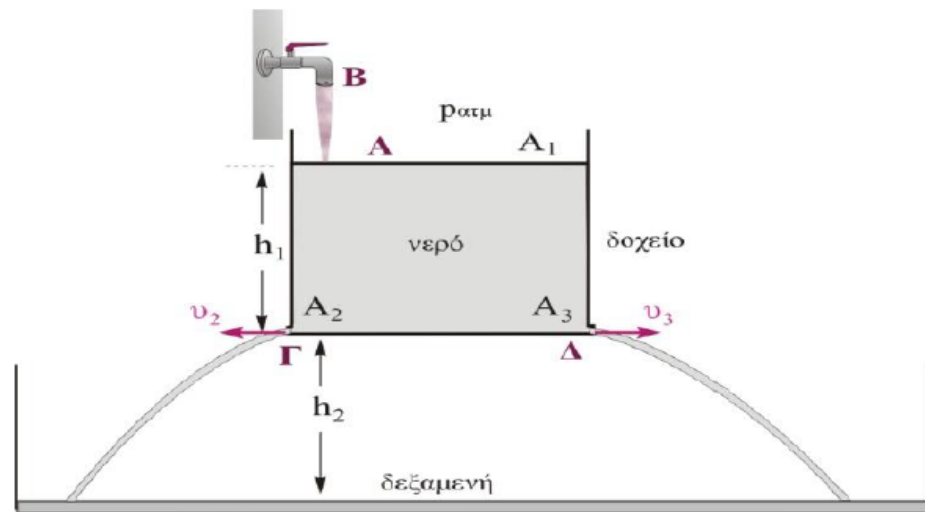
$$\Pi' = \frac{V}{\Delta t'} \Rightarrow \Delta t' = \frac{V}{\Pi'} = \frac{1\text{L}}{1\text{L/s}} \Rightarrow \Delta t' = 1\text{s}.$$

Κατά συνέπεια το μικρό δοχείο θα γεμίσει τη χρονική στιγμή

$$t_3 = t_1 + \Delta t' = 0,5\text{s} + 1\text{s} \Rightarrow t_3 = 1,5\text{s}.$$

8.

Το δοχείο επιφάνειας $A_1=100\text{cm}^2$, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, είναι ανοιχτό και γεμάτο με νερό σε ύψος $h_1=80\text{cm}$. Μια βρύση μπορεί να εισάγει νερό στο δοχείο. Σε δύο σημεία των πλευρικών τοιχωμάτων, στα χαμηλότερα σημεία του δοχείου, υπάρχουν δύο μικρά ανοίγματα Γ και Δ με εμβαδά διατομών $A_2=1\text{cm}^2$ και $A_3=2\text{cm}^2$, που είναι κλειστά με πώματα. Κάτω από το δοχείο υπάρχει πλατιά δεξαμενή, σε κατακόρυφη απόσταση $h_2=80\text{cm}$ από το δοχείο, στην οποία καταλήγουν οι φλέβες νερού από τα ανοίγματα. Τη χρονική στιγμή $t=0$, ανοίγουμε ταυτόχρονα τη βρύση παροχής Π_B και το άνοιγμα Γ , οπότε το νερό εξέρχεται με οριζόντια ταχύτητα u_2 .



Να υπολογίσετε:

A) την παροχή της βρύσης Π_B , ώστε η στάθμη του νερού να παραμένει σταθερή στο αρχικό ύψος h_1 .

B) την ταχύτητα u_3 με την οποία το νερό προσπίπτει στην πλατιά δεξαμενή.

Γ) τον όγκο του νερού που εισήλθε στη δεξαμενή μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2=10,4\text{s}$.

Αφαιρούμε το πώμα και από το άνοιγμα Δ , οπότε το νερό εξέρχεται με οριζόντια ταχύτητα u_3 .

Να υπολογίσετε:

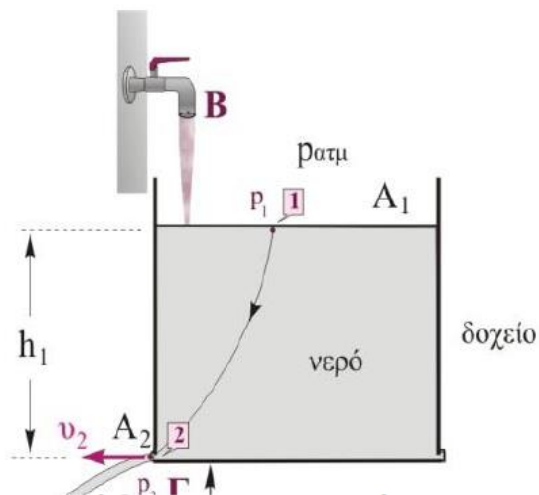
Δ) το ύψος h του νερού στο δοχείο τη χρονική στιγμή που ο ρυθμός με τον οποίο κατεβαίνει η ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο δοχείο είναι $0,02\text{ m/s}$.

Να θεωρήσετε το νερό ιδανικό ρευστό.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$.

Να υπολογίσετε:

A) την παροχή της βρύσης Π_B , ώστε η στάθμη του νερού να παραμένει σταθερή στο αρχικό ύψος h_1 .



A) Για να παραμένει σταθερή η στάθμη του νερού στο αρχικό ύψος h_1 , πρέπει η παροχή της βρύσης Π_B να είναι ίση με την παροχή Π_Γ στο άνοιγμα της εξόδου Γ του νερού

$$\Pi_B = \Pi_\Gamma \Rightarrow \Pi_B = A_2 \cdot v_2 \quad (1)$$

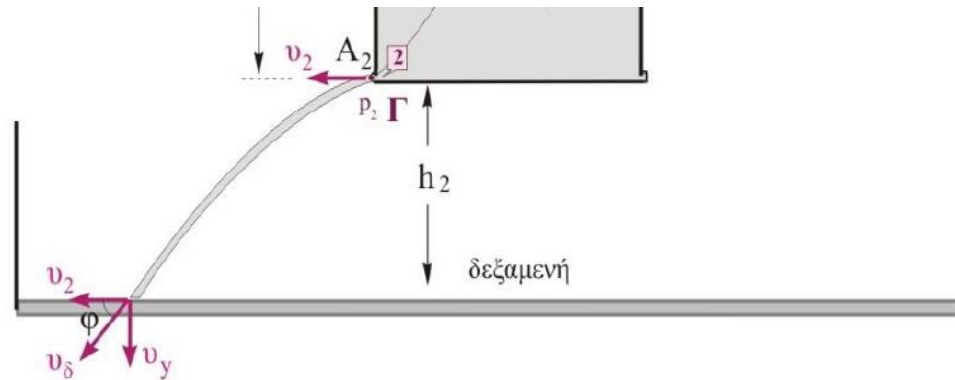
$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow \rho g h_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{2 g h_1} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,8 \text{m}} \Rightarrow v_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (\text{Θεώρημα Torricelli})$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) βρίσκουμε την παροχή της βρύσης Π_B .

$$\Pi_B = \Pi_\Gamma \Rightarrow \Pi_B = A_2 \cdot v_2 = 1 \text{cm}^2 \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 10^{-4} \text{m}^2 \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Pi_B = 4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Β) την ταχύτητα v_δ με την οποία το νερό προσπίπτει στην πλατιά δεξαμενή.



$$h_2 = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8\text{m}}{10\text{m/s}^2}} \Rightarrow t_1 = 0,4\text{s}.$$

Η ταχύτητα του νερού όταν φθάνει στο έδαφος είναι

$$v_\delta = \sqrt{v_2^2 + v_y^2} \quad (2)$$

$$v_y = g t_1 = 10\text{m/s}^2 \cdot 0,4\text{s} \Rightarrow v_y = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Έτσι η σχέση (2) δίνει

$$v_\delta = \sqrt{v_2^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \Rightarrow v_\delta = 4\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο, υπό την οποία προσκρούει το νερό είναι

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{v_y}{v_2} = \frac{4\text{m/s}}{4\text{m/s}} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Γ) τον όγκο του νερού που εισήλθε στη δεξαμενή μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2=10,4s$.

