

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

(Η ερώτηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Αντώνιο Παλόγο)

Σε ένα ρολόι θέλουμε το άκρο του ωροδείκτη και το άκρο του λεπτοδείκτη να έχουν την ίδια ταχύτητα λόγω περιστροφής (γραμμική ταχύτητα). Αν συμβολίσουμε με ℓ_{ω} το μήκος του ωροδείκτη και με ℓ_{λ} το μήκος του λεπτοδείκτη, τότε για το λόγο των μηκών ισχύει

α) $\frac{\ell_{\omega}}{\ell_{\lambda}} = 1$

β) $\frac{\ell_{\omega}}{\ell_{\lambda}} = \frac{1}{12}$

γ) $\frac{\ell_{\omega}}{\ell_{\lambda}} = 12$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

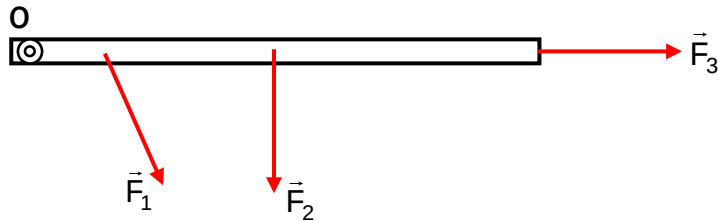
Σωστή απάντηση είναι η γ.

Οι γραμμικές ταχύτητες των δύο άκρων δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις $v_{\omega} = \omega_{\omega} \ell_{\omega}$ και $v_{\lambda} = \omega_{\lambda} \ell_{\lambda}$. Παίρνοντας υπόψη ότι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ και ότι $T_{\omega} = 12\text{h}$, $T_{\lambda} = 1\text{h}$ προκύπτει:

$$v_{\omega} = v_{\lambda} \Rightarrow \omega_{\omega} \ell_{\omega} = \omega_{\lambda} \ell_{\lambda} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_{\omega}} \ell_{\omega} = \frac{2\pi}{T_{\lambda}} \ell_{\lambda} \Rightarrow \frac{\ell_{\omega}}{\ell_{\lambda}} = \frac{T_{\omega}}{T_{\lambda}} \Rightarrow \frac{\ell_{\omega}}{\ell_{\lambda}} = 12$$

Ερώτηση 2.

Στη ράβδο του σχήματος ασκούνται τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις ίσου μέτρου. Η ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο των δυνάμεων.



Η κατάταξη των δυνάμεων, κατά τη σειρά με την οποία το μέτρο της ροπής τους ως προς τον άξονα περιστροφής αυξάνεται, είναι:

α) $\vec{F}_3, \vec{F}_1, \vec{F}_2$.

β) $\vec{F}_3, \vec{F}_2, \vec{F}_1$.

γ) $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

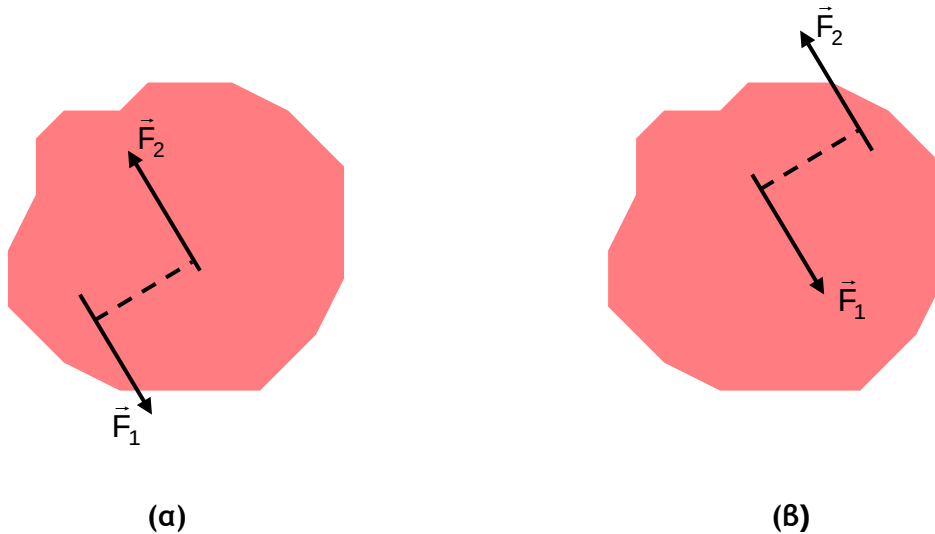
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Το μέτρο της ροπής δύναμης ως προς σταθερό άξονα δίνεται από τον τύπο: $\tau = F \cdot L$, όπου F το μέτρο της δύναμης (κοινό για τις τρεις δυνάμεις) και L η απόσταση του φορέα τους από τον άξονα περιστροφής (μοχλοβραχίονας). Από το σχήμα φαίνεται ότι η δύναμη $\vec{F}_3$ έχει μηδενικό μοχλοβραχίονα, επομένως δεν ασκεί ροπή. Επίσης, η δύναμη $\vec{F}_1$ έχει μικρότερο μοχλοβραχίονα από τη δύναμη $\vec{F}_2$, οπότε ασκεί μικρότερη ροπή. Επομένως, η κατάταξη των δυνάμεων, κατά τη σειρά με την οποία το μέτρο της ροπής τους ως προς τον άξονα περιστροφής αυξάνεται, είναι: $\vec{F}_3, \vec{F}_1, \vec{F}_2$.

Ερώτηση 3.

Στο σχήμα (α) φαίνεται ένα ελεύθερο στερεό, το οποίο στρέφεται υπό την επίδραση του ζεύγους δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.



Αν μετακινήσουμε τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων μετακινώντας παράλληλα τους φορείς των δυνάμεων, όπως φαίνεται στο σχήμα (β), χωρίς να μεταβάλλουμε τη μεταξύ τους απόσταση, τότε το στερεό:

- α) στρέφεται όπως και στο σχήμα α.
- β) στρέφεται αντίστροφα από το σχήμα α.
- γ) ισορροπεί.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Η ροπή ζεύγους δύναμης είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο και εξαρτάται μόνο από το μέτρο των δυνάμεων και την απόσταση μεταξύ των φορέων τους. Στο σχήμα (β) δεν έχουμε μεταβάλλει ούτε το μέτρο των δυνάμεων, ούτε την απόσταση μεταξύ των φορέων τους. Επομένως, η ράβδος στο σχήμα (β), υπό την επίδραση της ίδιας ροπής του ζεύγους δύναμης, θα κάνει ό,τι έκανε και στο σχήμα (α), δηλαδή, θα στρέφεται με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού.

Ερώτηση 4.

Μια ομογενής λεπτή ράβδος μάζας M και μήκους L περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που είναι κάθετος σ' αυτή και διέρχεται από το ένα άκρο της. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $\frac{1}{3}ML^2$. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι παράλληλος στον προηγούμενο άξονα είναι:

α) $\frac{1}{4}ML^2$.

β) $\frac{7}{12}ML^2$.

γ) $\frac{1}{12}ML^2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Ο αρχικός και ο τελικός άξονας περιστροφής είναι παράλληλοι και απέχουν $d = \frac{L}{2}$. Επειδή ο ένας άξονας διέρχεται από το κέντρο μάζας μπορούμε να κάνουμε χρήση του θεωρήματος Steiner.

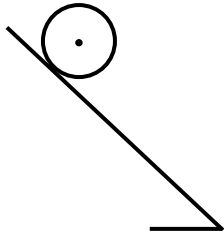
Έχουμε:

$$I = I_{\text{cm}} + Md^2 \Rightarrow \frac{1}{3}ML^2 = I_{\text{cm}} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{3}ML^2 = I_{\text{cm}} + \frac{1}{4}ML^2 \Rightarrow$$

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{3}ML^2 - \frac{1}{4}ML^2 \Rightarrow I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2$$

Ερώτηση 5.

Ο ομογενής τροχός του σχήματος συγκρατείται ακίνητος πάνω στο πλάγιο επίπεδο. Κάποια στιγμή αφήνεται ελεύθερος και αρχίζει να εκτελεί σύνθετη κίνηση. Η επιτάχυνση λόγω μεταφοράς $\vec{a}_{cm}$ και η επιτάχυνση λόγω περιστροφής $\vec{a}_\gamma$ του τροχού έχουν αναλογία μέτρων $\frac{a_{cm}}{a_\gamma} = R$, όπου R η ακτίνα του τροχού.



Η κίνηση του τροχού γίνεται σε πλάγιο επίπεδο το οποίο είναι

- α) λείο.
- β) τραχύ.
- γ) αρχικά λείο και στη συνέχεια τραχύ.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Επειδή ισχύει $a_{cm} = a_\gamma R$, ο τροχός κυλίνεται (χωρίς να ολισθαίνει) επιταχυνόμενος.

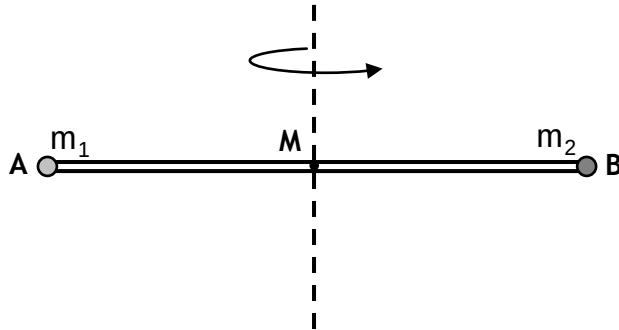
Στον τροχό ασκείται το βάρος του $\vec{w}$, το οποίο έχει μηδενική ροπή επειδή ασκείται στο κέντρο του τροχού (στον ελεύθερο άξονα περιστροφής).

Επίσης, στον τροχό ασκείται η κάθετη στο έδαφος δύναμη στήριξης (κάθετη αντίδραση) $\vec{N}$, η οποία έχει μηδενική ροπή επειδή ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο του τροχού.

Επειδή οι δυνάμεις $\vec{w}$ και $\vec{N}$ δεν ασκούν ροπή, δε μπορούν να δώσουν γωνιακή επιτάχυνση στον τροχό. Επομένως, είναι απαραίτητη κάποια άλλη δύναμη η οποία θα ασκεί ροπή στον τροχό. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνον αν το έδαφος είναι τραχύ, ώστε η ροπή της στατικής τριβής να προσδώσει την απαιτούμενη γωνιακή επιτάχυνση.

Ερώτηση 6.

Το σύστημα του σχήματος αποτελείται από μια αβαρή ράβδο AB μήκους $d = 30 \text{ cm}$ και δύο πολύ μικρά σφαιρίδια με μάζες m_1 και $m_2 = 2m_1$. Το σύστημα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που έχει προσαρμοστεί στο μέσο M της ράβδου AB, όπως στο σχήμα.



Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του σχήματος είναι I_0 . Αν ο άξονας περιστροφής μετακινηθεί παράλληλα στον εαυτό του στο μέσο της απόστασης MB, η ροπή αδράνειας του συστήματος

α) θα αυξηθεί.

β) θα μειωθεί.

γ) δε θα μεταβληθεί.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής που έχει προσαρμοστεί στο μέσο M της ράβδου AB είναι:

$$I_0 = m_1 \left(\frac{d}{2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{d}{2} \right)^2 \Rightarrow I_0 = (m_1 + 2m_1) \frac{d^2}{4} \Rightarrow I_0 = \frac{3}{4} m_1 d^2$$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς το νέο άξονα περιστροφής είναι:

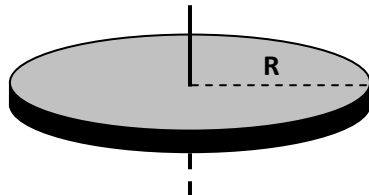
$$I_1 = m_1 \left(\frac{3d}{4} \right)^2 + m_2 \left(\frac{d}{4} \right)^2 \Rightarrow I_1 = \frac{9}{16} m_1 d^2 + \frac{2}{16} m_1 d^2 \Rightarrow$$

$$I_1 = \frac{11}{16} m_1 d^2$$

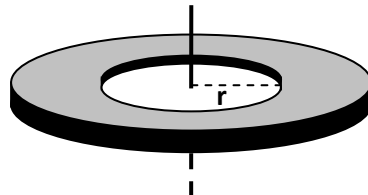
Επειδή $I_1 < I_0$, η ροπή αδράνειας του συστήματος θα μειωθεί.

Ερώτηση 7.

Ο ομογενής δίσκος ακτίνας R και μάζας M του σχήματος (α) μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και περνά από το κέντρο του. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $\frac{1}{2}MR^2$ και επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μάζα ενός τμήματος του δίσκου είναι ανάλογη της επιφάνειας που καλύπτει.



(α)



(β)

Αφαιρούμε από το δίσκο ένα κυκλικό τμήμα ακτίνας $r = \frac{R}{2}$ όπως φαίνεται στο σχήμα (β). Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου που σχηματίστηκε είναι:

α) $\frac{3}{8}MR^2$.

β) $\frac{7}{16}MR^2$.

γ) $\frac{15}{32}MR^2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η ροπή αδράνειας I του δακτυλίου που σχηματίστηκε είναι $I = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2$, όπου m η μάζα του κυκλικού τμήματος που αφαιρέθηκε.

Η μάζα του κυκλικού τμήματος που αφαιρέθηκε είναι ανάλογη της επιφάνειας που καλύπτει. Επομένως:

$$\frac{m}{M} = \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow m = M \frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2}{R^2} \Rightarrow m = \frac{M}{4}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2$ έχουμε:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2} \frac{M}{4} \frac{R^2}{4} \Rightarrow I = \frac{15}{32}MR^2.$$

Ερώτηση 8.

(Η ερώτηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Αντώνιο Παλόγο)

Σε ένα σφαιρικό κέλυφος μάζας m , όλες οι στοιχειώδεις μάζες που το αποτελούν βρίσκονται στην ίδια απόσταση R από το κέντρο του. Η ροπή αδράνειας του σφαιρικού κελύφους ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του είναι

α) $\kappa \cdot MR^2$, όπου κ ένας αριθμός για τον οποίο ισχύει $\kappa < 1$.

β) $\kappa \cdot MR^2$, όπου κ ένας αριθμός για τον οποίο ισχύει $\kappa > 1$.

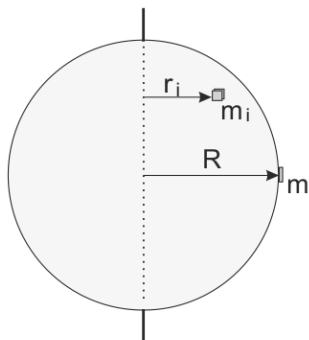
γ) MR^2 .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος δίνεται από τη σχέση $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$,



όπου τα $r_1, r_2, \dots$ δηλώνουν αποστάσεις από τον άξονα περιστροφής (και όχι από το κέντρο μάζας του σώματος). Οι στοιχειώδεις μάζες του σφαιρικού κελύφους βρίσκονται σε αποστάσεις r για τις οποίες ισχύει

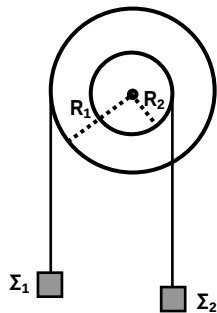
$$0 \leq r \leq R$$

και για ελάχιστες από αυτές ισχύει

$$r = R.$$

Ερώτηση 9.

Στο σχήμα φαίνεται μια διπλή τροχαλία, η οποία μπορεί να στρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και δύο μικρά σώματα Σ_1 και Σ_2 , τα οποία αναρτώνται από τη διπλή τροχαλία. Για να ισορροπεί το σύστημα πρέπει



α) το Σ_1 να είναι βαρύτερο από το Σ_2 .

β) το Σ_2 να είναι βαρύτερο από το Σ_1 .

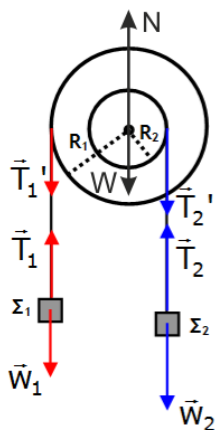
γ) το Σ_1 να έχει ίσο βάρος με το Σ_2 .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα Σ_1 και Σ_2 και οι δυνάμεις που ασκούνται στη διπλή τροχαλία. Από τις δυνάμεις αυτές ροπή προκαλούν οι $\vec{T}_1'$ και $\vec{T}_2'$.



Επειδή τα Σ_1 και Σ_2 ισορροπούν, από τη σχέση $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ έχουμε:

$$T_1 = w_1$$

$$T_2 = w_2$$

Για τις δυνάμεις $\vec{T}_1$, $\vec{T}_1'$ και $\vec{T}_2$, $\vec{T}_2'$ ισχύει: $T_1 = T_1'$ και $T_2 = T_2'$.

Επειδή η διπλή τροχαλία ισορροπεί στρωφικά, από τη σχέση $\Sigma \vec{\tau} = \vec{0}$ έχουμε:

$$T_1' R_1 = T_2' R_2 \Rightarrow T_1 R_1 = T_2 R_2 \Rightarrow w_1 R_1 = w_2 R_2 \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

και επειδή $R_1 > R_2$ έχουμε: $w_2 > w_1$.

Ερώτηση 10.

Σε ένα ελεύθερο στερεό ασκείται ένα ζεύγος δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, από τις οποίες η δύναμη $\vec{F}_1$ ασκείται στο κέντρο μάζας του στερεού. Το στερεό ισορροπεί. Αν καταργηθεί η δύναμη $\vec{F}_1$, το στερεό θα εκτελέσει:

- α) μεταφορική κίνηση.
- β) στροφική κίνηση.
- γ) σύνθετη κίνηση.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Έστω $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ οι δυνάμεις που αποτελούν ζεύγος δυνάμεων. Για τις δυνάμεις αυτές ισχύει $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ άρα για τα μέτρα τους ισχύει:

$$F_2 = F_1 \quad (= F).$$

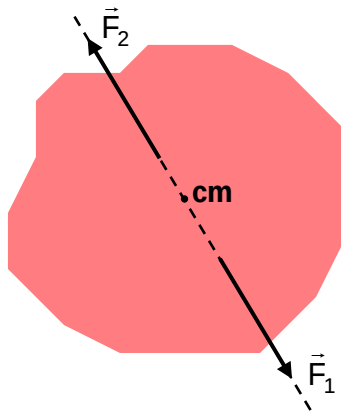
Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο και έχει μέτρο:

$$\Sigma \tau = F \cdot d, \text{ όπου } d \text{ η απόσταση των φορέων των δυνάμεων } \vec{F}_1 \text{ και } \vec{F}_2.$$

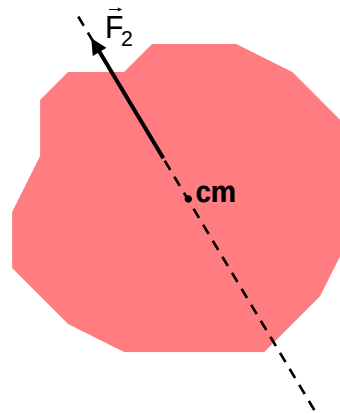
Επειδή αρχικά το στερεό ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \Sigma \tau = F \cdot d = 0$$

Επειδή $F \neq 0$ συμπεραίνουμε ότι $d = 0$, δηλαδή οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι συγγραμμικές. Επομένως, ο φορέας της $\vec{F}_2$ διέρχεται από το κέντρο μάζας του στερεού, όπως φαίνεται στο σχήμα (α):



(α)

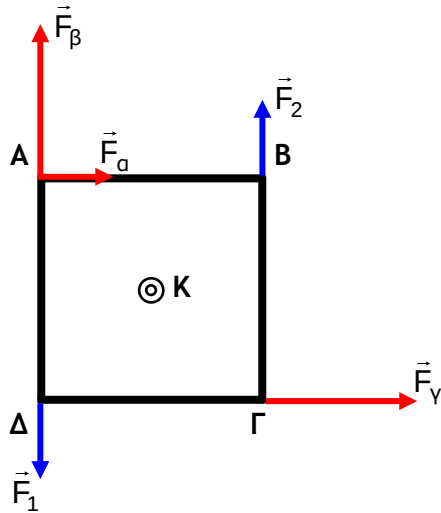


(β)

Όταν καταργηθεί η δύναμη $\vec{F}_1$, επειδή η δύναμη $\vec{F}_2$ δεν ασκεί ροπή ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, το στερεό θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση στην κατεύθυνση της δύναμης $\vec{F}_2$, (βλέπε σχήμα β).

Ερώτηση 11.

Η τετράγωνη πλάκα ΑΒΓΔ πλευράς α του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της Κ και είναι κάθετος σε αυτή. Στην πλάκα ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με μέτρα $F_1 = F_2 (= F)$.



