Μερικές ερωτήσεις στις φθίνουσες και στις εξαναγκασμένες

Α) Φθίνουσα Ταλάντωση λόγω δύναμης αντίστασης $F_{αντ}$=-bυ

Θεωρούμε ότι ο ταλαντωτής εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση υπό την επίδραση δύναμης επαναφοράς $F_{επ}$=- Dx και δύναμης αντίστασης $F_{αντ}$=-bυ. Σε κάθε θέση της τροχιάς ισχύει:

$$\Sigma F = F_{\varepsilon\pi} + F_{\alpha\nu\tau} \Leftrightarrow ma = -Dx - b\upsilon \quad (1)$$

Ερώτηση 1

Στη διάρκεια μιας περιόδου της φθίνουσας ταλάντωσης, ο ταλαντωτής αποκτά μέγιστη (τοπικά) ταχύτητα όταν διέρχεται από τη θέση χ=0;

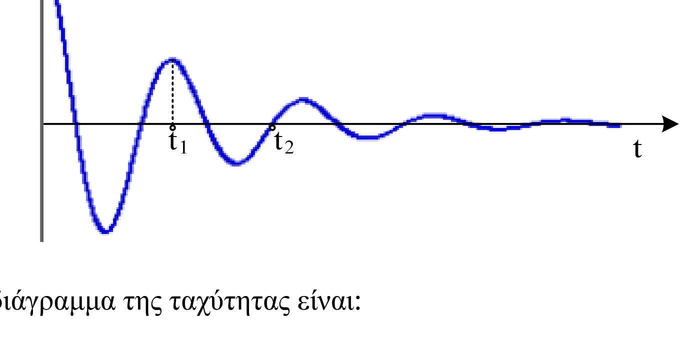
Απάντηση: ΟΧΙ

Αποκτά μέγιστη (τοπικά) ταχύτητα στη θέση όπου: $\frac{d\upsilon}{dt} = a = 0$

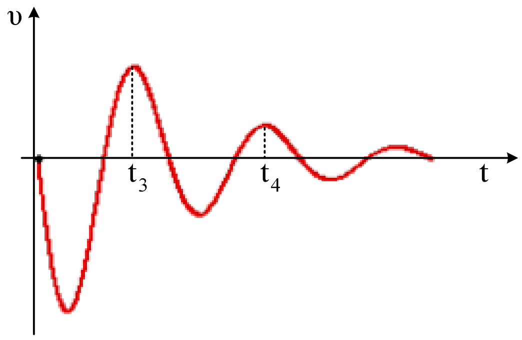
Λόγω της (1) έχουμε: $0 = -Dx - b\upsilon_{\max} \Leftrightarrow x = \frac{-b\upsilon_{\max}}{D}$

Όταν κινείται προς τη θέση χ=0, με $υ_{max}$ <0 τότε χ>0, ενώ όταν κινείται με $υ_{max}$ >0 τότε χ<0

Έστω λοιπόν ότι η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης από την αρχική θέση ισορροπίας y=0 σε συνάρτηση με το χρόνο, για ένα σώμα το οποίο εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση υπό την επίδραση δύναμης επαναφοράς $F_{επ}$=- Dy και δύναμης αντίστασης $F_{αντ}$=-bυ, δίνεται από το επόμενο σχήμα



Έστω ότι το αντίστοιχο διάγραμμα της ταχύτητας είναι:



Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι χρονικές στιγμές t_2 στο διάγραμμα y-t και t_4 στο διάγραμμα υ-t είναι διαφορετικές.

Ερώτηση 2

Όταν η ενέργεια ταλάντωσης μηδενιστεί, ο ταλαντωτής θα σταματήσει στη θέση χ=0;

Απάντηση: ΝΑΙ

Ο ταλαντωτής θα σταματήσει όταν υ=0 και $\frac{d\upsilon}{dt} = a = 0$

Λόγω της (1): $0 = -Dx + 0 \Leftrightarrow x = 0$

Προσοχή: Όταν η ταλάντωση είναι φθίνουσα λόγω σταθερής δύναμης αντίστασης όπως η τριβή, τότε, όταν η ενέργεια ταλάντωσης μηδενιστεί, ο ταλαντωτής δε θα σταματήσει στη θέση χ=0, αλλά στη θέση όπου: $0 = -Dx + T \Leftrightarrow x = \frac{T}{D}$

