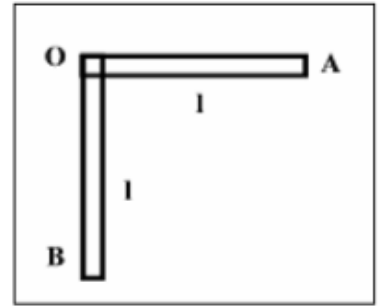


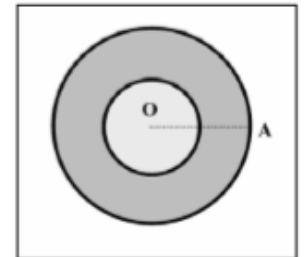
ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ- ΘΝΣΚ

•**B3.7** Η ισοσκελής ορθογώνια γωνιά του σχήματος έχει σκέλη μάζας, m , και μήκους, L και αποτελείται από ομογενείς και ισοπαχείς ράβδους. Η ροπή αδράνειας της κάθε ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της και είναι κάθετος στο μήκος της είναι $I_{cm}=mL^2/12$. Να αντιστοιχηθούν οι ροπές αδράνειας του συστήματος ως προς άξονα περιστροφής που είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας και διέρχεται από το O , I_O και αντίστοιχα διέρχεται από το A , I_A με τα γινόμενα



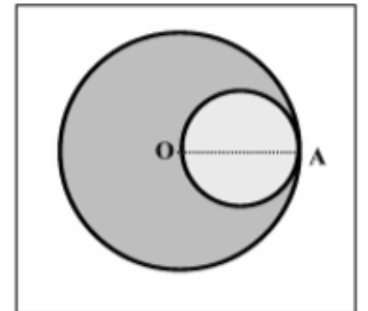
α. $2mL^2/3$, β. $5mL^2/3$ γ. $3mL^2/2$ δ. mL^2

• **B3.8** Ο ομογενής δίσκος (σταθερής πυκνότητας) ακτίνας R και μάζας M του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και περνά από το κέντρο του. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του, O , είναι $I=MR^2/2$. Αφαιρούμε ένα ομόκεντρο κυκλικό δίσκο ακτίνας $r=R/2$. Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου που σχηματίστηκε είναι:



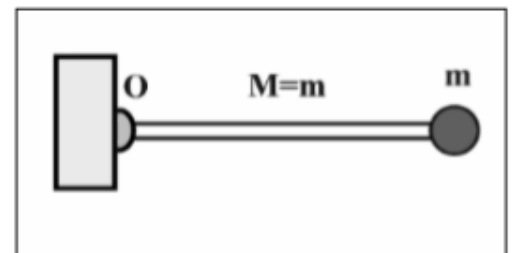
α. $MR^2/8$ β. $7MR^2/6$ γ. $15MR^2/32$

•**B3.16** Ομογενής ισοπαχής δίσκος μάζας m έχει ακτίνα R και ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο και είναι κάθετος σ' αυτόν είναι $I_O=mR^2/2$. Αφαιρούμε από το δίσκο ένα κυκλικό τμήμα ακτίνας $R/2$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ροπή αδράνειας του τμήματος που απομένει ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο, A και είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου είναι.



α. $I=45mR^2/32$ β. $I=35mR^2/32$ γ. $I=55mR^2/32$

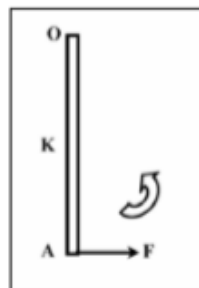
•**B3.26** Λεπτή ομογενής ράβδος μάζας $M=m$, μήκους L μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Στο άλλο άκρο της είναι στερεωμένο σφαιρίδιο με σημειακή μάζα m . Τη χρονική στιγμή που το σύστημα ράβδου – σφαιριδίου αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί από την οριζόντια θέση η ροπή που δέχεται η ράβδος είναι