10

1

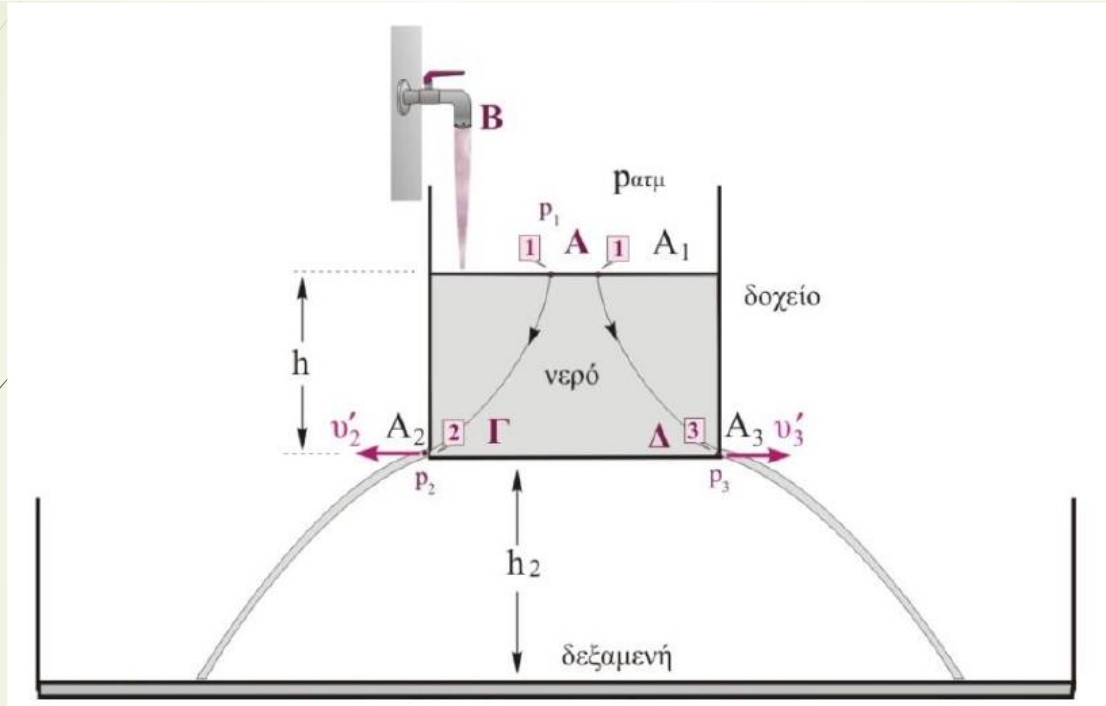
Γ) Τη χρονική στιγμή $t_2=10,4s$ έχει εισέλθει στη δεξαμενή όγκος νερού που θα υπολογιστεί από την παροχή για χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$, όπου t_1 ο χρόνος για να φτάσει το νερό στη δεξαμενή.

$$\Pi_{\Gamma} = \frac{V}{\Delta t} \Rightarrow V = \Pi_{\Gamma} \cdot (t_2 - t_1) = 4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} (10,4\text{s} - 0,4\text{s}) \Rightarrow V = 4 \cdot 10^{-3} \text{m}^3.$$

Αφαιρούμε το πώμα και από το άνοιγμα Δ, οπότε το νερό εξέρχεται με οριζόντια ταχύτητα u_3 .

Να υπολογίσετε:

Δ) το ύψος h του νερού στο δοχείο τη χρονική στιγμή που ο ρυθμός με τον οποίο κατεβαίνει η ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο δοχείο είναι $0,02 \text{ m/s}$.



$$\Pi_B + A_1 \cdot v_1' = \Pi_2 + \Pi_3 \Rightarrow \Pi_B + A_1 \cdot v_1' = A_2 \cdot v_2' + A_3 \cdot v_3' \quad (3)$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1')^2 + \rho g h = p_3 + \frac{1}{2}\rho(v_3')^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho(v_1')^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho \cdot (v_3')^2 \Rightarrow v_3' = \sqrt{(v_1')^2 + 2gh} \quad (4)$$
$$p_1 + \frac{1}{2} \rho (v_1')^2 + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2} \rho (v_2')^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \rho (v_1')^2 + \rho g h = \frac{1}{2} \rho (v_2')^2 \Rightarrow v_2' = \sqrt{(v_1')^2 + 2 g h} \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει ότι $u_2' = u_3'$.

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) παίρνουμε:

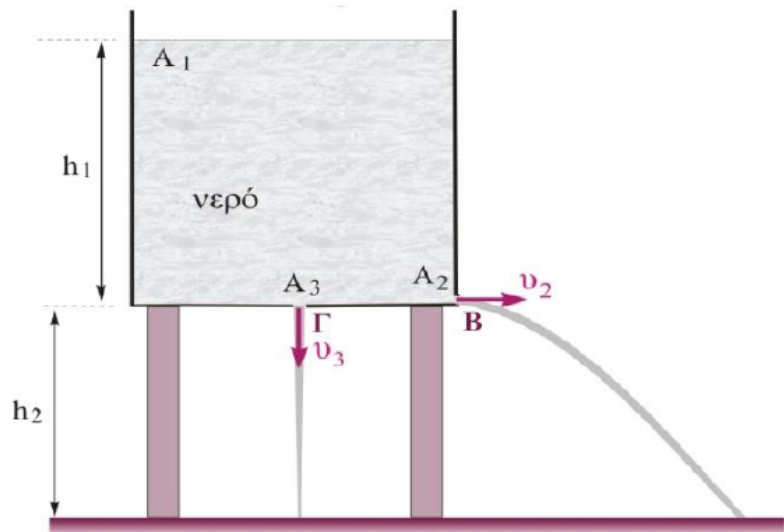
$$\begin{aligned}\Pi_B + A_1 \cdot v_1' &= (A_2 + A_3) \cdot v_2' \Rightarrow v_2' = \frac{\Pi_B + A_1 \cdot v_1'}{A_2 + A_3} \Rightarrow \\ v_2' &= \frac{4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} + 100 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 \cdot 0,02 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10^{-4} \text{m}^2 + 2 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} = \frac{6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{3 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} \Rightarrow v_2' = v_3' = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.\end{aligned}$$

Τελικά για το ύψος h από τη σχέση (5) έχουμε:

$$v_2' = \sqrt{(v_1')^2 + 2gh} \Rightarrow h = \frac{(v_2')^2 - (v_1')^2}{2g} = \frac{\left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(0,02 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow h = 0,19998 \text{m} = 19,998 \text{cm}.$$

9.

