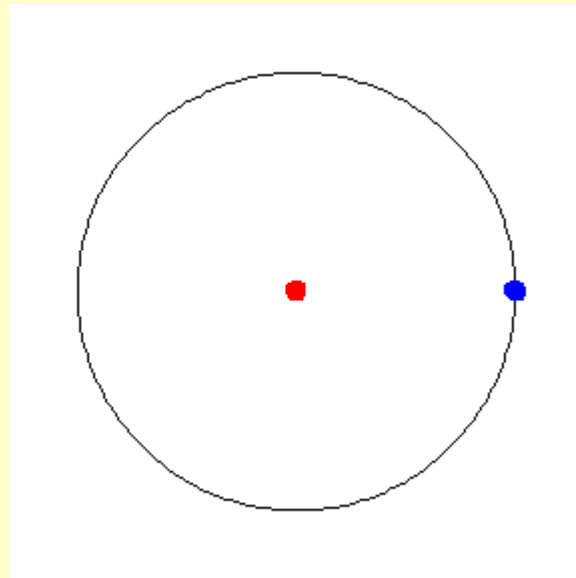


Κυκλική Ομαλή Κίνηση



Η **κυκλική ομαλή** είναι μια **περιοδική κίνηση**, επειδή επαναλαμβάνεται κατά τακτά χρονικά διαστήματα, όπως η κίνηση που κάνει η άκρη του δείκτη ενός ρολογιού.



Κάθε **περιοδική κίνηση** **χαρακτηρίζεται** από τα **φυσικά μεγέθη**

- **Περίοδος T** μιας κυκλικής κίνησης λέγεται ο **χρόνος** που χρειάζεται το σημειακό αντικείμενο για να πραγματοποιήσει μια πλήρη περιφορά.

$$T \rightarrow s$$

- **Συχνότητα f** μιας κυκλικής κίνησης λέγεται το φυσικό μέγεθος που εκφράζεται με το πηλίκο του αριθμού **N** των στροφών που εκτελεί το σημειακό αντικείμενο προς το χρόνο **t** μέσα στον οποίο πραγματοποιήθηκαν.

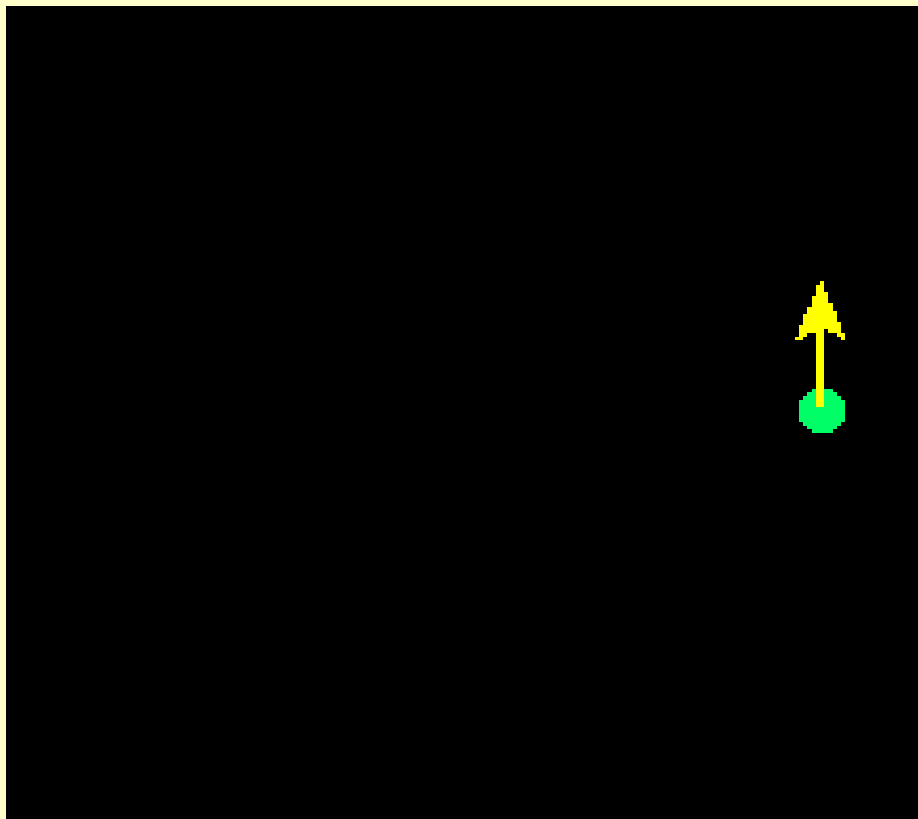
$$f = \frac{N}{t}$$

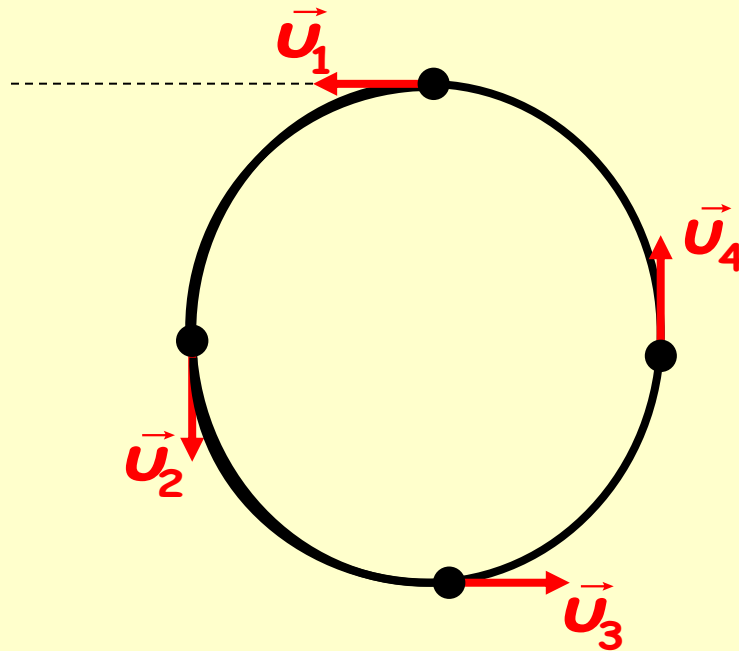
$$f \rightarrow 1 \frac{1}{s} = s^{-1} = 1 \text{ Hz}$$

Η περίοδος και η συχνότητα συνδέονται με τη σχέση

$$f = \frac{1}{T}$$

Ποιο φυσικό μέγεθος αλλάζει στην κυκλική κίνηση:

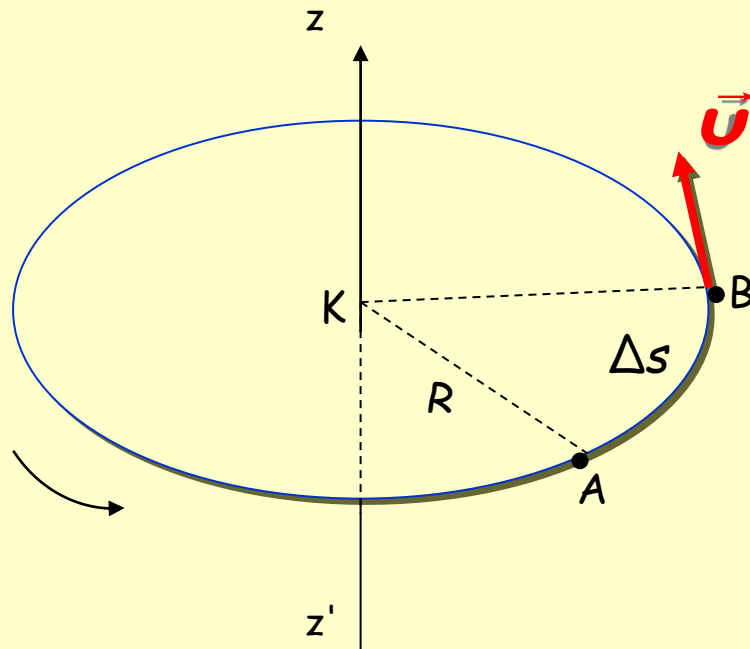




Είναι φανερό ότι **αλλάζει η κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας.**

**Η Γραμμική ταχύτητα
στην
Κυκλική κίνηση.**

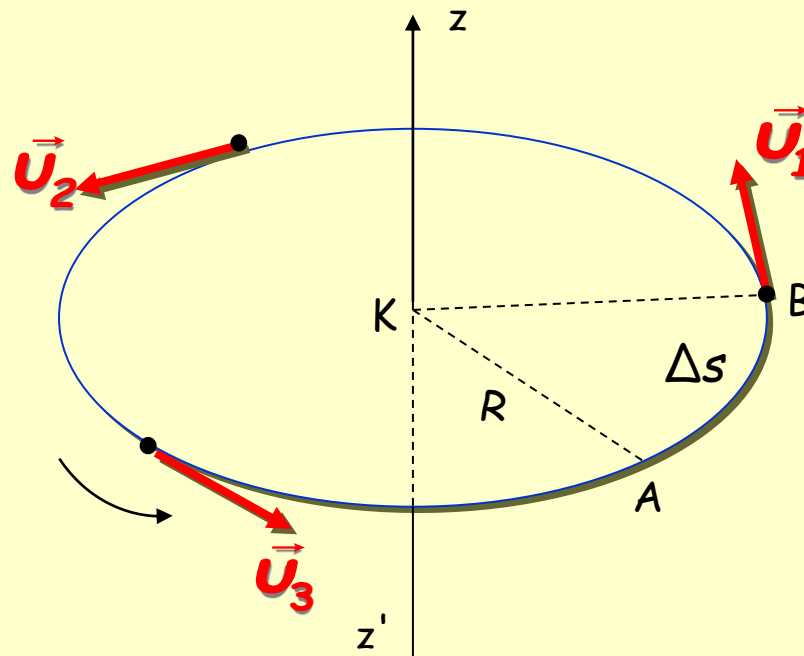




$$u = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

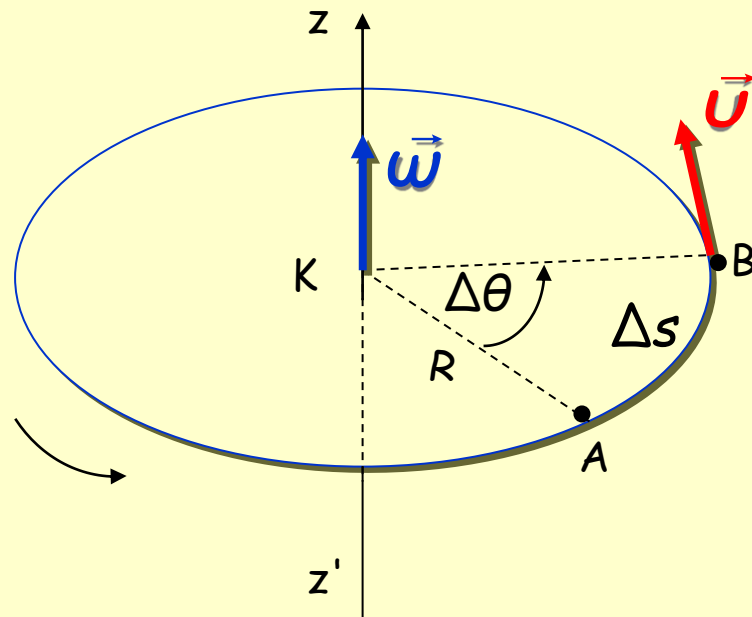
Ονομάζουμε **γραμμική ταχύτητα** $\vec{u}$ ενός σημειακού αντικειμένου που κινείται σε καμπύλη (κυκλική) τροχιά, ένα διάνυσμα που έχει μέτρο ίσο με το πηλίκο του μήκους του τόξου Δs που διανύει το υλικό σημείο σε χρόνο Δt προς τον χρόνο αυτό.

Το **διάνυσμα** της γραμμικής ταχύτητας **εφάπτεται στην κυκλική τροχιά**, στο σημείο που κάθε χρονική στιγμή βρίσκεται το κινητό.



Γωνιακή ταχύτητα





$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

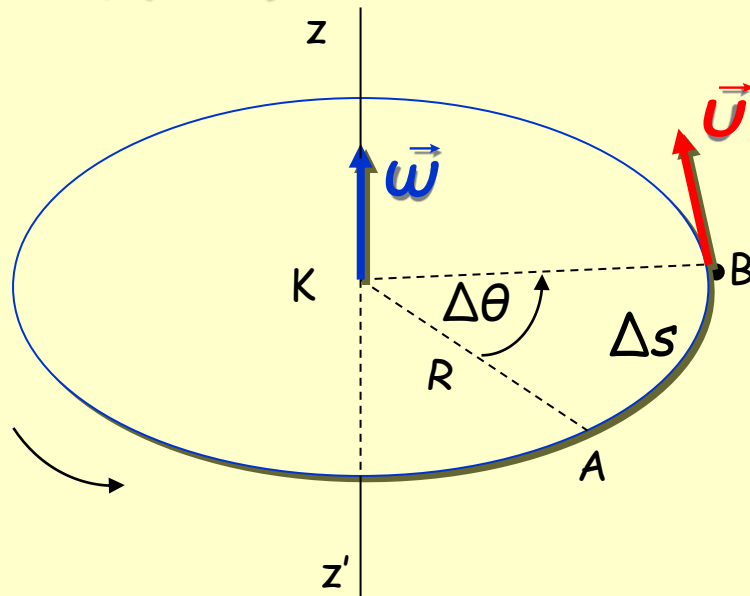
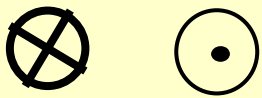
$$\omega \Rightarrow \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ονομάζουμε **γωνιακή ταχύτητα** $\vec{\omega}$ ενός σημειακού αντικειμένου που κινείται σε κυκλική τροχιά, ένα διάνυσμα που έχει μέτρο ίσο με το πηλίκο της γωνίας $\Delta\theta$ (εκφρασμένη σε rad) που διαγράφει το υλικό σημείο σε χρόνο Δt προς τον χρόνο αυτό.

Το **διάνυσμα** της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ έχει

- **αρχή**, το κέντρο της κυκλικής τροχιάς,
- **διεύθυνση** κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς
- **φορά**, σύμφωνα με τη φορά της κυκλικής κίνησης
(Κανόνας δεξιού χεριού).