Η δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στο στερεό για να ισορροπεί είναι:

α) η δύναμη $\vec{F}_\alpha$, μέτρου $F_\alpha = F$.

β) η δύναμη $\vec{F}_\beta$, μέτρου $F_\beta = 2F$.

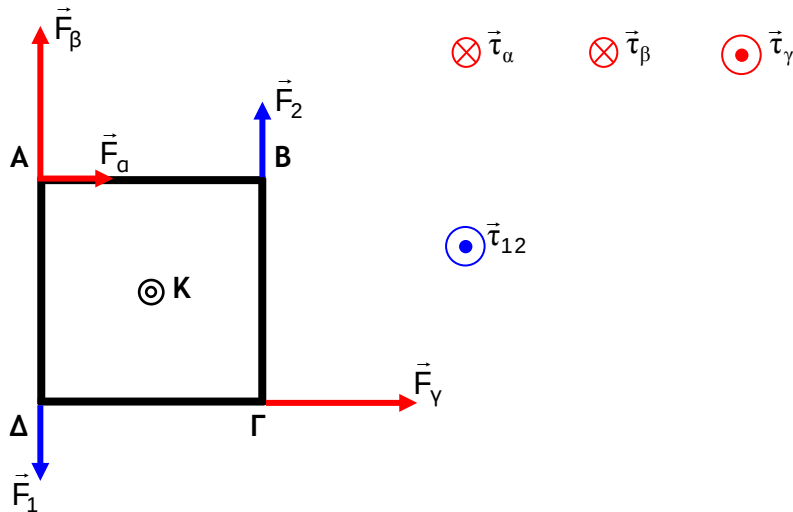
γ) η δύναμη $\vec{F}_\gamma$, μέτρου $F_\gamma = 2F$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Για να ισορροπεί ένα στερεό που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα, πρέπει να ισχύει $\Sigma \vec{\tau} = \vec{0}$ ως προς οποιοδήποτε σημείο. Επιλέγουμε να υπολογίσουμε τις ροπές ως προς το σημείο Κ ώστε να μηδενιστεί η ροπή της δύναμης που ασκεί ο ακλόνητος άξονας περιστροφής. Στο σχήμα φαίνονται οι κατευθύνσεις των ροπών:



Από τις κατευθύνσεις των ροπών φαίνεται ότι η δύναμη $\vec{F}_\gamma$ δε μπορεί να ισορροπήσει την πλάκα, διότι ασκεί ομόρροπη ροπή με τη συνολική ροπή των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

Για τα μέτρα των ροπών των δυνάμεων $\vec{F}_\alpha$ και $\vec{F}_\beta$ έχουμε αντίστοιχα:

$$\tau_\alpha = F_\alpha \cdot \frac{(A\Delta)}{2} \Rightarrow \tau_\alpha = F \cdot \frac{\alpha}{2}$$

$$\tau_\beta = F_\beta \cdot \frac{(AB)}{2} \Rightarrow \tau_\beta = 2F \cdot \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tau_\beta = F \cdot \alpha$$

Για το μέτρο της συνολικής ροπής των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ έχουμε:

$$\tau_{12} = F \cdot \frac{(AB)}{2} + F \cdot \frac{(AB)}{2} \Rightarrow \tau_{12} = F \cdot \alpha$$

Επομένως, η δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στο στερεό για να ισορροπεί είναι η δύναμη $\vec{F}_\beta$, επειδή ασκεί αντίθετη ροπή από τη συνολική ροπή των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

Ερώτηση 12.

Η αβαρής δοκός AB του σχήματος (α) στηρίζεται σε ένα σημείο της O και ισορροπεί όταν στα άκρα της A και B τοποθετηθούν δύο μικρά σώματα Σ και Σ₁ με μάζες m και m₁.



Αν η απόσταση (OA) είναι ίση με το $\frac{1}{3}$ της απόστασης (AB), ο λόγος $\frac{m}{m_1}$ είναι ίσος με

α) 1.

β) 2.

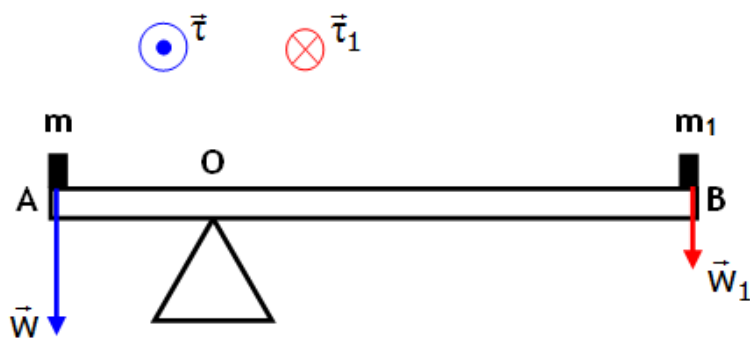
γ) $\frac{1}{2}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Επειδή τα σώματα ισορροπούν πάνω στη δοκό, της ασκούν δυνάμεις ίσες με τα αντίστοιχα βάρη τους. Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούν ροπή στη δοκό, ως προς το σημείο O:



Επειδή η δοκός ισορροπεί ισχύει $\Sigma \tau = 0$. Ως προς το σημείο O έχουμε:

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow \tau = \tau_1 \Rightarrow w(OA) = w_1(OB) \quad (1)$$

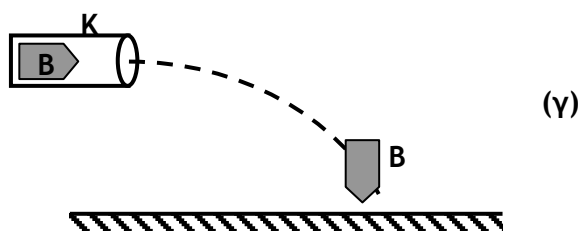
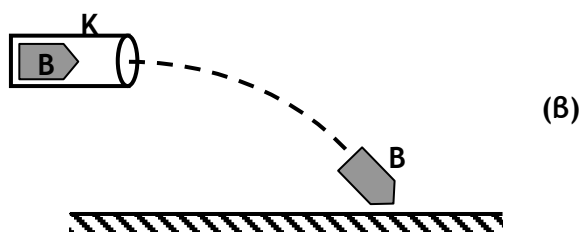
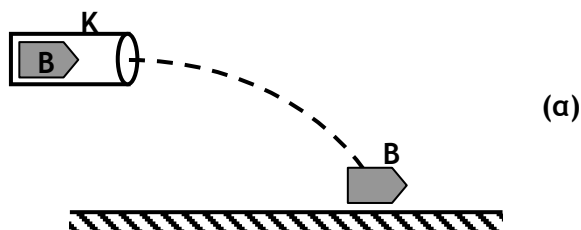
Όμως $(OA) + (OB) = (AB)$ και $(OA) = \frac{1}{3}(AB)$. Από το συνδυασμό των δύο σχέσεων προκύπτει $(OB) = 2 \cdot (OA)$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει:

$$m g(OA) = m_1 g 2(OA) \Rightarrow \frac{m}{m_1} = 2$$

Ερώτηση 13.

Από το κανόνι Κ εκτοξεύεται οριζόντια ένα βλήμα Β. Το βλήμα, ακολουθώντας παραβολική τροχιά, φτάνει στο έδαφος. Αγνοώντας την επίδραση του αέρα, και θεωρώντας το βλήμα ελεύθερο στερεό, το σχήμα που δείχνει σωστά τον τρόπο με τον οποίο το βλήμα συναντά το έδαφος είναι:



α) το σχήμα α.

β) το σχήμα β.

γ) το σχήμα γ.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

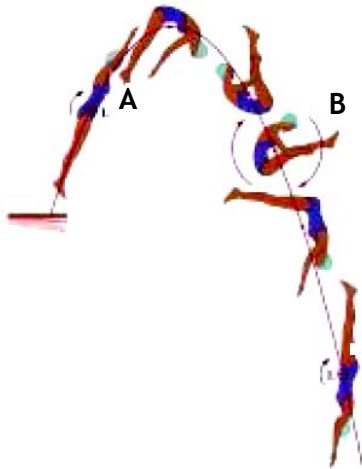
Σωστή απάντηση είναι η α.

Το βλήμα ως ελεύθερο στερεό μπορεί να περιστραφεί μόνο γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Από τη στιγμή που το βλήμα Β φεύγει από το

κανόνι, μέχρι να φτάσει στο έδαφος, η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω του είναι το βάρος του. Επειδή ο φορέας του βάρους περνά από το κέντρο μάζας του βλήματος δεν ασκεί ροπή, επομένως δε μπορεί να το στρέψει. Αφού στο βλήμα δεν ασκούνται ροπές ικανές να το στρέψουν, θα φτάσει στο έδαφος με τον αρχικό προσανατολισμό του, εκτελώντας μόνο μεταφορική κίνηση.

Ερώτηση 14.

Στο σχήμα φαίνεται μια καταδύτρια σε διάφορες φάσεις της κατάδυσής της.



Η στροφορμή της καταδύτριας:

α) είναι μεγαλύτερη στη θέση Α.

β) είναι μεγαλύτερη στη θέση Β.

γ) στις θέσεις Α και Β είναι ίση.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

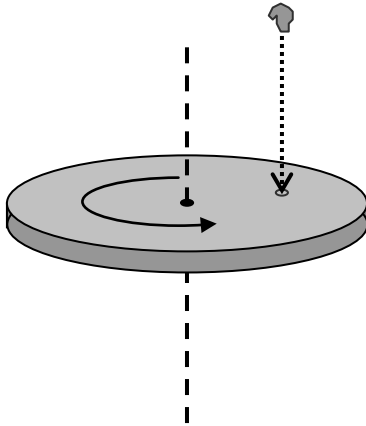
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Κατά την κίνηση της καταδύτριας στον αέρα, μοναδική εξωτερική δύναμη είναι το βάρος της, το οποίο, επειδή διέρχεται από το κέντρο μάζας, δε δημιουργεί ροπή. Όμως, όταν η συνολική ροπή που δέχεται ένα σώμα είναι μηδέν η στροφορμή του διατηρείται σταθερή. Επομένως, η στροφορμή της καταδύτριας διατηρείται σε όλη τη διάρκεια της κίνησης, μέχρι την επαφή με το νερό. Άρα, η στροφορμή της καταδύτριας είναι ίση στις θέσεις Α και Β.

Ερώτηση 15.

Ο δίσκος του σχήματος περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα που περνά από το κέντρο του. Από μικρό ύψος αφήνουμε ένα κομμάτι πλαστελίνης να πέσει και να κολλήσει πάνω στο δίσκο. Το συσσωμάτωμα δίσκου – πλαστελίνης που προκύπτει περιστρέφεται σε σχέση με το δίσκο



α) πιο αργά.

β) με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

γ) πιο γρήγορα.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Η συνολική εξωτερική ροπή στο σύστημα δίσκος – πλαστελίνη είναι μηδέν, επομένως η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή:

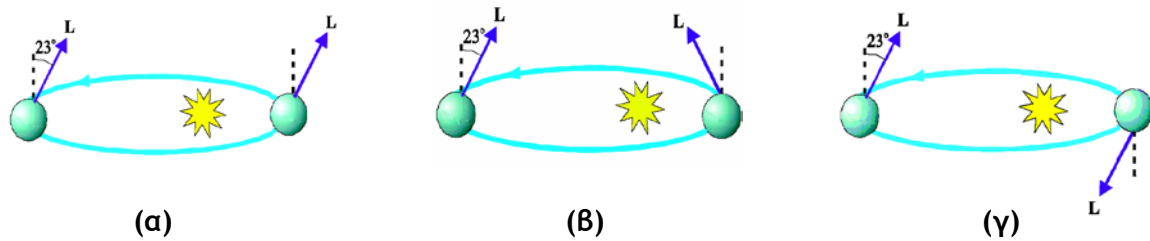
$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow I_{\alpha\rho\chi} \cdot \omega_{\alpha\rho\chi} = I_{\tau\epsilon\lambda} \cdot \omega_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \omega_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{I_{\alpha\rho\chi} \cdot \omega_{\alpha\rho\chi}}{I_{\tau\epsilon\lambda}}$$

Επειδή η επικόλληση της πλαστελίνης αυξάνει τη ροπή αδράνειας, θα ισχύει

$$I_{\tau\epsilon\lambda} > I_{\alpha\rho\chi}, \text{ επομένως } \omega_{\tau\epsilon\lambda} < \omega_{\alpha\rho\chi}.$$

Ερώτηση 16.

Τα παρακάτω σχήματα δείχνουν τη στροφορμή της Γης, λόγω της περιστροφής της γύρω από τον εαυτό της (spin) σε δύο θέσεις, στο περιήλιο (μικρότερη απόσταση από τον Ήλιο) και στο αφήλιο (μεγαλύτερη απόσταση από τον Ήλιο) της τροχιάς της γύρω από τον Ήλιο.



Το σχήμα στο οποίο έχει σχεδιαστεί σωστά η στροφορμή είναι:

α) το σχήμα α.

β) το σχήμα β.

γ) το σχήμα γ.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Η ελκτική δύναμη που δέχεται η Γη από τον Ήλιο έχει φορέα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της, άρα δε δημιουργεί ροπή.

Η στροφορμή της Γης λόγω της περιστροφής της γύρω από τον εαυτό της παραμένει σταθερή κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά, αφού καμία ροπή δεν της ασκείται. Το σχήμα στο οποίο συμβαίνει αυτό είναι το σχήμα (α).

Ερώτηση 17.

(Η ερώτηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Αντώνιο Παλόγο)

Πετάμε μια μπάλα του μπάσκετ κατακόρυφα προς τα πάνω με τέτοιο τρόπο, ώστε αυτή να περιστρέφεται καθώς ανέρχεται. Στο χρονικό διάστημα που η μπάλα ανέρχεται, η γωνιακή της ταχύτητα

α) αυξάνεται.

β) μειώνεται.

γ) παραμένει σταθερή.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η μπάλα είναι ένα ελεύθερο στερεό και ανερχόμενη θα περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Η μόνη δύναμη που ασκείται στη μπάλα, αφού χάσει την επαφή με το χέρι, είναι το βάρος της, το οποίο έχει σημείο εφαρμογής το κέντρο μάζας και δεν μπορεί να προκαλέσει ροπή. Αφού η συνολική ροπή που ασκείται στη μπάλα είναι μηδέν, η γωνιακή της ταχύτητα θα παραμένει σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κίνησής της.

Ερώτηση 18.

Ένας τροχός περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονά. Η κινητική ενέργεια του τροχού είναι K . Αν διπλασιάσουμε τη στροφορμή του τροχού, τότε η κινητική του ενέργεια θα γίνει

α) $2K$.

β) $4K$.

γ) $8K$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η στροφορμή ενός στερεού ως προς σταθερό άξονα δίνεται από τον τύπο: $L = I\omega$.

Η κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης δίνεται από τον τύπο: $K = \frac{1}{2} I\omega^2$.

Με πράξεις έχουμε:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} \frac{I^2 \omega^2}{I} \Rightarrow K = \frac{L^2}{2I}$$

$$K' = \frac{L'^2}{2I} \Rightarrow K' = \frac{(2L)^2}{2I} \Rightarrow K' = 4 \cdot \frac{L^2}{2I} \Rightarrow K' = 4K$$

Ερώτηση 19.

Ένας τροχός κυλίεται κατά μήκος πλάγιου επιπέδου. Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τον τύπο: $I = \frac{2}{3}MR^2$. Ο λόγος της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής κίνησης προς την κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης του τροχού, $\frac{K_{μετ}}{K_{στρ}}$, ισούται με

α) $\frac{3}{2}$.

β) $\frac{2}{3}$.

γ) 1.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

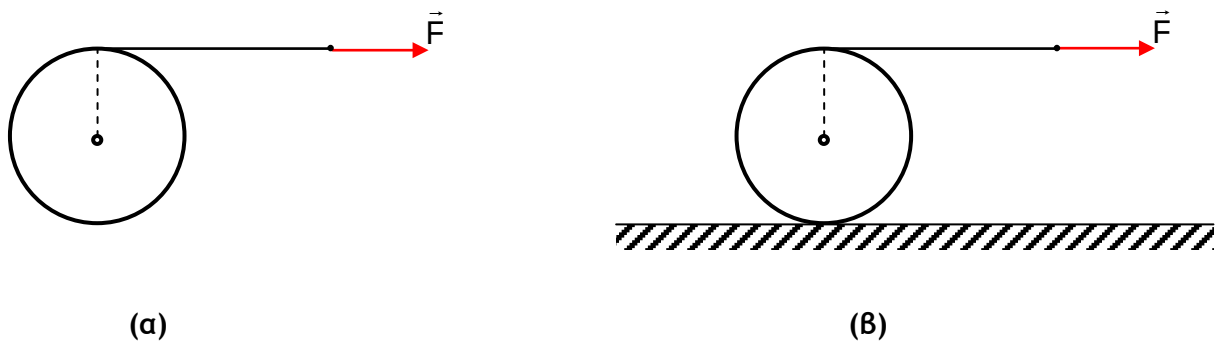
Σωστή απάντηση είναι η α.

Επειδή ο τροχός κυλίεται ισχύει: $v_{cm} = \omega R$. Επομένως:

$$\frac{K_{μετ}}{K_{στρ}} = \frac{\frac{1}{2}Mv_{cm}^2}{\frac{1}{2}I\omega^2} \Rightarrow \frac{K_{μετ}}{K_{στρ}} = \frac{M\omega^2 R^2}{\frac{2}{3}MR^2\omega^2} \Rightarrow \frac{K_{μετ}}{K_{στρ}} = \frac{3}{2}$$

Ερώτηση 20.

Ο άξονας του αρχικά ακίνητου ομογενή τροχού του σχήματος (α) είναι ακλόνητος. Γύρω από τον τροχό έχει τυλιχθεί πολλές φορές αβαρές νήμα, το οποίο δεν ολισθαίνει πάνω στον τροχό. Στην ελεύθερη άκρη του νήματος ασκείται σταθερή δύναμη $\vec{F}$, η οποία προσφέρει στον τροχό έργο W και μετά καταργείται. Στο σχήμα (β) ένας ίδιος αρχικά ακίνητος τροχός κυλίεται υπό την επίδραση της ίδιας σταθερής δύναμης $\vec{F}$, η οποία προσφέρει στον τροχό το ίδιο έργο W όπως και στη περίπτωση (α) και μετά καταργείται. Η γωνιακή ταχύτητα, μόλις καταργηθεί η δύναμη $\vec{F}$, είναι:



α) μεγαλύτερη στον τροχό α.

β) μεγαλύτερη στον τροχό β.

γ) ίση στους δύο τροχούς.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Η κινητική ενέργεια του τροχού (α) δίνεται από τον τύπο: $K_{\alpha} = \frac{1}{2} I \omega_{\alpha}^2$.

Η κινητική ενέργεια του τροχού (β) δίνεται από τον τύπο: $K_{\beta} = \frac{1}{2} I \omega_{\beta}^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$.

Σύμφωνα με την εκφώνηση, το έργο W και στις δύο περιπτώσεις είναι το ίδιο. Στη β' περίπτωση το έργο μοιράζεται σε στροφική και μεταφορική κινητική ενέργεια, ενώ στην

α' περίπτωση γίνεται όλο στροφική, επομένως ισχύει: $\frac{1}{2} I \omega_{\alpha}^2 > \frac{1}{2} I \omega_{\beta}^2 \Rightarrow \omega_{\alpha} > \omega_{\beta}$.

Ερώτηση 21.

Δύο στερεά Α και Β στρέφονται γύρω από σταθερό άξονα με κοινή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου a_γ . Ο λόγος των μέτρων της στροφορμής του στερεού Α προς τη στροφορμή του

Β ως προς τον άξονα περιστροφής κάποια χρονική στιγμή t_1 είναι $\frac{L_1}{L_2} = 2$. Εκείνη τη

χρονική στιγμή, ο λόγος $\frac{P_1}{P_2}$ της ισχύος της ροπής που επιταχύνει το στερεό Α προς την ισχύ της ροπής που επιταχύνει το στερεό Β είναι:

α) $\frac{1}{2}$.

β) 1.

γ) 2.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

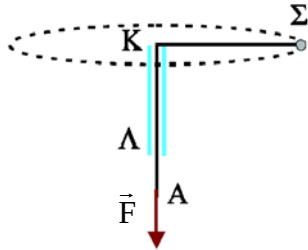
Σωστή απάντηση είναι η γ.

Επειδή $P = \tau\omega$ και $L = I\omega$ έχουμε:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\tau_1\omega_1}{\tau_2\omega_2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1 a_\gamma \omega_1}{I_2 a_\gamma \omega_2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1 \omega_1}{I_2 \omega_2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{L_1}{L_2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = 2$$

Ερώτηση 22.