Η δεξαμενή, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, είναι ανοικτή και γεμάτη με νερό σε ύψος $h_1=125\text{cm}$. Στα σημεία Β και Γ του πλευρικού τοιχώματος και του πυθμένα, αντίστοιχα, υπάρχουν μικρά ανοίγματα με επιφάνειες διατομών $A_2=1\text{cm}^2$ και $A_3=2\text{cm}^2$, αντίστοιχα. Τα δύο ανοίγματα βρίσκονται σε ύψος $h_2=120\text{cm}$ από το έδαφος και είναι κλεισμένα με πώματα. Οι διατομές A_2 και A_3 είναι πολύ μικρότερες από την επιφάνεια A_1 της δεξαμενής. Τη χρονική στιγμή $t=0$, αφαιρούμε ταυτόχρονα τα δύο πώματα. Το νερό εξέρχεται στον αέρα από τα δύο ανοίγματα με ταχύτητες u_2 και u_3 αντίστοιχα. Η ταχύτητα u_2 είναι οριζόντια.



Να υπολογίσετε:

A) τις ταχύτητες u_2 και u_3 με τις οποίες εξέρχεται το νερό στον αέρα από τα ανοίγματα Β και Γ.

B) το μέτρο των ταχυτήτων u_2' και u_3' , με τις οποίες το νερό των δύο φλεβών προσκρούει στο έδαφος.

Γ) τις χρονικές στιγμές t_2 και t_3 , που το νερό των δύο φλεβών προσκρούει στο έδαφος.

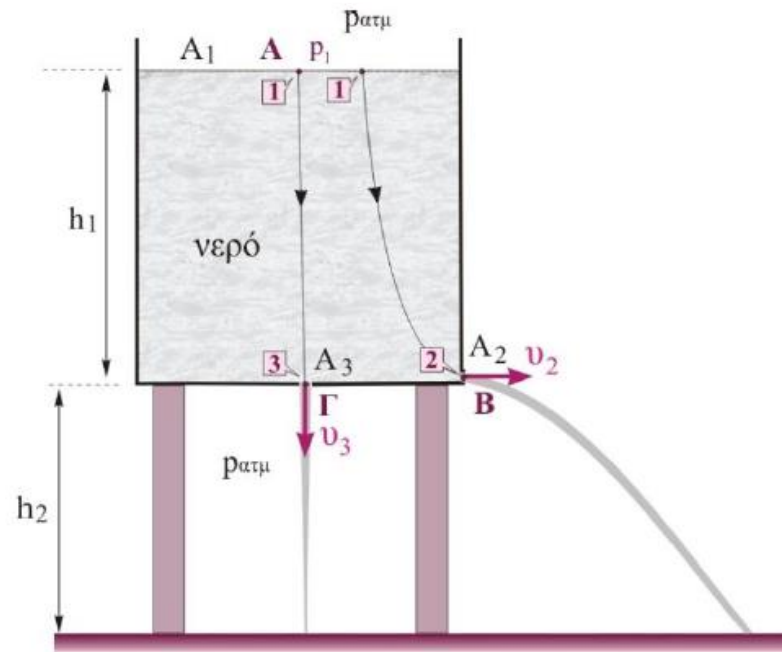
Δ) τις επιφάνειες των διατομών A_2' και A_3' που έχουν οι φλέβες νερού όταν φτάνουν στο έδαφος.

Να θεωρήσετε το νερό ιδανικό ρευστό.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$, η πυκνότητα του νερού $\rho = 10^3\text{kg/m}^3$ και η ατμοσφαιρική πίεση $p_{\text{atm}} = 10^5\text{N/m}^2$.

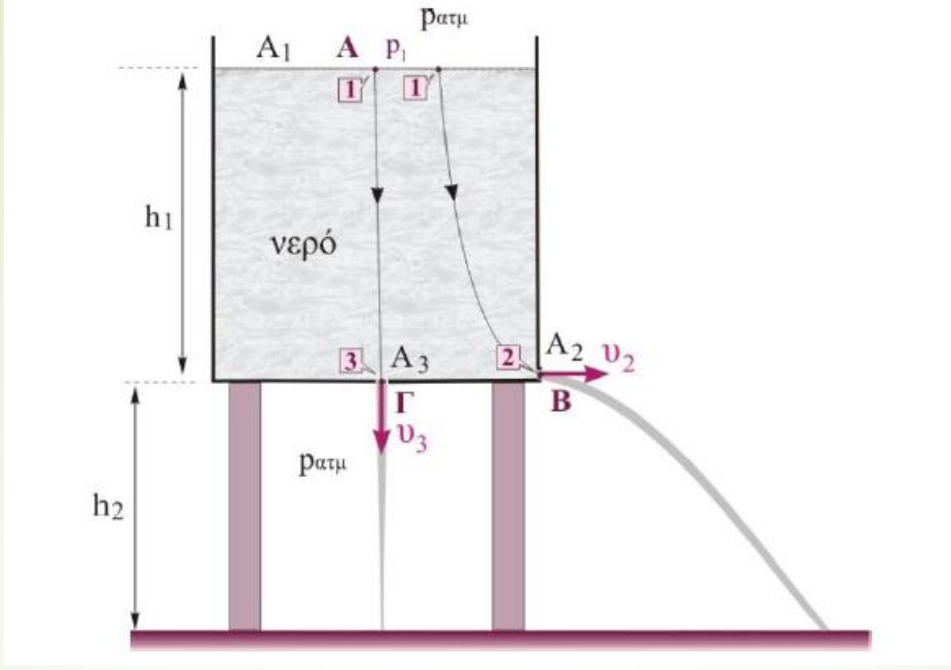
Να υπολογίσετε:

A) τις ταχύτητες u_2 και u_3 με τις οποίες εξέρχεται το νερό στον αέρα από τα ανοίγματα Β και Γ.



A) Η πίεση p_1 , στο σημείο Α είναι ίση με την ατμοσφαιρική, αφού το δοχείο είναι ανοικτό, όπως και η πίεση p_2 , στα σημεία Β και Γ, αφού το νερό εξέρχεται στον αέρα, άρα

$$p_1 = p_2 = p_{\alpha\tau\mu} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow$$

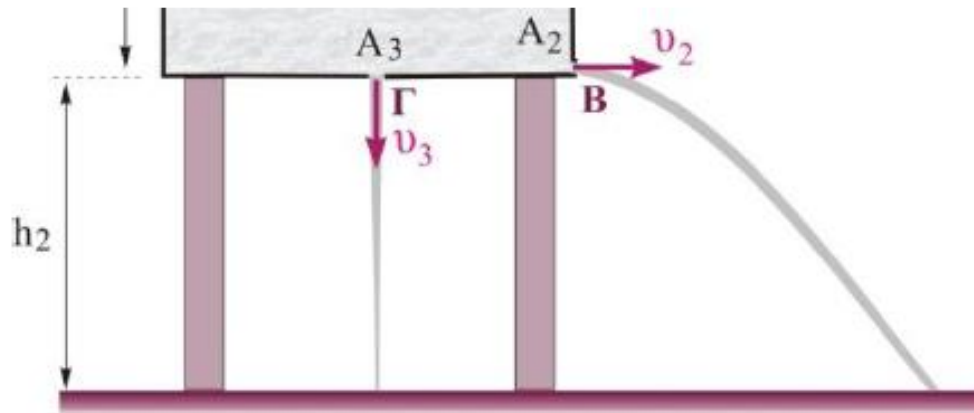
$$v_2 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,25\text{m}} \Rightarrow v_2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Ομοίως προκύπτει η ταχύτητα u_3 , αν εφαρμόσουμε το θεώρημα Bernoulli για μια φλέβα νερού που διέρχεται από τα σημεία Α και Γ.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 \Rightarrow \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_3^2 \Rightarrow$$

$$v_3 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,25\text{m}} \Rightarrow v_3 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