α. $\frac{1}{2}mgL$ β. $\frac{3}{2}mgL$ γ. $\frac{3}{8}mgL$

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το O είναι $I_O=ML^2/3$

B3.28 Η ομογενής ράβδος βάρους w μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της, O , χωρίς τριβές. Ασκούμε στη ράβδο δύναμη σταθερού μέτρου, F , η διεύθυνση της οποίας είναι συνεχώς κάθετη στη ράβδο. Η ράβδος βρίσκεται αρχικά ακίνητη στην κατακόρυφη θέση και υπό την επίδραση της F αρχίζει να περιστρέφεται, όπως φαίνεται και στο σχήμα. Στο διάστημα της περιστροφής της κατά 90° , η ράβδος αποκτάει μέγιστη ταχύτητα όταν έχει διαγράψει γωνία φ ($\varphi < 90^\circ$) σε σχέση με την κατακόρυφο που διέρχεται από το (O). Το μέτρο της δύναμης F είναι:



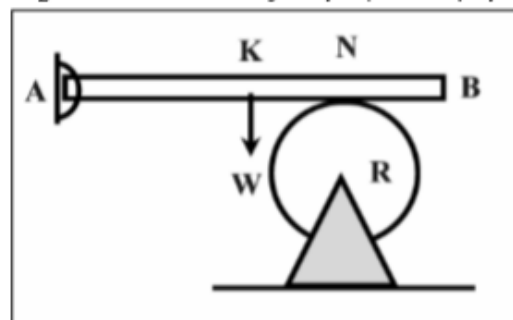
α. $F = mg\eta\mu\varphi$

β. $F = 2mg\eta\mu\varphi$

γ. $F = \frac{mg\eta\mu\varphi}{2}$

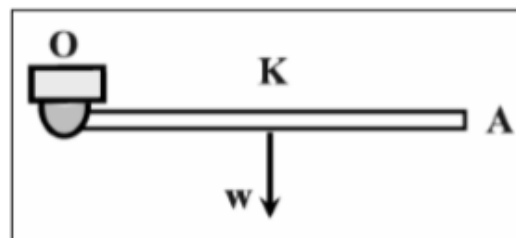
•**G3.8** Η ομογενής ράβδος AB του σχήματος μήκους d και μάζας $M_1 = 3\text{kg}$ παραμένει οριζόντια καθώς στερεώνεται μέσω άρθρωσης A με κατακόρυφο τοίχο και ακουμπά στο πάνω σημείο N ενός κατακόρυφου δίσκου. Η απόσταση AN είναι ίση με $3d/4$. Ο δίσκος έχει ακτίνα $R = 0,5\text{m}$ και μάζα $M_2 = 2\text{kg}$ και ροπή αδράνειας ως προς τον άξονά του $I = M_2 R^2/2$. Ο δίσκος στρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα και τη στιγμή $t_0 = 0$ έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 20\text{rad/s}$. Μεταξύ δοκού και δίσκου ο συντελεστής τριβής ολίσθησης έχει τιμή $\mu = 0,5$. Να βρεθούν:

α. Η δύναμη της τριβής ολίσθησης που αναπτύσσεται μεταξύ δοκού και δίσκου.
 β. Η δύναμη που δέχεται η δοκός από την άρθρωση, A .
 γ. Η χρονική στιγμή που θα σταματήσει ο δίσκος.
 δ. Ο αριθμός των στροφών που θα εκτελέσει ο δίσκος μέχρι να σταματήσει. Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.