Ερώτηση 3

Στη διάρκεια της φθίνουσας ταλάντωσης ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση: $\frac{dU}{dt} = Dx \cdot \upsilon$

Απάντηση: ΝΑΙ

Η δυναμική ενέργεια οφείλεται στη δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο σώμα και ισχύει:

$$\frac{dU}{dt} = -P_{F_{\varepsilon\pi}} = -F_{\varepsilon\pi} \cdot \upsilon = -(-Dx) \cdot \upsilon \Rightarrow \frac{dU}{dt} = Dx \cdot \upsilon$$

Ερώτηση 4

Στη διάρκεια της φθίνουσας ταλάντωσης ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = ma \cdot \upsilon$$

Απάντηση: ΝΑΙ

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας οφείλεται στο έργο της συνισταμένης δύναμης, άρα:

$$\frac{dK}{dt} = P_{\Sigma F} = \Sigma F \cdot \upsilon = ma \cdot \upsilon$$

Προσοχή: Στη φθίνουσα **δεν** ισχύει ότι $a = -\omega^2 x$, οπότε αντίστοιχα **δεν** ισχύει ότι

$$\frac{dK}{dt} = -m\omega^2 x \cdot \upsilon$$

Β) Εξαναγκασμένη Ταλάντωση

Θεωρούμε ότι ο ταλαντωτής εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση δύναμης επαναφοράς $F_{\varepsilon\pi}$=-Dx , δύναμης αντίστασης $F_{\alpha\nu\tau}$=-bυ και της περιοδικής δύναμης του διεγέρτη $F_\delta = F_{\max}\eta\mu(\omega t + \theta)$. Ο ταλαντωτής εκτελεί αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα ω, τη γωνιακή συχνότητα του διεγέρτη.

Οι συναρτήσεις απομάκρυνσης-χρόνου (χ-t), ταχύτητας-χρόνου (υ-t), επιτάχυνσης-χρόνου (α-t), δίνονται από τις εξισώσεις:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$$

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$$

Σε κάθε θέση της τροχιάς ισχύει:

$$\Sigma F = ma \Leftrightarrow F_{\varepsilon\pi} + F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} = ma \Leftrightarrow -Dx - b\upsilon + F_{\delta} = m(-\omega^2 x) \quad (2)$$

αφού η επιτάχυνση συνδέεται με την απομάκρυνση με τη σχέση $a = -\omega^2 x$

Ερώτηση 1

Ο στιγμιαίος ρυθμός προσφοράς ενέργειας από το διεγέρτη είναι ίσος με το στιγμιαίο ρυθμό απώλειας ενέργειας λόγω της δύναμης αντίστασης;

Απάντηση: ΟΧΙ

Σε κάθε θέση της τροχιάς ισχύει:

$$\Sigma F = ma \Leftrightarrow F_{\varepsilon\pi} + F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} = ma \Leftrightarrow -Dx + F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} = m(-\omega^2 x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -m\omega_o^2 x + F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} = -m\omega^2 x \Leftrightarrow F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} = m\omega_o^2 x - m\omega^2 x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} = m(\omega_o^2 - \omega^2)x \quad (2\alpha)$$

Προσοχή Η σταθερά επαναφοράς D συνδέεται με τη γωνιακή ιδιοσυχνότητα ω_o του συστήματος και όχι με τη γωνιακή συχνότητα του διεγέρτη : $D = m\omega_o^2$

Αν $\omega \neq \omega_o$ τότε σε κάθε θέση $x \neq 0$:

$$(2\alpha) \Rightarrow F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} \neq 0 \Leftrightarrow F_{\delta} \neq -F_{\alpha\nu\tau} \Leftrightarrow F_{\delta}\upsilon \neq -F_{\alpha\nu\tau}\upsilon \Leftrightarrow P_{F_{\delta}} \neq -P_{F_{\alpha\nu\tau}}$$

Αν $\omega \neq \omega_o$ τότε ΜΟΝΟ στη θέση $x = 0$:

$$(2\alpha) \Rightarrow F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} = 0 \Leftrightarrow F_{\delta} = -F_{\alpha\nu\tau} \Leftrightarrow F_{\delta}\upsilon = -F_{\alpha\nu\tau}\upsilon \Leftrightarrow P_{F_{\delta}} = -P_{F_{\alpha\nu\tau}}$$