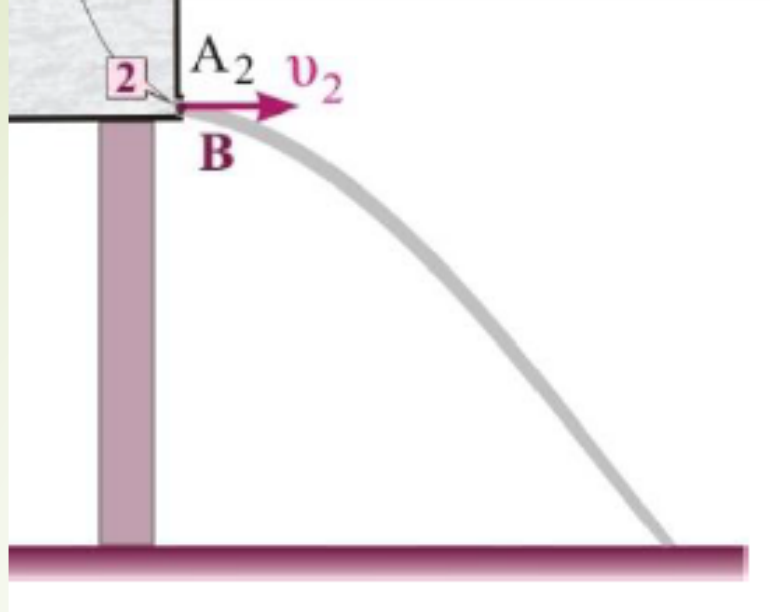
Β) το μέτρο των ταχυτήτων u_2' και u_3' , με τις οποίες το νερό των δύο φλεβών προσκρούει στο έδαφος.



Β) Τα μέτρα των ταχυτήτων u_2' και u_3' , αντίστοιχα, με τις οποίες το νερό των δύο φλεβών προσκρούει στο έδαφος, θα τα υπολογίσουμε με το θεώρημα Bernoulli. Η πίεση p_2 , στο σημείο Γ, είναι ίση με την ατμοσφαιρική, όπως και η πίεση στα σημεία που το νερό φτάνει στο έδαφος. Πρώτα για μια ρευματική γραμμή της κατακόρυφης φλέβας.

$$p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho u_3^2 + \rho g h_2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho (u_3')^2 \Rightarrow$$

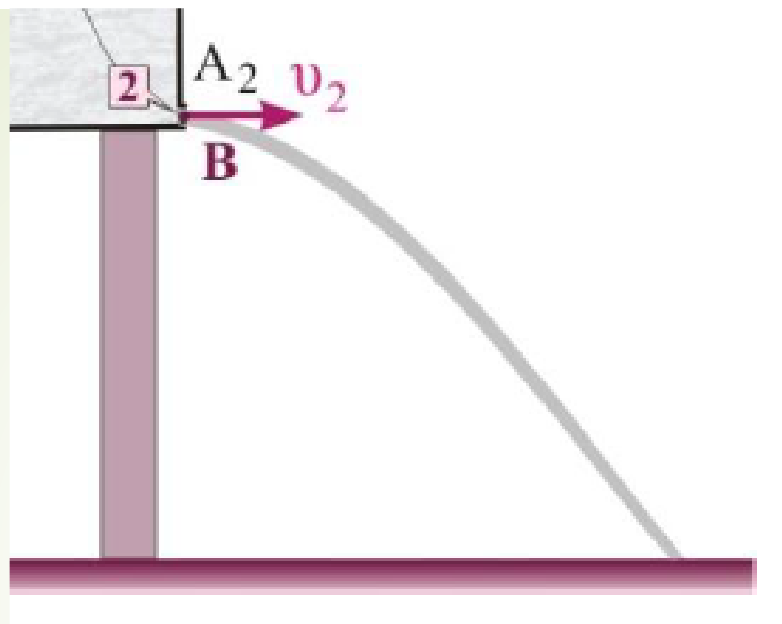
$$u_3' = \sqrt{u_3^2 + 2gh_2} = \sqrt{\left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,2\text{m}} \Rightarrow u_3' = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



$$p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho (v_2')^2 \Rightarrow$$

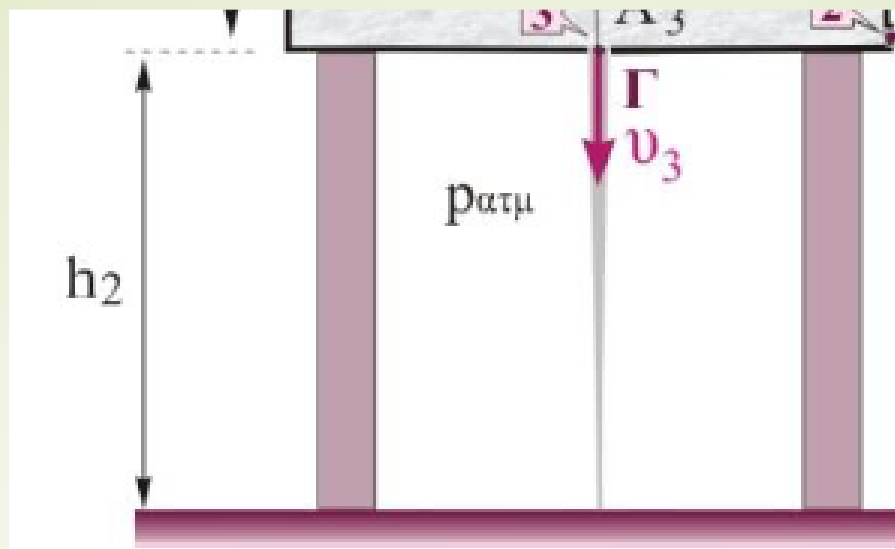
$$v_2' = \sqrt{v_2^2 + 2gh_2} = \sqrt{\left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,2\text{m}} \Rightarrow v_2' = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Γ) τις χρονικές στιγμές t_2 και t_3 , που το νερό των δύο φλεβών προσκρούει στο έδαφος.



Γ) Η δέσμη του νερού που εξέρχεται από το πλευρικό άνοιγμα κάνει οριζόντια βολή. Σύμφωνα με την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων η χρονική διάρκεια της πτώσης του νερού, μέχρι να φθάσει στο έδαφος, εξαρτάται από το ύψος που εκτοξεύεται

$$h_2 = \frac{1}{2} g \cdot t_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,2\text{m}}{10\text{m/s}^2}} \Rightarrow t_2 = \sqrt{0,24}\text{ s} \text{ ή } t_2 = 0,2\sqrt{6}\text{ s}.$$



Η δέσμη του νερού που κινείται κατακόρυφα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα v_3 . Η ταχύτητα v_3' που θα αποκτήσει τη χρονική στιγμή t_3 , είναι

$$v_3' = v_3 + g t_3 \Rightarrow t_3 = \frac{v_3' - v_3}{g} = \frac{7 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow t_3 = 0,2 \text{ s.}$$

Δ) τις επιφάνειες των διατομών A_2' και A_3' που έχουν οι φλέβες νερού όταν φτάνουν στο έδαφος.

2

Δ) Τις επιφάνειες διατομών A_2' και A_3' , που έχουν οι φλέβες νερού όταν φτάνουν στο έδαφος θα τις υπολογίσουμε από την εξίσωση της συνέχειας για την κάθε φλέβα νερού, από την έξοδό της από τη δεξαμενή μέχρι και ελάχιστα πριν την πρόσκρουσή της στο έδαφος.