κατεύθυνση $\vec{\omega}$



Ομαλή Κυκλική Κίνηση



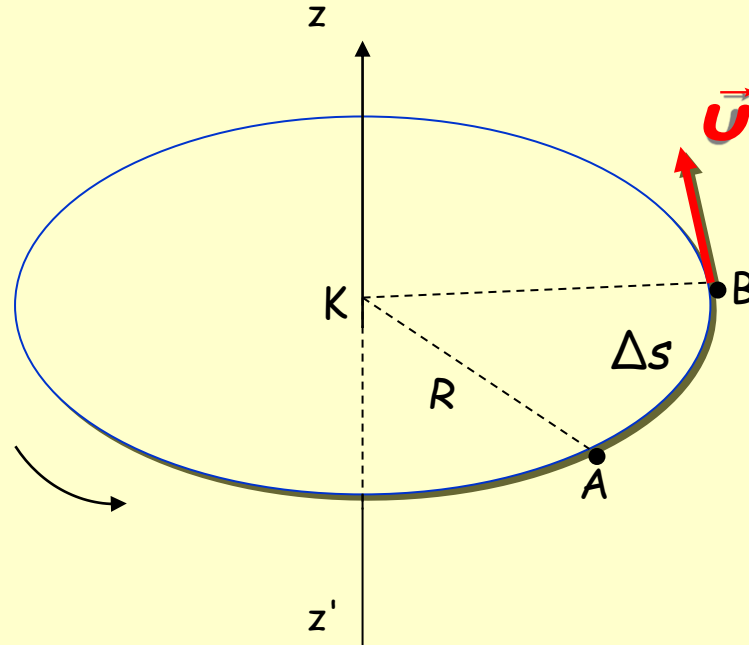
Στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας παραμένει σταθερό ενώ η κατεύθυνσή της μεταβάλλεται συνεχώς.

$$v = \text{σταθ.}$$

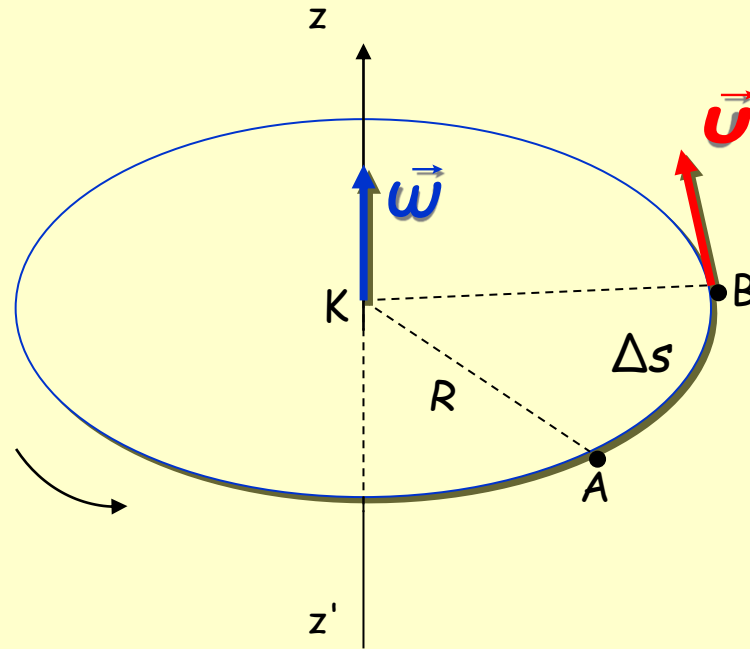
Στην ομαλή κυκλική κίνηση το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας παραμένει σταθερό.

$$\vec{\omega} = \text{σταθ.}$$

Σχέσεις γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας με τα άλλα χαρακτηριστικά μεγέθη .



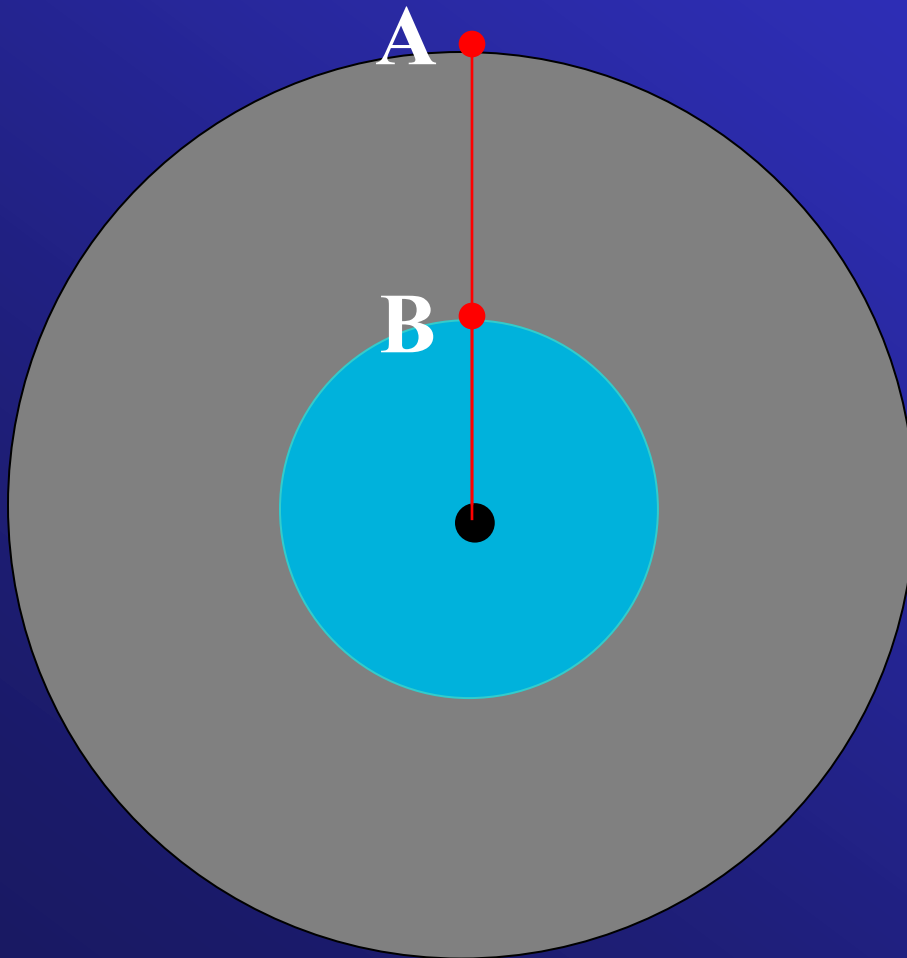
$$u = \frac{\Delta s}{\Delta t} \longrightarrow u = \frac{2\pi R}{T} \longrightarrow u = 2\pi R f$$



$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow \omega = 2\pi f$$

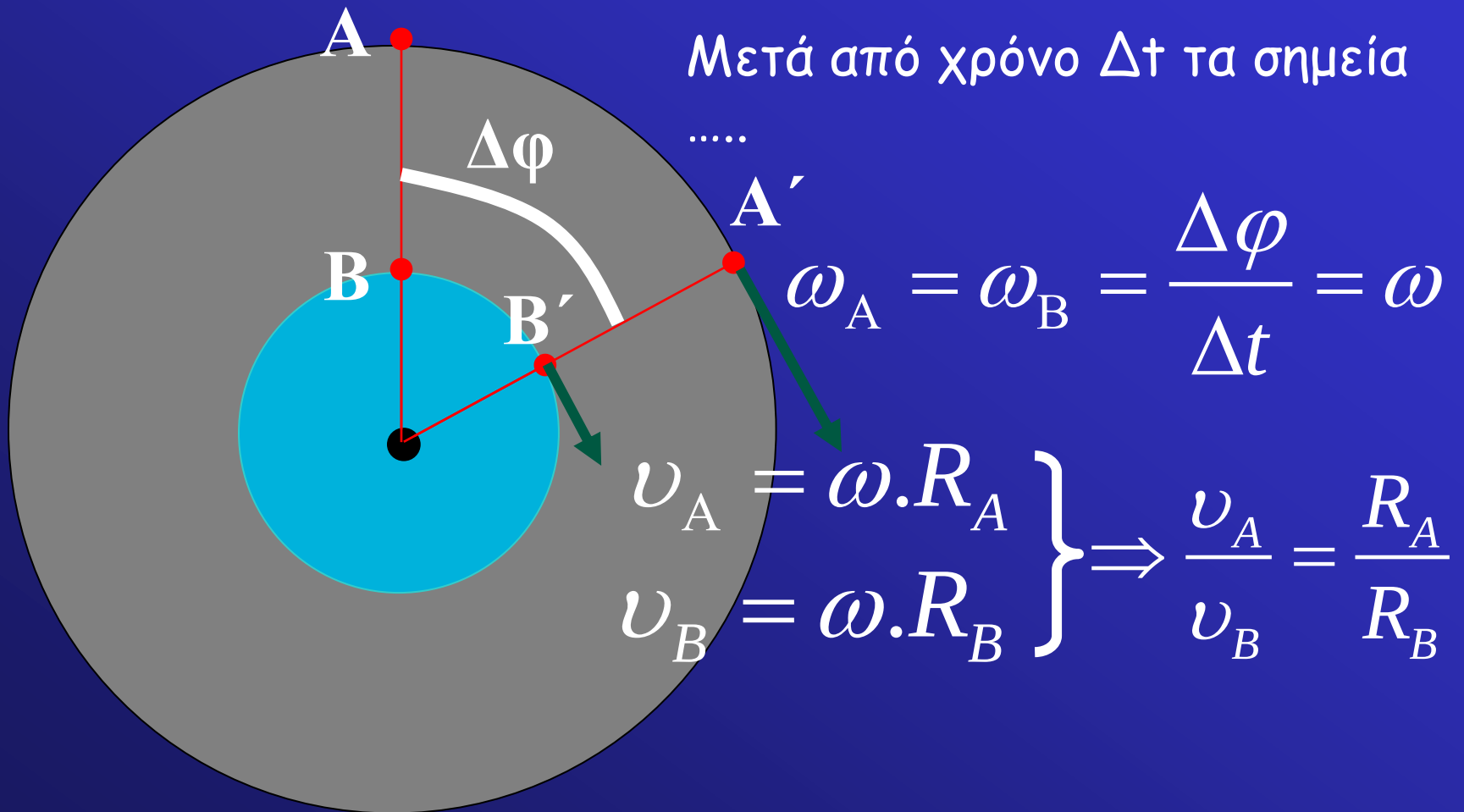
$$v = \frac{2\pi R}{T} \longrightarrow v = \omega \cdot R$$

Συνδυασμοί κυκλικών κινήσεων



Ποια είναι η σχέση των
γωνιακών και ποια των
γραμμικών ταχυτήτων των
σημείων A και B ;

Συνδυασμοί κυκλικών κινήσεων

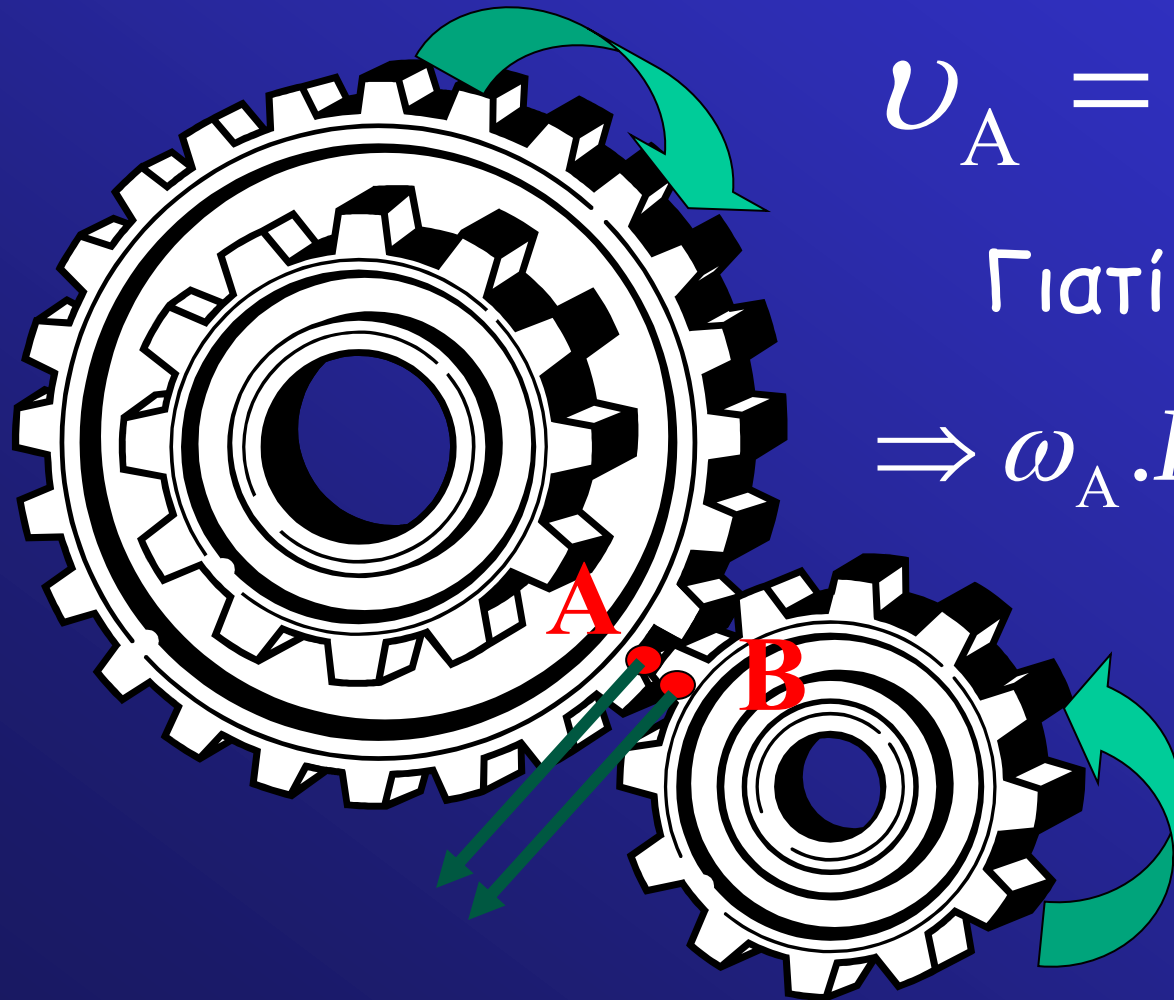


Συνδυασμοί κυκλικών κινήσεων



Ποια είναι η σχέση των γραμμικών και ποια των γωνιακών ταχυτήτων των σημείων A και B ;

Συνδυασμοί κυκλικών κινήσεων



$$v_A = v_B$$

Γιατί ;

$$\Rightarrow \omega_A \cdot R_A = \omega_B \cdot R_B$$

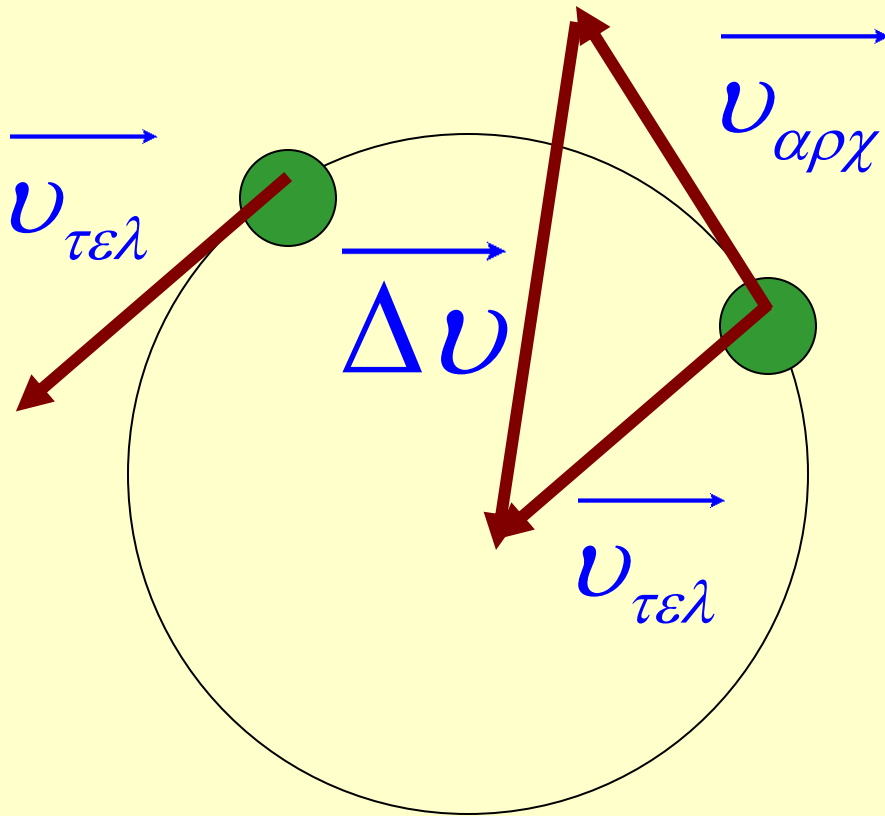


$$\Rightarrow \frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{R_B}{R_A}$$

Κεντρομόλος επιτάχυνση

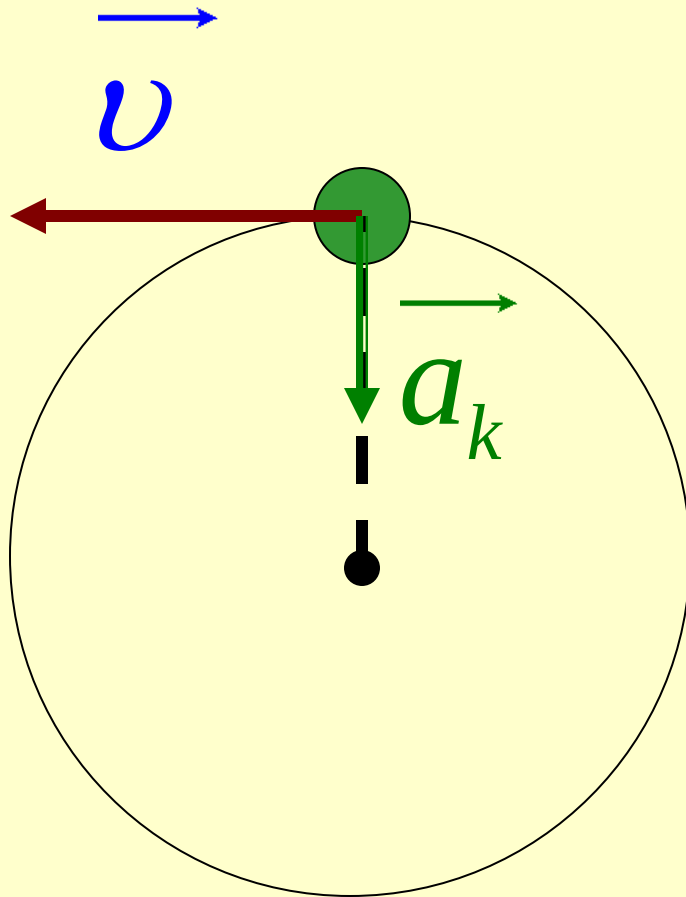


Στην ομαλή κυκλική κίνηση μεταβάλλεται η ταχύτητα ;



Μεταβολή της ταχύτητας
συνεπάγεται επιτάχυνση.