Το σφαιρίδιο Σ του σχήματος διαγράφει κυκλική τροχιά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ακτίνας R . Το σκοινί στο οποίο είναι δεμένο το σφαιρίδιο περνάει από κατακόρυφο σωλήνα ΚΛ.



Ασκώντας κατάλληλη δύναμη στο ελεύθερο άκρο Α του σκοινιού μειώνουμε την ακτίνα περιστροφής του σφαιριδίου στη μισή της αρχικής. Το σφαιρίδιο θα περιστρέφεται:

α) πιο γρήγορα.

β) πιο αργά.

γ) το ίδιο γρήγορα με πριν.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Επειδή η τάση του νήματος, που λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη για το σφαιρίδιο, έχει φορέα που διέρχεται από τον άξονα περιστροφής, δεν ασκεί ροπή, επομένως η στροφορμή του σφαιριδίου ως προς τον άξονα περιστροφής διατηρείται:

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m v_{\alpha\rho\chi} R = m v_{\tau\epsilon\lambda} \frac{R}{2} \Rightarrow v_{\tau\epsilon\lambda} = 2 v_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow$$

$$\omega_{\tau\epsilon\lambda} \frac{R}{2} = 2 \omega_{\alpha\rho\chi} R \Rightarrow \omega_{\tau\epsilon\lambda} = 4 \omega_{\alpha\rho\chi}$$

Άρα θα κινείται πιο γρήγορα.

Ερώτηση 23.

(Η ερώτηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Κωνσταντίνο Στεφανίδη)

Σώμα αρχίζει να περιστρέφεται τη χρονική στιγμή $t = 0$, υπό την επίδραση σταθερής ροπής. Τη χρονική στιγμή t_1 η κινητική του ενέργεια, λόγω περιστροφής, είναι K_1 . Τη χρονική στιγμή $3t_1$ η κινητική του ενέργεια, λόγω περιστροφής, θα είναι:

α) η ίδια.

β) τριπλάσια.

γ) εννιापλάσια.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής δίνεται από τη σχέση $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ (1).

Επειδή η ροπή είναι σταθερή η επιτάχυνση θα είναι σταθερή (Νόμος στροφικής κίνησης).

Επειδή η αρχική γωνιακή ταχύτητα είναι ίση με μηδέν, ισχύει ότι $\omega = \alpha \cdot t$, κατά συνέπεια όταν ο χρόνος τριπλασιασθεί η γωνιακή του ταχύτητα θα τριπλασιασθεί.

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\alpha\rho\chi} &= \alpha \cdot t_1 \\ \omega_{\tau\epsilon\lambda} &= \alpha \cdot t_2 = 3\alpha \cdot t_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_{\tau\epsilon\lambda} = 3\omega_{\alpha\rho\chi} \quad (2)$$

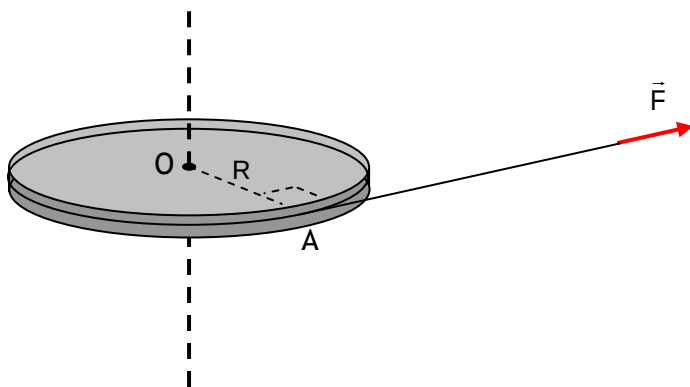
Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι η κινητική του ενέργεια θα εννιापλάσιασθεί.

$$K_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2} I \omega_{\tau\epsilon\lambda}^2 = \frac{1}{2} I (3\omega_{\alpha\rho\chi})^2 = 9 \frac{1}{2} I \omega_{\alpha\rho\chi}^2 \Rightarrow K_{\tau\epsilon\lambda} = 9K$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ο ομογενής και ισοπαχής δίσκος του σχήματος έχει ακτίνα $R=10\text{ cm}$ και μάζα $M=2\text{ kg}$, είναι οριζόντιος και μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ο δίσκος είναι αρχικά ακίνητος και στην περιφέρειά του είναι τυλιγμένο αβαρές, μη εκτατό σχοινί μήκους $\ell=4\text{ m}$. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ ασκούμε στην ελεύθερη άκρη του σχοινιού σταθερή, οριζόντια δύναμη $F=2\text{ N}$ και ο δίσκος ξεκινά να περιστρέφεται. Το σχοινί δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του δίσκου.



Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης a_γ του δίσκου.

β) τη χρονική στιγμή t_1 που ξετυλίγεται όλο το σχοινί.

γ) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω του δίσκου τη στιγμή κατά την οποία έχει ξετυλιχθεί όλο το σχοινί.

δ) το έργο της δύναμης στη διάρκεια του δεύτερου δευτερολέπτου της κίνησης.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του: $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Λύση

α) (βλ. σελίδα 119 του Σχολικού Βιβλίου)

Από το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης έχουμε:

$$\Sigma\tau = I \cdot a_\gamma \Rightarrow a_\gamma = \frac{\Sigma\tau}{I} \Rightarrow a_\gamma = \frac{F \cdot R}{\frac{1}{2}MR^2} \Rightarrow$$

$$a_{\gamma} = \frac{2F}{MR} = \frac{2 \cdot 2N}{2kg \cdot 0,1m} \Rightarrow a_{\gamma} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

β) Επειδή το σχοινί δεν ολισθαίνει στο δίσκο το μήκος του ℓ είναι ίσο με το μήκος του τόξου s που διαγράφει ένα σημείο του δίσκου. Έτσι, από τον τύπο $s = \theta \cdot R$ βρίσκουμε τη γωνία στροφής μέχρι να ξετυλιχθεί όλο το σχοινί:

$$s = \theta_1 \cdot R \Rightarrow \theta_1 = \frac{s}{R} = \frac{4m}{0,1m} \Rightarrow \theta_1 = 40 \text{ rad}$$

Επειδή a_{γ} = σταθ., ο δίσκος θα εκτελέσει ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση, μέχρι να ξετυλιχθεί όλο το νήμα. Επομένως ισχύει:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\gamma} t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2\theta_1}{a_{\gamma\omega\gamma}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40\text{rad}}{20\text{rad/s}^2}} \Rightarrow t_1 = 2\text{s}$$

γ) Για την ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση του δίσκου ισχύει:

$$\omega_1 = a_{\gamma\omega\gamma} t_1 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 2\text{s} \Rightarrow \omega_1 = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Μόλις ξετυλιχθεί όλο το σχοινί καταργείται η δύναμη F , επομένως δεν ασκείται, πλέον, ροπή στο δίσκο. Επομένως, από τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\text{s}$ και μετά, ο δίσκος θα εκτελέσει ομαλή στροφική κίνηση με τη σταθερή γωνιακή ταχύτητα που έχει αποκτήσει. Άρα, μετά το ξετύλιγμα του σχοινιού, η γωνιακή ταχύτητα έχει σταθερό μέτρο:

$$\omega_1 = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

δ) Το έργο της δύναμης στη διάρκεια του δεύτερου δευτερολέπτου της κίνησης βρίσκεται με εφαρμογή του θεωρήματος έργου - ενέργειας στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

$$W_F = \frac{1}{2} I \omega_{\text{τελ}}^2 - \frac{1}{2} I \omega_{\text{αρχ}}^2 \quad (1)$$

Όπου, το $\omega_{\text{αρχ}}$ δηλώνει τη γωνιακή ταχύτητα στην αρχή του δεύτερου δευτερολέπτου (που συμπίπτει με το τέλος του πρώτου) και το $\omega_{\text{τελ}}$ δηλώνει τη γωνιακή ταχύτητα στο τέλος του δεύτερου δευτερολέπτου $\omega_{\text{τελ}} = \omega_1 = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$

Για το $\omega_{\text{αρχ}}$ ισχύει: $\omega_{\text{αρχ}} = a_{\gamma} \cdot t = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 1\text{s} \Rightarrow \omega_{\text{αρχ}} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

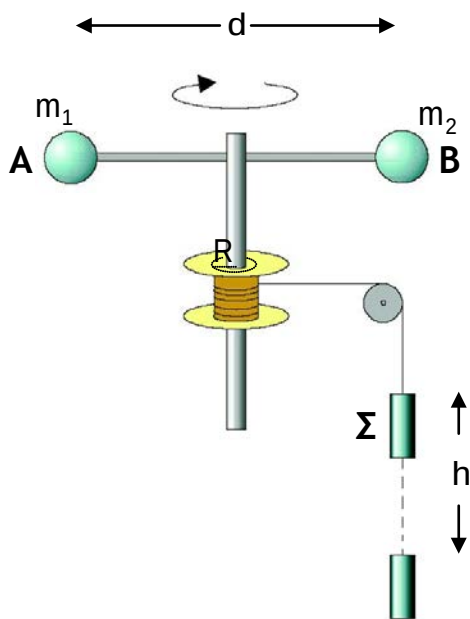
Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$W_F = \frac{1}{2} I (\omega_{\tau\epsilon\lambda}^2 - \omega_{\alpha\rho\chi}^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 (\omega_{\tau\epsilon\lambda}^2 - \omega_{\alpha\rho\chi}^2) \Rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{4} 2\text{kg} \cdot (0,1\text{m})^2 ((40\text{rad/s})^2 - (20\text{rad/s})^2) \Rightarrow W_F = 6\text{J}$$

Άσκηση 2.

Η οριζόντια και ομογενής ράβδος AB του σχήματος έχει μήκος $d = 2 \text{ m}$ μάζα $M = 3 \text{ kg}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο σωλήνα που περνά από το κέντρο της. Στο σωλήνα έχει προσαρμοστεί, σταθερά, ένας μικρός κύλινδρος ακτίνας $R = 0,1 \text{ m}$. Γύρω από τον κύλινδρο είναι τυλιγμένο πολλές φορές λεπτό νήμα, στην ελεύθερη άκρη του οποίου αναρτάται, μέσω τροχαλίας, ένα σώμα Σ. Στα άκρα A και B της ράβδου έχουν στερεωθεί δύο μικρές σφαίρες με μάζες $m_1 = 1 \text{ kg}$ και $m_2 = 2 \text{ kg}$ αντίστοιχα. Ο σωλήνας, ο κύλινδρος, η τροχαλία και το νήμα θεωρούνται αβαρή. Το νήμα δεν ολισθαίνει στον κύλινδρο.



Αρχικά όλη η διάταξη είναι ακίνητη. Τη στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα Σ αφήνεται να κινηθεί και η ράβδος ξεκινά να περιστρέφεται. Το νήμα ασκεί στον κύλινδρο σταθερή ροπή μέτρου $\tau = 16 \text{ Nm}$.

Να βρείτε:

α) Τη συνολική ροπή αδράνειας $I_{\text{ολ}}$ του συστήματος της ράβδου και των δύο σφαιριδίων ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου.

β) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης a_γ του παραπάνω συστήματος.

γ) Το ύψος h κατά το οποίο έχει κατέλθει το σώμα Σ από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = \sqrt{10\pi} \text{ s}$.

δ) Τον αριθμό των περιστροφών $N_{\text{στρ}}$ της ράβδου στο ίδιο χρονικό διάστημα.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της

$$I = \frac{1}{12} M d^2, \quad g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Λύση

α) Η συνολική ροπή αδράνειας ισούται με το άθροισμα των επιμέρους ροπών αδράνειας της ράβδου AB, του σφαιριδίου A και του σφαιριδίου B ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου:

$$I_{\text{ολ}} = \frac{1}{12} M d^2 + m_1 \left(\frac{d}{2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{d}{2} \right)^2 \Rightarrow I_{\text{ολ}} = \frac{1}{12} \cdot 3\text{kg} \cdot (2\text{m})^2 + 1\text{kg} \cdot (1\text{m})^2 + 2 \cdot (1\text{m})^2 \Rightarrow$$
$$I_{\text{ολ}} = 4 \text{ kgm}^2$$

β) Η μόνη ροπή που ασκείται στο σύστημα είναι η ροπή της τάσης του νήματος. Ο κύλινδρος και ο σωλήνας είναι αβαρή, άρα δεν έχουν ροπή αδράνειας. Από το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης για το σύστημα ράβδου - σφαιριδίων, έχουμε:

$$\Sigma \tau = I_{\text{ολ}} a_{\gamma} \Rightarrow a_{\gamma} = \frac{\Sigma \tau}{I_{\text{ολ}}} = \frac{16 \text{ Nm}}{4 \text{ kgm}^2} \Rightarrow a_{\gamma} = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

γ) Το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στον κύλινδρο, έτσι όταν ο κύλινδρος στραφεί κατά γωνία $\Delta\theta$, θα ξετυλιχτεί νήμα μήκους $\Delta s = R \cdot \Delta\theta$ και το σώμα Σ θα κατέβει κατά $\Delta h = \Delta s$. Άρα έχουμε $\Delta h = R \cdot \Delta\theta$. Διαιρώντας 1^ο και 2^ο μέλος με το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt που απαιτήθηκε για την παραπάνω μεταβολή παίρνουμε:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = R \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow v = R \cdot \omega,$$

όπου v συμβολίζει την ταχύτητα με την οποία κατέρχεται το σώμα Σ.

Παίρνοντας ρυθμούς μεταβολής της τελευταίας σχέσης προκύπτει:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha = R \cdot a_{\gamma}$$

όπου α συμβολίζει την επιτάχυνση με την οποία κατέρχεται το σώμα Σ.

Με αντικατάσταση στην τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$\alpha = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,1\text{m} \Rightarrow \alpha = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Από την ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση του Σ έχουμε:

$$h = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (\sqrt{10\pi} \text{ s})^2 \Rightarrow h = 2\pi \text{ m}$$

δ) Από την ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση του συστήματος ράβδου - σφαιριδίων έχουμε:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} a_\gamma t_1^2 \Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} (\sqrt{10\pi} \text{ s})^2 \Rightarrow \theta_1 = 20\pi \text{ rad}$$

Για τον αριθμό περιστροφών ισχύει:

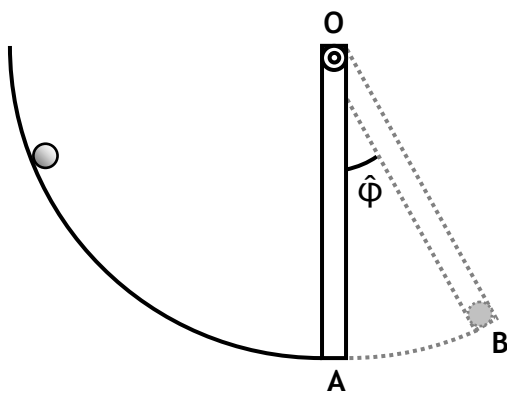
$$N_{\text{σπ}} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N_{\text{σπ}} = \frac{20\pi}{2\pi} \frac{\text{rad}}{\text{rad} / \text{στροφ.}} \Rightarrow N_{\text{σπ}} = 10 \text{ στροφές.}$$

Εναλλακτικά, η γωνία στροφής θ_1 θα μπορούσε να υπολογισθεί από το τόξο στροφής $s = \theta_1 \cdot R$, με δεδομένο ότι το μήκος του νήματος s που ξετυλίχθηκε ισούται με το ύψος h κατά το οποίο μετακινήθηκε το σώμα Σ :

$$h = \theta_1 \cdot R \Rightarrow \theta_1 = 20\pi \text{ rad}.$$

Άσκηση 3.

Μια λεπτή ομογενής ράβδος μήκους $L=0,3\text{ m}$ και μάζας $m=1\text{ kg}$ μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα, που περνά από το άκρο της O , όπως στο σχήμα. Η ράβδος ισορροπεί ακίνητη στη θέση OA . Ένα μικρό σφαιρίδιο μάζας $m=1\text{ kg}$ αφήνεται να κινηθεί εντός τεταρτοκυκλίου που έχει κέντρο του το σημείο O και συναντά τη ράβδο στο σημείο A , έχοντας ταχύτητα μέτρου $v=2\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Το σφαιρίδιο συγκρούεται με τη ράβδο και προσκολλάται στο άκρο της A δημιουργώντας το σύστημα ράβδος - σφαιρίδιο το οποίο έχει ροπή αδράνειας που δίνεται από τη σχέση $I=\frac{4}{3}mL^2$. Το σύστημα ράβδος - σφαιρίδιο ξεκινά να περιστρέφεται γύρω από το άκρο O της ράβδου.



Να βρείτε:

- Τη ροπή αδράνειας I_p της ράβδου, ως προς τον άξονα περιστροφής που περνά από το άκρο O .
- Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω του συστήματος ράβδος - σφαιρίδιο αμέσως μετά την κρούση.
- Τη μείωση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης.
- Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος - σφαιρίδιο $\frac{dL}{dt}$ όταν διέρχεται από τη θέση OB , η οποία σχηματίζει γωνία $\hat{\phi}=30^\circ$ με την αρχική της θέση.

Δίνονται: $g=10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και $\eta\mu 30^\circ=0,5$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Λύση

α) Η ροπή αδράνειας του συσσωματώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του ισούται με το άθροισμα των ροπών αδράνειας της ράβδου I_p και του σφαιριδίου $I_{\sigma\phi}$ ως προς τον ίδιο άξονα: $I = I_p + I_{\sigma\phi}$.

Με αντικατάσταση, έχουμε:

$$I = I_p + I_{\sigma\phi} \Rightarrow \frac{4}{3}mL^2 = I_p + mL^2 \Rightarrow I_p = \frac{1}{3}mL^2 \Rightarrow I_p = \frac{1}{3}1\text{kg} \cdot (0,3\text{m})^2 \Rightarrow \\ I_p = 0,03 \text{ kgm}^2$$

β) (βλ. σελίδα 124 του Σχολικού Βιβλίου)

Στη θέση Α οι φορείς τόσο του βάρους του σφαιριδίου όσο και του βάρους της ράβδου διέρχονται από τον άξονα περιστροφής άρα έχουν μηδενική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο Ο. Άρα η στροφορμή διατηρείται.

Με αντικατάσταση, στη μαθηματική σχέση της διατήρησης της στροφορμής έχουμε:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m v L = I \omega \Rightarrow m v L = \frac{4}{3}mL^2 \omega \Rightarrow \\ \omega = \frac{3}{4L} v = \frac{3}{4 \cdot 0,3\text{m}} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

γ) Η μείωση της μηχανικής ενέργειας οφείλεται μόνο στην μείωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος

$$|\Delta E_{\mu\eta\chi}| = |\Delta K| = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow \\ |\Delta E_{\mu\eta\chi}| = \frac{1}{2}1\text{kg} \cdot \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}1\text{kg} \cdot (0,3\text{m})^2 \cdot \left(5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow \\ |\Delta E_{\mu\eta\chi}| = 2\text{J} - 1,5\text{J} \Rightarrow |\Delta E_{\mu\eta\chi}| = 0,5\text{J}$$

δ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος- σφαιρίδιο $\frac{dL}{dt}$ στη θέση OB ισούται με τη συνολική ροπή που δέχεται το συσσωμάτωμα στην ίδια θέση:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau \Rightarrow \frac{dL}{dt} = w \cdot d_1 + w \cdot d_2 \Rightarrow \frac{dL}{dt} = mg(d_1 + d_2)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAB έχουμε:

$$\eta\mu\hat{\phi} = \frac{d_2}{L} \Rightarrow d_2 = 0,3\text{m} \cdot 0,5 \Rightarrow d_2 = 0,15 \text{ m}$$

Επίσης, από το ορθογώνιο τρίγωνο OAK:

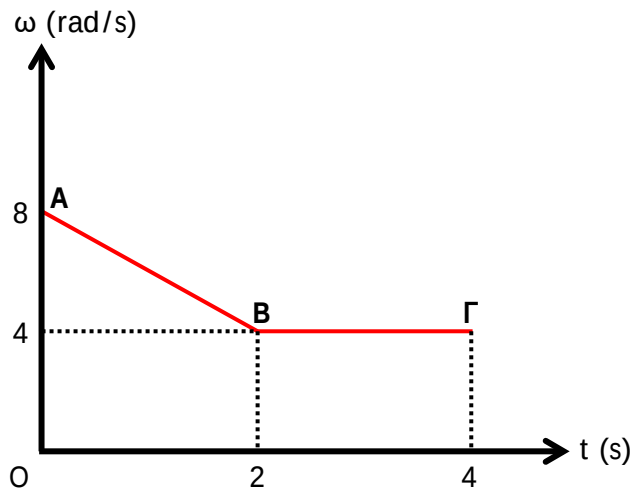
$$\eta\mu\hat{\phi} = \frac{d_1}{(OK)} \Rightarrow d_1 = \frac{0,3\text{m}}{2} \cdot 0,5 \Rightarrow d_1 = 0,075 \text{ m}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση $\frac{dL}{dt} = mg(d_1 + d_2)$ έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = mg(d_1 + d_2) = 1\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (0,075\text{m} + 0,15\text{m}) \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 2,25 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$$

Άσκηση 4.