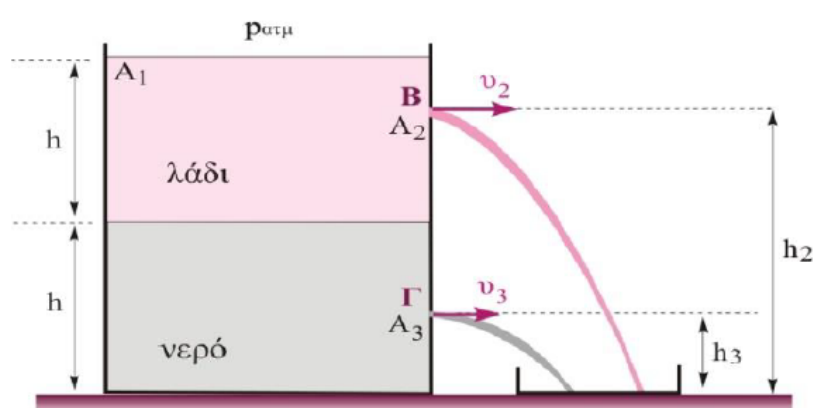
$$\Pi_2 = \Pi_2' \Rightarrow A_2 \cdot v_2 = A_2' \cdot v_2' \Rightarrow A_2' = \frac{A_2 \cdot v_2}{v_2'} = \frac{1\text{cm}^2 \cdot 5\text{m/s}}{7\text{m/s}} \Rightarrow A_2' = \frac{5}{7}\text{cm}^2.$$

$$\Pi_3 = \Pi_3' \Rightarrow A_3 \cdot v_3 = A_3' \cdot v_3' \Rightarrow A_3' = \frac{A_3 \cdot v_3}{v_3'} = \frac{2\text{cm}^2 \cdot 5\text{m/s}}{7\text{m/s}} \Rightarrow A_3' = \frac{10}{7}\text{cm}^2.$$

10.

Η δεξαμενή μεγάλης επιφάνειας A_1 , που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, είναι ανοικτή και περιέχει νερό σε σταθερό ύψος $h=50\text{cm}$, ενώ από πάνω από το νερό υπάρχει στρώμα λαδιού ίδιου ύψους h . Σε δύο σημεία των πλευρικών τοιχωμάτων, υπάρχουν μικρά ανοίγματα Β και Γ με διατομές $A_2=2\text{cm}^2$

και $A_3=\sqrt{\frac{5}{3}}\text{cm}^2$, αντίστοιχα. Οι διατομές



A_2 και A_3 είναι πολύ μικρότερες από την επιφάνεια A_1 της δεξαμενής. Τα δύο ανοίγματα βρίσκονται σε ύψος $h_2=80\text{cm}$, $h_3=20\text{cm}$ από τον πυθμένα του δοχείου, αντίστοιχα, και είναι κλεισμένα με πώματα. Τη χρονική στιγμή $t=0$, ανοίγουμε ταυτόχρονα τα δύο ανοίγματα, οπότε το λάδι και το νερό εξέρχονται στον αέρα με οριζόντιες ταχύτητες u_2 και u_3 , αντίστοιχα. Οι σχηματιζόμενες φλέβες νερού και λαδιού, αφού κάνουν οριζόντιες βολές, καταλήγουν μέσα σε μικρό άδειο δοχείο, όγκου $V=10\text{ L}$, που βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με τον πυθμένα της δεξαμενής.

Να υπολογίσετε:

A) τις ταχύτητες u_2 και u_3 , με τις οποίες το λάδι και το νερό εξέρχονται στον αέρα από τα ανοίγματα Β και Γ, αντίστοιχα, τη χρονική στιγμή $t=0$.

B) τις χρονικές στιγμές t_2 και t_3 που οι δύο φλέβες από το λάδι και το νερό, αντίστοιχα, προσπίπτουν στο δοχείο.

Γ) τη χρονική στιγμή t που θα γεμίσει το δοχείο.

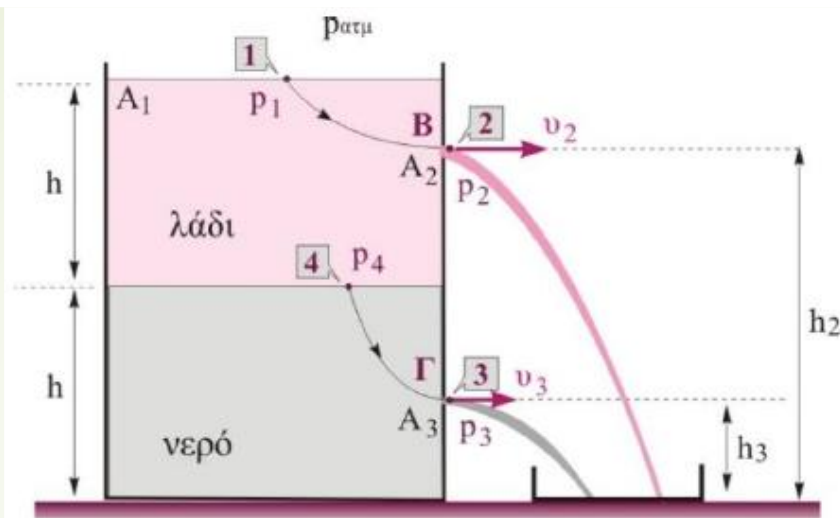
Δ) το ποσοστό του συνολικού υγρού στο μικρό δοχείο που καταλαμβάνει το λάδι, κατά τη χρονική στιγμή t , που το δοχείο γεμίζει.

Να θεωρήσετε το νερό και το λάδι ιδανικά ρευστά.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{ m/s}^2$, η πυκνότητα του νερού $\rho_v=10^3\text{kg/m}^3$, η πυκνότητα του λαδιού $\rho_\lambda=0,9\cdot 10^3\text{ kg/m}^3$ και η ατμοσφαιρική πίεση $p_{\text{atm}}=10^5\text{N/m}^2$.

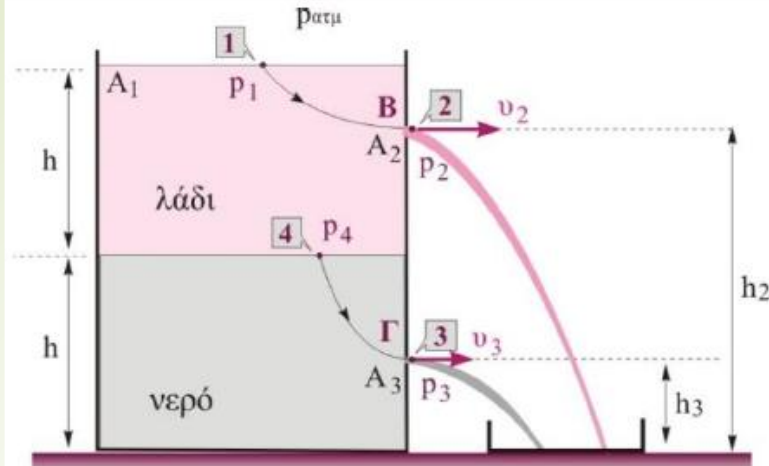
Να υπολογίσετε:

A) τις ταχύτητες u_2 και u_3 , με τις οποίες το λάδι και το νερό εξέρχονται στον αέρα από τα ανοίγματα Β και Γ, αντίστοιχα, τη χρονική στιγμή $t=0$.