Η επιτάχυνση αυτή είναι κάθετη στην ταχύτητα με φορά προς το κέντρο του κύκλου.



Ονομάζεται :

Κεντρομόλος επιτάχυνση .

$$a_k = \frac{v^2}{R}$$

Μερικοί τύποι

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{v^2}{R} \\ v &= \omega \cdot R \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_k = \frac{\omega^2 \cdot \cancel{R^2}}{\cancel{R}} = \omega^2 \cdot R$$

Επίσης :

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \omega^2 \cdot R \\ \omega &= 2\pi f \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_k = 4\pi^2 f^2 R$$

Μερικοί τύποι

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \omega^2 \cdot R \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_k = \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

Μερικοί τύποι

$$a_k = \frac{v^2}{R}$$

$$a_k = \omega^2 \cdot R$$

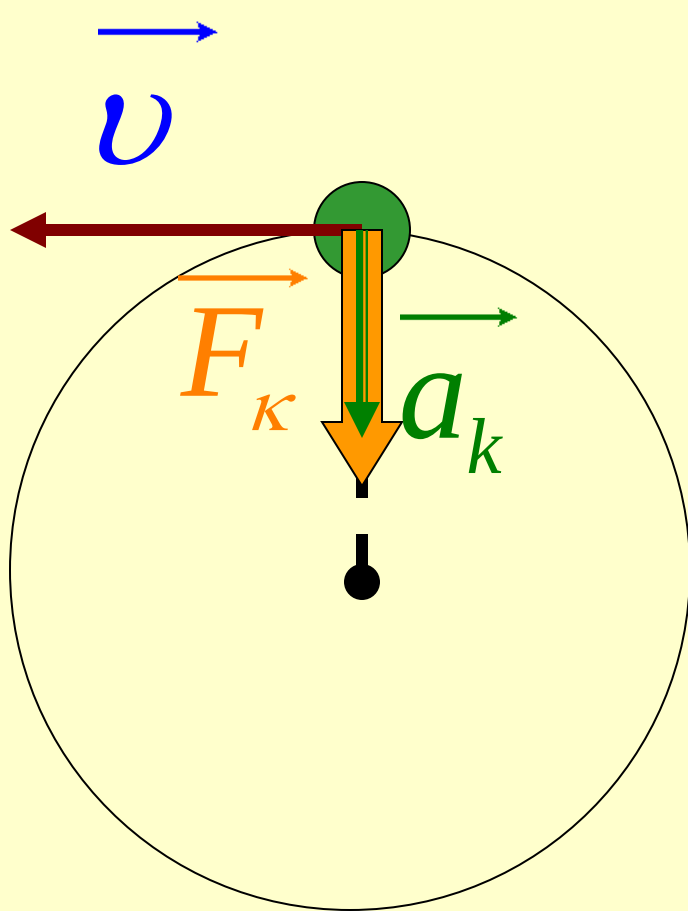
$$a_k = \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

$$a_k = 4\pi^2 f^2 R$$

Κεντρομόλος δύναμη



Όταν ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ,
έχει επιτάχυνση :



$$a_k = \frac{v^2}{R}$$

Η συνισταμένη των
δυνάμεων που δέχεται είναι :

$$F_k = m \cdot a_k = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Η δύναμη αυτή ονομάζεται κεντρομόλος δύναμη .

Μερικοί τύποι

$$a_k = \frac{v^2}{R} \Rightarrow F_k = m \frac{v^2}{R}$$

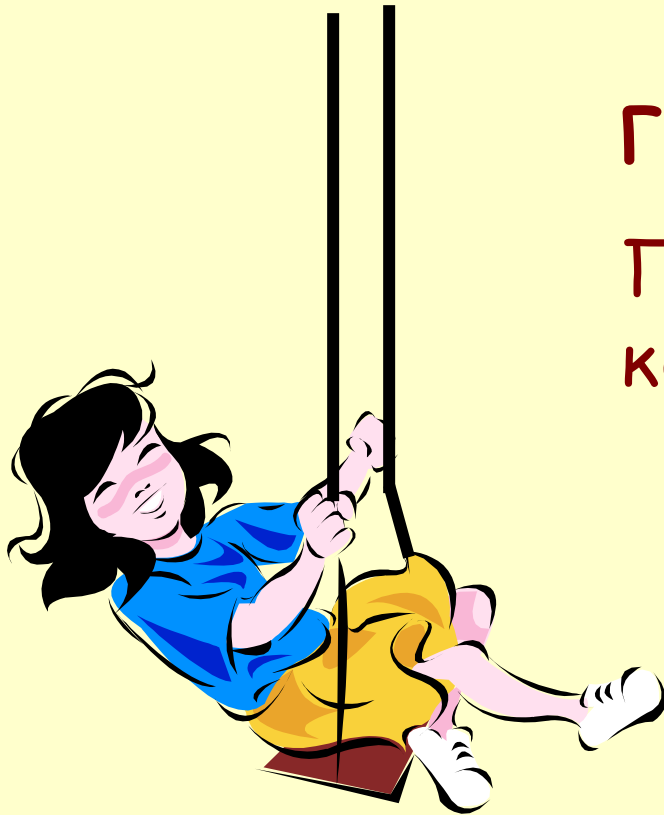
$$a_k = \omega^2 \cdot R \Rightarrow F_k = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

$$a_k = \frac{4\pi^2}{T^2} R \Rightarrow F_k = m \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

$$a_k = 4\pi^2 f^2 R \Rightarrow F_k = m \cdot 4\pi^2 f^2 R$$

Παρατήρηση

Η κεντρομόλος είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται και όχι μια επιπλέον δύναμη.



Για παράδειγμα :

Ποιες δυνάμεις δέχεται το κοριτσάκι;

Παρατήρηση

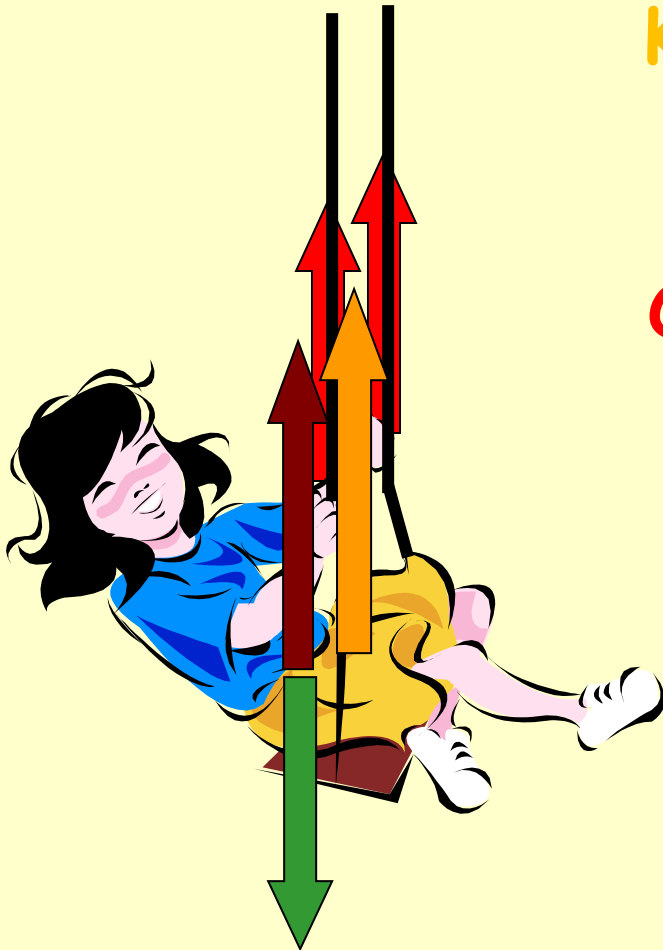
Απαντάμε πολλές φορές:

Και η κεντρομόλος ;

Οι τάσεις των σχοινιών

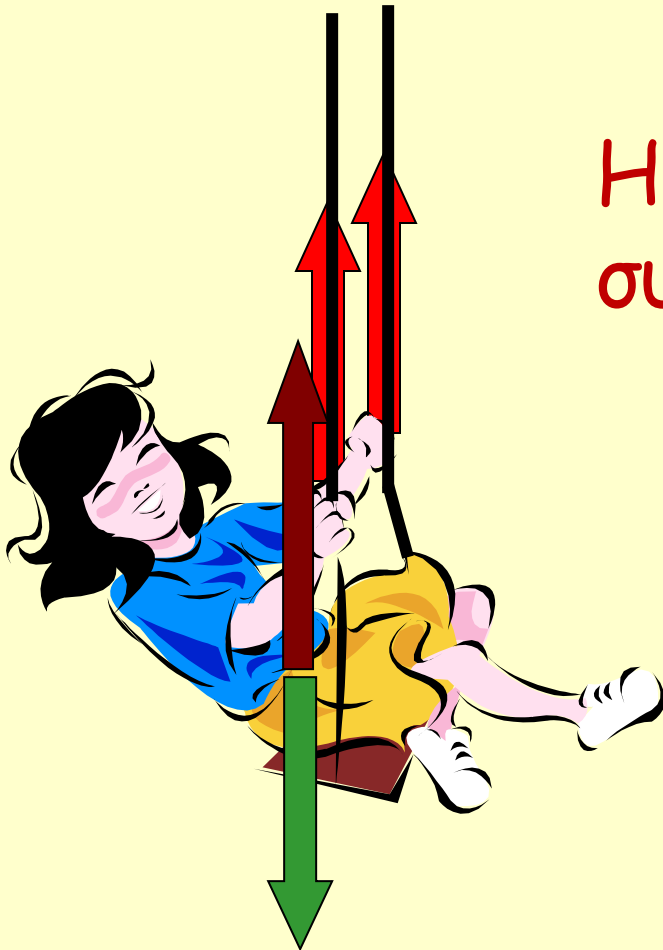
Η αντίδραση του καθίσματος

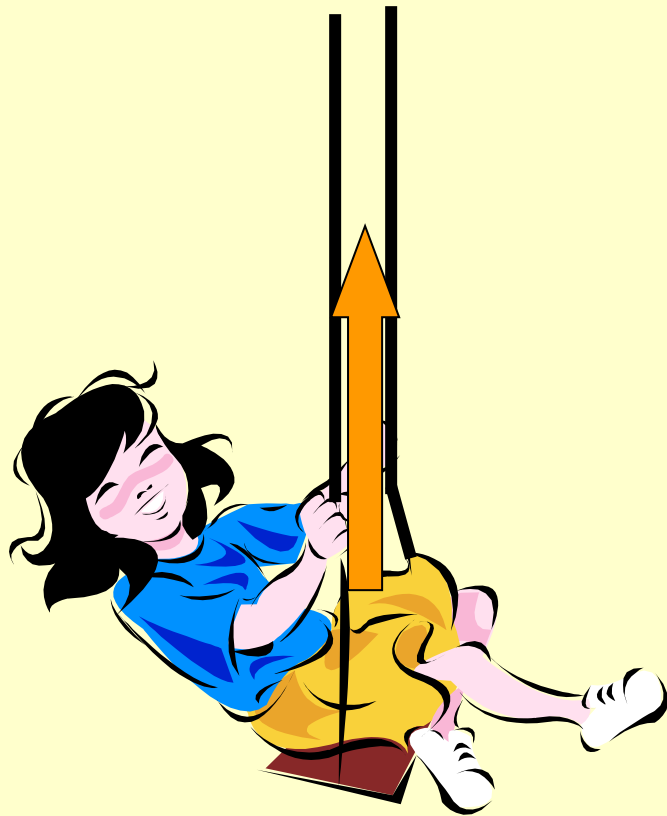
Το βάρος.



Παρατήρηση Λάθος !

