

1. Γραμμική Αρμονική Ταλάντωση

ΘΕΩΡΙΑ 1

Όταν ένα σύστημα κάνει γ.α.τ. να αποδείξετε τη σχέση:

$$F = -D \cdot x$$

Απόδειξη

Αντικαθιστώντας τη σχέση της επιτάχυνσης $a = -\omega^2 x$

στο Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής $F = m \cdot a$

παίρνουμε: $F = -m \cdot \omega^2 \cdot x$

Η ποσότητα $m \cdot \omega^2$ είναι σταθερή, χαρακτηριστική για κάθε ταλαντωτή συμβολίζεται δε D και λέγεται σταθερά της ταλάντωσης ή σταθερά επαναφοράς.

Άρα η παραπάνω εξίσωση γράφεται: $F = -D \cdot x$

Το πρόσημο (-) δείχνει ότι η φορά της συνισταμένης δύναμης είναι *αντίθετη* από τη φορά της απομάκρυνσης, δηλαδή έχει φορά προς τη θέση ισορροπίας γι' αυτό λέγεται και *δύναμη επαναφοράς*.

ΘΕΩΡΙΑ 2

Σε σύστημα που κάνει γ.α.τ. να αποδείξετε τη σχέση που δίνει την περίοδο ταλάντωσής του.

Απόδειξη

Από τις σχέσεις $D = m \cdot \omega^2$ και $\omega = 2\pi / T$ παίρνουμε $D = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$ η οποία λύνεται ως

προς T που είναι η περίοδος του απλού ταλαντωτή. $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$

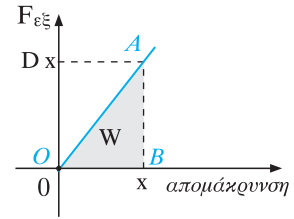
ΘΕΩΡΙΑ 3

Σε σύστημα που κάνει γ.α.τ. να αποδείξετε τη σχέση $U = \frac{1}{2} D x^2$ που δίνει την δυναμική ενέργεια της ταλάντωσής του.

Απόδειξη

Για να εκτρέψουμε ένα ταλαντωτή από τη Θ.Ι. του πρέπει να ασκήσουμε δύναμη $F_{\text{εξωτ}}$ αντίθετη της δύναμης επαναφοράς, δηλαδή της μορφής: $F_{\text{εξωτ}} = D \cdot x$

Η δύναμη αυτή είναι μεταβλητού μέτρου άρα το έργο της υπολογίζεται γραφικά από το εμβαδό του γραμμωσκιασμένου τμήματος του διαγράμματος $F_{\text{εξωτ}} = f(x)$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



$$W = (\text{OAB}) = \frac{1}{2} Dx \cdot x = \frac{1}{2} Dx^2$$

Μέσω του έργου W της δύναμης $F_{\text{εξωτ}}$ μεταφέρεται ενέργεια από τον εξωτερικό παράγοντα στο σύστημα η οποία αποθηκεύεται ως δυναμική ενέργεια.

ΘΕΩΡΙΑ 4

Σε σύστημα που κάνει γ.α.τ. να δικαιολογήσετε ότι:

$$K + U = \text{σταθ.}$$

Απόδειξη

Αν λάβουμε υπόψη μας ότι:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0) \quad \text{και} \quad v = \omega \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0)$$

οι σχέσεις $K = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ και $U = \frac{1}{2} D \cdot x^2$ γράφονται:

$$K = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \phi_0) \quad \text{και} \quad U = \frac{1}{2} D \cdot A^2 \cdot \eta\mu^2(\omega t + \phi_0)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις και λαμβάνοντας υπ' όψη ότι: $D = m \cdot \omega^2$ και $\sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \phi_0) + \eta\mu^2(\omega t + \phi_0) = 1$ προκύπτει ότι:

$$K + U = \frac{1}{2} D \cdot x^2 = E_{\text{ολ}}$$

ΘΕΩΡΙΑ 5

Να αποδείξετε ότι η ταχύτητα του ταλαντωτή σε συνάρτηση με την απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας του, έχει αλγεβρική τιμή που δίνεται από την εξίσωση:

$$v = \pm \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

Απόδειξη

i. Η σχέση αυτή αποδεικνύεται με Α.Δ.Ε.Τ. $U + K = E_{\text{ολ}} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2} D \cdot x^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} D \cdot A^2 \Leftrightarrow m \cdot \omega^2 \cdot x^2 + m \cdot v^2 = m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \quad \text{ή}$$

$$\omega^2 \cdot x^2 + v^2 = \omega^2 \cdot A^2 \Leftrightarrow v^2 = \omega^2 \cdot (A^2 - x^2)$$

ii. Επίσης η σχέση αποδεικνύεται με τις εξισώσεις:

$$x = A \cdot \eta \mu(\omega t + \phi_0) \text{ και } v = \omega \cdot A \cdot \sigma \upsilon \nu(\omega t + \phi_0)$$

