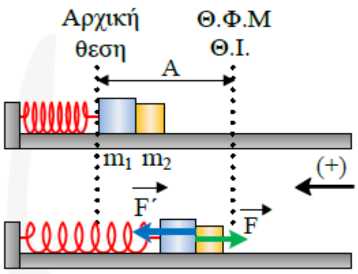
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΣΩΜΑΤΑ ΣΕ ΕΠΑΦΗ

Σύστημα σωμάτων σε επαφή στο οριζόντιο επίπεδο με ελατήριο συνδεδεμένο στο ένα σώμα.



1. Σώμα μάζας $m_1 = 0{,}5$ kg έχει το ένα άκρο στερεωμένο σε οριζόντιο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 50$ N/m και το άλλο άκρο του βρίσκεται σε επαφή με σώμα μάζας $m_2 = 1{,}5$ kg. Το όλο σύστημα βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Συμπιέζουμε κατά Α τα δύο σώματα όπως φαίνεται στο σχήμα δίνοντας το ενέργεια $E = 1$ J και κατόπιν αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να ταλαντωθεί.

α. Τις σταθερές ταλάντωσης D_1, D_2 για κάθε σώμα χωριστά και το πλάτος της αρχικής ταλάντωσης.

β. Να βρεθεί το σημείο που τα σώματα χάνουν την επαφή.

γ. Να βρεθεί το νέο πλάτος ταλάντωσης:

δ. Πόσο απέχουν τα δύο σώματα όταν το $Σ_1$ ακινητοποιείται στιγμιαία για $1^η$ φορά;

ε. Πόσο απέχουν τα σώματα όταν το $Σ_1$ ακινητοποιείται στιγμιαία για $2^η$ φορά;

Λύση

α. Για το σύστημα ισχύει: $k = D = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 5\dfrac{rad}{s}}$

Άρα $D_1 = m_1\omega^2 = 0{,}5 \cdot 25 \Rightarrow \mathbf{D_1 = 12{,}5\dfrac{N}{m}}$ και $D_2 = m_2\omega^2 = 1{,}5 \cdot 25 \Rightarrow \mathbf{D_1 = 37{,}5\dfrac{N}{m}}$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \Rightarrow \mathbf{A = 0{,}2\,m}$$

β. Η δύναμη επαφής $\vec{F}$ που το σώμα m_2 δέχεται από το σώμα m_1 είναι η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης του. Οπότε για το σώμα m_2 ισχύει: $\Sigma\vec{F}_2 = -D_2\vec{x} \Rightarrow F = -D_2x$

Η δύναμη επαφής $\vec{F}$ μηδενίζεται στη θέση όπου $x = 0$. Συνεπώς τα δύο σώματα χάνουν την μεταξύ τους επαφή στη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου.

γ. Το σύστημα των δύο αρχικά κάνει ταλάντωση με $D = k \Rightarrow (m_1 + m_2)\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}} = 5\dfrac{rad}{s}$,

ενώ μετά τη Θ.Ι. το σώμα $Σ_1$ κάνει ταλάντωση με $D' = k \Rightarrow m_1\omega'^2 = k \Rightarrow \omega' = \sqrt{\dfrac{k}{m_1}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega' = 10\dfrac{rad}{s}}$.

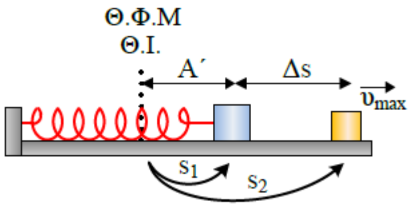
α′ τρόπος: Με διατήρηση της ενέργειας:

Μετά την απώλεια επαφής το σώμα Σ_1 συνεχίζει να ταλαντώνεται (με διαφορετική ενέργεια ταλάντωσης) ενώ το σώμα Σ_2 (με ταχύτητα $\upsilon_2 = \upsilon_{max} = \omega A = 1$ m/s) κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, αφού στην διεύθυνση της κίνησης του δεν δέχεται καμία δύναμη.