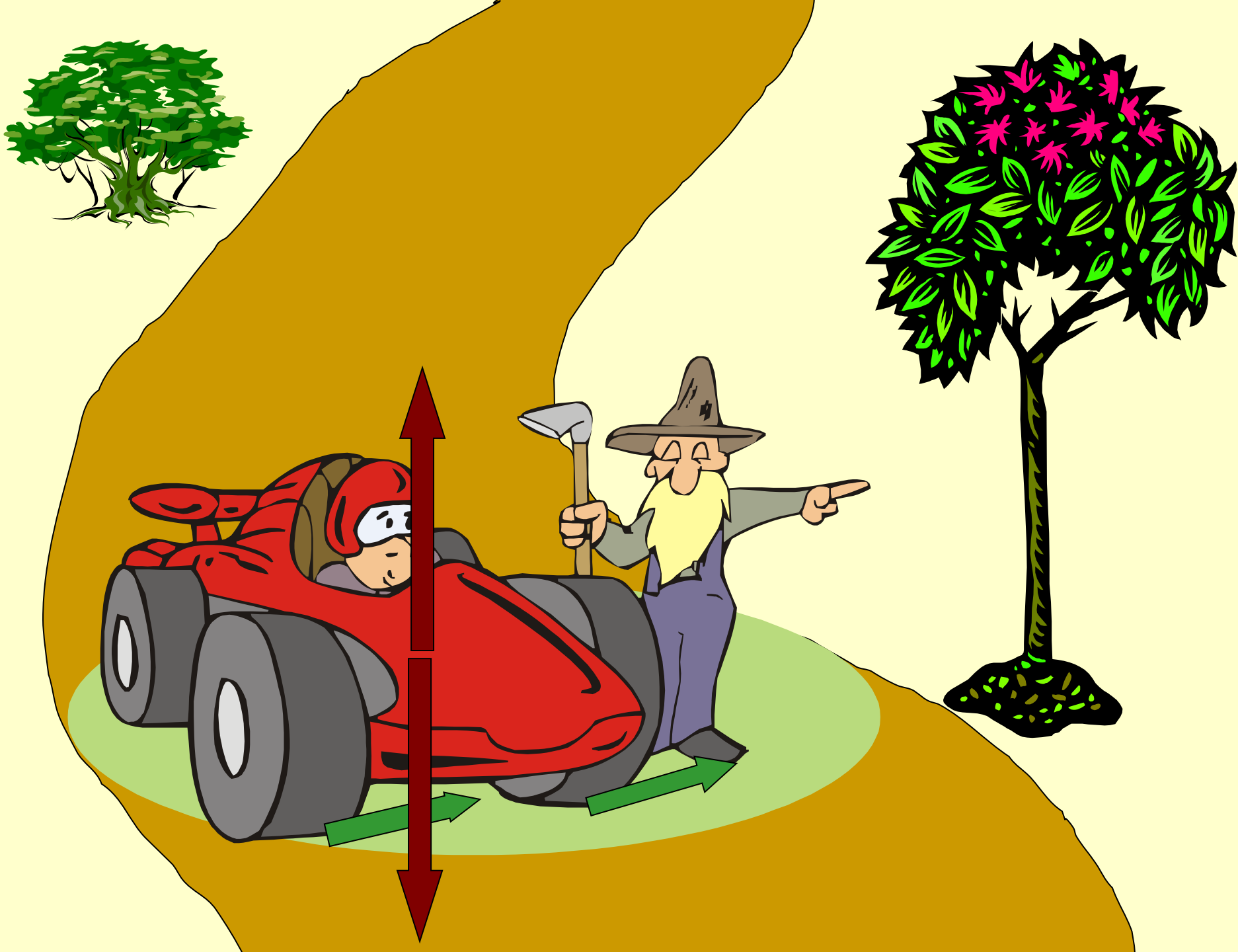
Η κεντρομόλος είναι η
συνισταμένη όλων αυτών.



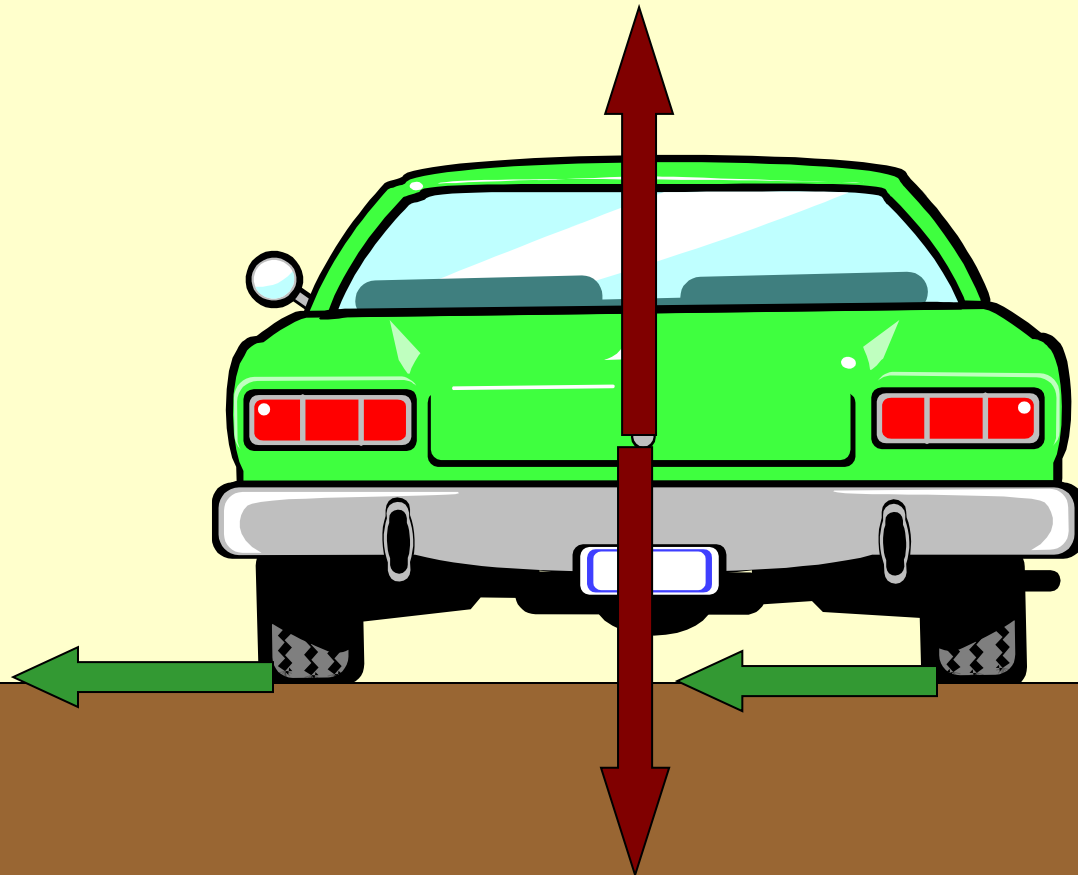


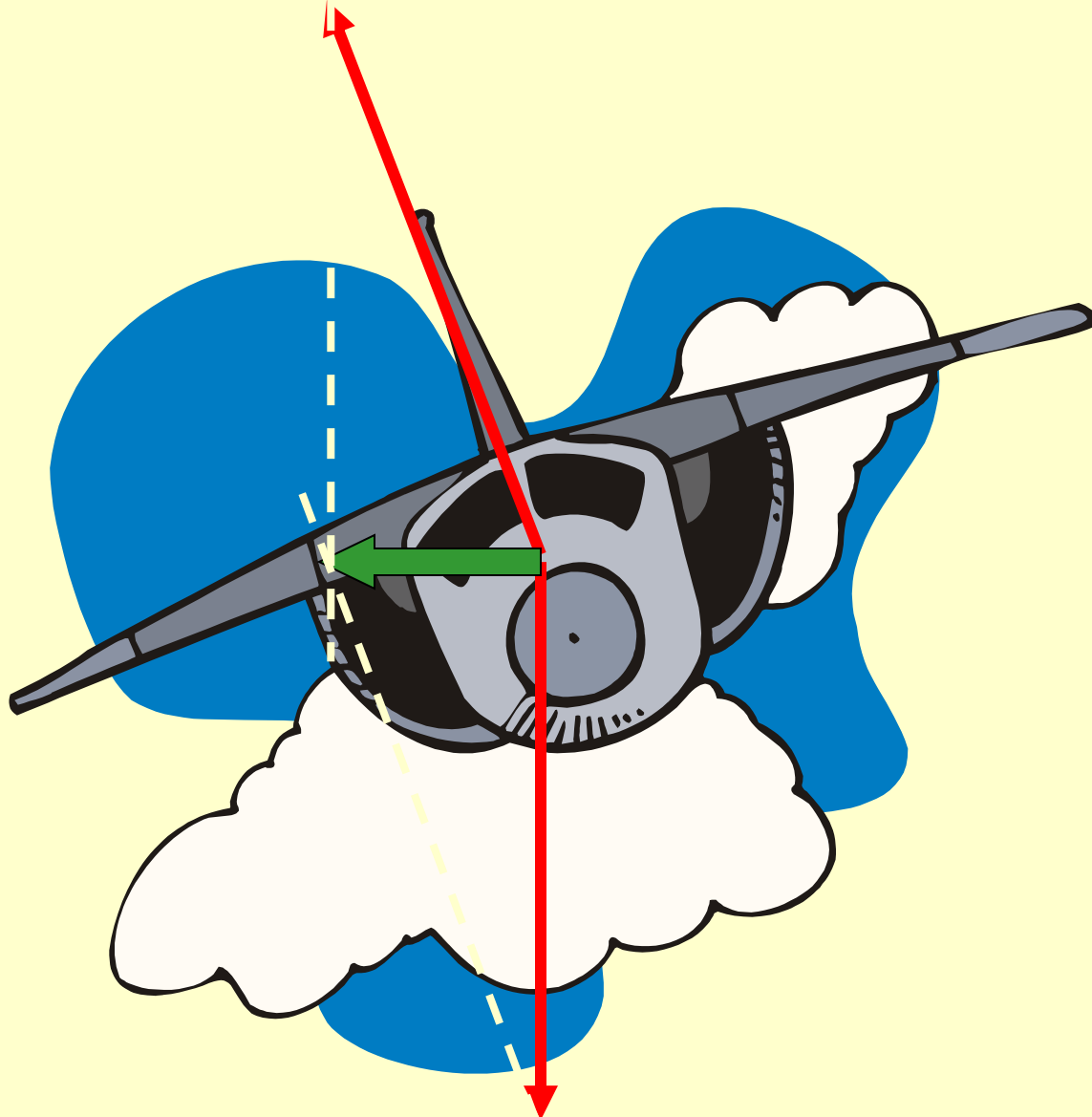


**Μερικές περιπτώσεις
κεντρομόλου δύναμης**

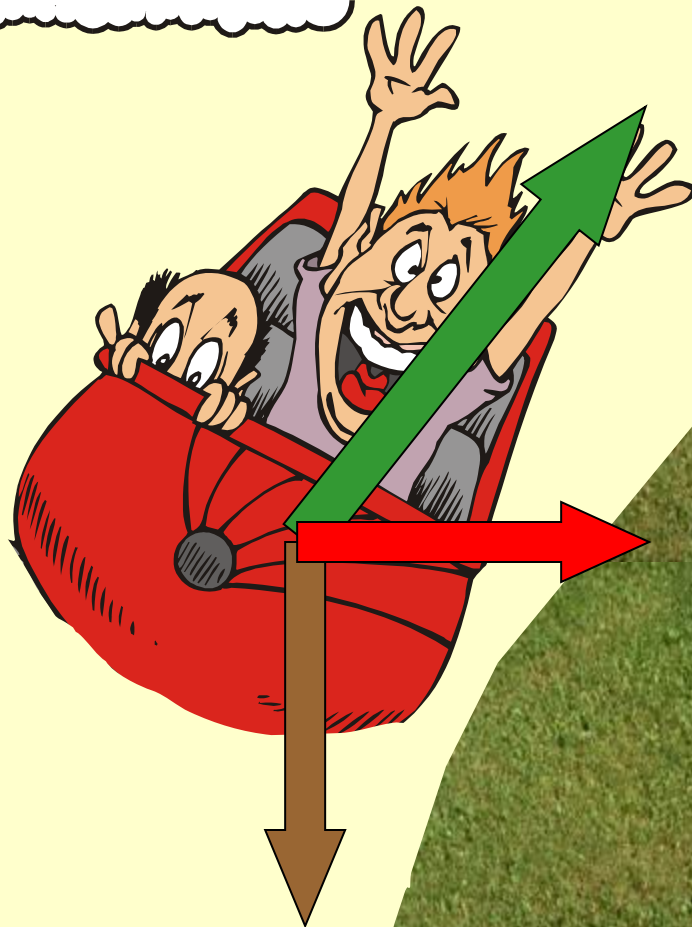


Από άλλη οπτική γωνία.

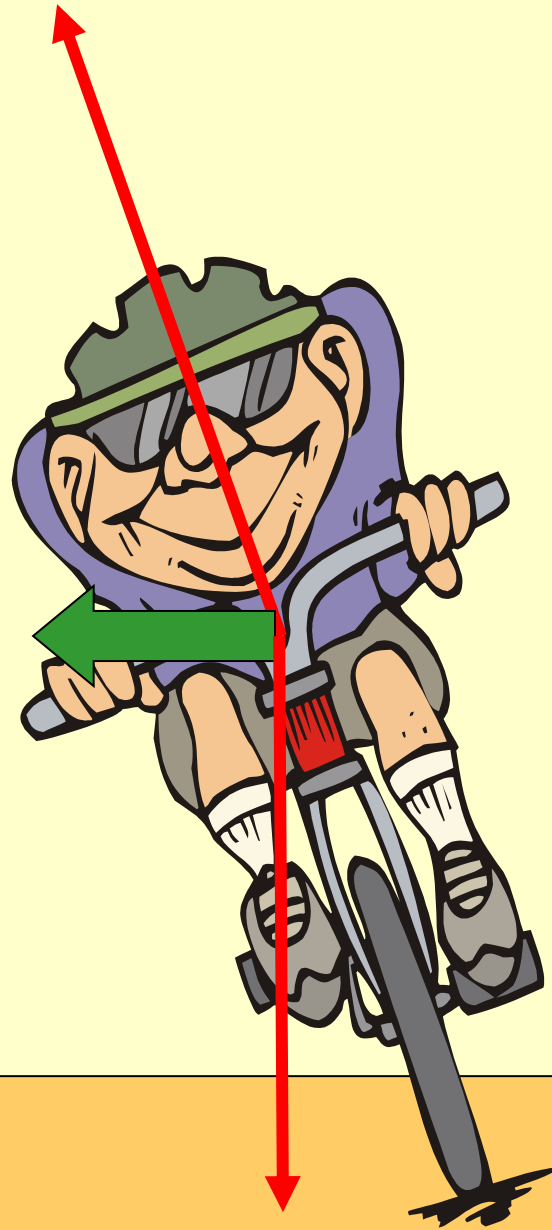


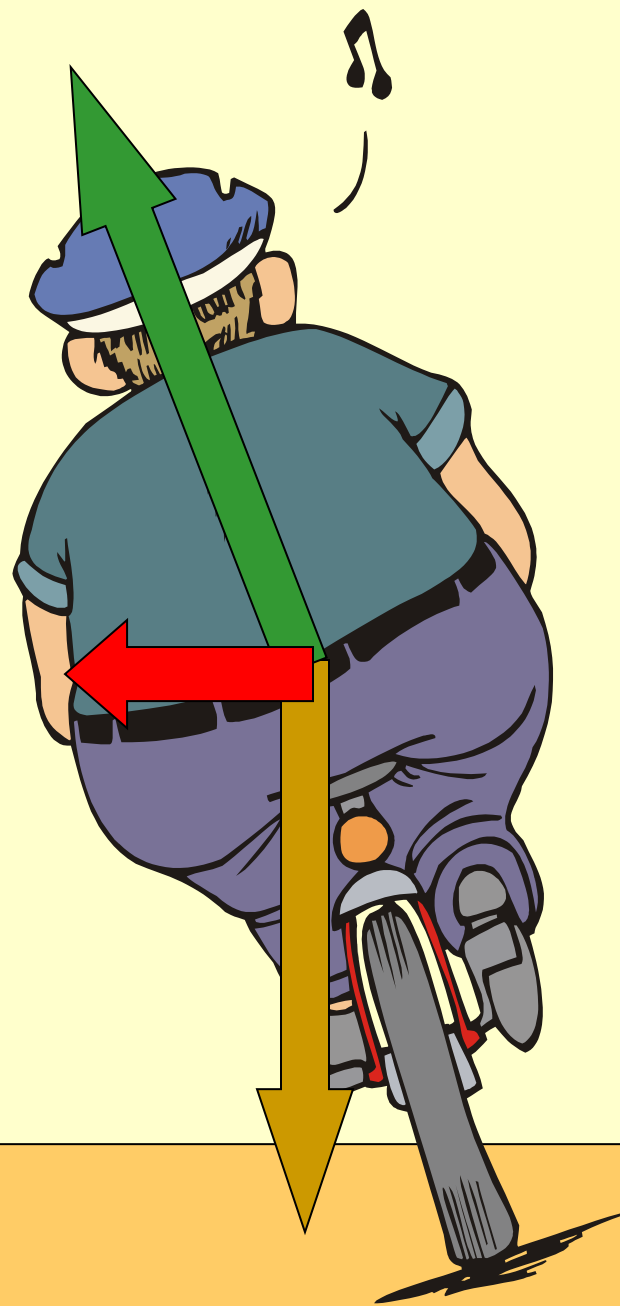
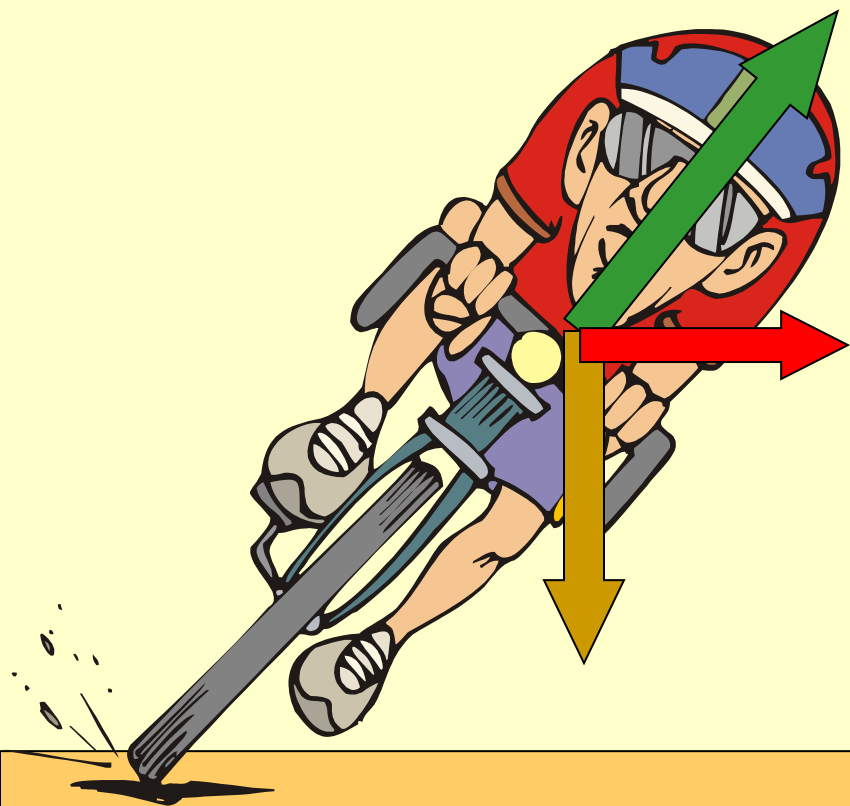