Υψώνουμε τις σχέσεις στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη.

$$\text{Τελικά παίρνουμε: } \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 \cdot A^2} = \eta \mu^2(\omega t + \phi_0) + \sigma \upsilon \nu^2(\omega t + \phi_0) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 \cdot A^2} = 1 \Leftrightarrow v^2 = \omega^2 \cdot (A^2 - x^2)$$

ΘΕΩΡΙΑ 6

Η περίοδος μιας φθίνουσας ταλάντωσης είναι T και το πλάτος της ακολουθεί τον νόμο: $A_n = A_0 e^{-\Lambda t}$, $t = NT$.

α. Να δείξετε ότι ο λόγος δύο διαδοχικών τιμών του πλάτους

$$\text{της ταλάντωσης είναι σταθερός: } \frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\Lambda T} = \text{σταθ.}$$

β. Να δείξετε ότι ο λόγος δύο διαδοχικών τιμών της ενέργειας

$$\text{της ταλάντωσης είναι σταθερός: } \frac{E_n}{E_{n+1}} = e^{2\Lambda T} = \text{σταθ.}$$

Απόδειξη

$$\alpha. \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_0 e^{-\Lambda n T}}{A_0 e^{-\Lambda(n+1)T}} \Leftrightarrow \frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{-\Lambda n T + \Lambda(n+1)T} \Leftrightarrow \frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\Lambda T}$$

$$\beta. \frac{E_n}{E_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2} D A_n^2}{\frac{1}{2} D A_{n+1}^2} \Leftrightarrow \frac{E_n}{E_{n+1}} = \left(\frac{A_n}{A_{n+1}} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{E_n}{E_{n+1}} = (e^{\Lambda T})^2 = e^{2\Lambda T}$$

ΘΕΩΡΙΑ 7

Να βρείτε την εξίσωση της σύνθετης κίνησης που κάνει ένα σώμα, το οποίο εκτελεί ταυτόχρονα δύο γ.α.τ. με εξισώσεις:

$$x_1 = A \cdot \eta \mu \omega_1 t \text{ και } x_2 = A \cdot \eta \mu \omega_2 t$$

Ποια είναι η συχνότητα της σύνθετης κίνησης;

Απόδειξη

Η απομάκρυνση x της συνισταμένης κίνησης είναι:

$$x = x_1 + x_2 \Leftrightarrow x = A \cdot (\eta \mu \omega_1 t + \eta \mu \omega_2 t) \quad (1)$$

Από την τριγωνομετρία είναι γνωστό ότι: $\eta \mu \alpha + \eta \mu \beta = 2 \sigma \upsilon \nu \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \eta \mu \frac{\alpha - \beta}{2}$

Άρα: $\eta\mu\omega_1 t + \eta\mu\omega_2 t = 2 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$ (2)

Επομένως η σχέση (1) λόγω της (2) γράφεται:

$$x = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$
 (3)

Τον παράγοντα $2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$ μπορούμε να τον επιλέξουμε ως πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης και η εξίσωση (3) να γραφεί:

$$x = A' \cdot \eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$
 (4)

Η εξίσωση (4) περιγράφει περιοδική κίνηση, όχι γραμμική αρμονική, που έχει συχνότητα που είναι σχεδόν ίση με τις συχνότητες των συνιστωσών ταλα-ντώσεων. Συγκεκριμένα είναι ο μέσος όρος των συνιστωσών ταλαντώσεων.

Δηλαδή: $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$

ΘΕΩΡΙΑ 8

Τι ονομάζουμε περίοδο διακροτήματος; Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει την περίοδο του διακροτήματος.

Απόδειξη

Ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δυο διαδοχικών μηδενισμών (ή μεγίστων τιμών) του πλάτους, λέγεται περίοδος του διακροτήματος και συμβολίζουμε με T_δ .

Από τη σχέση (4) γίνεται το πλάτος $A'=0$ όταν:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t = 0 \Leftrightarrow \frac{|\omega_1 - \omega_2| t}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

Οι δύο πρώτες λύσεις για $\kappa=0$ και $\kappa=1$ είναι:

$$\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2} t_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2} t_2 = \frac{3\pi}{2}$$

Η περίοδος T_δ του διακροτήματος είναι:

$$T_\delta = \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} \Leftrightarrow T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|}$$