Ένα στερεό Σ περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα ως προς τον οποίο παρουσιάζει ροπή αδράνειας $I = 0,2 \text{ kgm}^2$. Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας του στερεού Σ ως προς το χρόνο δίνεται στο διάγραμμα που ακολουθεί:



Να βρείτε:

- την αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης του στερεού τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1 \text{ s}$ και $t_3 = 3 \text{ s}$.
- τον αριθμό των περιστροφών που εκτέλεσε το στερεό από $t_A = 0$ μέχρι $t_\Gamma = 4 \text{ s}$.
- την ισχύ της δύναμης που ασκείται στο στερεό τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$.
- το μέτρο της στροφορμής του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής του τη χρονική στιγμή $t_B = 2 \text{ s}$.

Λύση

α) (βλ. σελίδα 109 του Σχολικού Βιβλίου)

Σε ένα διάγραμμα $\omega = \omega(t)$, η αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης ισούται με την κλίση της καμπύλης.

Κίνηση AB:

Από $t_A = 0$ μέχρι $t_B = 2 \text{ s}$ η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\omega = f(t)$

είναι σταθερή, επομένως η γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$ γράφεται:

$$a_{\gamma\omega v1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow a_{\gamma\omega v1} = \frac{\omega_B - \omega_A}{t_B - t_A} \Rightarrow a_{\gamma\omega v1} = \frac{4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} - 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2\text{s} - 0\text{s}} \Rightarrow a_{\gamma\omega v1} = -2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Κίνηση ΒΓ:

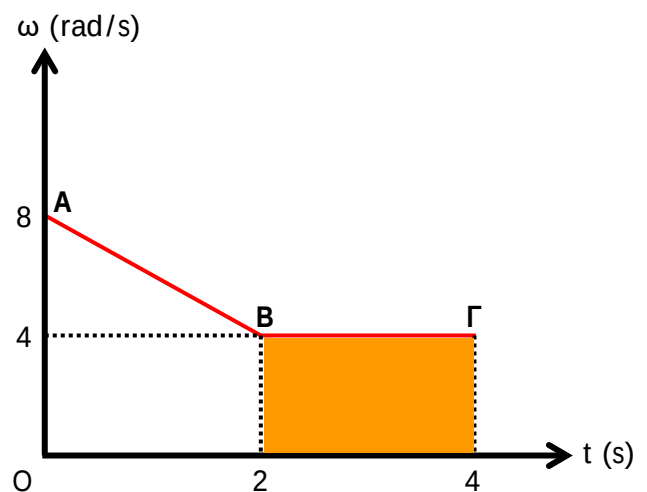
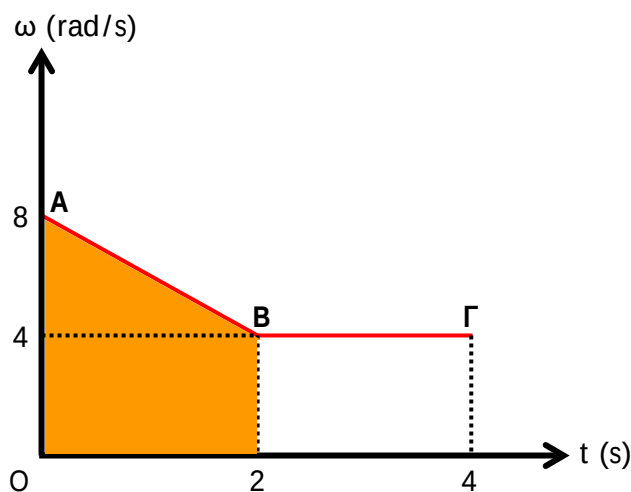
Από $t_B = 2\text{ s}$ μέχρι $t_\Gamma = 4\text{ s}$ η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\omega = f(t)$ είναι μηδέν, επομένως η γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega v} = \frac{d\omega}{dt}$ είναι μηδέν:

$$a_{\gamma\omega v2} = 0$$

β) Σε ένα διάγραμμα $\omega = \omega(t)$, η γωνία στροφής ισούται με το εμβαδόν του τμήματος που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης και του άξονα του χρόνου t .

Από $t_A = 0$ μέχρι $t_B = 2\text{ s}$ το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\omega = f(t)$ δίνει τη γωνία στροφής για το αντίστοιχο χρονικό διάστημα:

$$\theta_1 = \frac{(4+8) \cdot 2}{2} \text{ rad} \Rightarrow \theta_1 = 12 \text{ rad}$$



Από $t_B = 2\text{ s}$ μέχρι $t_\Gamma = 4\text{ s}$ το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\omega = f(t)$ δίνει τη γωνία στροφής για το αντίστοιχο χρονικό διάστημα:

$$\theta_2 = 4 \cdot 2 \text{ rad} \Rightarrow \theta_2 = 8 \text{ rad}$$

$$\theta_{\text{ολ}} = \theta_1 + \theta_2 \Rightarrow \theta_{\text{ολ}} = 20 \text{ rad}$$

Ο αριθμός περιστροφών δίνεται από τον τύπο $N_{\text{ολ}} = \frac{\theta_{\text{ολ}}}{2\pi}$. Επομένως: $N_{\text{ολ}} = \frac{10}{\pi}$ στροφές.

γ) Η ισχύς της δύναμης δίνεται από τη σχέση: $P = \tau \cdot \omega$, όπου τ η ροπή της δύναμης και ω η γωνιακή ταχύτητα.

Από τον τύπο $a_{\gamma\omega v1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ υπολογίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_1 = 1\text{ s}$:

$$a_{\gamma\omega v1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow -2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = \frac{\omega_1 - 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{1\text{s} - 0\text{s}} \Rightarrow \omega_1 = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Με αντικατάσταση στον τύπο $P = \tau \cdot \omega$ έχουμε:

$$P = \tau \cdot \omega_1 \Rightarrow P = I \cdot a_{\gamma\omega v1} \cdot \omega_1 \Rightarrow P = 0,2\text{kgm}^2 \cdot \left(-2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) \cdot \left(6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) \Rightarrow$$

$$P = -2,4\text{ W}$$

δ) (βλ. σελίδα 122 του Σχολικού Βιβλίου)

Για τη στρωφορμή του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής του τη χρονική στιγμή $t_B = 2\text{ s}$ έχουμε:

$$L = I \cdot \omega_B \Rightarrow L = 0,2\text{kgm}^2 \cdot 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow L = 0,8 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$$

Παρατήρηση: Στη στρωφική κίνηση, τα μεγέθη θ , ω , a_γ αντιστοιχούν στα μεγέθη x , v , a της μεταφορικής κίνησης. Επομένως, το διάγραμμα $\omega-t$ αντιστοιχεί στο διάγραμμα $v-t$ που έχει μελετηθεί σε προηγούμενη τάξη.

Άσκηση 5.

Ένας οριζόντιος δίσκος μπορεί να στρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο γύρω από ακλόνητο κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Αρχικά ο δίσκος είναι ακίνητος. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στο δίσκο σταθερή ροπή, με αποτέλεσμα ο δίσκος να αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $a_{\gamma\omega\nu} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Να βρείτε:

α) το μέτρο της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας $\Delta\omega$ σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 4 \text{ s}$.

β) τη ροπή αδράνειας I του δίσκου, αν στο ίδιο χρονικό διάστημα $\Delta t = 4 \text{ s}$ η μεταβολή του μέτρου της στροφορμής του δίσκου είναι $\Delta L = 0,8 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$.

γ) Τη στιγμιαία ισχύ P_1 της ροπής που στρέφει το δίσκο, τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.

δ) Τον αριθμό των στροφών N_1 που έχει εκτελέσει ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.

Λύση

α) Η γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$ είναι σταθερή, οπότε έχουμε:

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\omega = a_{\gamma\omega\nu} \Delta t \Rightarrow \Delta\omega = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

β) Η στροφορμή στερεού δίνεται από τον τύπο $L = I\omega$ και η ροπή αδράνειας I του δίσκου είναι σταθερή, οπότε έχουμε:

$$L = I\omega \Rightarrow \Delta L = I \cdot \Delta\omega \Rightarrow I = \frac{\Delta L}{\Delta\omega} \Rightarrow I = \frac{0,8 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}}{40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \Rightarrow I = 0,02 \text{ kgm}^2$$

γ) Η στιγμιαία ισχύς P_1 της ροπής που στρέφει το δίσκο, τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ δίνεται από τον τύπο:

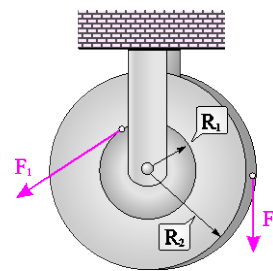
$$P_1 = \tau \cdot \omega_1 \Rightarrow P_1 = I \cdot a_{\gamma\omega\nu} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \cdot t_1 = 0,02 \text{ kgm}^2 \cdot \left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)^2 \cdot 2 \text{ s} \Rightarrow P_1 = 4 \text{ W}$$

δ) Ο αριθμός των στροφών N_1 που έχει εκτελέσει ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$N_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \Rightarrow N_1 = \frac{\frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu}t_1^2}{2\pi} \Rightarrow N_1 = \frac{\frac{1}{2}10\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (2\text{s})^2}{2\pi} \Rightarrow N_1 = \frac{10}{\pi} \text{ στροφές.}$$

Άσκηση 6.

Η ακίνητη διπλή τροχαλία του σχήματος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας της. Η τροχαλία έχει ακτίνες $R_1 = 10\text{cm}$, $R_2 = 20\text{cm}$ και ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής $I = 1\text{kgm}^2$. Στην τροχαλία που είναι αρχικά ακίνητη, ασκούνται μέσω κατάλληλων αβαρών νημάτων οι δυνάμεις $F_1 = 60\text{N}$ και $F_2 = 40\text{N}$, με σημεία εφαρμογής και κατευθύνσεις όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε:



α) τη συνολική ροπή που δέχεται η τροχαλία.

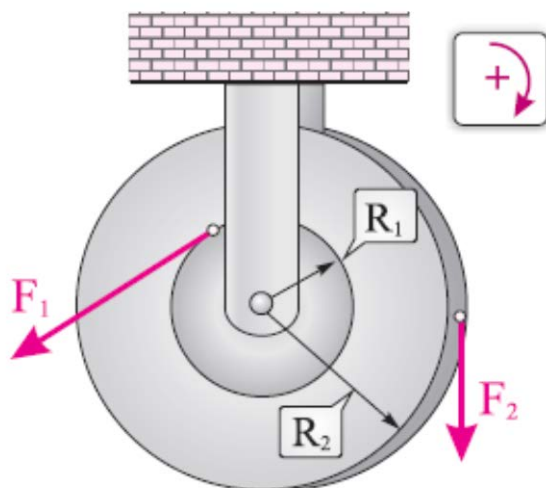
β) τη γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά η τροχαλία.

γ) τη γωνιακή της ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = 4\text{ s}$.

δ) τη χρονική στιγμή $t = 4\text{ s}$, το μήκος των νημάτων που έχει τυλιχτεί ή ξετυλιχτεί σε κάθε τροχαλία.

Λύση

α)



$$\Sigma\tau = F_2 R_2 - F_1 R_1 = 40\text{N} \cdot 0,2\text{m} - 60\text{N} \cdot 0,1\text{m} \Rightarrow \Sigma\tau = 2\text{Nm}$$

β) Η γωνιακή επιτάχυνση βρίσκεται από το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη Στροφική κίνηση

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau}{I} = \frac{2Nm}{1kgm^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 2 \frac{rad}{s^2}$$

γ) Η κίνηση της τροχαλίας είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα, οπότε η γωνιακή ταχύτητα βρίσκεται από την αντίστοιχη σχέση της κινηματικής περιγραφής της στροφικής κίνησης.

$$\omega = a_{\gamma\omega\nu} \cdot t = 2 \frac{rad}{s^2} \cdot 4s \Rightarrow \omega = 8 \frac{rad}{s}$$

δ) Η τροχαλία στρέφεται δεξιόστροφα, οπότε στην εξωτερική τροχαλία, ακτίνας R_2 , το νήμα ξετυλίγεται, ενώ στην εσωτερική τροχαλία, ακτίνας R_1 , το νήμα τυλίγεται.

Το νήμα που έχει τυλιχθεί ή ξετυλιχτεί βρίσκεται από τη σχέση

$$s = R\vartheta, \text{ όπου } \vartheta \text{ η γωνία στροφής.}$$

Η γωνία στροφής είναι κοινή για όλα τα σημεία της διπλής τροχαλίας και βρίσκεται από τη σχέση

$$\vartheta = \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} t^2 = \frac{1}{2} 2 \frac{rad}{s^2} (4s)^2 \Rightarrow \vartheta = 16rad$$

Έτσι, για τα δύο μήκη των νημάτων έχουμε:

$$\text{- εσωτερική τροχαλία: } s_1 = R_1\vartheta = 0,1m \cdot 16rad \Rightarrow s_1 = 1,6m$$

$$\text{-εξωτερική τροχαλία: } s_2 = R_2\vartheta = 0,2m \cdot 16rad \Rightarrow s_2 = 3,2m$$

Άρα στην εσωτερική τροχαλία τυλίχτηκε νήμα μήκους $s_1 = 1,6m$ και από την εξωτερική ξετυλίχτηκε νήμα μήκους $s_2 = 3,2m$.

Άσκηση 7.

Οι τροχοί ενός ποδηλάτου έχουν ακτίνα $R = 0,3\text{m}$ και μάζα $m = 2\text{kg}$ ο καθένας. Το ποδήλατο κινείται στην κατεύθυνση από το νότο προς το βορρά με ταχύτητα 6m/s . Ο ποδηλάτης φρενάρει ομαλά και το σύστημα σταματά μετά από 3s . Σε όλη τη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης οι τροχοί κυλίνουν. Για τον κάθε τροχό:

α) να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειάς του, αν θεωρήσετε ότι όλη η μάζα του είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρεια.

β) να βρείτε πώς μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητά του σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ) να γράψετε τη σχέση που συνδέει το μέτρο της στροφορμής του σε συνάρτηση με το χρόνο και να τη σχεδιάσετε.

δ) να υπολογίσετε τη ροπή που τον επιβράδυνε και να σχεδιάσετε το διάνυσμά της, καθώς και το διάνυσμα της αρχικής γωνιακής ταχύτητας.

Λύση

α) Επειδή η μάζα του τροχού θεωρείται συγκεντρωμένη όλη στην περιφέρειά του, η ροπή αδράνειας είναι:

$$I = mR^2 = 2\text{kg} \cdot (0,3\text{m})^2 \Rightarrow I = 0,18\text{kgm}^2$$

β) Η κίνηση του τροχού είναι μεταφορικά και στροφικά ομαλά επιβραδυνόμενη. Η γωνιακή ταχύτητα κάθε τροχού δίνεται από τη σχέση $\omega = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu} t$ (1)

Επειδή οι τροχοί κυλίνουν, γωνιακή και μεταφορική ταχύτητα συνδέονται με τη σχέση $v_{\text{cm}} = \omega R$. Έτσι για την αρχική γωνιακή ταχύτητα έχουμε ω_0 παίρνουμε:

$$\omega_0 = \frac{v_{\text{cm}(\alpha\rho\chi)}}{R} = \frac{6\text{m/s}}{0,3\text{m}} \Rightarrow \omega_0 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Επειδή οι τροχοί κυλίνουν γωνιακή και μεταφορική επιτάχυνση συνδέονται με τη σχέση $\alpha_{\text{cm}} = a_{\gamma\omega\nu} R$ (2).

Όμως για τη μεταφορική επιτάχυνση έχουμε:

$$\alpha_{\text{cm}} = \frac{\Delta v_{\text{cm}}}{\Delta t} = \frac{0 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3\text{s}} \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε:

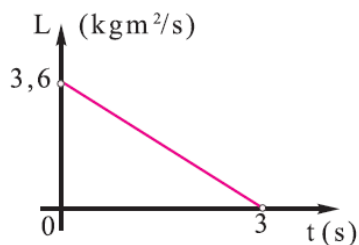
$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{cm}}{R} = \frac{-2 \frac{m}{s^2}}{0,3m} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = -\frac{20}{3} \frac{rad}{s^2}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) των ω_0 και $a_{\gamma\omega\nu}$ παίρνουμε:

$$\omega = 20 - \frac{20}{3}t \quad (SI) \quad \mu\epsilon \quad 0s \leq t \leq 3s$$

γ) Η στροφορμή του τροχού δίνεται από τη σχέση: $L = I\omega$. Με αντικατάσταση παίρνουμε:

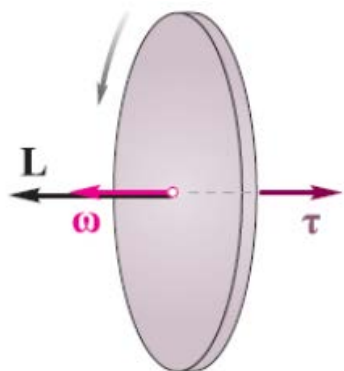
$$L = 0,18(20 - \frac{20}{3}t) \quad (SI) \Rightarrow L = 3,6 - 1,2t \quad (SI) \quad \mu\epsilon \quad 0s \leq t \leq 3s$$



δ) Η ροπή που επιβράδυνε τον τροχό βρίσκεται από τη σχέση:

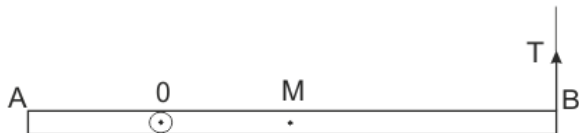
$$\Sigma\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{0 \text{ kgm}^2/s - 3,6 \text{ kgm}^2/s}{3s} \Rightarrow \Sigma\tau = -1,2 \text{ Nm}$$

Επειδή το ποδήλατο κατευθύνεται στο βορρά, η γωνιακή ταχύτητα είναι προς τη Δύση. Το αρνητικό πρόσημο για τη ροπή δηλώνει πρόσημο αντίθετο από αυτό της γωνιακής ταχύτητας.



Άσκηση 8.

Η ομογενής ράβδος AB του σχήματος μάζας $M = 2\text{kg}$ και μήκους $L = \frac{12}{7}\text{m}$, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα κάθετο στη ράβδο, που διέρχεται από το σημείο της O.



Η απόσταση AO είναι ίση με $\frac{L}{4}$. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που

διέρχεται από το κέντρο μάζας της M και είναι κάθετος σ' αυτή είναι $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2$. Η

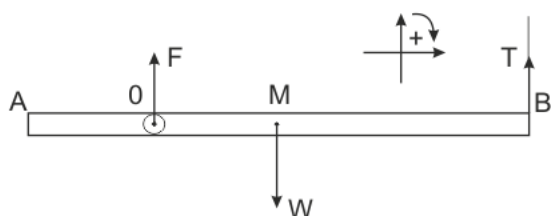
ράβδος διατηρείται στην οριζόντια θέση με τη βοήθεια κατακόρυφου νήματος που είναι δεμένο στο άκρο B. Κόβουμε το νήμα. Να βρείτε:

- α) την τάση του νήματος πριν αυτό κοπεί.
- β) τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της.
- γ) τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου αμέσως μόλις κοπεί το νήμα.
- δ) τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν αυτή διέρχεται από την κατακόρυφη θέση.