Γιατί ο διάδρομος παρουσιάζει
κλίση στη στροφή ;



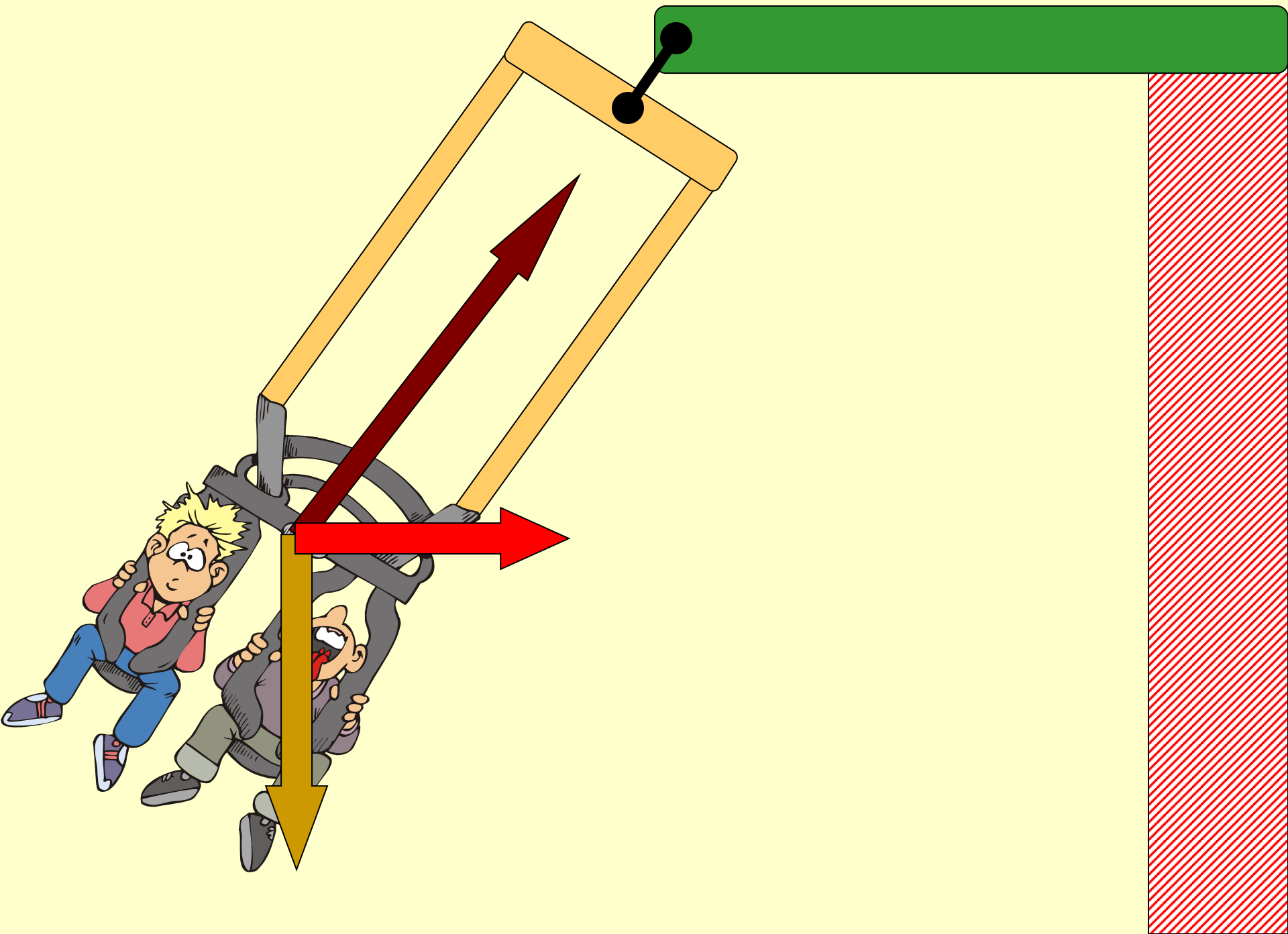




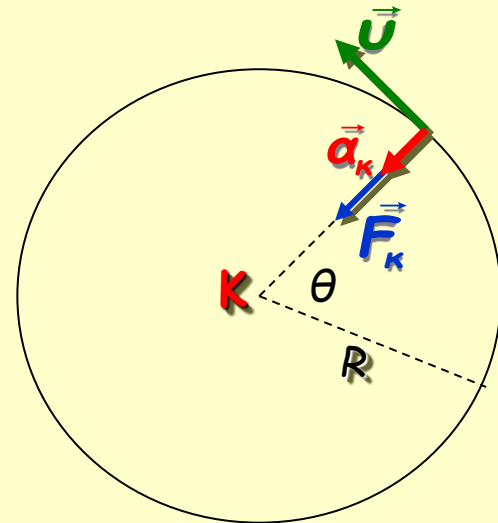




Γιατί δεν πέφτει;



Στην ομαλή κυκλική κίνηση, η **κεντρομόλος δύναμη** είναι η **συνισταμένη των δυνάμεων** που ασκούνται στο σώμα και βρίσκεται στη διεύθυνση της ακτίνας.



Έχει φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

$$F_k = m \cdot a_k \longrightarrow F_k = m \cdot \frac{u^2}{R}$$

Ένα video στο οποίο
παρουσιάζεται με συνοπτικό τρόπο η βασική
θεωρία της «ομαλής κυκλικής κίνησης».

Από το youschool.gr



Κυκλική Κίνηση Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Στην ομαλή κυκλική κίνηση,

☒ α. Το μέτρο της ταχύτητας διατηρείται σταθερό.

β. Η ταχύτητα διατηρείται σταθερή.

γ. Το διάνυσμα της ταχύτητας $\mathbf{v}$ έχει την κατεύθυνση της ακτίνας της τροχιάς.

δ. Το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται.

2. Η περίοδος T στην ομαλή κυκλική κίνηση εκφράζει:

α. Το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας.

β. Τον αριθμό των περιστροφών που κάνει σε 1s .

☒ γ. Το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το κινητό για να κάνει ένα κύκλο.

δ. Τίποτα από τα παραπάνω.

3. Η συχνότητα f στην ομαλή κυκλική κίνηση είναι:

α. Το αντίστροφο της περιόδου.

☒ β. Το πλήθος των κύκλων που κάνει σε 1s .

γ. Το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το κινητό για να κάνει ένα κύκλο.

δ. Τίποτα από τα παραπάνω.

4. Η συχνότητα 1Hz σημαίνει ότι το κινητό χρειάζεται:

α. 1s για να κάνει 1 κύκλο ακτίνας 1m .

☒ β. 1s για να κάνει 1 κύκλο.

γ. 1s για να κάνει 10 κύκλους.

δ. Τίποτα από τα παραπάνω.

5. Η γραμμική ταχύτητα στην ομαλή κυκλική κίνηση εκφράζει:

☒ α. Το πόσο γρήγορα διαγράφει το κινητό τα τόξα.

β. Το πόσο γρήγορα διαγράφει η επιβατική ακτίνα του κινητού τις επίκεντρες γωνίες.

γ. Το τόξο που διαγράφει το κινητό.

6. Η γραμμική ταχύτητα στην ομαλή κυκλική κίνηση εκφράζει:

- α. Το πόσο γρήγορα διαγράφει το κινητό τα τόξα.
- β. Το πόσο γρήγορα διαγράφει η επιβατική ακτίνα του κινητού τις επίκεντρες γωνίες.
- γ. Τις επίκεντρες γωνίες που διαγράφει η επιβατική ακτίνα του κινητού.

7. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις που αναφέρονται στη γραμμική ταχύτητα στην ομαλή κυκλική κίνηση είναι σωστές;

- α. Είναι εφαπτομένη της τροχιάς.
- β. Διατηρείται σταθερή κατά μέτρο.
- γ. Έχει ως μονάδα μέτρησης το 1rad/s .
- δ. Ισούται με το πηλίκο του μήκους του τόξου που διαγράφει το κινητό σε χρόνο Δt προς το χρόνο αυτό.

8. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις που αναφέρονται στη γωνιακή ταχύτητα στην ομαλή κυκλική κίνηση είναι σωστές;

- α. Είναι εφαπτομένη της τροχιάς.
- β. Διατηρείται σταθερή κατά μέτρο.
- γ. Έχει ως μονάδα μέτρησης το 1rad/s .
- δ. Ισούται με το πηλίκο της μεταβολής της επίκεντρης γωνίας $\Delta\theta$ που διαγράφει η επιβατική ακτίνα του κινητού σε χρόνο Δt προς το χρόνο αυτό.
- ε. Έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς.

9. Η κεντρομόλος επιτάχυνση στην ομαλή κυκλική κίνηση εκφράζει:

α. Πόσο γρήγορα διαγράφει το κινητό τα τόξα.

β. Πόσο γρήγορα μεταβάλλεται το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας.

☒ γ. Πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η διεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας

δ. Πόσες περιστροφές κάνει στη μονάδα του χρόνου.

10. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις που αναφέρονται στην κεντρομόλο επιτάχυνση στην ομαλή κυκλική κίνηση είναι σωστές;

α. Έχει σταθερή διεύθυνση.

☒ β. Είναι πάντοτε κάθετη στην ταχύτητα v .

☒ γ. Ισούται με v^2/R , όπου R η ακτίνα της τροχιάς.

☒ δ. Έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της τροχιάς.

ε. Οφείλεται στη συνεχή μεταβολή της διεύθυνσης της γωνιακής ταχύτητας.

11. Ένα υλικό σημείο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα της γραμμικής ταχύτητας, της γωνιακής ταχύτητας και της κεντρομόλου επιτάχυνσης του υλικού σημείου σε ένα τυχαίο σημείο της τροχιάς.

12. Ο δευτερολεπτοδείκτης του ρολογιού έχει περίοδο:

α. 1s ☒ β. 60s γ. 1h

Ποια είναι η σωστή απάντηση;

13. Ο λεπτοδείκτης του ρολογιού έχει περίοδο:

α. 1s β. 60s ☒ γ. 1h

Ποια είναι η σωστή απάντηση;

14. Ο ωροδείκτης του ρολογιού έχει περίοδο:

α. 24h β. 1h ☒ γ. 12h

Ποια είναι η σωστή απάντηση;

15. Σε μια ομαλή κυκλική κίνηση η συχνότητα είναι 10Hz. Αυτό σημαίνει ότι το κινητό κάνει:

- α. 1 κύκλο κάθε 10s. ☒ γ. 20 κύκλους κάθε 2s
β. 10 κύκλους κάθε 10s δ. 10m κάθε 1s.

16. Σε μια ομαλή κυκλική κίνηση η συχνότητα είναι 2Hz. Αυτό σημαίνει ότι το κινητό κάνει σε χρόνο 1min:

- α. 1 κύκλο ☒ γ. 120 κύκλους
β. 60 κύκλους δ. Το 1/30 του κύκλου

17. Δίσκος του πικάπ διαγράφει ομαλή κυκλική κίνηση. Όλα του τα σημεία έχουν την ίδια:

- ☒ α. Περίοδο, T. ☐ γ. Γραμμική ταχύτητα, v. ε. Κεντρομόλο επιτάχυνση, a_c .
☒ β. Συχνότητα, f. ☒ δ. Γωνιακή ταχύτητα, ω .

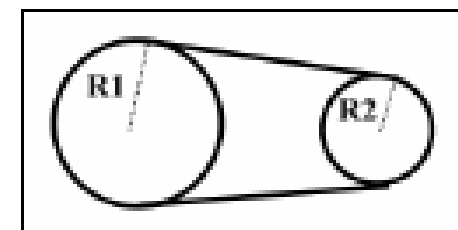
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

18. Υλικό σημείο κάνει ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R. Να αποδειχθούν οι εκφράσεις που συνδέουν:

- α. Συχνότητα με περίοδο.
β. Γραμμική ταχύτητα με περίοδο.
γ. Γωνιακή ταχύτητα με περίοδο.
δ. Γραμμική ταχύτητα με συχνότητα.
ε. Γωνιακή ταχύτητα με συχνότητα.
στ. Γραμμική με γωνιακή ταχύτητα.

19. Στο σύστημα των δύο τροχών με ακτίνες R_1 και R_2 που συνδέονται με ιμάντα, ο λόγος των γωνιακών ταχυτήτων ω_1/ω_2 είναι ίσος με:

- α. 1 ☐ β. R_1/R_2 ☒ γ. R_2/R_1



Ποια είναι η σωστή απάντηση; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

20. Δίσκος του πικάπ κάνει ομαλή κυκλική κίνηση. Δύο σημεία Α και Β του δίσκου απέχουν από το κέντρο αποστάσεις r_1 , r_2 με $r_1 > r_2$. Ποιες από τις σχέσεις που ακολουθούν είναι σωστές ή λάθος και γιατί;



☒ α. $\omega_1 = \omega_2$

☒ β. $v_1 > v_2$

☒ γ. $T_1 = T_2$

δ. $a_{κ1} < a_{κ2}$

21. Αυτοκίνητο κινείται προς το βορρά. Η γωνιακή ταχύτητα των τροχών του έχει κατεύθυνση προς:

☒ α. Τη δύση

β. Την ανατολή

γ. Το βορρά

δ. Το νότο.

22. Μικρή σφαίρα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση. Η κεντρομόλος δύναμη είναι:

α. Μια εκ των δυνάμεων που ασκούνται στη σφαίρα, με κατεύθυνση προς το κέντρο της τροχιάς.