α. 10N , β. $10\sqrt{2}\text{N}$, 45° , γ. 1s , δ. $N = 5/\pi$

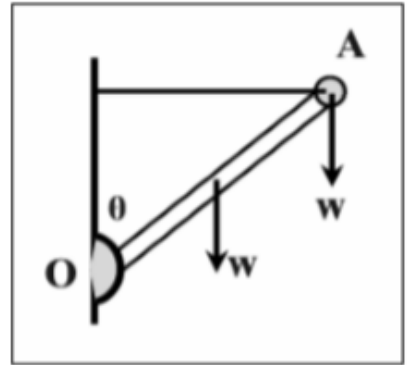
G3.10 Ομογενής ράβδος μήκους $L = 3\text{m}$ και μάζας m μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα της άκρο O και είναι κάθετος σ' αυτήν. Αφήνουμε τη ράβδο ελεύθερη από την οριζόντια θέση. Να υπολογιστούν:



α. Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου και η επιτάχυνση του σημείου K όταν βρίσκεται στην οριζόντια θέση.
 β. Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου και η επιτάχυνση του κέντρου K όταν περνάει από την κατακόρυφη θέση.
 γ. Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου και η επιτάχυνση του σημείου A στη θέση που σχηματίζει γωνία $\theta = 30^\circ$ με την κατακόρυφο που διέρχεται από το σημείο περιστροφής, O .
 δ. Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου τη χρονική στιγμή που θα έχει διαγράψει γωνία 120° από την αρχική της θέση.
 Δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται το κέντρο της K και είναι κάθετος σ' αυτήν $I_K = mL^2/12$ και το $g = 10\text{m/s}^2$.

α. $5\text{rad/s}^2, 7,5\text{m/s}^2$ β. $0, 0$, γ. $2,5\text{rad/s}^2, 7,5\text{m/s}^2$, δ. $-2,5\text{rad/s}^2$

Γ3.18 Ομογενής ράβδος μάζας, m , μήκους L , μπορεί να στρέφεται γύρω από άρθρωση που διέρχεται από το ένα άκρο της, O . Στο άλλο άκρο, A , της ράβδου είναι στερεωμένη σημειακή μάζα, m , και το σύστημα ισορροπεί υπό κλίση $\theta=30^\circ$ με τη βοήθεια νήματος, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Να υπολογιστεί η τάση του νήματος.

β. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής της, O .

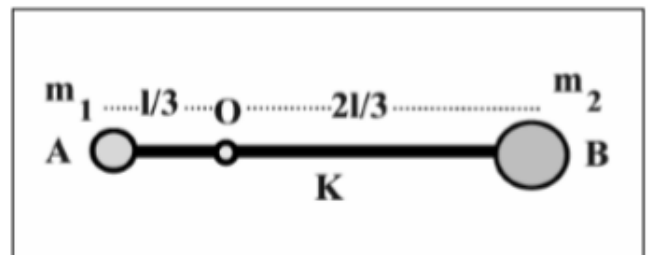
γ. Αν κόψουμε το νήμα που συγκρατεί τη ράβδο να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου τη χρονική στιγμή που αρχίζει η περιστροφή της.

δ. Πόση είναι η γραμμική επιτάχυνση του άκρου, A , τη χρονική στιγμή που η ράβδος φτάνει στην οριζόντια θέση.

Δίνεται για τη ράβδο, $I_{cm}=mL^2/12$ και το g .

$$\alpha. T=mg\sqrt{3}/2, \beta. I_O=4mL^2/3, \gamma. \alpha_{\gamma\gamma}=9g/16L, \delta. a=9g/8$$

•**Γ3.20** Μια ομογενής ράβδος AB μάζας M και μήκους L μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το σημείο O . Το σημείο O απέχει απόσταση $L/3$ από το ένα άκρο A . Στα άκρα A και B είναι στερεωμένες δύο σφαίρες, η σφαίρα Σ_1 μάζας m_1 στο άκρο A και η σφαίρα Σ_2 μάζας m_2



στο άκρο, B . Τη στιγμή που την αφήνουμε ελεύθερη και ενώ ακόμα βρίσκεται στην οριζόντια θέση να υπολογιστούν

α. Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.

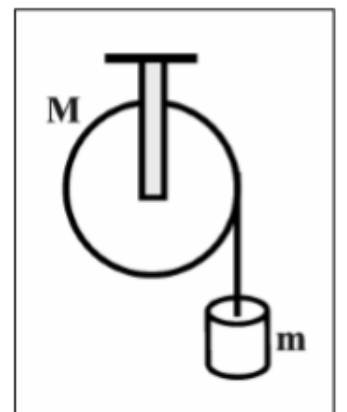
β. Τα μέτρα των δυνάμεων που δέχονται οι σφαίρες από τη ράβδο.