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο στην κατάσταση ισορροπίας. Από τη συνθήκη ισορροπίας για το άθροισμα των ροπών ως προς τον άξονα περιστροφής παίρνουμε:



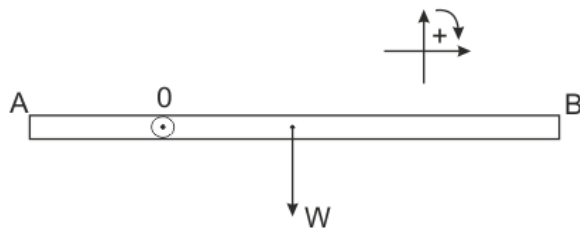
$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow Mg \frac{L}{4} - T \frac{3L}{4} = 0 \Rightarrow T = \frac{Mg}{3} = \frac{2\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2}{3} \Rightarrow T = \frac{20}{3}\text{N}$$

β) Η ροπή αδράνειας της ράβδου, ως προς το σημείο O, βρίσκεται από το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων (Θεώρημα Steiner).

$$I_{(O)} = I_{cm} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 \Rightarrow I_{(O)} = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{16}ML^2 \Rightarrow I_{(O)} = \frac{7}{48}ML^2 \Rightarrow$$

$$I_{(O)} = \frac{7}{48} 2\text{kg} \left(\frac{12}{7}\text{m}\right)^2 \Rightarrow I_{(O)} = \frac{6}{7}\text{kgm}^2$$

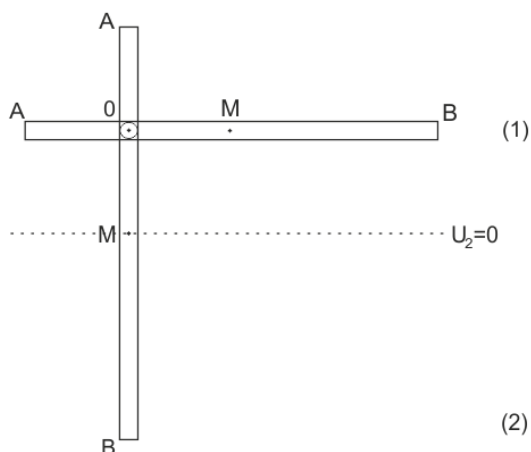
γ) Μόλις κοπεί το νήμα, η μόνη δύναμη που ασκεί ροπή είναι το βάρος.



Από το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη στροφικής κίνηση έχουμε:

$$\Sigma\tau = I_{(O)}a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau}{I_{(O)}} = \frac{Mg \cdot \frac{L}{4}}{\frac{7}{48}ML^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{12g}{7L} = \frac{12 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{7 \cdot \frac{12}{7}\text{m}} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

δ) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου στην κατακόρυφη θέση βρίσκεται με εφαρμογή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της οριζόντιας και της κατακόρυφης θέσης.



$$E_{M\eta\chi(1)} = E_{M\eta\chi(2)} \Rightarrow U_{(1)} + K_{(1)} = U_{(2)} + K_{(2)} \Rightarrow Mg \cdot \frac{L}{4} + 0 = \frac{1}{2} I_{(O)} \omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{2I_{(O)}}} = \sqrt{\frac{2\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot \frac{12}{7}\text{m}}{2 \cdot \frac{6}{7}\text{kgm}^2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{20} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

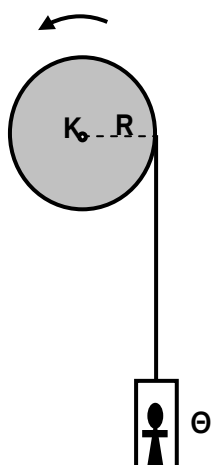
Άσκηση 9.

Ο ανελκυστήρας του σχήματος (α) αποτελείται από το θάλαμο επιβατών συνολικού βάρους $w_{\Theta} = 2000\text{N}$ και το τύμπανο περιέλιξης του συρματόσχοινου ακτίνας $R = 0,25\text{m}$, στο οποίο έχει προσαρμοστεί ο κινητήρας του ανελκυστήρα. Ο θάλαμος ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v = 1\text{m/s}$.

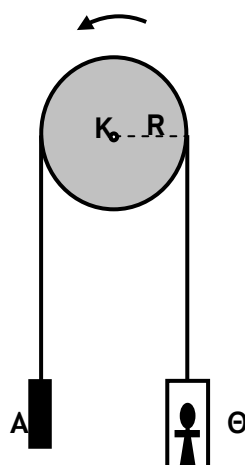
α)

1) Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τυμπάνου.

2) Να υπολογίσετε την ισχύ του κινητήρα.



(α)



(β)

β) Στο σχήμα (β) δείχνεται ο ίδιος ανελκυστήρας στον οποίο έχει προσαρμοστεί ένα αντίβαρο Α βάρους $w_A = 1800\text{N}$. Ο θάλαμος ανεβαίνει πάλι με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v = 1\text{m/s}$.

1) Να υπολογίσετε την νέα ροπή του κινητήρα, που ασκείται στο τύμπανο.

2) Να υπολογίσετε την νέα ισχύ του κινητήρα.

Λύση

α)

1) Όταν ο θάλαμος ανέβει κατά Δy θα τυλιχτεί νήμα μήκους Δs , για το οποίο ισχύει: $\Delta y = \Delta s = R \cdot \Delta \theta$.

Διαιρώντας με το αντίστοιχο χρονικό διάστημα παίρνουμε:

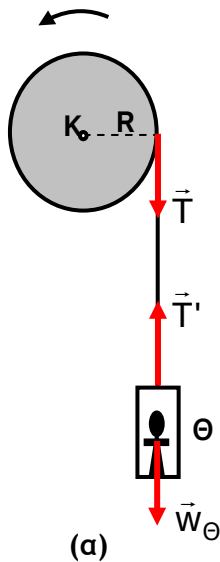
$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = R \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v_{\theta} = R\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_{\theta}}{R} = \frac{1\text{m/s}}{0,25\text{m}} \Rightarrow \omega = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

2) Επειδή ο θάλαμος ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow w_{\Theta} = T'$$

Όμως $\vec{T}'$ και $\vec{T}$ έχουν ίδιο μέτρο. Άρα το μέτρο της τάσης T του συρματόσχοινου είναι ίσο με το μέτρο του βάρους w_{Θ} του θαλάμου, $T = w_{\Theta}$.

Σχήμα (α):



Επειδή το τύμπανο στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα η συνολική ροπή που ασκείται στο τύμπανο είναι μηδέν, οπότε για τη ροπή τ_1 που ασκεί ο κινητήρας στο τύμπανο ισχύει:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \tau_1 - T \cdot R = 0 \Rightarrow \tau_1 = T \cdot R$$

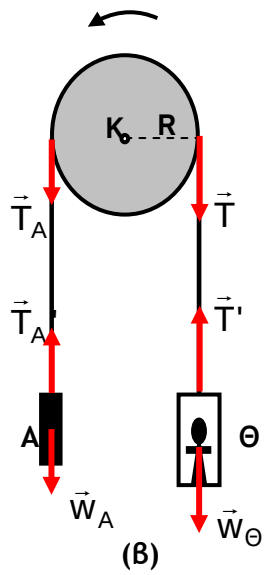
Για την ισχύ του κινητήρα, σχήμα (α), έχουμε:

$$P_1 = \tau_1 \cdot \omega \Rightarrow P_1 = w_{\Theta} \cdot R \cdot \frac{v}{R} \Rightarrow P_1 = w_{\Theta} \cdot v = 2000 \text{ N} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow P_1 = 2000 \text{ W}$$

β)

1) Επειδή το τύμπανο στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ισχύει ότι :

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{\tau} = \vec{0} &\Rightarrow \tau_2 - w_{\Theta} \cdot R + w_A \cdot R = 0 \Rightarrow \tau_2 = w_{\Theta} \cdot R - w_A \cdot R \Rightarrow \\ \tau_2 &= (w_{\Theta} - w_A) \cdot R = (2000 \text{ N} - 1800 \text{ N}) \cdot 0,25 \text{ m} \Rightarrow \tau_2 = 50 \text{ Nm} \end{aligned}$$



Για την ισχύ του κινητήρα έχουμε:

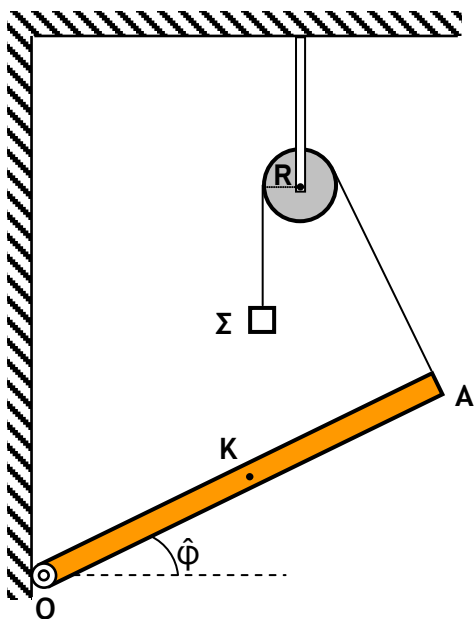
$$P_2 = \tau_2 \cdot \omega \Rightarrow P_2 = (w_\Theta \cdot R - w_A \cdot R) \cdot \frac{v}{R} \Rightarrow P_2 = (w_\Theta - w_A) \cdot v \Rightarrow$$

$$P_2 = (2000\text{N} - 1800\text{N}) \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow P_2 = 200\text{W}$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Η λεπτή, ομογενής ράβδος OA του σχήματος έχει μήκος L , μάζα M και μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα (άρθρωση) που διέρχεται από το άκρο της O . Στο άλλο άκρο A της ράβδου είναι δεμένο ένα αβαρές νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου είναι αναρτημένο, μέσω τροχαλίας ακτίνας R , ένα σώμα Σ μάζας $m_1 = 0,1\sqrt{5} \text{ kg}$.



Το νήμα είναι κάθετο στη ράβδο OA στο άκρο της A . Η ράβδος, το σώμα Σ και η τροχαλία ισορροπούν ακίνητα, με τη ράβδο να σχηματίζει γωνία $\varphi = 45^\circ$ με το οριζόντιο δάπεδο. Να βρείτε:

α) το μέτρο της τάσης T_1 του νήματος στο σημείο A .

β) τη μάζα M της ράβδου.

γ) το μήκος L της ράβδου, αν η ροπή αδράνειάς της ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο O είναι $I_O = 15\sqrt{10} \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$.

δ) Το μέτρο της δύναμης F που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο.

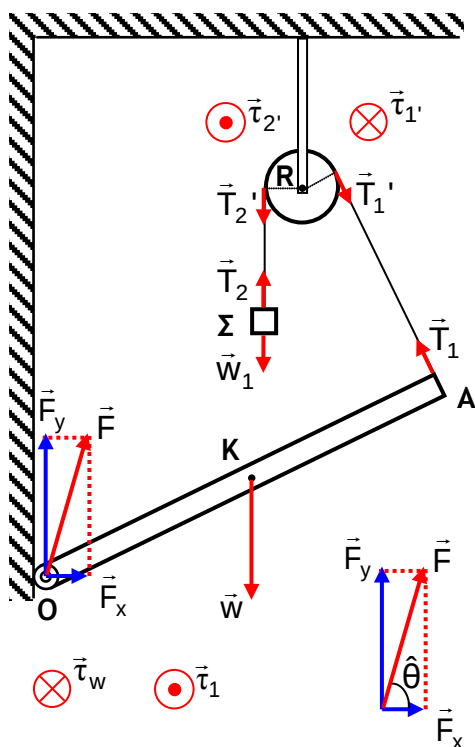
Δίνονται: Η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας

είναι $I_{cm} = \frac{1}{12} ml^2$

Λύση

α) Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο και στο σώμα, καθώς και οι δυνάμεις που ασκούν ροπή στην τροχαλία (ως προς τον άξονά της):



Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_1 = \vec{0} \Rightarrow T_2 = w_1 \Rightarrow T_2 = m_1 g \Rightarrow T_2 = \sqrt{5} \text{ N}$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές, έχουμε:

$$\vec{T}_2' = -\vec{T}_2 \Rightarrow T_2' = T_2 \Rightarrow T_2' = \sqrt{5} \text{ N}$$

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει (ως προς τον άξονά της):

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow T_2' \cdot R = T_1' \cdot R \Rightarrow T_2' = T_1' \Rightarrow T_1' = \sqrt{5} \text{ N}$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές, έχουμε:

$$\vec{T}_1' = -\vec{T}_1 \Rightarrow T_1' = T_1 \Rightarrow T_1 = \sqrt{5} \text{ N}$$

β) Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει (ως προς τον άξονα που διέρχεται από το Ο):

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\tau}_w + \vec{\tau}_1 = 0 \Rightarrow \tau_w = \tau_1 \Rightarrow \tau_w = T_1 \cdot L$$

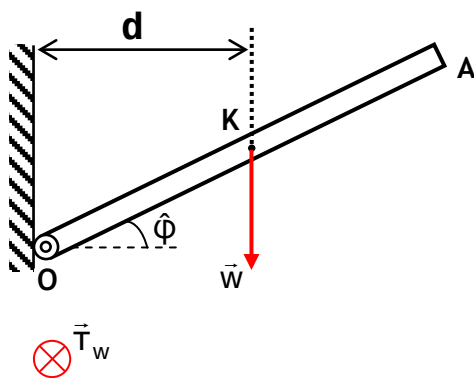
Το μέτρο της ροπής τ_w του βάρους της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο δίνεται από τον τύπο:

$\tau_w = w \cdot d$, όπου d είναι ο μοχλοβραχίονας του βάρους $\vec{w}$. Ισχύει ότι:

$$d = (OK) \cdot \sin \varphi \Rightarrow d = \frac{L}{2} \cdot \sin 45^\circ \Rightarrow d = \frac{L\sqrt{2}}{4}$$

Επομένως:

$$\tau_w = w \cdot d \Rightarrow \tau_w = Mg \cdot d \Rightarrow \tau_w = M \cdot 10 \cdot \frac{L\sqrt{2}}{4} (\text{SI}) \Rightarrow \tau_w = M \cdot \frac{5L\sqrt{2}}{2} (\text{SI})$$



Με αντικατάσταση στη σχέση $\tau_w = T_1 \cdot L$ έχουμε:

$$\tau_w = T_1 \cdot L \Rightarrow M \cdot \frac{5L\sqrt{2}}{2} = \sqrt{5} \cdot L \Rightarrow M = \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}} \text{ kg} \Rightarrow$$

$$M = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \text{ kg} \Rightarrow M = 0,2\sqrt{10} \text{ kg}$$

γ) Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας σχετίζονται με το θεώρημα Steiner.

$$I_{(O)} = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{(O)} = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 \Rightarrow I_{(O)} = \frac{1}{3}ML^2 \Rightarrow$$

$$L = \sqrt{\frac{3 \cdot I_{(O)}}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 15 \cdot \sqrt{10} \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2}{0,2 \cdot \sqrt{10} \text{ kg}}} \Rightarrow L = 0,15 \text{ m}$$

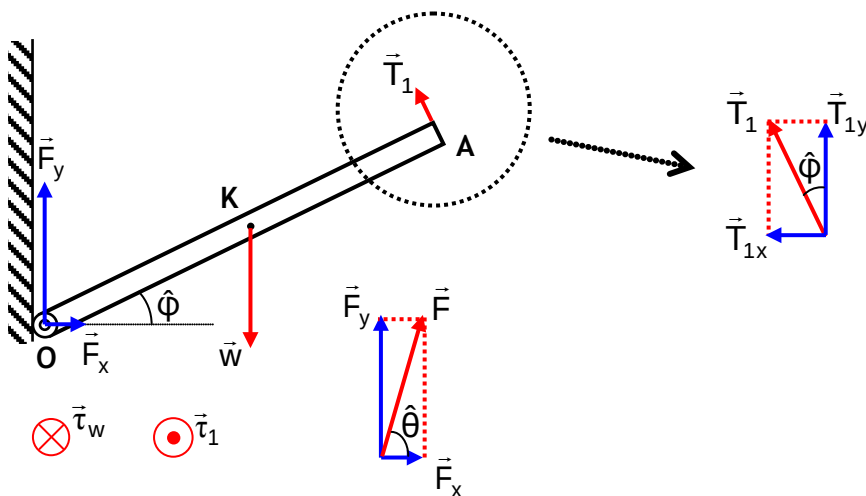
δ) Αναλύουμε την $\vec{T}_1$ σε δύο συνιστώσες: μία κατακόρυφη και μία οριζόντια, όπως έχει αναλυθεί και η $\vec{F}$. Επειδή η $\vec{T}_1$ είναι κάθετη στη ράβδο και η $\vec{T}_{1y}$ είναι κατακόρυφη, η γωνία που σχηματίζουν θα είναι ίση με τη γωνία $\hat{\phi}$ που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια διεύθυνση (όπως φαίνεται στο σχήμα).

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow F_x = T_{1x} \Rightarrow F_x = T_1 \eta \mu \phi \Rightarrow F_x = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ N}$$

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow F_y + T_{1y} = w \Rightarrow F_y = Mg - T_1 \sigma \upsilon \nu \phi \Rightarrow$$

$$F_y = 2\sqrt{10} \text{ N} - \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ N} \Rightarrow F_y = \frac{3}{2}\sqrt{10} \text{ N}$$



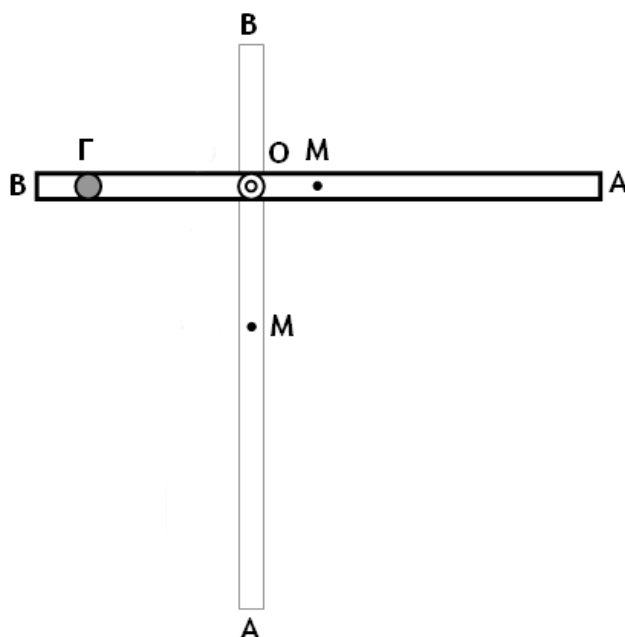
Με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 \Rightarrow F^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ N}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{10}}{2} \text{ N}\right)^2 \Rightarrow$$

$$F^2 = \left(\frac{10}{4} + \frac{90}{4}\right) \text{ N}^2 \Rightarrow F^2 = 25 \text{ N}^2 \Rightarrow F = 5 \text{ N}$$

Πρόβλημα 2.

Λεπτή ομογενής και ισοπαχής ράβδος BA με μήκος $L = 0,6\sqrt{3} \text{ m}$ και μάζα $M = 5 \text{ kg}$ ισορροπεί σε οριζόντια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο σημείο της O υπάρχει ακλόνητη οριζόντια άρθρωση γύρω από την οποία η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές, ενώ στο σημείο Γ υπάρχει στερεωμένο αμελητέων διαστάσεων σφαιρίδιο μάζας m_1 . Η απόσταση (ΓΟ) είναι ίση με 30 cm , ενώ η απόσταση (ΟΜ) είναι ίση με 10 cm , όπου Μ είναι το μέσο της ράβδου BA.



α) Να υπολογίσετε τη μάζα m_1 .

β) Ενώ το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία προσκολλάμε στο σημείο Μ σημειακή μάζα $m_2 = \frac{65}{99} \text{ kg}$ με συνέπεια η ράβδος υπό την επίδραση της βαρύτητας να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από το σημείο O.

Να υπολογίσετε:

β1) Τη ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο O.

β2) Τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος ράβδου-μαζών στην οριζόντια θέση αμέσως μετά την προσκόλληση της μάζας m_2 .

β3) Τη στροφορμή συστήματος ράβδου-μαζών στην κατακόρυφη θέση.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} ML^2$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

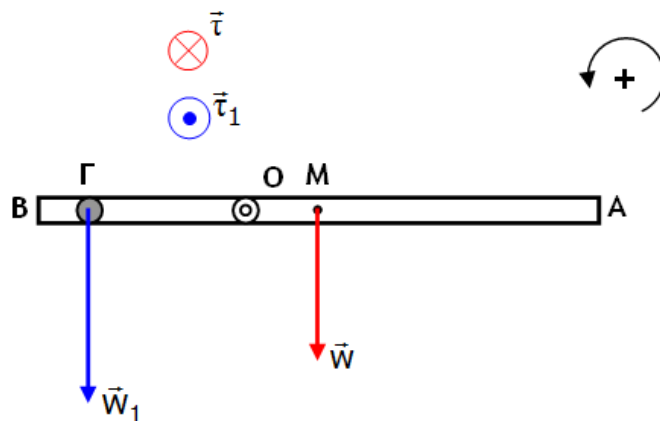
Λύση

α) Οι δυνάμεις που ασκούν ροπή στο σύστημα ράβδος - σφαιρίδιο είναι οι εξής:

το βάρος $\vec{w}$ της ράβδου, που ασκεί τη ροπή $\vec{\tau}$.

το βάρος $\vec{w}_1$ του σφαιριδίου, που ασκεί τη ροπή $\vec{\tau}_1$.