☒ β. Η συνολική συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στη σφαίρα.

γ. Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στη σφαίρα στη διεύθυνση της ακτίνας της τροχιάς.

δ. Τίποτα από τα παραπάνω.

23. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις που αναφέρονται στην κεντρομόλο δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα μάζας m που κάνει ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας, R , είναι σωστές;

α. Έχει σταθερή διεύθυνση.

☒ β. Είναι πάντοτε κάθετη στην ταχύτητα v .

γ. Ισούνται με mv^2/R^2 .

☒ δ. Έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της τροχιάς.

ε. Έχει σημείο εφαρμογής το κέντρο της τροχιάς.

24. Όταν ένα υλικό σημείο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση:

α. Μεταβάλλεται το μέτρο της ταχύτητας του.

☒ β. Δεν έχει επιτάχυνση.

γ. Διαγράφει κάθε μια πλήρη περιστροφή στον ίδιο χρόνο.

δ. Ασκούνται σ' αυτό δυνάμεις μηδενικής συνισταμένης.

☒ ε. Ο ρυθμός της γωνιακής μετατόπισης είναι σταθερός.

στ. Δεν ισχύει ο 2^{ος} νόμος του Newton.

ζ. Ισχύει ο 1^{ος} νόμος του Newton.

Ποιες από τις προτάσεις αυτές είναι σωστές;

25. Χαρακτηρίστε ως σωστές ή ως λανθασμένες τις μαθηματικές εκφράσεις που ακολουθούν και δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

α. $v=2\pi f$

☒ β. $a_c=\omega^2 R$

☒ γ. $\omega=2\pi/T$

☒ δ. $F_K=m\omega^2 R$

☒ ε. $f=1/T\alpha$

☒ στ. $a_c=4\pi^2 R/T^2$

☒ ζ. $F_K=4m\pi^2 Rf^2$

26. Σφαίρα είναι δεμένη σε νήμα και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Αν κοπεί το νήμα η σφαίρα θα:

α. Κινηθεί προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς λόγω αδράνειας,

β. Διαγράψει καμπύλη τροχιά, όχι κυκλική,

☒ γ. Κινηθεί στη διεύθυνση της εφαπτομένης της κυκλικής τροχιάς, στο σημείο που κόπηκε το νήμα,

δ. Σταματήσει να κινείται ακαριαία.

Ποια από τις εκδοχές αυτές είναι η σωστή;

27. Το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης που ασκείται σε υλικό σημείο σταθερής μάζας m που διαγράφει ομαλή κυκλική κίνηση σταθερής ακτίνας R είναι:

☒ α. Ανάλογο της μάζας,

β. Αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της γωνιακής ταχύτητας,

☒ γ. Ανάλογο του τετραγώνου της συχνότητας f ,

δ. Ανάλογο του τετραγώνου της περιόδου T ,

ε. Ανεξάρτητο της ακτίνας της τροχιάς R .

Ποιες από τις προτάσεις αυτές είναι σωστές;

28. «Σφαίρα δεμένη από νήμα διαγράφει κατακόρυφο κύκλο με ταχύτητα σταθερού μέτρου και πάνω της ασκούνται, η δύναμη του νήματος, το βάρος και η κεντρομόλος δύναμη.» Είναι η πρόταση αυτή σωστή; Αν υπάρχει λάθος που βρίσκεται;

29. Για να μπορέσει αυτοκίνητο να πάρει στροφή σε οριζόντιο οδόστρωμα θα πρέπει:

α. Το οδόστρωμα να είναι τελείως λείο.

β. Το βάρος του να λειτουργεί ως κεντρομόλος.

γ. Η στατική τριβή που αναπτύσσεται ανάμεσα στα ελαστικά και το οδόστρωμα να δρα ως κεντρομόλος.

δ. Η συνισταμένη του βάρους και της κάθετης δύναμης να δρα ως κεντρομόλος.

30. Το σώμα μάζας m κάνει ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα, v σε κατακόρυφο επίπεδο. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές ή λάθος και γιατί;

α. Σε κάθε σημείο της τροχιάς του το βάρος δρα ως κεντρομόλος.

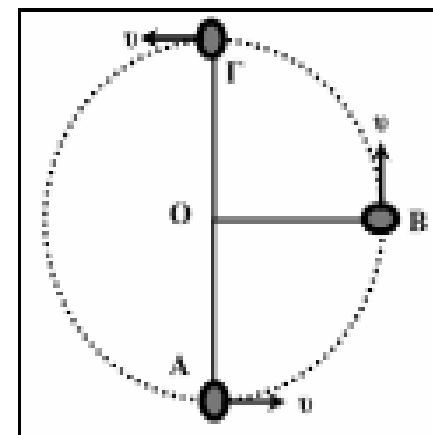
β. Στην κατώτερο σημείο της τροχιάς ισχύει: $|F_K| = mg - T$.

γ. Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς ισχύει: $|F_K| = mg + T$

δ. Στο σημείο B η κεντρομόλος ισούται με την τάση του νήματος.

ε. Η κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας είναι κάθετη στη σελίδα με φορά από αυτή προς τον αναγνώστη.

στ. Σε κάθε θέση της τροχιάς η τάση του νήματος είναι η ίδια κατά μέτρο.



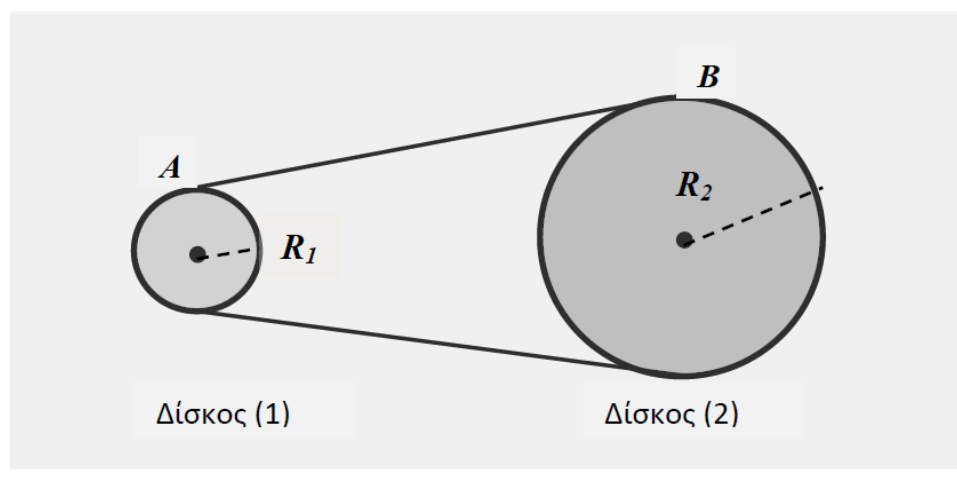


Κυκλική κίνηση

Προβλήματα

(Α' Ομάδα)

1.



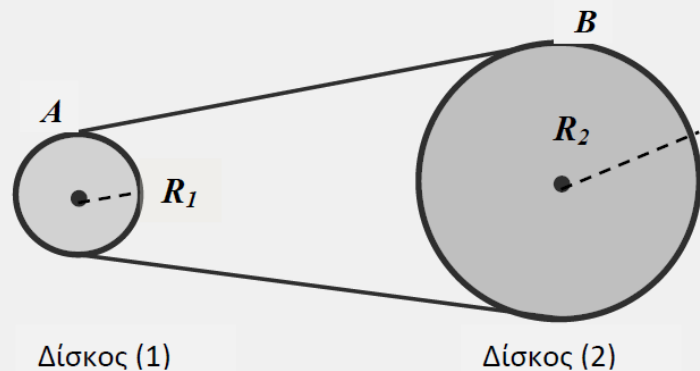
Στο σχήμα φαίνονται δύο δίσκοι με ακτίνες $R_1 = 0,2 \text{ m}$ και $R_2 = 0,4 \text{ m}$ αντίστοιχα, οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους με μη ελαστικό λουρί. Οι δίσκοι περιστρέφονται γύρω από σταθερούς άξονες που διέρχονται από το κέντρο τους και είναι κάθετοι στο επίπεδο τους. Αν η περίοδος περιστροφής του δίσκου (2) είναι σταθερή και ίση με $T_2 = 0,05\pi \text{ s}$, να υπολογίσετε :

Δ1) το μέτρο της ταχύτητας των σημείων A και B της περιφέρειας των δίσκων

Δ2) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου (1),

Δ3) το λόγο των μέτρων των κεντρομόλων επιταχύνσεων των σημείων A και B : $\frac{\alpha_{1,A}}{\alpha_{2,B}}$,

Δ4) τον αριθμό των περιστροφών που έχει εκτελέσει ο δίσκος (1), όταν ο δίσκος (2) έχει εκτελέσει 10 περιστροφές.



(Δ_1)

$$v_A = v_B = \frac{2\pi \cdot R_2}{T_2} = \frac{2\pi \cdot 0,4m}{0,05\pi s} = 16 m/s$$

(Δ_2)

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \quad (1)$$

$$v_A = v_B \Rightarrow \frac{2\pi \cdot R_1}{T_1} = \frac{2\pi \cdot R_2}{T_2}$$

$$\frac{R_1}{T_1} = \frac{R_2}{T_2} \Rightarrow T_1 = \frac{R_1 \cdot T_2}{R_2} \Rightarrow T_1 = \frac{0,2m \cdot 0,05\pi s}{0,4m} = 0,025s \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2)} \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi \text{ rad}}{0,025\pi s} \Rightarrow \omega_1 = 80 r/s$$

$$(\Delta_3) \quad \frac{\alpha_{1,A}}{\alpha_{2,B}} = \frac{\cancel{v_A^2} / R_1}{\cancel{v_B^2} / R_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{0,4 \text{ m}}{0,2 \text{ m}} \Rightarrow$$

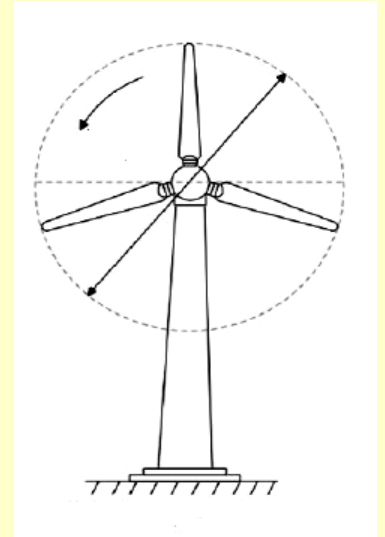
$$\boxed{\frac{\alpha_{1,A}}{\alpha_{2,B}} = 2}$$

$$(\Delta_4) \quad v_A = v_B \Rightarrow \cancel{2} \pi f_1 R_1 = \cancel{2} \pi f_2 R_2 \Rightarrow \frac{N_1}{\cancel{t}} R_1 = \frac{N_2}{\cancel{t}} R_2$$

$$\Rightarrow N_1 \cdot 0,2 \text{ m} = 10 \cdot 0,4 \text{ m} \Rightarrow N_1 = \frac{10 \cdot 0,4 \text{ m}}{0,2 \text{ m}}$$

$$\boxed{N_1 = 20 \text{ περιστρ.}}$$

2. Ανεμογεννήτρια οριζοντίου άξονα περιστροφής έχει τα εξής χαρακτηριστικά: Ύψος πύργου $H = 18 \text{ m}$ (δηλαδή απόσταση από το έδαφος μέχρι το κέντρο της κυκλικής τροχιάς), ακτίνα έλικας $R = 2 \text{ m}$, ενώ πραγματοποιεί 60 περιστροφές ανά λεπτό.



Δ1) Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της έλικας.

Στην άκρη της έλικας έχει κολλήσει ένα (σημειακό) κομμάτι λάσπης.

Δ2) Να υπολογίσετε τη γραμμική ταχύτητα και την κεντρομόλο επιτάχυνση του κομματιού της λάσπης.

Τη στιγμή που η λάσπη περνάει από το ανώτερο σημείο της τροχιάς της ξεκολλάει κι εγκαταλείπει την έλικα

Δ3) Τι είδους κίνηση θα κάνει;

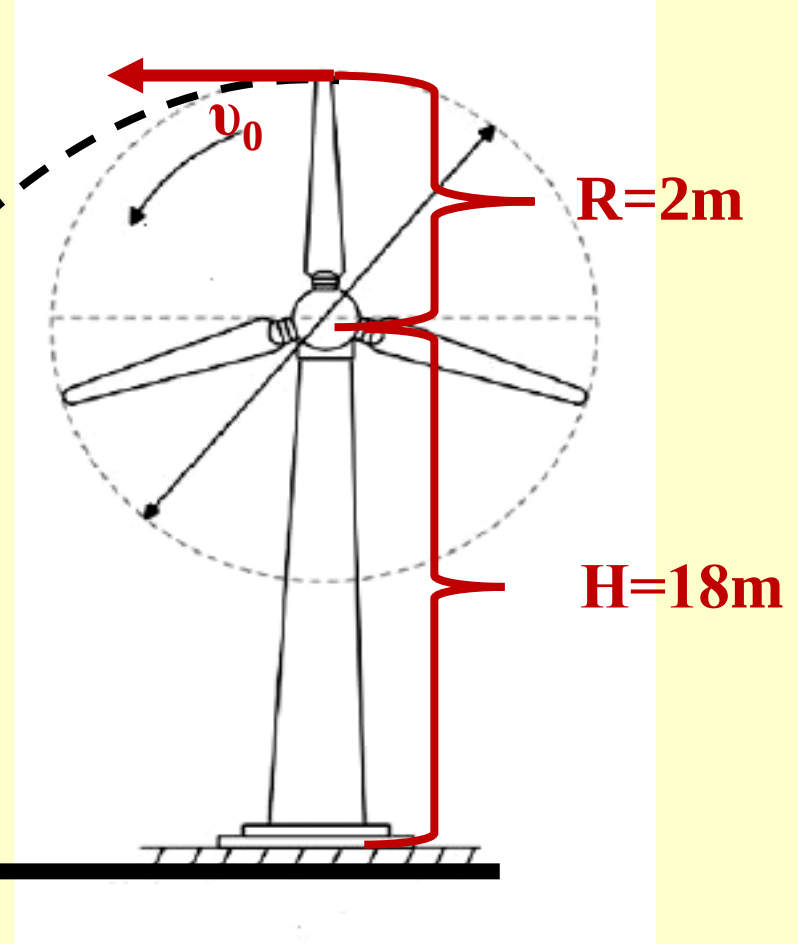
Δ4) Μετά από πόσο χρονικό διάστημα θα φτάσει στο έδαφος και με ποιά ταχύτητα;

(Δ_1)

$$f = \frac{N}{t} = \frac{60\sigma\tau\rho.}{60\text{ s}} \Rightarrow \boxed{f = 1\text{ Hz}}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = 2\pi \text{ r/s}}$$



(Δ_2)