Επειδή οι διατομές A_2 και A_3 είναι πολύ μικρότερες από την επιφάνεια της δεξαμενής A_1 , θεωρούμε ότι η ταχύτητα u_1 με την οποία κατεβαίνει η ελεύθερη επιφάνεια του νερού και του λαδιού είναι μηδενική, $u_1=0$. Η ταχύτητα u_2 με την οποία εξέρχεται το λάδι στον αέρα από το άνοιγμα Β προκύπτει άμεσα από το θεώρημα Torricelli

$$u_2 = \sqrt{2g(2h - h_2)} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2 \cdot 0,5\text{m} - 0,8\text{m})} \Rightarrow u_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Για την ταχύτητα u_3 με την οποία εξέρχεται το νερό στον αέρα από το άνοιγμα Γ θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Bernoulli για μια ρευματική γραμμή που διέρχεται από το σημείο 4, στη διαχωριστική επιφάνεια λαδιού - νερού και του σημείου 3, στην έξοδο του νερού από τη δεξαμενή.

$$p_4 + \frac{1}{2} \rho_v u_1^2 + \rho_v g(h - h_3) = p_3 + \frac{1}{2} \rho_v u_3^2 \quad (1)$$

Η πίεση p_4 , στο σημείο 4, είναι το άθροισμα της ατμοσφαιρικής πίεσης και της υδροστατικής πίεσης από την υπερκείμενη ποσότητα του λαδιού.

$$p_4 = p_{\alpha\tau\mu} + \rho_{\lambda} g h$$

Έτσι, η σχέση (1) γίνεται:

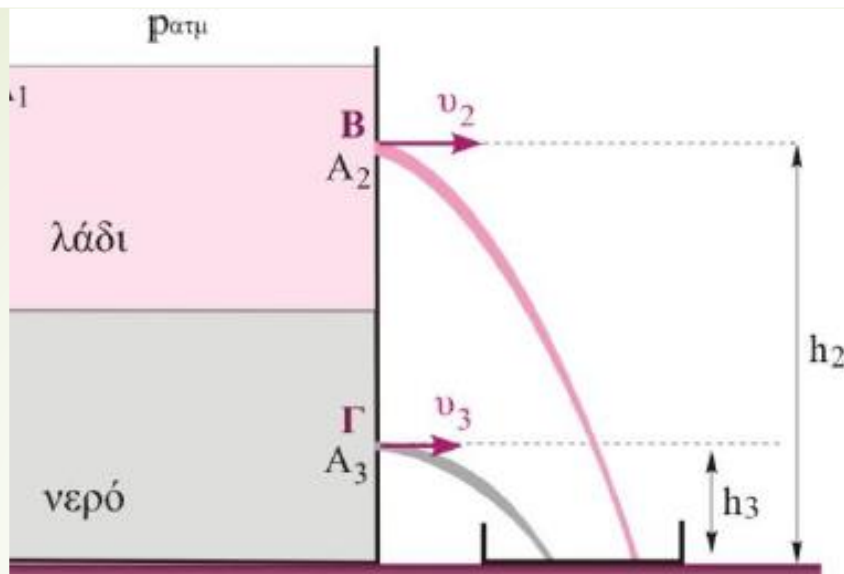
$$p_{\alpha\tau\mu} + \rho_{\lambda} g h + \rho_v g(h - h_3) = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2} \rho_v u_3^2 \Rightarrow \rho_{\lambda} g h + \rho_v g(h - h_3) = \frac{1}{2} \rho_v u_3^2 \Rightarrow$$

$$u_3^2 = 2g \left(\frac{\rho_{\lambda} h}{\rho_v} + (h - h_3) \right) = 2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left(\frac{0,9 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,5\text{m}}{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} + 0,3\text{m} \right) \Rightarrow u_3 = \sqrt{15} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Β) τις χρονικές στιγμές t_2 και t_3 που οι δύο φλέβες από το λάδι και το νερό, αντίστοιχα, προσπίπτουν στο δοχείο.

11

6



Β) Οι δέσμες του νερού και του λαδιού που εξέρχονται από τα πλευρικά ανοίγματα κάνουν οριζόντιες βολές. Σύμφωνα με την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων η χρονική διάρκεια της πτώσης εξαρτάται από το ύψος εκτόξευσης. Το λάδι θα φτάσει στο δοχείο τη χρονική στιγμή t_2 .

$$h_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8\text{m}}{10\text{m/s}^2}} \Rightarrow t_2 = 0,4\text{s}$$

και το νερό τη χρονική στιγμή t_3 .

$$h_3 = \frac{1}{2}gt_3^2 \Rightarrow t_3 = \sqrt{\frac{2h_3}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,2\text{m}}{10\text{m/s}^2}} \Rightarrow t_3 = 0,2\text{s}.$$

Γ) τη χρονική στιγμή t που θα γεμίσει το δοχείο.

Γ) Η παροχή του νερού είναι

$$\Pi_{\Gamma} = A_3 \cdot v_3 = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \sqrt{15} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Pi_{\Gamma} = 5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Η παροχή του λαδιού είναι

$$\Pi_{\text{B}} = A_2 \cdot v_2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Pi_{\text{B}} = 4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Τη χρονική στιγμή t που θα γεμίσει το δοχείο έχει εισέλθει σε αυτό συνολικός όγκος 10L από τα δύο υγρά. Ο όγκος αυτός θα υπολογιστεί από την παροχή του νερού για χρονικό διάστημα $\Delta t = t - t_3$ και από την παροχή του λαδιού για χρονικό διάστημα $\Delta t = t - t_2$

$$V_{\text{ολ}} = V_{\lambda} + V_{\nu} = \Pi_{\text{B}} \cdot (t - t_2) + \Pi_{\Gamma} \cdot (t - t_3) \Rightarrow$$

$$10\text{L} = 4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} (t - 0,4\text{s}) + 5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} (t - 0,2\text{s}) \Rightarrow$$

$$10^{-2} \text{ m}^3 = 4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} (t - 0,4\text{s}) + 5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} (t - 0,2\text{s}) \Rightarrow$$

$$9t = 102,6\text{s} \Rightarrow t = 11,4\text{s}.$$

Δ) το ποσοστό του συνολικού υγρού στο μικρό δοχείο που καταλαμβάνει το λάδι, κατά τη χρονική στιγμή t , που το δοχείο γεμίζει.

Δ) Το ποσοστό του συνολικού υγρού στο μικρό δοχείο που καταλαμβάνει το λάδι, κατά τη χρονική στιγμή t , που το δοχείο γεμίζει είναι :

$$\frac{V_{\lambda}}{V_{\text{ολ}}} \cdot 100\% = \frac{\Pi_2 \cdot (t - t_2)}{V_{\text{ολ}}} \cdot 100\% = \frac{4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} (11,4\text{s} - 0,4\text{s})}{10\text{L}} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\frac{V_{\lambda}}{V_{\text{ολ}}} \cdot 100\% = \frac{4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot 11\text{s}}{10^{-2} \text{m}^3} \cdot 100\% = 44\%.$$



**Ερωτήσεις
εκτός του βιβλίου**

1. Ένα ιδανικό ρευστό ρέει σε σωλήνα μεταβλητής διατομής.

α. Η παροχή του ρευστού μειώνεται όταν η διατομή του σωλήνα αυξάνεται.

β. Οι μάζες του ρευστού δεν έχουν την ίδια ταχύτητα σε όλα τα σημεία του σωλήνα.

γ. Η πίεση του ρευστού είναι ίδια σε όλα τα σημεία του σωλήνα.