Οι κατευθύνσεις των ροπών φαίνονται στο σχήμα:



Για τη στροφική ισορροπία της ράβδου ισχύει:

$$\Sigma \vec{\tau}_{(O)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\tau}_w + \vec{\tau}_{w_1} = 0 \quad (1)$$

Τα μέτρα των ροπών των δυνάμεων είναι:

$$\tau = w \cdot (OM) \Rightarrow \tau = Mg \cdot (OM) \Rightarrow \tau = 50 \text{ N} \cdot 10^{-1} \text{ m} \Rightarrow \tau = 5 \text{ Nm}$$

$$\tau_1 = w_1 \cdot (\Gamma O) \Rightarrow \tau_1 = m_1 g \cdot (\Gamma O) \Rightarrow \tau_1 = m_1 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 3 \cdot 10^{-1} \text{ m} \Rightarrow \tau_1 = m_1 \cdot 3 \text{ (SI)}$$

Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \tau_1 = \tau \Rightarrow m_1 \cdot 0,3 = 0,5 \Rightarrow m_1 = \frac{5}{3} \text{ kg}$$

β1) Για τη ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του ισχύει:

$$I_{\Sigma \gamma \Sigma \Gamma (O)} = I_{\rho \alpha \beta \delta (O)} + m_1 (O\Gamma)^2 + m_2 (OM)^2 \quad (2)$$

Επειδή ο άξονας περιστροφής είναι παράλληλος σε οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Steiner για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της O:

$$I_{\text{Pαβδ(O)}} = I_{\text{cm}} + M \cdot (OM)^2 \Rightarrow I = \frac{1}{12} ML^2 + M \cdot (OM)^2 \Rightarrow$$

$$I_{\text{Pαβδ(O)}} = \left[\frac{1}{12} \cdot 5\text{kg} \cdot (0,6\sqrt{3}\text{m})^2 + 5\text{kg} \cdot (0,1\text{m})^2 \right] \Rightarrow I_{\text{Pαβδ(O)}} = 0,5 \text{ kgm}^2$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε:

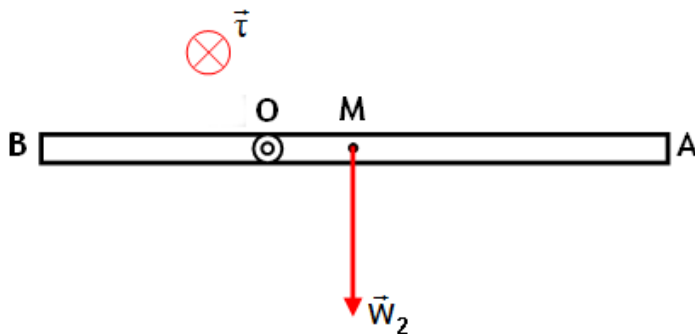
$$I_{\Sigma\Upsilon\Sigma\Gamma(\text{O})} = I_{\text{Pαβδ(O)}} + m_1(OG)^2 + m_2(OM)^2 = 0,5\text{kgm}^2 + \frac{5}{3}\text{kg} \cdot (0,3\text{m})^2 + \frac{65}{99}\text{kg} \cdot (0,1\text{m})^2 \Rightarrow$$

$$I_{\Sigma\Upsilon\Sigma\Gamma(\text{O})} = \frac{65}{99} \text{ kgm}^2$$

β2) Για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης της ράβδου στην οριζόντια θέση, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης. Οι ροπές του βάρους $\vec{w}$ της ράβδου και του βάρους $\vec{w}_1$ του σφαιριδίου αλληλοαναιρούνται, οπότε η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος θα οφείλεται μόνο στη ροπή του βάρους $\vec{w}_2$.

$$a_\gamma = \frac{\Sigma\tau_{(O)}}{I_{(O)}} = \frac{m_2 g (OM)}{I_{(O)}} \Rightarrow a_\gamma = \frac{\frac{65}{99} \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,1\text{m}}{\frac{65}{99} \text{ kgm}^2} \Rightarrow a_\gamma = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Η κατεύθυνση της επιτάχυνσης είναι ομόρροπη με την κατεύθυνση της συνολικής ροπής, η οποία φαίνεται στο σχήμα:



β3) Η στροφορμή του συστήματος θα βρεθεί από τη σχέση $L = I\omega$ (3)

Για την εύρεση του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας ω στην κατακόρυφη θέση θα χρησιμοποιήσουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας παίρνοντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο που διέρχεται από την τελική θέση του κέντρου μάζας της ράβδου.

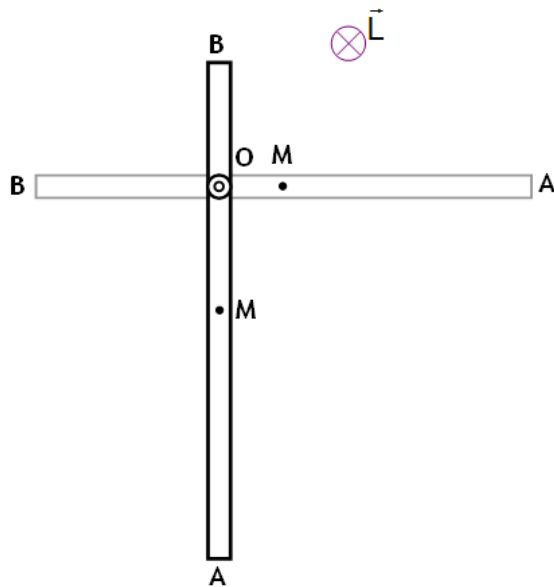
$$U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ} \Rightarrow (m_1 + m_2 + M)g(OM) + 0 = m_1g[(OM) + (OΓ)] + \frac{1}{2} I_{ΣΥΣΤ(O)} \omega^2 \Rightarrow$$

$$m_2g(OM) = \frac{1}{2} I_{ΣΥΣΤ(O)} \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2m_2g \cdot (OM)}{I_{ΣΥΣΤ(O)}} = \frac{2 \frac{65}{99} \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,1 \text{ m}}{\frac{65}{99} \text{ kgm}^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) παίρνουμε:

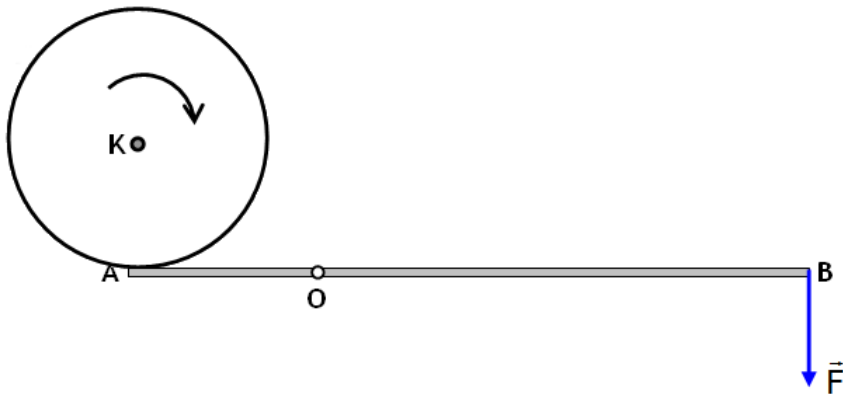
$$L = I\omega \Rightarrow L = \frac{65}{99} \text{ kgm}^2 \cdot \sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow L = \frac{65\sqrt{2}}{99} \text{ kgm}^2 / \text{s}$$

Η κατεύθυνση της στροφορμής είναι ομόρροπη με την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας και φαίνεται στο σχήμα:



Πρόβλημα 3.

Ο τροχός του σχήματος έχει ακτίνα $R = 0,1 \text{ m}$ και στρέφεται γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του με στροφορμή μέτρου $L_0 = 20 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$. Η ράβδος ΑΟΒ του σχήματος έχει μήκος $d = 0,4 \text{ m}$, είναι αβαρής και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που περνά από το σημείο Ο και είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής του τροχού. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στο άκρο Β της ράβδου κατακόρυφη δύναμη μέτρου $F = 400 \text{ N}$ με αποτέλεσμα η ράβδος να εφάπτεται στον τροχό στο άκρο της Α. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια, ενώ ο τροχός, λόγω τριβών στο σημείο επαφής με τη ράβδο, επιβραδύνεται και τελικά σταματά. Η τριβή ολίσθησης που ασκεί η ράβδος στον τροχό, όσο αυτός περιστρέφεται, έχει μέτρο $T_{ολ} = 10 \text{ N}$.



Να βρείτε:

α) Την απόσταση (ΑΟ).

β) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του τροχού, $\frac{dL}{dt}$, κατά τη διάρκεια της στροφικής του κίνησης.

γ) Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του τροχού, $\frac{dK}{dt}$, τη στιγμή που το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας είναι το μισό από το αρχικό.

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ο τροχός ακινητοποιείται καθώς και τη μέση ισχύ $|P_\mu|$ της ροπής που τον ακινητοποίησε (σε απόλυτη τιμή).

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = 2 \text{ kgm}^2$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ τροχού και της ράβδου $\mu = 0,1$.

Λύση

α) Η τριβή ολίσθησης που ασκεί η ράβδος AOB στον τροχό, όσο αυτός περιστρέφεται, δίνεται από τον τύπο $T_{ολ} = \mu N$, όπου N η κάθετη δύναμη επαφής που ασκεί η ράβδος AOB στον τροχό. Με επίλυση ως προς N και αντικατάσταση έχουμε

$$N = \frac{T_{ολ}}{\mu} = \frac{10\text{ N}}{0,1} \Rightarrow N = 100\text{ N}$$

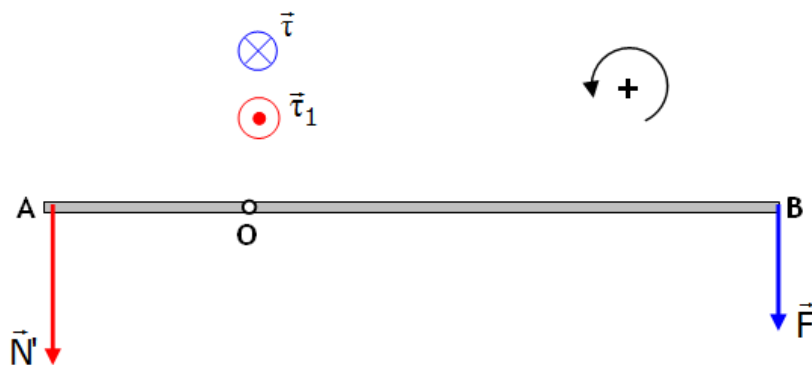
Από τον 3^ο Νόμο Newton, η κάθετη δύναμη επαφής που ασκεί η ράβδος AOB στον τροχό έχει ίσο μέτρο με την κάθετη δύναμη επαφής N' που ασκεί ο τροχός στη ράβδο AOB (βλ. το παρακάτω σχήμα). Επομένως: $N' = 100\text{ N}$

Οι δυνάμεις που ασκούν ροπή στη ράβδο AOB είναι οι εξής:

η κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$, που ασκεί τη ροπή $\vec{\tau}$

η κάθετη δύναμη επαφής $\vec{N}'$ που ασκεί ο τροχός στη ράβδο AOB, που ασκεί τη ροπή $\vec{\tau}_1$.

Οι κατευθύνσεις των ροπών φαίνονται στο σχήμα:



Για να ισορροπεί η ράβδος AOB σε οριζόντια θέση, πρέπει να ισχύει:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \quad (\text{ως προς το σημείο O}) \quad (1)$$

Θέτουμε $(AO) = x$.

Τα μέτρα των ροπών των δυνάμεων είναι:

$$\tau = F \cdot (OB) \Rightarrow \tau = 400 \cdot (0,4 - x) \text{ (SI)} \Rightarrow \tau = 160 - 400x \text{ (SI)}$$

$$\tau_1 = N' \cdot x \Rightarrow \tau_1 = 100x \text{ (SI)}$$

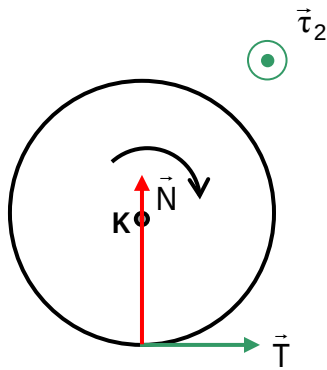
Με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \tau_1 = \tau \Rightarrow 160 - 400x = 100x \Rightarrow 500x = 160 \Rightarrow (AO) = 0,32\text{ m}$$

β) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του τροχού κατά τη διάρκεια της στροφικής του κίνησης ισούται με το μέτρο της συνολικής ροπής που ασκείται στον

τροχό: $\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau$ (2)

Η μόνη δύναμη που ασκεί ροπή στον τροχό είναι η τριβή ολίσθησης, η οποία είναι σταθερή. Η κατεύθυνση της ροπής φαίνεται στο σχήμα.



Το μέτρο της ροπής της τριβής ολίσθησης είναι:

$$\tau_2 = T_{ολ} \cdot R = 10\text{N} \cdot 0,1\text{m} \Rightarrow \tau_2 = 1 \text{ Nm}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = \tau_2 \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \Sigma \tau \cdot \omega$$
 (3)

Το μέτρο της αρχικής γωνιακής ταχύτητας ω_0 βρίσκεται από τον τύπο: $L_0 = I \cdot \omega_0$. Με αντικατάσταση έχουμε:

$$\omega_0 = \frac{L_0}{I} = \frac{20\text{kgm}^2/\text{s}}{2\text{kgm}^2} \Rightarrow \omega_0 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Επομένως, όταν το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι το μισό από το αρχικό θα είναι:

$$\omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = 1 \text{ Nm} \cdot 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 5 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ο τροχός ακινητοποιείται θα ισχύει $L_1 = 0$.

Επειδή $\frac{dL}{dt} = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = \text{σταθ. έχουμε (SI):}$

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = 1 \Rightarrow \left| \frac{0 - L_0}{t_1 - 0} \right| = 1 \Rightarrow \frac{20}{t_1} = 1 \Rightarrow t_1 = 20 \text{ s}$$

Η μέση ισχύς $|P_\mu|$ της ροπής που ακινητοποίησε τον τροχό (σε απόλυτη τιμή) δίνεται από τον τύπο: $|P_\mu| = \left| \frac{W}{t_1} \right|$, όπου W το έργο της ροπής που ακινητοποίησε τον τροχό.

Από το Θεώρημα Έργου - Ενέργειας, για τη στροφική κίνηση αν θέσουμε ως αρχική τη στιγμή $t_0 = 0$ και ως τελική τη στιγμή $t_1 = 20 \text{ s}$, έχουμε:

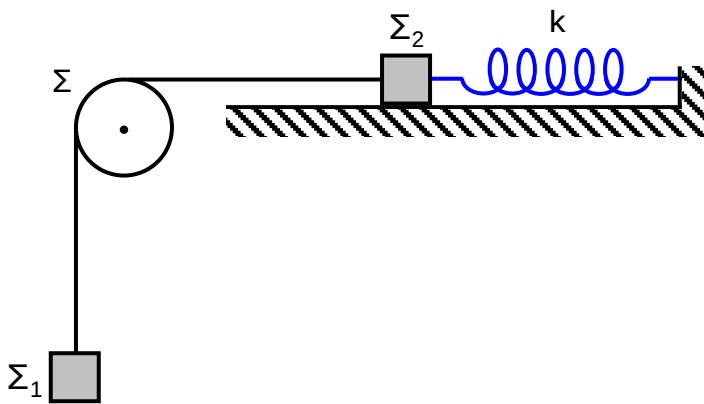
$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} I \omega_0^2 = W \Rightarrow W = -\frac{1}{2} I \omega_0^2 \Rightarrow W = -100 \text{ J}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση $|P_\mu| = \left| \frac{W}{t_1} \right|$ έχουμε:

$$|P_\mu| = \frac{W}{t_1} \Rightarrow |P_\mu| = \frac{100 \text{ J}}{20 \text{ s}} \Rightarrow |P_\mu| = 5 \text{ W}$$

Πρόβλημα 4.

Η τροχαλία Σ του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα της, είναι $I = 0,01 \text{ kgm}^2$ και η ακτίνα της είναι $R = 0,1 \text{ m}$. Γύρω από την τροχαλία είναι τυλιγμένο πολλές φορές λεπτό αβαρές και μη εκτατό νήμα, το οποίο δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία. Στη μία άκρη του νήματος έχει αναρτηθεί το σώμα Σ_1 . Στην άλλη άκρη του νήματος έχει προσδεθεί το σώμα Σ_2 , το οποίο βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα ισορροπεί ακίνητο με τη βοήθεια ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, στο οποίο έχει προσδεθεί στο ένα άκρο του το σώμα Σ_2 και το άλλο άκρο του σε ακλόνητο στήριγμα. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζα $m = 1 \text{ kg}$ το καθένα.



α) Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης $F_{ελ}$ που ασκεί το ελατήριο στο σώμα Σ_2 , όταν το σύστημα ισορροπεί.

β) Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ κόβουμε το νήμα στο σημείο που συνδέει το σώμα Σ_2 με την τροχαλία, με αποτέλεσμα η τροχαλία να ξεκινήσει να περιστρέφεται και το σύστημα ελατήριο - Σ_2 να ξεκινήσει απλή αρμονική ταλάντωση.

Να βρείτε:

β1) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης a_γ της τροχαλίας.

β2) Πόσο έχει κατέβει το σώμα Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας γίνεται αριθμητικά ίσο με τη γωνιακή συχνότητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης του συστήματος ελατήριο - Σ_2 .

β3) Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας $\frac{dK}{dt}$ τη χρονική στιγμή t_1 όπως αυτή καθορίζεται στο προηγούμενο ερώτημα.

Δίνεται: $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

Λύση

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα και στην τροχαλία:

Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σ_1 :

η δύναμη $\vec{w}$ είναι το βάρος του σώματος,

η δύναμη $\vec{T}_1$ ασκείται από το κατακόρυφο νήμα.

Επίσης φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σ_2 :

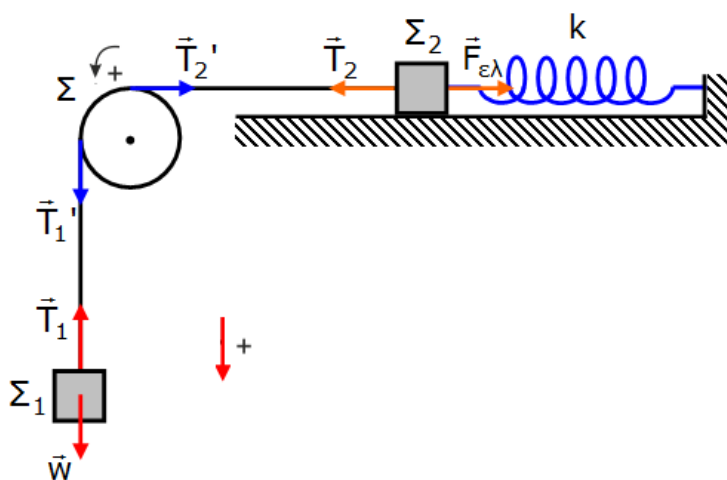
η δύναμη $\vec{F}_{ελ}$ ασκείται από το ελατήριο,

η δύναμη $\vec{T}_2$ ασκείται από το οριζόντιο νήμα.

Στην τροχαλία Σ έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούν ροπή:

η δύναμη $\vec{T}_1'$ ασκείται από το κατακόρυφο νήμα,

η δύναμη $\vec{T}_2'$ ασκείται από το οριζόντιο νήμα.



Για την ισορροπία του Σ_1 έχουμε:

$$\Sigma \vec{F}_1 = \vec{0} \Rightarrow T_1 = w \Rightarrow T_1 = mg \Rightarrow T_1 = 10 \text{ N}$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές ισχύει:

$$T_1' = T_1 = 10 \text{ N}$$

Για την ισορροπία της τροχαλίας Σ έχουμε:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow T_2' R = T_1' R \Rightarrow T_2' = T_1' = 10 \text{ N}$$

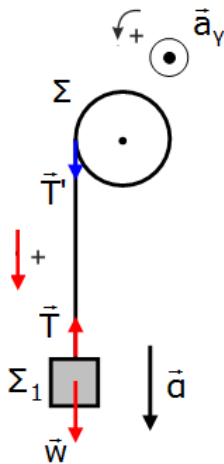
Επειδή το νήμα είναι αβαρές ισχύει:

$$T_2' = T_2 = 10 \text{ N}$$

Για την ισορροπία του Σ_2 έχουμε:

$$\Sigma \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow F_{ελ} = T_2 \Rightarrow F_{ελ} = 10 \text{ N}$$

Β1) Μόλις κόψουμε το νήμα, η τροχαλία θα ξεκινήσει να περιστρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_\gamma$ και το Σ_1 να κατεβαίνει με επιτάχυνση $\vec{a}$. Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σ_1 και η δύναμη που ασκεί ροπή στην τροχαλία.