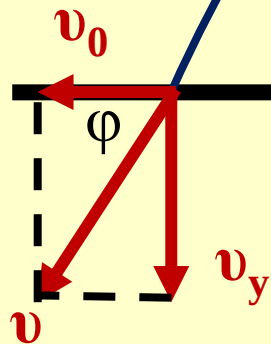
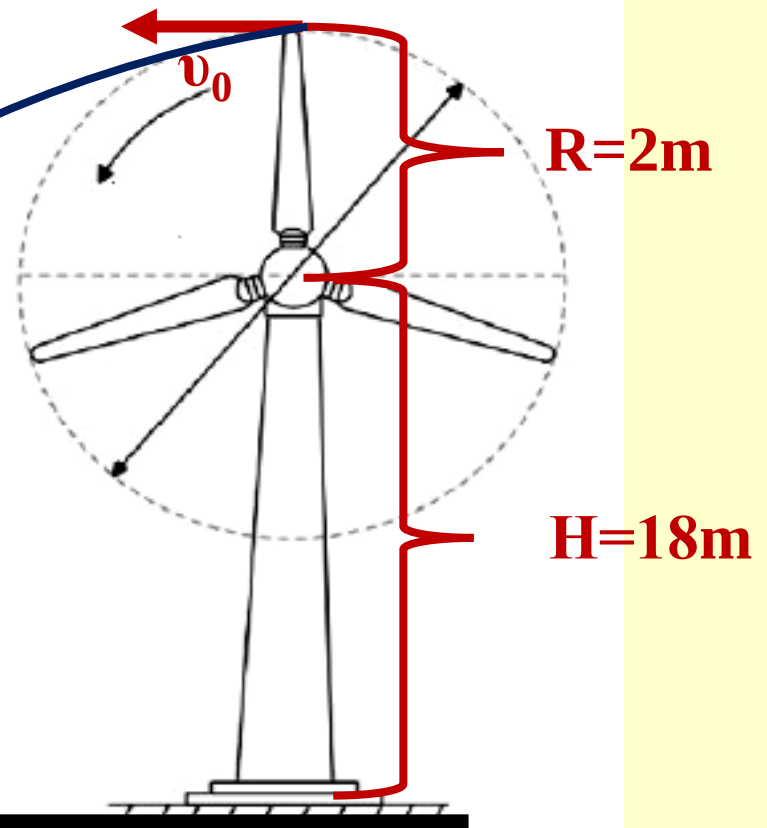
$$v_0 = \omega \cdot R \Rightarrow v_0 = 2\pi \cdot 2 \Rightarrow \boxed{v_0 = 4\pi \text{ m/s}}$$

$$\alpha_\kappa = \frac{v_0^2}{R} = \frac{16\pi^2}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha_\kappa = 80 \text{ m/s}^2}$$

(Δ_3)

Η κίνηση του κομματιού
λάσπης είναι:

Οριζόντια Βολή



(Δ_4)

$$t = \sqrt{\frac{2(H + R)}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} \Rightarrow \boxed{t = 2 \text{ s}}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} = \sqrt{160 + 400}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = 4\sqrt{35} \text{ m/s}},$$

$$\epsilon\phi\phi = \frac{v_y}{v_0} = \frac{20}{4\pi} = \frac{5}{\pi}$$

- 3.** Σώμα βρίσκεται στην οριζόντια τaráτσα ουρανοξύστη και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $r = \frac{5}{\pi}$ m με περίοδο $T = \frac{1}{2}$ s. Να βρείτε:

Δ1) Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος.

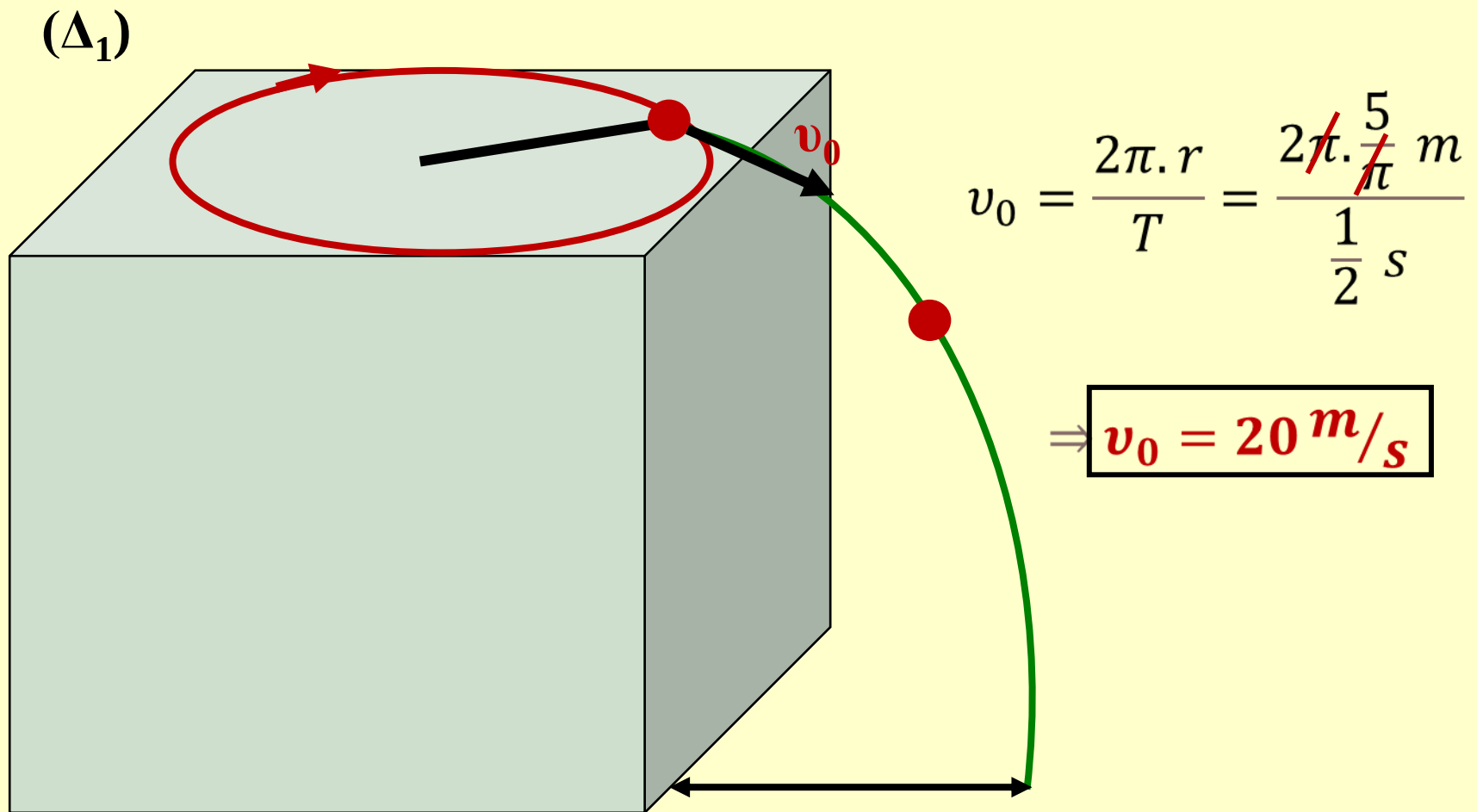
Κάποια χρονική στιγμή το σκοινί το οποίο κρατάει το σώμα στην κυκλική τροχιά κόβεται, με αποτέλεσμα αυτό να διαφύγει εκτελώντας οριζόντια βολή. Να βρείτε:

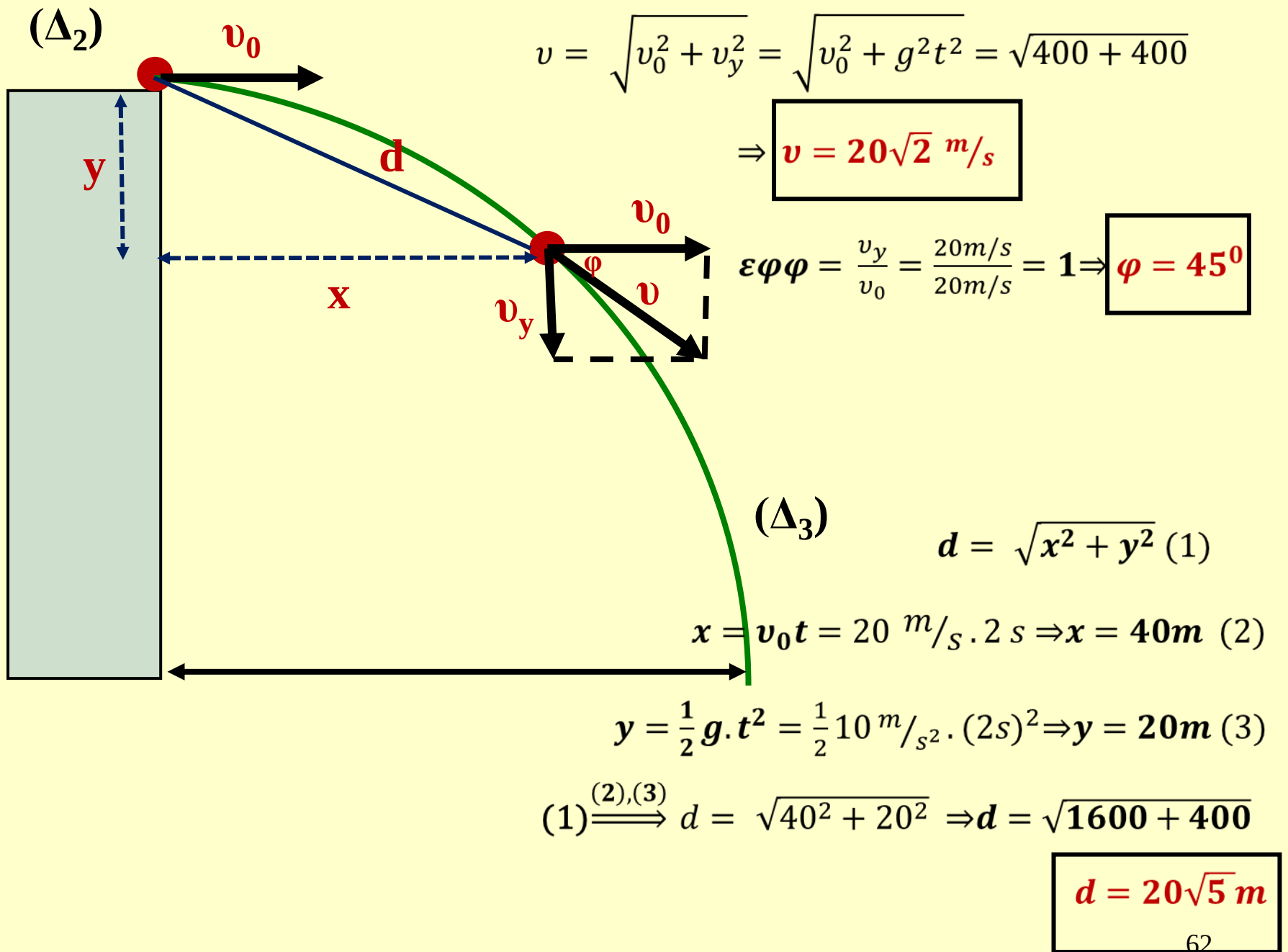
Δ2) Την ταχύτητα του σώματος κατά μέτρο και κατεύθυνση 2 s αφού εγκαταλείψει την οροφή της πολυκατοικίας.

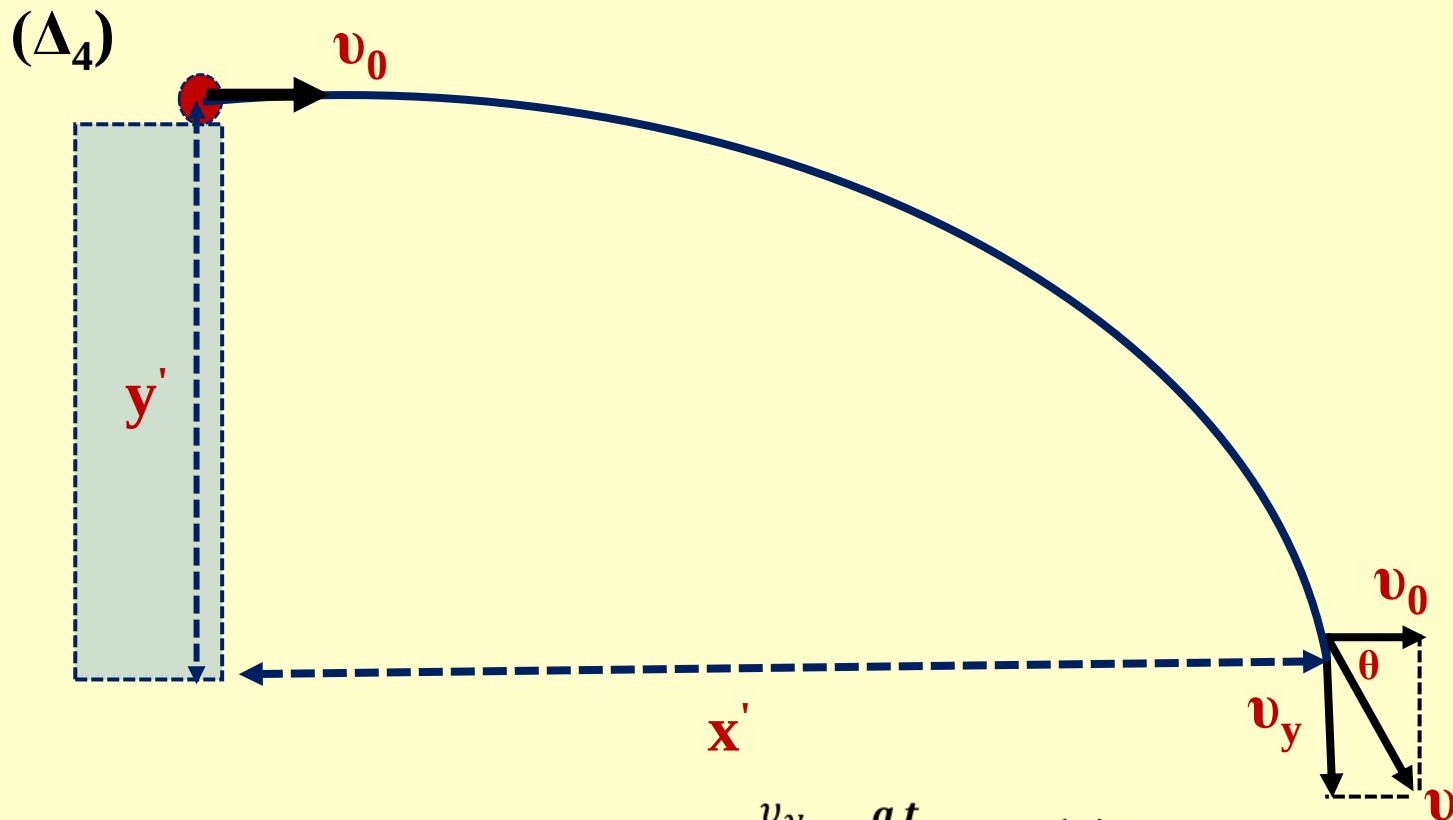
Δ3) Την απόσταση από το σημείο που διέφυγε από την τaráτσα μέχρι το σημείο που βρίσκεται τη χρονική στιγμή που περιγράφεται στο ερώτημα Δ2.

Δ4) Παρατηρούμε ότι το σώμα πέφτει στο οριζόντιο έδαφος με γωνία ως προς αυτό θ για την οποία ισχύει: $\varepsilon\phi\theta = 2$. Να βρείτε το πηλίκο της κατακόρυφης απόστασης του σημείου βολής από το έδαφος προς τη μέγιστη οριζόντια μετατόπιση (βεληνεκές) του σώματος.

Δίδεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στη επιφάνειας της γης $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, και ότι κάθε είδους τριβή όπως και η αντίσταση από τον αέρα θεωρούνται αμελητέες.







$$\varepsilon \varphi \theta = \frac{v_y}{v_0} \Rightarrow \frac{g \cdot t}{v_0} = 2 \quad (1)$$

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\frac{1}{2} g \cdot t^2}{v_0 \cdot t} = \frac{\frac{1}{2} g \cdot t \cdot \cancel{t}}{v_0 \cdot \cancel{t}} \Rightarrow \frac{y'}{x'} = \frac{\frac{1}{2} g \cdot t}{v_0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{y'}{x'} = \frac{1}{2} \cdot 2$$

$$\frac{y'}{x'} = 1$$

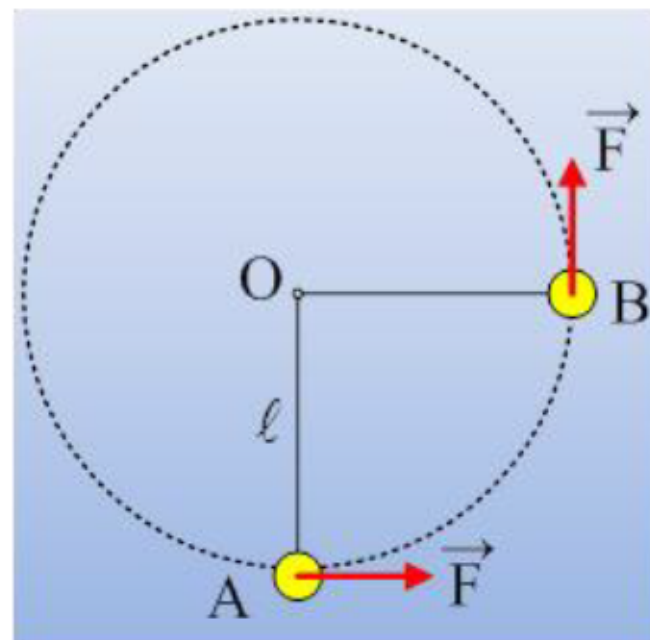


Κυκλική κίνηση

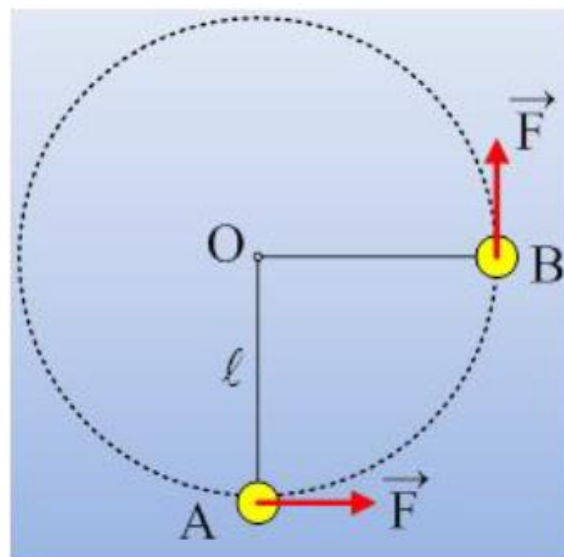
Προβλήματα

(Β' Ομάδα)

1. Ένα σώμα μάζας 2kg ηρεμεί δεμένο στο άκρο κατακόρυφου νήματος μήκους $\ell=1\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο O . Σε μια στιγμή, ασκούμε στο σώμα μια δύναμη F , εφαπτομενικά όπως στο σχήμα, μέχρι να φτάσει στη θέση B , όπου το νήμα γίνεται οριζόντιο. Στη θέση B η δύναμη F παύει να ασκείται, ενώ το έργο της για την παραπάνω μετακίνηση είναι ίσο με 100J .



- i) Να υπολογίσετε το έργο του βάρους για την κίνηση από τη θέση A στη θέση B .
- ii) Πόση είναι η κινητική ενέργεια του σώματος στη θέση B ;
- iii) Να υπολογίσετε την τάση του νήματος στις θέσεις A και B .
- iv) Ποια η ελάχιστη κινητική ενέργεια που θα αποκτήσει στη συνέχεια κατά την περιστροφή του το σώμα και πόση θα είναι τη στιγμή αυτή η τάση του νήματος;



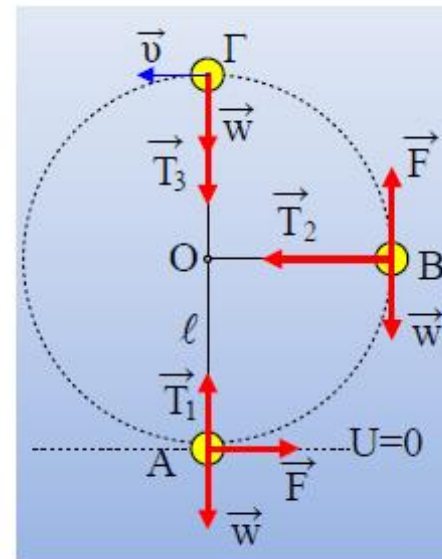
Απάντηση:

- i) Το βάρος είναι μια συντηρητική δύναμη και το έργο του δεν εξαρτάται από τη διαδρομή, αλλά εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση:

$$W_w = U_A - U_B$$

Όπου U_A η δυναμική ενέργεια στη θέση A και U_B στη θέση B. Αν τώρα θεωρήσουμε μηδενική τη δυναμική ενέργεια στο A, θα έχουμε:

$$W_w = U_A - U_B = -mgh = -mg\ell = -2 \cdot 10 \cdot 1J = -20J$$



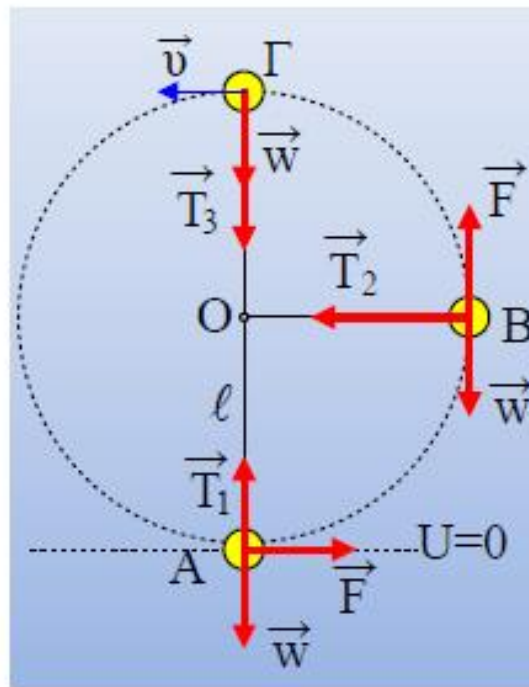
ii) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε) για την κίνηση του σώματος από τη θέση Α μέχρι τη θέση Β:

$$K_B - K_A = W_F + W_w + W_T$$

$$\begin{aligned} K_B &= 100J - 20J + 0 \\ &= 80J \end{aligned}$$

$$K_A = 0,$$

$$W_T = 0 \text{ (Η } \mathbf{T} \text{ συνεχώς κάθετη στη μετατόπιση)}$$



iii) Πριν ασκηθεί η δύναμη F , το σώμα ισορροπεί στην θέση A , οπότε $\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow T_1 = W = mg = 20\text{N}$.

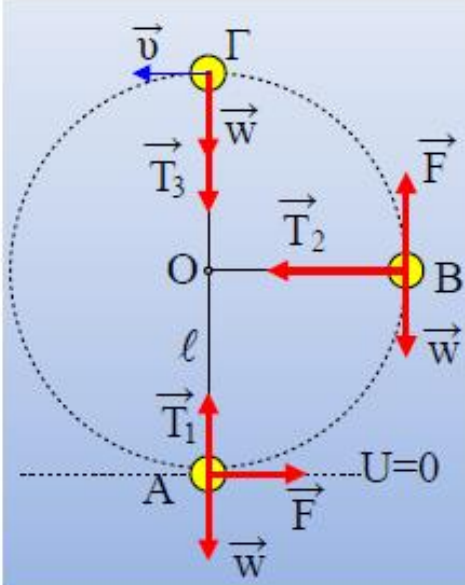
Αμέσως μετά την εξάσκηση της δύναμης το σώμα αρχίζει να κινείται σε κυκλική τροχιά, οπότε:

$$\Sigma F_R = m \frac{v^2}{R} \rightarrow T_1 - mg = m \frac{v^2}{R}$$

Αλλά στη θέση A , αμέσως μετά την άσκηση της δύναμης F , η ταχύτητα είναι μηδενική και η παραπάνω εξίσωση δίνει $T_1 - mg = 0 \rightarrow T_1 = mg = 20\text{N}$.

Βλέπουμε δηλαδή ότι η εξάσκηση της εφαπτομενικής δύναμης F , δεν επηρεάζει την τάση του νήματος.

Αλλά και για τη θέση B θα έχουμε:



$$\Sigma F_R(B) = \frac{m \cdot v_B^2}{l}$$

$$T_2 = \frac{2 \cdot K_B}{l}$$

$$= 160N$$

iv) Για όσο χρόνο το σώμα ανέρχεται η κινητική ενέργεια του σώματος θα μειώνεται. Συνεπώς η κινητική ενέργεια γίνεται ελάχιστη, όταν το σώμα φτάσει (αν φτάσει) στο ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς. Κατά τη διάρκεια της παραπάνω κίνησης η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα και παράγει έργο, είναι το βάρος, δύναμη συντηρητική, συνεπώς η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή.

$$K_B + U_B = K_\Gamma + U_\Gamma$$

$$K_B + mg\ell = K_\Gamma + mg \cdot 2\ell \rightarrow$$

$$\Sigma F_{R,\Gamma} = \frac{m \cdot v_\Gamma^2}{l} \Rightarrow T_3 + W = \frac{m \cdot v_\Gamma^2}{l}$$

$$\Rightarrow T_3 = \frac{m \cdot v_\Gamma^2}{l} - W = \frac{2 \cdot K_\Gamma}{l} - m \cdot g$$

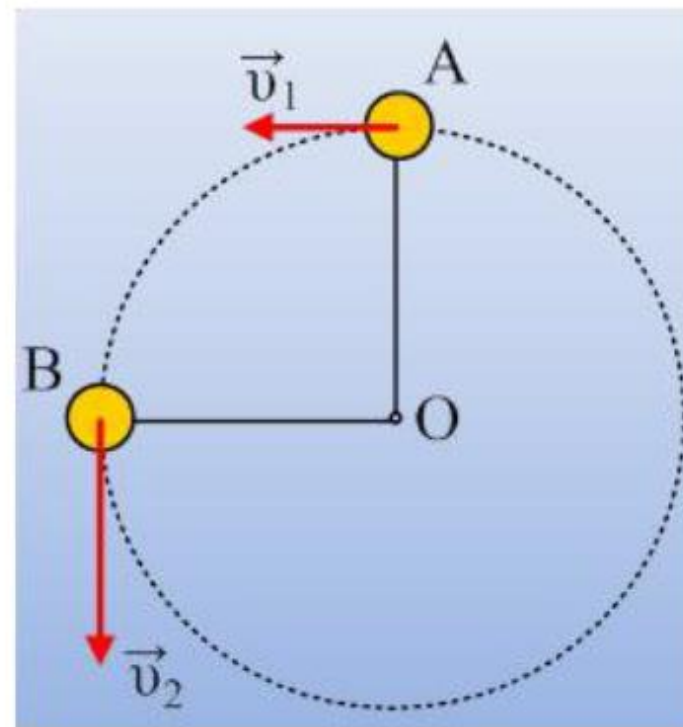
$$K_\Gamma = K_B - m \cdot g \cdot l$$

$$= 80J - 20J$$

$$= 60J$$

$$\Rightarrow T_3 = \frac{2 \cdot 60J}{1m} - 2Kg \cdot 10m/s^2 \Rightarrow \mathbf{T_3 = 100N}$$

- 2.** Ένα σώμα μάζας $0,5\text{kg}$ εκτελεί κατακόρυφο κύκλο κέντρου O , δεμένο στο άκρο νήματος μήκους $\ell=1\text{m}$ περνώντας από το ανώτερο σημείο A της τροχιάς του με ταχύτητα $v_1=4\text{m/s}$.
- i) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος στο σημείο B της τροχιάς του, όπου το νήμα γίνεται οριζόντιο.
 - ii) Να υπολογιστεί το μέτρο της τάσης του νήματος, στις θέσεις A και B .
 - iii) Να βρεθούν μεταξύ των δύο παραπάνω θέσεων:
 - α) Η μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας.
 - β) Η μεταβολή της ταχύτητας του σώματος.
 - iv) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του σώματος στο σημείο B .
- Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και $g=10\text{m/s}^2$.

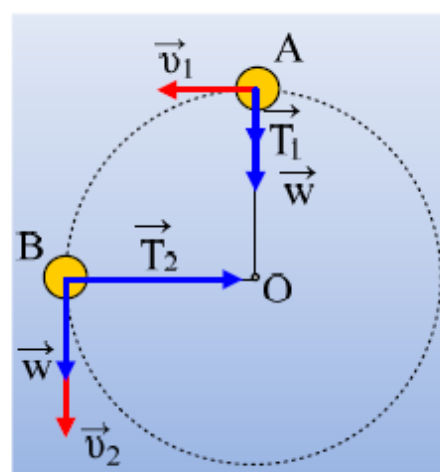


- i) Κατά την περιστροφή του σώματος, η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, το οποίο είναι συντηρητική δύναμη, οπότε η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή. Θεωρώντας λοιπόν το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο O της τροχιάς ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας παίρνουμε:

$$K_A + U_A = K_B + U_B \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mg\ell = \frac{1}{2}mv_2^2 \rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g\ell} = \sqrt{4^2 + 2 \cdot 10 \cdot 1} \text{ m/s} = 6 \text{ m/s}$$



- ii) Στο παραπάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στις θέσεις A και B. Η συνισταμένη των δυνάμεων στη διεύθυνση της ακτίνας του κύκλου, είναι ίση με την κεντρομόλο δύναμη:

$$\text{Θέση A: } \Sigma F = m \frac{v^2}{R} \rightarrow T_1 + mg = m \frac{v_1^2}{\ell} \rightarrow$$

$$T_1 = m \frac{v_1^2}{\ell} - mg = 0,5 \frac{4^2}{1} \text{ N} - 0,5 \cdot 10 \text{ N} = 3 \text{ N}$$

$$\text{Θέση B: } \Sigma F = m \frac{v^2}{R} \rightarrow T_2 = m \frac{v_2^2}{\ell}$$

$$T_2 = m \frac{v_2^2}{\ell} = 0,5 \frac{6^2}{1} \text{ N} = 18 \text{ N}$$

iii) α) Η μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας του σώματος είναι:

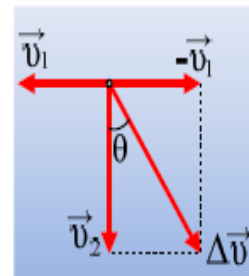
$$\Delta|v| = |v_2| - |v_1| = 6\text{m/s} - 4\text{m/s} = 2\text{m/s}$$

β) Η αντίστοιχη μεταβολή της ταχύτητας θα είναι:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$$

Οπότε με βάση το διπλανό σχήμα, αφού τα διανύσματα $\vec{v}_2$ και $-\vec{v}_1$ είναι κάθετα, θα έχουμε:

$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} \text{ m/s} = \sqrt{52} \text{ m/s}$$



Ενώ η κατεύθυνση της μεταβολής της ταχύτητας σχηματίζει με την κατακόρυφη διεύθυνση (με την τα-

$$\text{χύτητα } v_2) \text{ γωνία } \theta, \text{ όπου } \varepsilon\varphi\theta = \frac{|-\vec{v}_1|}{v_2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

iv) Είδαμε προηγουμένως ότι στη θέση Β, η κεντρομόλος δύναμη είναι η τάση του νήματος. Αλλά τότε το βάρος, ποιο ρόλο παίζει;

Και στην κατακόρυφη διεύθυνση (στην διεύθυνση της ταχύτητας) το σώμα αποκτά επιτάχυνση, η οποία έχει σαν αποτέλεσμα την μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας. Έτσι έχουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας είναι:

$$\frac{\Delta|v|}{\Delta t} = a_\varepsilon = \frac{\Sigma F_\varepsilon}{m} = \frac{mg}{m} = g = 10\text{m/s}^2$$