δ. Η μηχανική ενέργεια του ρευστού μεταβάλλεται.

2. Η εξίσωση του Bernoulli για τα ρευστά είναι συνέπεια της αρχής διατήρησης

α. της ύλης.

γ. της παροχής.

β. της ενέργειας.

δ. μηχανικής ενέργειας.

3. Σε έναν οριζόντιο σωλήνα που ρέει ιδανικό ρευστό, όταν

- α. αυξάνεται το εμβαδόν διατομής μειώνεται η πίεση.
- β. αυξάνεται η ταχύτητα ροής του ρευστού αυξάνεται η πίεση.
- γ. μειώνεται το εμβαδόν διατομής αυξάνεται η ταχύτητα ροής.
- δ. μειώνεται η ταχύτητα ροής μειώνεται και η παροχή.

4. Ένα αεροπλάνο βάρους w που πετάει οριζόντια με σταθερή ταχύτητα μέτρου v σε ύψος h από το έδαφος δέχεται δυναμική άνωση A . Από το ίδιο σημείο πετάει οριζόντια ένα δεύτερο αεροπλάνο βάρους $w/2$ με ταχύτητα $2v$. Αυτό δέχεται δυναμική άνωση μέτρου

- α. A .
- β. $2A$.
- γ. $A/2$.
- δ. $4A$.

12
5. Σύμφωνα με την εξίσωση του Bernoulli, για όλα τα σημεία που ανήκουν στην ίδια ρευματική φλέβα ισχύει:

- α. $\rho u^2 + 2p + 2\rho gh = \text{σταθερό.}$
- β. $\rho u^2 + 2p + \rho gh = \text{σταθερό.}$
- γ. $\rho u^2 + p + 2\rho gh = \text{σταθερό.}$
- δ. $\rho u^2 + p + \rho gh = \text{σταθερό.}$

6. Η εξίσωση του Bernoulli μπορεί να εφαρμοστεί μόνο μεταξύ δύο θέσεων ενός ιδανικού ρευστού

- α. που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.
- β. που κινείται.
- γ. που ανήκουν σε δύο τυχαίες ρευματικές φλέβες.
- δ. που ανήκουν στην ίδια ρευματική φλέβα.

7. Σύμφωνα με το θεώρημα Torricelli, η ταχύτητα εκροής ενός υγρού από ένα σημείο που βρίσκεται σε πλευρικό τοίχωμα ενός δοχείου

α. εξαρτάται από την πυκνότητα του υγρού.

β. εξαρτάται από τη μάζα του υγρού.

γ. εξαρτάται από το εμβαδό βάσης του δοχείου στο οποίο βρίσκεται το υγρό.

δ. είναι ίση με αυτήν που θα είχε αν αφηνόταν να πέσει ελεύθερα από το ίδιο ύψος.



Ασκήσεις & Προβλήματα από το βιβλίο

(από σελ. 105)

3.21 Από το πλευρικό άνοιγμα μιας ανοιχτής δεξαμενής
βγαίνει νερό με ταχύτητα $8,86\text{m/s}$. Με πόση ταχύτητα
θα βγαίνει αν η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια γίνει
 2atm ;

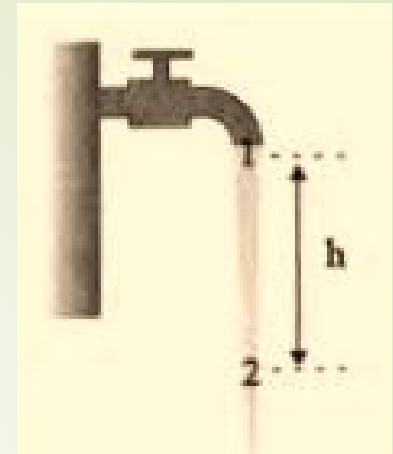
Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho=10^3\text{kg/m}^3$ και ότι
 $1\text{ atm} = 1,033 \times 10^5\text{Pa}$

(16,76m/s)

3.23 Η φλέβα του νερού της βρύσης γίνεται στενότερη καθώς το νερό πέφτει. Η διατομή της φλέβας είναι $A_1 = 1,2\text{cm}^2$ κοντά στο στόμιο της βρύσης και $A_2 = 0,4\text{cm}^2$ σε απόσταση $h = 1\text{m}$ από αυτό. Υπολογίστε την παροχή της βρύσης.

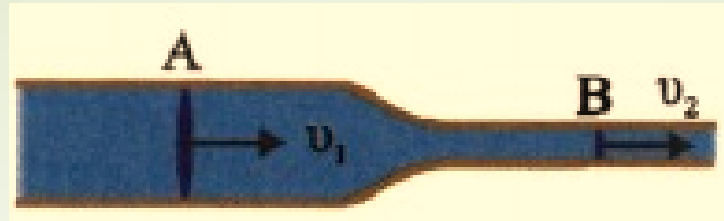
Δίνεται: $g = 10\text{ m/s}^2$.

$(1,2 \sqrt{10} \times 10^{-5} \text{m}^3/\text{s})$



3.24 Ανοικτή δεξαμενή που περιέχει νερό έχει στο πλευρικό τοίχωμά της, σε βάθος $h = 1,8\text{m}$ κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, βρύση διατομής $A = 0,5\text{cm}^2$. Πόση ώρα χρειάζεται για να γεμίσουμε ένα δοχείο όγκου 1L από τη βρύση;
Δίνεται: $g = 10\text{m/s}^2$.

(3,33s)



3.25 Νερό ρέει σε οριζόντιο σωλήνα. Η διατομή του σωλήνα στη θέση A είναι $A_1 = 10^{-2}\text{m}^2$ και στη θέση B γίνεται $A_2 = A_1/2$. Η παροχή του σωλήνα είναι $\Pi = 2 \times 10^{-2}\text{m}^3/\text{s}$. Να βρείτε τη διαφορά της πίεσης του νερού ανάμεσα στα σημεία A και B.

Δίνεται η πυκνότητα του νερού: $\rho = 10^3\text{kg/m}^3$.

(6000Pa)



3.26 Νερό που κινείται μέσα σε οριζόντιο σωλήνα βγαίνει από το άκρο A με ταχύτητα $v_1 = 10\text{m/s}$. Το εμβαδόν διατομής του σωλήνα στα σημεία A και B είναι 16cm^2 και 20cm^2 , αντίστοιχα.

α. Πόσα m^3 νερού δίνει ο σωλήνας σε μία ώρα;

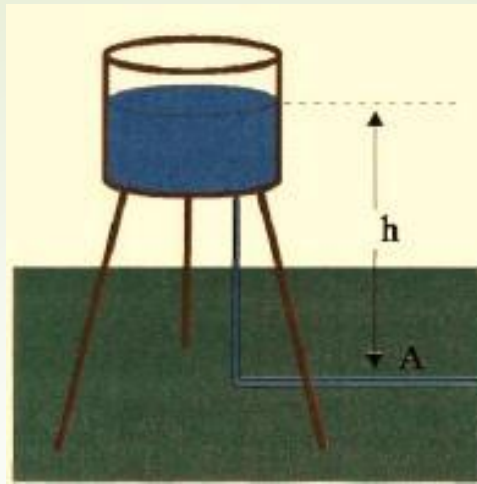
β. Ποια η πίεση στο σημείο B;

Η πυκνότητα του νερού είναι $\rho = 10^3\text{kg/m}^3$. Θεωρήστε ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι 10^5Pa .