Για τη μεταφορική κίνηση του Σ_1 ισχύει η Θεμελιώδης Εξίσωση της Μηχανικής:

$$\Sigma F_1 = m\alpha \Rightarrow w - T = m\alpha \Rightarrow T = mg - m\alpha \quad (1)$$

Για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας Σ ισχύει ο Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση

$$\Sigma \tau = I a_\gamma \Rightarrow T' R = I a_\gamma \Rightarrow T R = I a_\gamma$$

και με αντικατάσταση της T από τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$(mg - m\alpha)R = Ia_\gamma \Rightarrow mgR - mR\alpha = Ia_\gamma \quad (2)$$

Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία, η επιτόχια επιτάχυνση $a_\gamma R$ των σημείων της περιφέρειάς της είναι ίση κατά μέτρο με την επιτάχυνση α του Σ_1 : $\alpha = a_\gamma R$.

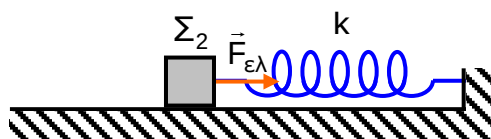
Με αντικατάσταση στην (2) έχουμε:

$$mgR - mR\alpha = Ia_\gamma \Rightarrow mgR - mR^2 a_\gamma = Ia_\gamma \Rightarrow a_\gamma = \frac{mgR}{I + mR^2} \Rightarrow$$

$$a_\gamma = \frac{1\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot 0,1\text{m}}{0,01\text{kgm}^2 + 1\text{kg}(0,1\text{m})^2} \Rightarrow a_\gamma = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Β2) Μόλις κόψουμε το νήμα, το Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή

$$\text{συχνότητα } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100\text{N/m}}{1\text{kg}}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$



Ψάχνουμε πόσο θα έχει κατέβει το σώμα Σ_1 όταν η τροχαλία περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία, το σώμα Σ_1 θα έχει κατέβει κατά h που είναι ίσο με το μήκος Δs του σχοινιού που ξετυλίχτηκε, $h = \Delta s = R\theta$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Έργου - Ενέργειας για την περιστροφή της τροχαλίας. Θεωρούμε ως αρχική θέση τη θέση στην οποία βρίσκεται το σώμα τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και ως τελική τη θέση για την οποία το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας γίνεται $\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Το μοναδικό έργο είναι αυτό της τάσης του νήματος. Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T'} \Rightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 - 0 = T' \cdot R \cdot \theta \Rightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 = T' \cdot h \quad (3)$$

Το T' βρίσκεται με αντικατάσταση της τιμής $a_\gamma = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ στη σχέση $TR = Ia_\gamma$, έχουμε:

$$T \cdot 0,1\text{m} = 0,01\text{kgm}^2 \cdot 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow T = T' = 5 \text{ N} .$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) παίρνουμε

$$\frac{1}{2} \cdot 0,01\text{kgm}^2 \cdot (10 \frac{\text{rad}}{\text{s}})^2 = 5\text{N} \cdot h \Rightarrow h = 0,1 \text{ m}$$

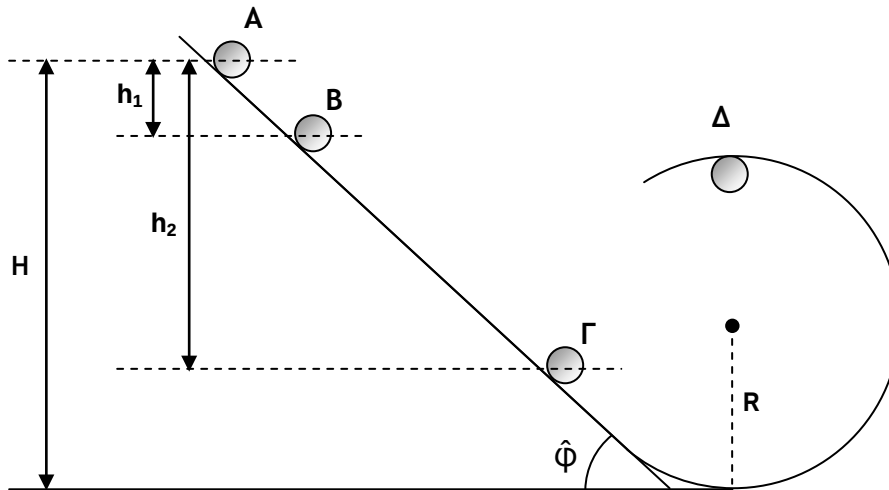
β3) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας $\frac{dK}{dt}$ τη χρονική στιγμή

t_1 δίνεται από τον τύπο: $\frac{dK}{dt} = \Sigma \tau \cdot \omega$. Με αντικατάσταση, έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma \tau \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK}{dt} = T' \cdot R \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 5\text{N} \cdot 0,1\text{m} \cdot 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 5 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Πρόβλημα 5.

Μια συμπαγής ομογενής σφαίρα μάζας $m = 0,7 \text{ kg}$ και ακτίνας r , αφήνεται από το σημείο Α ενός πλάγιου επιπέδου που σχηματίζει γωνία $\hat{\phi}$ με το οριζόντιο δάπεδο. Το σημείο Α βρίσκεται σε ύψος $H = 84 \text{ cm}$ από το οριζόντιο δάπεδο. Η σφαίρα καθώς κατέρχεται κυλιόμενη διέρχεται από τα σημεία Β και Γ που απέχουν από το σημείο Α κατακόρυφη απόσταση h_1 και h_2 αντίστοιχα, με $h_2 = 4h_1$. Μόλις η σφαίρα φτάσει στη βάση του πλάγιου επιπέδου, μπαίνει σε κυκλική στεφάνη ακτίνας $R = 28 \text{ cm}$. Η σφαίρα κυλιόμενη εντός της κυκλικής στεφάνης εκτελεί ανακύκλωση.



α) Να βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας, α_{cm} , της σφαίρας κατά την κίνησή της στο πλάγιο επίπεδο.

β) Να βρείτε το λόγο των μέτρων $\frac{L_B}{L_\Gamma}$ των στροφορμών της σφαίρας στις θέσεις Β και Γ.

γ) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας v_{cm} στο ανώτερο σημείο της στεφάνης (σημείο Δ στο σχήμα).

δ) Να βρείτε το μέτρο της δύναμης N που δέχεται η σφαίρα από τη στεφάνη στο σημείο Δ.

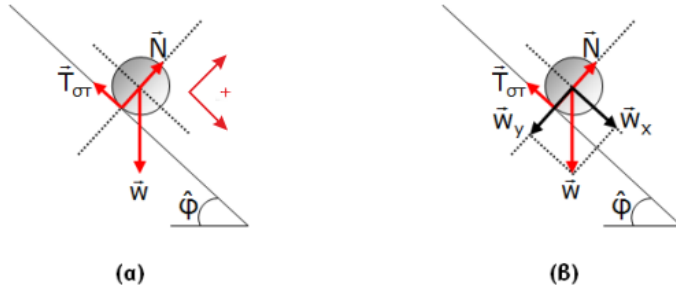
Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της: $I_{\text{cm}} = \frac{2}{5}mr^2$, $\eta\mu\hat{\phi} = 0,7$. Η ακτίνα της σφαίρας r είναι πολύ μικρή σε σχέση

με την ακτίνα R της στεφάνης, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

Λύση

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα.

Στο σχήμα (α) φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα καθώς κατέρχεται στο πλάγιο επίπεδο. Στο σχήμα (β) έχει αναλυθεί το βάρος $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες:



Για τη μεταφορική κίνηση της σφαίρας ισχύει η Θεμελιώδης Εξίσωση της Μηχανικής:

$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_{cm} \Rightarrow w_x - T_{\sigma\tau} = m\alpha_{cm} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = mg\eta\mu\phi - m\alpha_{cm} \quad (1)$$

Για τη στροφική κίνηση της σφαίρας ισχύει ο Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κίνησης:

$$\Sigma \vec{\tau} = I\vec{a}_\gamma \Rightarrow T_{\sigma\tau} \cdot r = \frac{2}{5}mr^2a_\gamma \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{2}{5}mra_\gamma$$

Επειδή η σφαίρα κατέρχεται κυλιόμενη $\alpha_{cm} = a_\gamma r$, οπότε η τελευταία σχέση γίνεται $T_{\sigma\tau} = \frac{2}{5}m\alpha_{cm}$ (2)

Με αντικατάσταση της (2) στην (1) έχουμε:

$$T_{\sigma\tau} = mg\eta\mu\phi - m\alpha_{cm} \Rightarrow \frac{2}{5}m\alpha_{cm} + m\alpha_{cm} = mg\eta\mu\phi \Rightarrow \frac{7}{5}\alpha_{cm} = g\eta\mu\phi \Rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = \frac{5}{7} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,7 \Rightarrow \alpha_{cm} = 5 \frac{m}{s^2}$$

β) Για το λόγο $\frac{L_B}{L_\Gamma}$ των δύο στροφορμών ισχύει:

$$\frac{L_B}{L_\Gamma} = \frac{I\omega_B}{I\omega_\Gamma} \Rightarrow \frac{L_B}{L_\Gamma} = \frac{\omega_B}{\omega_\Gamma} \quad (3)$$

Τα ω_B , ω_Γ θα βρεθούν από τη διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ της θέσης Α και των θέσεων Β, Γ αντίστοιχα. Επειδή η σφαίρα κατέρχεται κυλιόμενη ($v_{cm} = \omega r$), η κινητική της ενέργεια μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$K = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} (m r^2 \omega^2 + \frac{2}{5} m r^2 \omega^2) \Rightarrow K = \frac{1}{2} m (r^2 \omega^2 + \frac{2}{5} r^2 \omega^2) \Rightarrow$$

$$K = \frac{7}{10} m r^2 \omega^2 \text{ ή } K = \frac{7}{10} m v_{cm}^2 \quad (4), (5)$$

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Β και γράφοντας την κινητική ενέργεια με τη μορφή της σχέσης (4) έχουμε (επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από το σημείο Β):

$$U_B + K_B = U_A + K_A \Rightarrow 0 + \frac{7}{10} m r^2 \omega_B^2 = m g h_1 \Rightarrow \omega_B^2 = \frac{10}{7} \frac{g}{r^2} h_1 \Rightarrow \omega_B = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{10g}{7} h_1}$$

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Γ έχουμε (επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από το σημείο Γ):

$$U_\Gamma + K_\Gamma = U_A + K_A \Rightarrow 0 + \frac{7}{10} m r^2 \omega_\Gamma^2 = m g h_2 \Rightarrow \omega_\Gamma^2 = \frac{10}{7} \frac{g}{r^2} h_2 \Rightarrow \omega_\Gamma = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{10g}{7} h_2}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) παίρνουμε:

$$\frac{L_B}{L_\Gamma} = \frac{\omega_B}{\omega_\Gamma} = \frac{\frac{1}{r} \sqrt{\frac{10g}{7} h_1}}{\frac{1}{r} \sqrt{\frac{10g}{7} h_2}} \Rightarrow \frac{L_B}{L_\Gamma} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{L_B}{L_\Gamma} = \frac{1}{2}$$

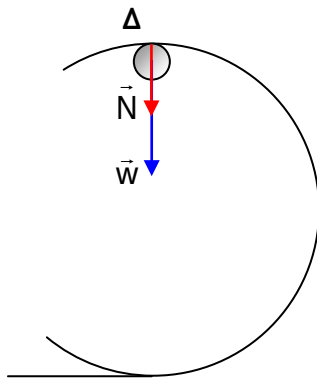
γ) Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας, θέτοντας ως αρχική τη θέση Α και ως τελική τη θέση Δ. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $r \ll R$ και γράφοντας την κινητική ενέργεια με τη μορφή της σχέσης (5), έχουμε:

$$U_\Delta + K_\Delta = U_A + K_A \Rightarrow m g 2R + \frac{7}{10} m v_{cm}^2 = m g H + 0 \Rightarrow v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7} g (H - 2R)} \Rightarrow$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot (0,84m - 0,56m)} \Rightarrow v_{cm} = \sqrt{\frac{100}{7} \cdot 0,28 \frac{m}{s}} \Rightarrow v_{cm} = 2 \frac{m}{s}$$

δ) Η σφαίρα φτάνοντας στο ανώτερο σημείο Δ της κυκλικής διαδρομής, δέχεται συνισταμένη (κεντρομόλο) δύναμη στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\Sigma F (= F_{\text{κεντρ}}) = \frac{mv_{\text{cm}}^2}{R}$$



Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στο σημείο Δ είναι το βάρος της $\vec{w}$ και η δύναμη από τη στεφάνη $\vec{N}$. Με αντικατάσταση έχουμε:

$$mg + N = \frac{mv_{\text{cm}}^2}{R} \Rightarrow N = \frac{mv_{\text{cm}}^2}{R} - mg = \frac{0,7\text{kg} \cdot (2\text{m/s})^2}{0,28\text{m}} - 0,7\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \Rightarrow$$

$$N = 3\text{N}$$

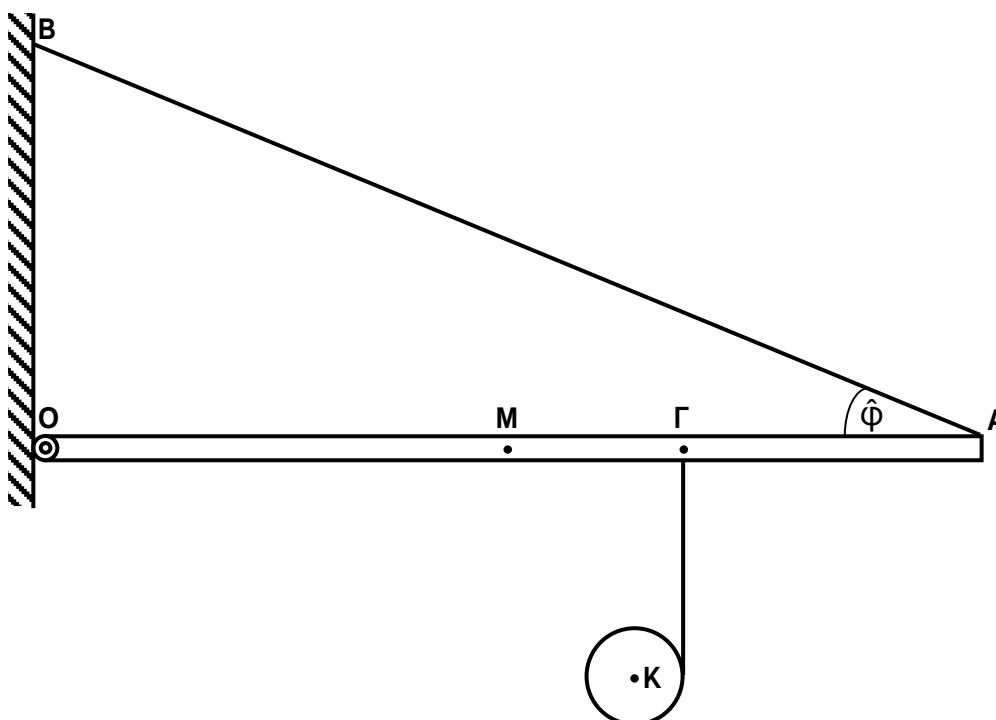
Πρόβλημα 6.

Η ομογενής ράβδος ΟΑ του σχήματος έχει μάζα $M = 4 \text{ kg}$ και μήκος $L = 2 \text{ m}$. Η ράβδος ισορροπεί σε οριζόντια θέση με τη βοήθεια άρθρωσης στο άκρο Ο και νήματος που είναι δεμένο στο άκρο Α και σχηματίζει γωνία 30° με τη ράβδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Από ένα σημείο Γ της ράβδου έχει δεθεί μέσω αβαρούς σχοινιού ένα γιο-γιο μάζας $m = 12 \text{ kg}$, ο κύλινδρος του οποίου έχει ακτίνα $R = 0,1 \text{ m}$. Το γιο-γιο ελευθερώνεται και κατέρχεται διαγράφοντας κατακόρυφη τροχιά, χωρίς ποτέ το σχοινί να γλιστρά. Καθώς το γιο-γιο κατέρχεται το νήμα ΑΒ ασκεί στη ράβδο δύναμη μέτρου $T = 100 \text{ N}$. Να βρείτε:

- το μέτρο της επιτάχυνσης a_{cm} του κέντρου μάζας Κ του γιο-γιο.
- το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του γιο-γιο ως προς τον ελεύθερο άξονα περιστροφής του, που περνά από το κέντρο του Κ.
- την απόσταση (ΟΓ).
- τη δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο (μέτρο και διεύθυνση ως προς τον οριζόντιο άξονα).

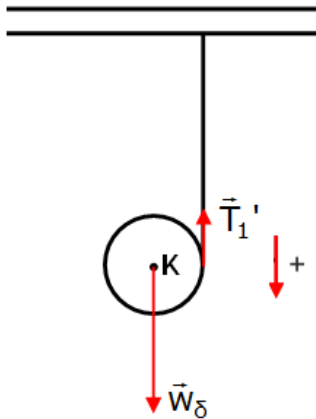
Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του γιο-γιο ως προς τον ελεύθερο άξονα περιστροφής του

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} m R^2, \quad g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Λύση

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο γιο-γιο:



Εφαρμόζουμε τη Θεμελιώδη Εξίσωση της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του γιο-γιο:

$$\Sigma \vec{F}_y = m\vec{a}_{cm} \Rightarrow w_\delta - T_1' = m\alpha_{cm} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση του γιο-γιο:

$$\Sigma \tau = I_{cm} a_\gamma \Rightarrow T_1' \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 a_\gamma \Rightarrow T_1' = \frac{1}{2} m R a_\gamma \quad (2)$$

Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στο γιο-γιο, το τόξο ds κατά το οποίο έχει στραφεί η περιφέρειά του σε χρόνο dt , θα είναι ίσο με την απόσταση dy κατά την οποία έχει ξετυλιχθεί το νήμα, άρα και ίσο με την απόσταση dy κατά την οποία έχει κατέβει το γιο-γιο. Επομένως:

$$dy = ds = d\theta \cdot R \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot R \Rightarrow v_{cm} = \omega \cdot R \Rightarrow$$

$$\frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot R \Rightarrow \alpha_{cm} = a_\gamma \cdot R$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση $\alpha_{cm} = a_\gamma \cdot R$ στη σχέση (2) έχουμε:

$$T_1' = \frac{1}{2} m \alpha_{cm} \quad (3)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) της T_1' από τη σχέση (3) έχουμε:

$$W_{\delta} - \frac{1}{2} m \alpha_{cm} = m \alpha_{cm} \Rightarrow \frac{3}{2} m \alpha_{cm} = mg \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2}{3} g \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{20}{3} \frac{m}{s^2}$$

β) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ισούται με τη συνολική ροπή που ασκείται στο γιο-γιο. Επειδή το βάρος ασκείται στον ελεύθερο άξονα περιστροφής, μόνο η τάση του νήματος ασκεί ροπή στο γιο-γιο:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau \Rightarrow \frac{dL}{dt} = T_1' \cdot R \quad (4)$$

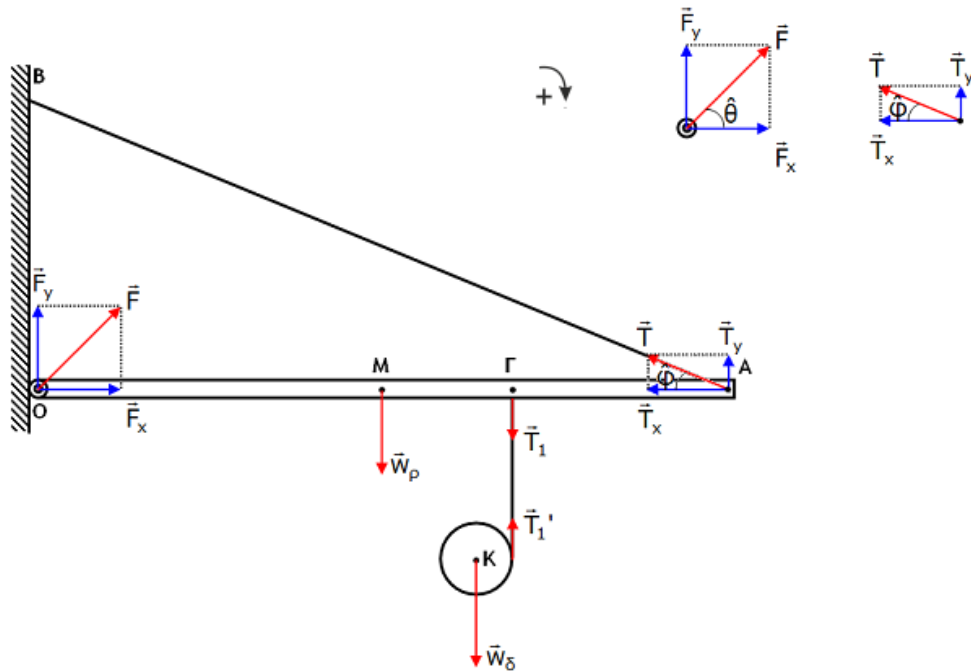
Το μέτρο της T_1' υπολογίζεται από τη σχέση (3) με αντικατάσταση του α_{cm} .

$$\text{Έχουμε } T_1' = \frac{1}{2} 12 \text{ kg} \cdot \frac{20}{3} \frac{m}{s^2} \Rightarrow T_1' = 40 \text{ N}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (4) παίρνουμε

$$\frac{dL}{dt} = 40 \text{ N} \cdot 0,1 \text{ m} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 4 \frac{\text{kgm}^2}{s^2}$$

γ) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο.