γ. Η ροπή που δέχεται η ράβδος.

Δίνονται το g και ότι $M=2m_1$, $m_2=2m_1$ και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της K και είναι κάθετος σε αυτήν $I_K=ML^2/12$.

$$\alpha. \alpha_{\gamma\gamma}=12g/11L, \beta. F_1=15m_1g/11, F_2=6mg/11, \gamma. \tau=4Mgl/33$$

! Γ3.25 Η ομογενής τροχαλία έχει μάζα $M=6\text{kg}$ και ακτίνα $R=0,5\text{m}$, στηρίζεται σταθερά σε οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της O και είναι τυλιγμένη με αβαρές σχοινί από το άκρο του οποίου κρέμεται σώμα μάζας $m=1\text{kg}$. Αν αφήσουμε το σώμα να πέσει, θεωρήσουμε τις τριβές με τον αέρα αμελητέες και ότι το σχοινί δεν ολισθαίνει μέσα στο λούκι της τροχαλίας να υπολογιστούν:



α. Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.

β. Η επιτάχυνση του σώματος.

γ. Η τάση του σχοινιού.

δ. Η δύναμη που δέχεται ο άξονας περιστροφής της τροχαλίας.

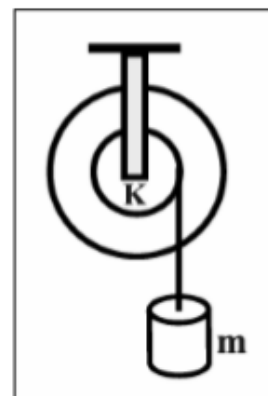
ε. Πόση είναι η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t=4\text{s}$;

στ. Πόσες περιστροφές έχει διαγράψει η τροχαλία στο διάστημα $(0,4\text{s})$;

Δίνονται, $g=10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος σ' αυτήν, $I_O=MR^2/2$. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$, τροχαλία και σώμα ήταν ακίνητα.

$$\alpha. \alpha_{\gamma\gamma}=5\text{rad/s}^2, \beta. a=2,5\text{ m/s}^2, \gamma. T=7,5\text{N}, \delta. F=67,5\text{N}, \epsilon. v=10\text{m/s}, \sigma\tau. N=20/\pi \text{ στρ}$$

Γ3.26 Ακίνητη τροχαλία αποτελείται από δύο κυλίνδρους συγκολλημένους μεταξύ τους, τα κέντρα των οποίων βρίσκονται πάνω στον άξονα περιστροφής της, Κ. Οι κύλινδροι έχουν μάζες $M_1=80\text{kg}$, $M_2=64\text{kg}$ και ακτίνες $R_1=0,5\text{m}$ και $R_2=0,25\text{m}$ αντιστοίχως. Γύρω από το μικρό κύλινδρο είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα από το ελεύθερο άκρο του οποίου είναι κρεμασμένο σώμα μάζας $m=200\text{kg}$. Η τροχαλία είναι αρχικά ακίνητη και αφήνουμε το σώμα ελεύθερο τη χρονική στιγμή $t_0=0$. Με δεδομένα ότι κατά την κίνηση της τροχαλίας δεν υπάρχουν τριβές και το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στο μικρό κύλινδρο, να υπολογιστούν:

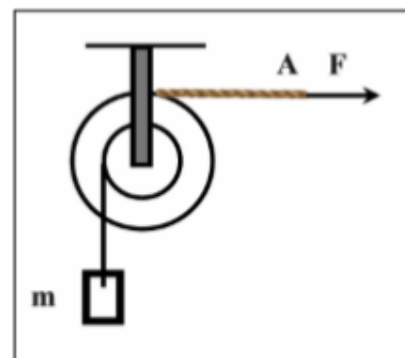


- Η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος των δύο δίσκων.
 - Η γωνιακή ταχύτητα των δίσκων, τη χρονική στιγμή, t_1 , που το σώμα έχει κατέβει κατά $\Delta y=10,2\text{m}$.
 - Η ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας του μεγάλου δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 .
 - Η κεντρομόλος επιτάχυνση ενός σημείου του μεγάλου δίσκου τη χρονική στιγμή, t_1 .
- Δίνεται η ροπή αδράνειας του κάθε δίσκου $I_K=MR^2/2$.

$$\alpha. a_{\gamma} = 20,4 \text{ rad/s}^2, \beta. \omega = 40,8 \text{ rad/s}, \gamma. v = 20,4 \text{ m/s}, \delta. a_{\kappa\epsilon\nu} = 832,32 \text{ m/s}^2$$

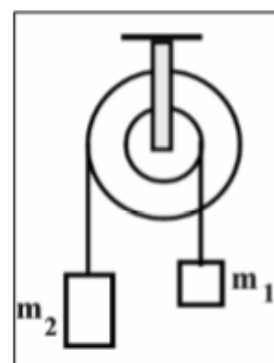
Γ3.27 Στη διάταξη του σχήματος δίνονται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας $I=0,04\text{kgm}^2$, η μάζα του σώματος $m=4\text{kg}$, και οι ακτίνες $R_1=0,1\text{m}$ και $R_2=0,2\text{m}$.

- Να υπολογιστεί η δύναμη F που ασκείται στο νήμα που είναι τυλιγμένο στο εξωτερικό αυλάκι, αν όλο το σύστημα ισορροπεί. Δίνουμε στη δύναμη F την τιμή $F_1=60\text{N}$. Να υπολογιστούν:
- Η επιτάχυνση a του σώματος.
- Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.
- Η οριζόντια μετατόπιση του σημείου Α, αν το σώμα m ανυψώνεται κατά 5m . Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



$$\alpha. F_0=20\text{N}, \beta. 10\text{m/s}^2, \gamma. 100\text{rad/s}^2, \delta. 10\text{m}$$

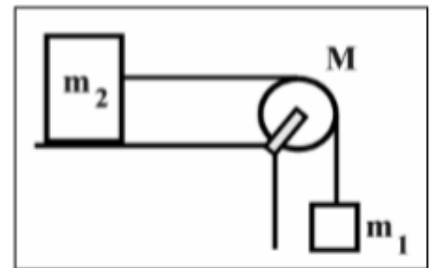
Γ3.30 Το ομοαξονικό σύστημα των δύο κυλίνδρων του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κοινό κέντρο Ο και έχει ροπή αδράνεια $I_0=1,05\text{kgm}^2$. Ο μικρός κύλινδρος έχει ακτίνα $r_1=0,1\text{m}$ είναι τυλιγμένος με νήμα στο άκρο του οποίου είναι δεμένο σώμα μάζας $m_1=5\text{kg}$, ενώ αντίστοιχα ο μεγάλος έχει ακτίνα $r_2=0,2\text{m}$ και είναι τυλιγμένος με νήμα στο άκρο του οποίου είναι δεμένο σώμα μάζας $m_2=10\text{kg}$. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$. Αν αφήσουμε το σύστημα ελεύθερο να περιστραφεί να υπολογιστούν:



- Η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος.
- Οι επιταχύνσεις των σωμάτων.
- Οι τάσεις των σχοινιών.

$$\alpha. 10\text{rad/s}^2, \beta. 1\text{m/s}^2, 2\text{m/s}^2, \gamma. T_1=55\text{N}, T_2=80\text{N}$$

Γ3.32 Στη διάταξη που φαίνεται στο σχήμα, τα σώματα Σ_1 , Σ_2 έχουν μάζες $m_1=m_2=10\text{kg}$, η τροχαλία έχει ακτίνα $R=0,4\text{m}$ και μάζα $M=40\text{kg}$ και μεταξύ του σώματος Σ_1 και του οριζοντίου επιπέδου υπάρχουν τριβές με συντελεστή τριβής $\mu=0,2$. Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί από την ηρεμία, τη χρονική στιγμή $t_0=0$ και το σχοινί δεν ολισθαίνει μέσα στο αυλάκι της τροχαλίας. Να υπολογιστούν:



α. Η επιτάχυνση των σωμάτων.