Αν $\omega = \omega_o$ τότε σε κάθε θέση $x \neq 0$:

$$(2\alpha) \Rightarrow F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} = 0 \Leftrightarrow F_{\delta} = -F_{\alpha\nu\tau} \Leftrightarrow F_{\delta}\upsilon = -F_{\alpha\nu\tau}\upsilon \Leftrightarrow P_{F_{\delta}} = -P_{F_{\alpha\nu\tau}}$$

Δηλαδή μόνο αν το σύστημα βρίσκεται σε συντονισμό, ο στιγμιαίος ρυθμός προσφοράς ενέργειας από το διεγέρτη είναι ίσος με το στιγμιαίο ρυθμό απώλειας ενέργειας λόγω της δύναμης αντίστασης.

Ερώτηση 2

Η μέγιστη κινητική και η μέγιστη δυναμική ενέργεια στη διάρκεια της περιόδου, είναι ίσες;

Απάντηση: ΟΧΙ

Ισχύει ότι: $K_{max} = \frac{1}{2} m\upsilon_{max}^2 \Leftrightarrow K_{max} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$

αλλά $U_{max} = \frac{1}{2} DA^2 \Leftrightarrow U_{max} = \frac{1}{2} m\omega_o^2 A^2$

Αν $\omega \neq \omega_o$ τότε $K_{max} \neq U_{max}$

Μόνο αν $\omega = \omega_o$ τότε $K_{max} = U_{max}$

Ερώτηση 3

Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι αντίθετος του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής της δυναμικής ενέργειας;

Απάντηση: ΟΧΙ

Για το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = P_{\Sigma F} = \Sigma F \cdot \upsilon = ma \cdot \upsilon \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = -m\omega^2 x \cdot \upsilon$$

Η δυναμική ενέργεια οφείλεται στη δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο σώμα και ισχύει:

$$\frac{dU}{dt} = -P_{F_{\varepsilon\pi}} = -F_{\varepsilon\pi} \cdot \upsilon = -(-Dx) \cdot \upsilon \Rightarrow \frac{dU}{dt} = Dx \cdot \upsilon \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = m\omega_o^2 x \cdot \upsilon$$

Αν $\omega \neq \omega_o$ τότε $\frac{dK}{dt} \neq -\frac{dU}{dt}$

Ερώτηση 4

Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση η ταχύτητα υ και η απομάκρυνση χ, συνδέονται με τη σχέση $\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

Απάντηση: ΝΑΙ

Η σχέση αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι η απομάκρυνση χ και η ταχύτητα υ είναι αρμονικές συναρτήσεις του χρόνου.

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Leftrightarrow \eta\mu(\omega t + \varphi_o) = \frac{x}{A} \Leftrightarrow \eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) = \frac{x^2}{A^2}$$

$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) = \frac{\upsilon}{\omega A} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2}$$

Όμως:

$$\eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \upsilon^2 = \omega^2(A^2 - x^2) \Leftrightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Ερώτηση 5

Α) Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση η ταχύτητα υ και η απομάκρυνση χ, συνδέονται με τη σχέση: $\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$;

Απάντηση: ΝΑΙ

Β) Η σχέση αυτή δηλώνει ότι το άθροισμα κινητικής και δυναμικής σε κάθε θέση είναι ίση με την ολική;

Απάντηση: ΟΧΙ

Η σχέση αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι η απομάκρυνση χ και η ταχύτητα υ είναι αρμονικές συναρτήσεις του χρόνου. Όπως δείξαμε πριν:

$$\eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Leftrightarrow \omega^2 x^2 + \upsilon^2 = \omega^2 A^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

Γ) Η σχέση $\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$ ποια φυσική σημασία έχει;

Απάντηση: ΚΑΜΙΑ

Οι όροι $\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ και $\frac{1}{2}m\omega^2 A^2$ δεν εκφράζουν ούτε τη δυναμική, η οποία συνδέεται με τη δύναμη επαναφοράς $F_{\varepsilon\pi} = -Dx = -m\omega_o^2 x$, ούτε την ολική ενέργεια.

Επιμέλεια

Θοδωρής Παπασγουρίδης