Από την ανάλυση της τάσης του νήματος $\vec{T}$ έχουμε:

$$T_x = T \cdot \sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow T_x = 100\text{N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow T_x = 50\sqrt{3}\text{ N}$$

$$T_y = T \cdot \eta\mu\phi \Rightarrow T_y = 100\text{N} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow T_y = 50\text{ N}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ότι: $\Sigma \vec{\tau} = \vec{0}$. Παίρνοντας ροπές ως προς το σημείο O, έχουμε:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \tau_w + \tau_{T_1} = \tau_{T_y} \Rightarrow w_p \cdot \frac{L}{2} + T_1 \cdot (OG) = T_y \cdot L \quad (5)$$

Το μέτρο του βάρους της ράβδου είναι: $w_p = Mg \Rightarrow w_p = 40\text{ N}$

Το μέτρο της T_1 είναι ίδιο με το μέτρο της T_1' , οπότε με αντικατάσταση στη σχέση (5) παίρνουμε:

$$40\text{N} \cdot \frac{2}{2}\text{m} + 40\text{N} \cdot (OG) = 50\text{N} \cdot 2\text{m} \Rightarrow (OG) = 1,5\text{ m}$$

δ) Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ότι:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow F_x - T_x = 0 \Rightarrow F_x = 50\sqrt{3} \text{ N}$$

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow F_y + T_y - w_p - T_1 = 0 \Rightarrow F_y + 50\text{N} - 40\text{N} - 40\text{N} = 0 \Rightarrow F_y = 30 \text{ N}$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

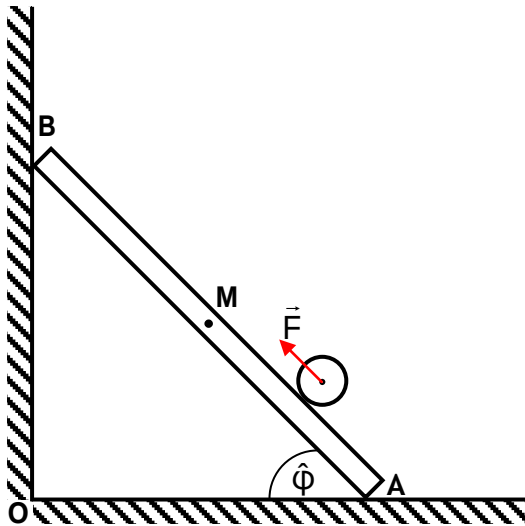
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = \sqrt{8400} \text{ N} \Rightarrow F = 20\sqrt{21} \text{ N}$$

Για τη διεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζουμε την $\varepsilon\varphi\theta$:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

Πρόβλημα 7.

Η λεπτή ομογενής δοκός AB του σχήματος μήκους $L = 7,5\sqrt{2} \text{ m}$ και μάζας $M = 20 \text{ kg}$ ακουμπά σε λείο κατακόρυφο τοίχο OB και ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία $\hat{\phi} = 45^\circ$ με το οριζόντιο δάπεδο. Ένας ομογενής, λεπτός δίσκος μάζας $m = 1 \text{ kg}$ και ακτίνας R κυλίνεται (χωρίς να ολισθαίνει) κατά μήκος της δοκού προς το άκρο B, υπό την επίδραση δύναμης μέτρου $F = 20\sqrt{2} \text{ N}$, παράλληλης στη δοκό, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Να βρείτε:

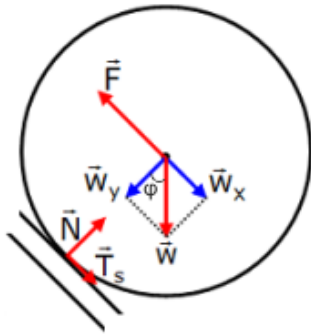
- το μέτρο της επιτάχυνσης a_{cm} του κέντρου μάζας του δίσκου.
- το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας v_{cm} του δίσκου τη στιγμή που φτάνει στο ανώτερο σημείο B της δοκού, αν ο δίσκος ξεκίνησε να κινείται από τη βάση A χωρίς ταχύτητα.
- Το μέτρο και τη διεύθυνση της δύναμης $\vec{A}$ που ασκεί ο δίσκος στη ράβδο.
- Τον ελάχιστο συντελεστή οριακής στατικής τριβής μεταξύ δοκού και δαπέδου ώστε ο δίσκος να φτάσει στο άκρο B της δοκού, χωρίς η δοκός να ολισθήσει στο δάπεδο.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το κέντρο μάζας του $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}mR^2$,

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Λύση

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο.



Για τις συνιστώσες w_x και w_y του βάρους του δίσκου έχουμε:

$$w_x = w \eta \mu \varphi \Rightarrow w_x = mg \eta \mu 45^\circ \Rightarrow w_x = 5\sqrt{2} \text{ N}$$

$$w_y = w \sigma \upsilon \nu \varphi \Rightarrow w_y = mg \sigma \upsilon \nu 45^\circ \Rightarrow w_y = 5\sqrt{2} \text{ N}$$

Εφαρμόζουμε τη Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του δίσκου:

$$\Sigma \vec{F}_x = m \vec{a}_{cm} \Rightarrow F - w_x - T_s = m \alpha_{cm} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση του δίσκου ως προς τον ελεύθερο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του:

$$\Sigma \tau = I_{cm} a_\gamma \Rightarrow T_s \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 a_\gamma \Rightarrow T_s = \frac{1}{2} m R a_\gamma \quad (2)$$

Επειδή ο δίσκος εκτελεί κύλιση (χωρίς ολίσθηση) ισχύει: $\alpha_{cm} = a_\gamma \cdot R$

Με αντικατάσταση της τελευταίας σχέσης στη σχέση (2) προκύπτει

$$T_s = \frac{1}{2} m \alpha_{cm} \quad (3)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) των F , T_s και w_x υπολογίζουμε το α_{cm} .

$$F - w_x - T_s = m \alpha_{cm} \Rightarrow 20\sqrt{2} \text{ N} - 5\sqrt{2} \text{ N} - \frac{1}{2} m \alpha_{cm} = m \alpha_{cm} \Rightarrow 15\sqrt{2} \text{ N} = \frac{3}{2} m \alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = 10\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

β) Ο δίσκος ανέρχεται με σταθερή επιτάχυνση, άρα οι εξισώσεις της κινηματικής για τη μεταφορική κίνηση γράφονται:

$$v_{cm} = \alpha_{cm} t, \quad L = \frac{1}{2} \alpha_{cm} t^2$$

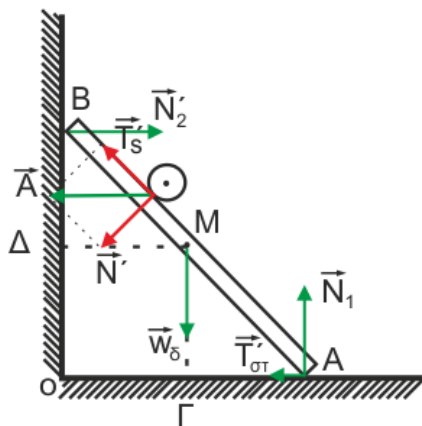
Λύνοντας την πρώτη σχέση ως προς το χρόνο και αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε:

$$L = \frac{1}{2} \alpha_{cm} \left(\frac{v_{cm}}{\alpha_{cm}} \right)^2 \Rightarrow L = \frac{v_{cm}^2}{2 \alpha_{cm}} \Rightarrow v_{cm} = \sqrt{2L \alpha_{cm}}$$

Με αντικατάσταση των L , α_{cm} βρίσκουμε:

$$v_{cm} = \sqrt{2 \cdot 7,5\sqrt{2} \text{ m} \cdot 10\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow v_{cm} = 10\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Ο δίσκος ασκεί στη δοκό τις δυνάμεις T_s' και N' . Η T_s' έχει ίδιο μέτρο με την T_s (δράση - αντίδραση) και η N' με την N (επίσης δράση-αντίδραση).



Από τη σχέση (3) με αντικατάσταση υπολογίζουμε την T_s , έχουμε:

$$T_s = \frac{1}{2} m \alpha_{cm} = \frac{1}{2} 1 \text{ kg} \cdot 10\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow T_s = 5\sqrt{2} \text{ N}$$

$$\text{Άρα } T_s' = 5\sqrt{2} \text{ N} \quad (4)$$

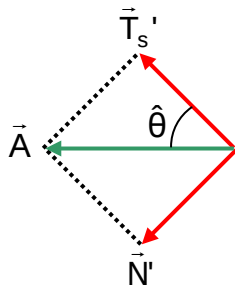
Για τον άξονα τον κάθετο στην κίνηση του δίσκου (άξονας $y'y$) ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow N = w_y \Rightarrow N = 5\sqrt{2} \text{ N}$$

$$\text{Άρα } N' = 5\sqrt{2} \text{ N} \quad (5)$$

Από τις (4) και (5) και επειδή οι δυνάμεις $\vec{T}_s'$ και $\vec{N}'$ είναι κάθετες, με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε:

$$A = \sqrt{N'^2 + T_s'^2} \Rightarrow A = \sqrt{(5\sqrt{2}N)^2 + (5\sqrt{2}N)^2} \Rightarrow A = 10 \text{ N}$$

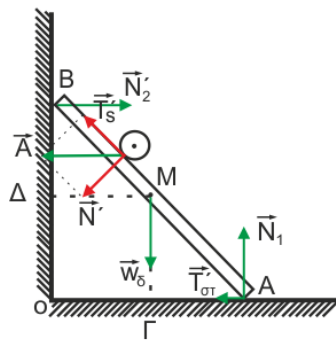


Από το σχήμα φαίνεται ότι:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{N'}{T_s'} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = 1 \Rightarrow \hat{\theta} = 45^\circ$$

Άρα η δύναμη $\vec{A}$ είναι οριζόντια δύναμη, παράλληλη προς το δάπεδο.

δ)



Εφαρμόζουμε τις συνθήκες ισορροπίας για τη δοκό:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow N_1 = w_\delta \Rightarrow N_1 = Mg \Rightarrow N_1 = 200 \text{ N}$$

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow N_2 = T_{\sigma x} + A \Rightarrow N_2 = T_{\sigma x} + 10(\text{SI}) \quad (6)$$

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow N_2 \cdot (OB) = w_{\delta} \cdot (AG) + A \cdot (OB) \Rightarrow$$

$$N_2 \cdot L \eta \mu \varphi = Mg \cdot \frac{L}{2} \sigma \upsilon \nu \varphi + A \cdot L \eta \mu \varphi \Rightarrow$$

$$N_2 = \frac{Mg}{2} + A = \frac{200N}{2} + 10N \Rightarrow N_2 = 110N$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (6) βρίσκουμε $T_{\sigma\tau} = 100N$

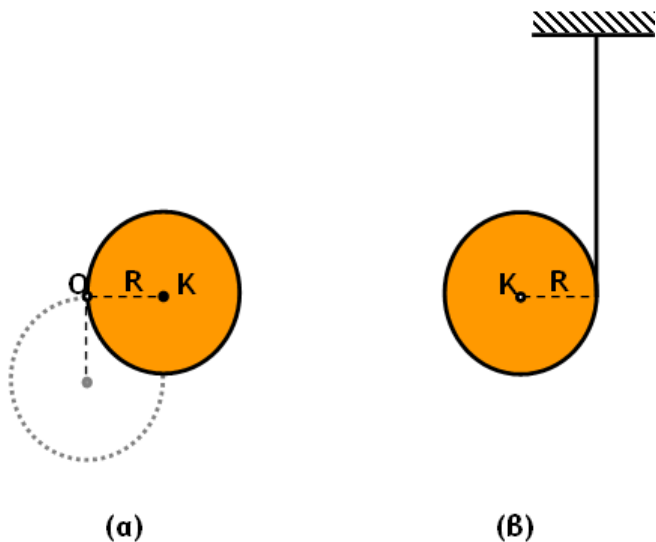
Για να μην ολισθήσει η δοκός πρέπει:

$$T_{\sigma\tau} \leq T_{\sigma\tau(max)} \Rightarrow T_{\sigma\tau} \leq \mu N_1 \Rightarrow 100N \leq \mu \cdot 200N \Rightarrow \mu \geq 0,5$$

Άρα $\mu_{s,min} = 0,5$

Πρόβλημα 8.

Ο λεπτός ομογενής δίσκος του σχήματος (α) έχει μάζα $M = 9 \text{ kg}$, ακτίνα $R = \frac{1}{30} \text{ m}$ και μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που διέρχεται από το σημείο O της περιφέρειάς του.



Αρχικά ο δίσκος βρίσκεται σε τέτοια θέση, ώστε η ακτίνα OK που συνδέει το σημείο O με το κέντρο μάζας K του δίσκου (που συμπίπτει με το κέντρο του δίσκου), να είναι οριζόντια. Από αυτή τη θέση αφήνουμε το δίσκο να στραφεί. Η γωνιακή επιτάχυνση με την οποία ο δίσκος ξεκινά τη στροφική του κίνηση έχει μέτρο $a_\gamma = 200 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Να βρείτε:

α) Τη ροπή αδράνειας $I_{(O)}$ του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του που διέρχεται από το σημείο O .

β) Τυλίγουμε πολλές φορές ένα αβαρές, μη εκτατό νήμα γύρω από έναν ίδιο δίσκο και την ελεύθερη άκρη του νήματος τη στερεώνουμε στην οροφή, σχηματίζοντας ένα γιο-γιο, όπως φαίνεται στο σχήμα (β). Αφήνουμε ελεύθερο το δίσκο και αυτός ξεκινά να κατέρχεται με το νήμα διαρκώς κατακόρυφο και χωρίς αυτό να γλιστρά ως προς το δίσκο.

γ) Να βρείτε τη ροπή αδράνειας I_{cm} του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του.

δ) Να δείξετε ότι η τάση του νήματος που ασκείται στο δίσκο δε μεταβάλλει την συνολική κινητική του ενέργεια.

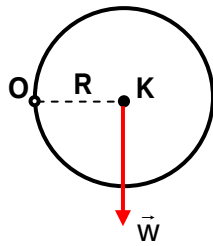
ε) Να βρείτε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω του δίσκου όταν έχει ξετυλιχθεί νήμα με μήκος ίσο με την ακτίνα του δίσκου.

στ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της στροφικής κινητικής ενέργειας του δίσκου όταν έχει ξετυλιχθεί νήμα με μήκος ίσο με την ακτίνα του δίσκου

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Επίσης δεν θεωρείται γνωστός ο τύπος της ροπής αδράνειας ομογενή δίσκου για άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

Λύση

α) Στο σχήμα φαίνεται η μόνη δύναμη που ασκεί ροπή στο δίσκο:



Από το Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση έχουμε :

$$\Sigma \vec{\tau} = I_{(O)} \vec{a}_\gamma \Rightarrow w \cdot R = I_{(O)} \cdot a_\gamma \Rightarrow I_{(O)} = \frac{MgR}{a_\gamma} \Rightarrow$$

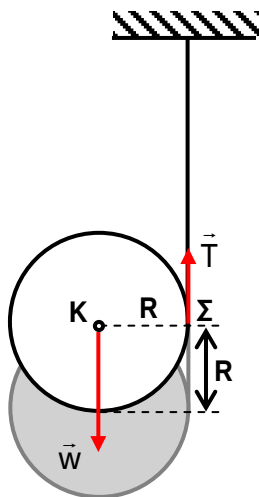
$$I_{(O)} = \frac{9\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{30} \text{m}}{200 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}} \Rightarrow I_{(O)} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{kgm}^2$$

β) Από το Θεώρημα Steiner έχουμε:

$$I_{(O)} = I_{\text{cm}} + MR^2 \Rightarrow I_{\text{cm}} = I_{(O)} - MR^2 \Rightarrow I_{\text{cm}} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{kgm}^2 - 9\text{kg} \cdot \left(\frac{1}{30} \text{m}\right)^2 \Rightarrow$$

$$I_{\text{cm}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{kgm}^2$$

γ) Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο, $\vec{w}$ και $\vec{T}$.



Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στο δίσκο, το τόξο ds κατά το οποίο έχει στραφεί η περιφέρειά του σε χρόνο dt , θα είναι ίσο με την απόσταση dy κατά την οποία έχει ξετυλιχθεί το νήμα, άρα και με την απόσταση dy κατά την οποία έχει κατέβει ο δίσκος. Επομένως:

$$dy = ds = d\theta \cdot R \Rightarrow y_{cm} = \theta \cdot R \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot R \Rightarrow v_{cm} = \omega \cdot R$$

Για την ταχύτητα του σημείου Σ, στην περιφέρεια της τροχαλίας, στο οποίο ασκείται η τάση $\vec{T}$ του νήματος έχουμε:

$$\vec{v}_{(\Sigma)} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{στρ}$$

και επειδή: $v_{cm} = \omega \cdot R = v_{στρ}$ και η μεταφορική ταχύτητα είναι αντίθετη από τη στροφική, θα ισχύει:

$$\vec{v}_{(\Sigma)} = \vec{0}$$

Άρα, το σημείο Σ είναι στιγμιαία ακίνητο.

Δηλαδή, η τάση $\vec{T}$ του νήματος ασκείται σε στιγμιαία ακίνητο σημείο. Άρα το έργο της W_T είναι μηδέν με συνέπεια να μην επηρεάζει τη συνολική κινητική ενέργεια του δίσκου (σύμφωνα με το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας - έργου).

δ) Για τον υπολογισμό της γωνιακής ταχύτητας ω του δίσκου όταν έχει ξετυλιχθεί νήμα με μήκος ίσο με την ακτίνα του δίσκου, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Έργου - Ενέργειας.

Θέτοντας ως αρχική τη θέση στην οποία αφήνουμε το δίσκο και ως τελική τη θέση στην οποία έχει ξετυλιχθεί νήμα με μήκος ίσο με την ακτίνα του δίσκου και με δεδομένο ότι η μόνη δύναμη που προσφέρει έργο είναι το βάρος $\vec{w}$ του δίσκου, έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\text{ολ}} \Rightarrow K_{\text{τελ}} - 0 = W_w \Rightarrow \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 = MgR \Rightarrow$$

$$I_{\text{cm}} \omega^2 + M \omega^2 R^2 = 2MgR \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2MgR}{I_{\text{cm}} + MR^2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 9\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{30} \text{m}}{5 \cdot 10^{-3} \text{kgm}^2 + 9\text{kg} \cdot \left(\frac{1}{30} \text{m}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\epsilon) \frac{dK_{\text{στρ}}}{dt} = \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt}$$

Όμως η μόνη ροπή που προκαλείται στο δίσκο και μεταβάλλει τη στροφική του κινητική ενέργεια είναι από την τάση του νήματος T , καθώς η ροπή του βάρους ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ίση με μηδέν. Έτσι παίρνουμε:

$$\frac{dK_{\text{στρ}}}{dt} = \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt} = \frac{TR d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dK_{\text{στρ}}}{dt} = TR\omega \quad (1)$$

Στην τελευταία σχέση ο μόνος άγνωστος είναι η τάση του νήματος T η οποία μπορεί να υπολογιστεί από το θεώρημα έργου ενέργειας μόνο για τη στροφική κίνηση του δίσκου μεταξύ των δύο θέσεων.

$$K_{\text{στρ(τελ)}} - K_{\text{στρ(αρχ)}} = W_{\Sigma\tau} \Rightarrow K_{\text{στρ(τελ)}} - 0 = TR\theta$$

Όμως σύμφωνα με την εκφώνηση $R\theta = R$, άρα η τελευταία σχέση γίνεται:

$$K_{\text{στρ(τελ)}} - 0 = TR \Rightarrow \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2 = TR \Rightarrow T = \frac{I_{\text{cm}} \omega^2}{2R} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{kgm}^2 \cdot \left(20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{30} \text{m}} \Rightarrow$$

$$T = 30\text{N}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) βρίσκουμε:

$$\frac{dK_{\text{στρ}}}{dt} = TR\omega = 30\text{N} \cdot \frac{1}{30}\text{m} \cdot 20\frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dK_{\text{στρ}}}{dt} = 20\frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 9/5/2012