(**$57,6\text{m}^3$** , **118kPa**)

3.27 Μια αντλία χρησιμοποιείται για την άντληση νερού από πηγάδι βάθους 5m. Το νερό βγαίνει από την αντλία με σωλήνα διατομής 10cm^2 και με ταχύτητα $v = 20\text{m/s}$. Υπολογίστε την ισχύ της αντλίας. Δίνονται: η πυκνότητα του νερού $\rho = 10^3\text{kg/m}^3$ και $g = 10\text{m/s}^2$.

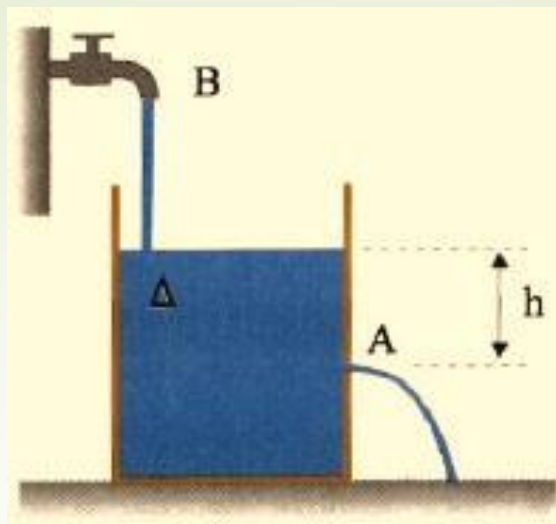
(5kW)



3.28 Μια ανοιχτή δεξαμενή νερού, μεγάλου όγκου, βρίσκεται ψηλά πάνω από το έδαφος. Όταν χρησιμοποιούμε το νερό της δεξαμενής η ταχύτητα του νερού, σε κάποιο σημείο A, στο σωλήνα που βρίσκεται στο έδαφος είναι $v = 12\text{m/s}$. Υπολογίστε την πίεση στο σημείο A. Δίνεται ότι η στάθμη του νερού βρίσκεται σε ύψος $h = 10\text{m}$ πάνω από το έδαφος.

Η πυκνότητα του νερού είναι $\rho = 10^3\text{kg/m}^3$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$ και η ατμοσφαιρική πίεση 10^5Pa .

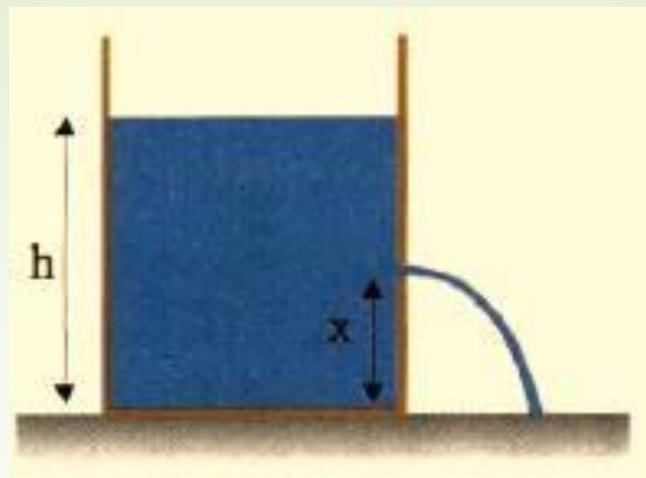
($128 \times 10^3\text{Pa}$)



3.29 Στο δοχείο Δ πέφτει συνέχεια νερό από τη βρύση B. Το δοχείο δε μπορεί να γεμίσει επειδή χύνεται νερό από το πλευρικό άνοιγμα A. Αν η παροχή της βρύσης είναι $22\text{cm}^3/\text{s}$ και το εμβαδόν του ανοίγματος 1cm^2 , να βρείτε σε ποιο ύψος h πάνω από το σημείο A θα σταθεροποιηθεί η ελεύθερη επιφάνεια.

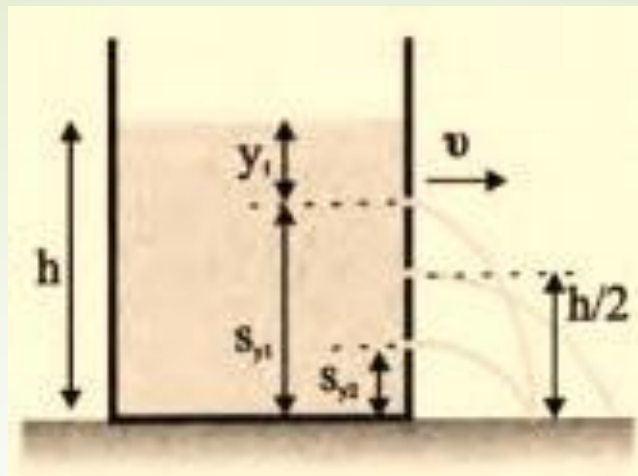
Δίνεται: $g = 10\text{m/s}^2$

(24,2cm)



3.30 Ένα δοχείο με κατακόρυφα τοιχώματα περιέχει νερό μέχρι ύψος h . Σε ποιο ύψος (x) από τον πυθμένα πρέπει να τρυπήσουμε το δοχείο, ώστε η φλέβα που θα δημιουργηθεί να συναντά το έδαφος στη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση από τη βάση του δοχείου;

($x = h/2$)

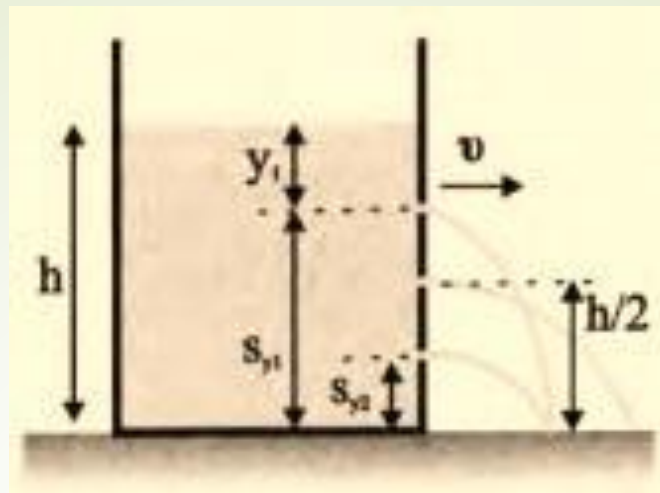


3.31 Ποσότητα νερού είναι αποθηκευμένη σε ανοικτό κυλινδρικό δοχείο. Το ύψος του νερού στο δοχείο είναι $h = 1\text{m}$. Το δοχείο έχει μικρή τρύπα στο πλευρικό του τοίχωμα και σε απόσταση 20cm κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού. Να υπολογίσετε:

α. Την ταχύτητα με την οποία βγαίνει το νερό από την τρύπα.

β. Πόσο απέχει από το δοχείο το σημείο του δαπέδου στο οποίο φτάνει η φλέβα του νερού.

(2m/s , $0,8\text{m}$)



γ. Σε ποιο ύψος από τη βάση του δοχείου πρέπει να ανοιχτεί δεύτερη τρύπα στο πλευρικό τοίχωμα ώστε η φλέβα του νερού που θα βγαίνει από αυτή να πέφτει στο ίδιο σημείο με την προηγούμενη.

δ. Σε ποιο ύψος από τη βάση του κυλίνδρου πρέπει να ανοίξουμε τρύπα ώστε η φλέβα του νερού να φτάνει στο δάπεδο στη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση από το δοχείο.

Δίνεται: $g = 10\text{m/s}^2$.

(0,2m, 0,5m)