β. Η μετατόπιση του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή $t_1=2\text{s}$.

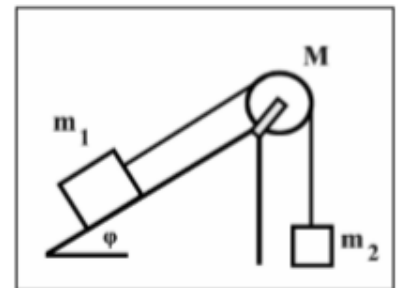
γ. Η γωνία που θα έχει διαγράψει ένα σημείο της τροχαλίας τη χρονική στιγμή που τα σώματα θα έχουν αποκτήσει ταχύτητα 4m/s .

δ. Οι τάσεις των νημάτων και το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο άξονας στην τροχαλία.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας της τροχαλίας, $I_0=MR^2/2$.

$$\alpha. a=2\text{m/s}^2, \beta. x=4\text{m}, \gamma. \theta=10\text{rad}, \delta. 80\text{N}, 40\text{N}, 481,66\text{N}$$

Γ3.34 Τα δύο σώματα Σ_1 , Σ_2 που φαίνονται στο σχήμα έχουν μάζες $m_1=15\text{kg}$ και $m_2=20\text{kg}$ και συνδέονται με αβαρές νήμα που περνάει από την τροχαλία ακτίνας $R=0,25\text{m}$. Το σώμα Σ_1 ολισθαίνει πάνω στο λείο κεκλιμένο επίπεδο με επιτάχυνση 2m/s^2 . Δίνονται $\eta\mu\phi=0,6$ και $g=10\text{m/s}^2$. Να υπολογιστούν:

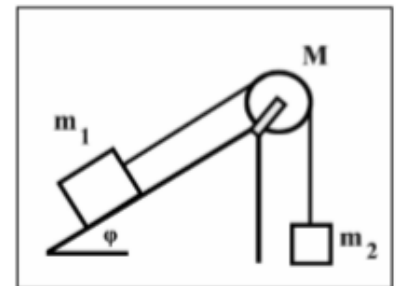


α. Οι τάσεις των νημάτων.

β. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας.

$$\alpha. 120\text{N}, 160\text{N}, \beta. 1,25\text{kgm}^2$$

! Γ3.35 Στο σύστημα του σχήματος το αβαρές νήμα συνδέει τα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 που έχουν μάζες $m_1=5\text{kg}$ και $m_2=10\text{kg}$ αντιστοίχως και περνάει από τροχαλία μάζας $M=40\text{kg}$ ακτίνας R , χωρίς όμως να ολισθαίνει. Αν η γωνία κλίσης του κεκλιμένου είναι ϕ να $\eta\mu\phi=0,8$ και $\sigma\eta\phi=0,6$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κεκλιμένου και σώματος Σ_1 είναι $\mu=5/6$.



Να υπολογιστούν:

α. Η επιτάχυνση των σωμάτων.

β. Οι δυνάμεις που ασκεί το νήμα σε κάθε σώμα.

γ. Αν ξαφνικά κοπή το νήμα σε σημείο ανάμεσα στην τροχαλία και το σώμα m_1 πόση θα γίνει η επιτάχυνση των σωμάτων την επόμενη χρονική στιγμή;

Δίνονται, $g=10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της $I_0=MR^2/2$.

$$\alpha. a = 1\text{m/s}^2, \beta. 70\text{N και } 90\text{N}, \gamma. a_1=-13\text{m/s}^2, a_2=20/3\text{m/s}^2$$