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow E_{ταλ} = E'_{ταλ} + K_2 \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kA'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{max}^2 \Rightarrow A' = \sqrt{A^2 - \frac{m_2\upsilon_{max}^2}{k}} \Rightarrow A' = \sqrt{0,04 - \frac{1,5\cdot 1}{50}} \Rightarrow$$
$\mathbf{A' = 0,1\,m}$,

β′ τρόπος: Η ταλάντωση των Σ_1, Σ_2 "τελειώνει" στην Θ.Ι., οπότε τα σώματα έχουν μέγιστη ταχύτητα υ_{max} και η ταλάντωση του Σ_1 αρχίζει από την Θ.Ι. (δεν έχουμε αλλαγή Θ.Ι. Παραμένει η Θ.Φ.Μ. ως θέση ισορροπίας και για την νέα ταλάντωση) οπότε έχει επίσης μέγιστη ταχύτητα υ_{max} κατά την έναρξη της νέας ταλάντωσης . Άρα: $\upsilon_{max} = \upsilon'_{max} \Rightarrow 1 = 10A' \Rightarrow \mathbf{A' = 0,1\,m}$

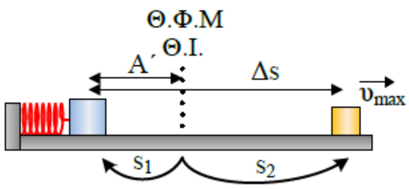
δ. Το Σ_1 ακινητοποιείται για πρώτη φορά σε χρόνο $\Delta t = \frac{T'}{4} = \frac{2\pi}{4\omega'} = \frac{\pi}{20}$s μετά την έναρξη της ταλάντωσής του και έχει διανύσει διάστημα ως τότε από την Θ.Ι. $s_1 = A'$. Το Σ_2 κάνει Ε.Ο.Κ. με ταχύτητα $\upsilon_{max} = 1$ m/s. (Την ταχύτητα που είχε τη στιγμή της αποχώρησης από το Σ_1) και στον ίδιο χρόνο διανύει διάστημα $s_2 = \upsilon_{max}\Delta t$



$$\Rightarrow s_2 = \upsilon_{max}\frac{T'}{4} = 1\cdot\frac{\pi}{20} = 0,157\,m.$$

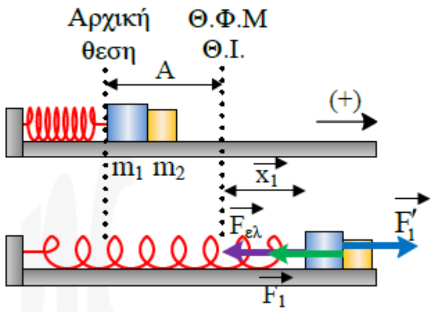
Άρα τα δύο σώματα απέχουν μεταξύ τους $\Delta s = s_2 - s_1 = 0,157 - 0,1 = 0,057$ m.

ε. Ο χρόνος που χρειάζεται το Σ_1 ακινητοποιηθεί για 2η φορά είναι $\Delta t = \frac{3T'}{4} = \frac{3\pi}{20}$s . Το Σ_1 θα βρίσκεται στο αριστερό άκρο και θα απέχει από την Θ.Ι. $s_1 = A'$ προς τα αριστερά ενώ το Σ_2 στο ίδιο διάστημα θα έχει διανύσει $s_2 = \upsilon_{max}\cdot\Delta t = \upsilon_{max}\cdot\frac{3T'}{4} = 1\cdot\frac{3\pi}{20} = 0,471\,m$.



Άρα τα Σ_1, Σ_2 απέχουν μεταξύ τους $\Delta s = s_1 + s_2 = 0,1 + 0,471 = 0,571$ m.

2. Σώμα μάζας m_1 =1 kg είναι κολλημένο με άλλο σώμα μάζας m_2 = 1kg με μία κόλλα που αντέχει δύναμη έως την τιμή $F_1 = 10\sqrt{7}$ N. Συμπιέζουμε τα δύο σώματα έτσι ώστε το σύστημα να ταλαντώνεται με ενέργεια E = 25 J. Η σταθερά του ελατηρίου είναι k = 200 N/m.



Να βρείτε:

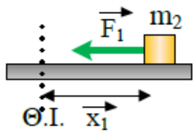
α. την θέση που τα δύο σώμα αποχωρίζονται

β. την ταχύτητα εκείνη τη στιγμή

γ. το νέο πλάτος της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1

Λύση

α. Προφανώς η αποκόλληση θα συμβεί αφού τα σώματα περάσουν την Θ.Ι.



Για το σώμα μάζας m_2 θα ισχύει: $\Sigma F = -D_2 x \Rightarrow F_1 = -D_2 x$

και για το μέτρο της δύναμης από την κόλλα την στιγμή που χάνεται η επαφή ισχύει: $F_1 = D_2 x_1 \Rightarrow \mathbf{x_1} = \dfrac{\mathbf{F_1}}{\mathbf{D_2}}$

Επίσης ισχύει: $k = D = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1+m_2}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\dfrac{rad}{s}}$ και $D_2 = m_2\omega^2 \Rightarrow \mathbf{D_2 = 100\ N/m.}$

Άρα $x_1 = \dfrac{10\sqrt{7}}{100} \Rightarrow \mathbf{x_1 = 0,1\sqrt{7}\ m}$.

β. Το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης είναι: $E = \dfrac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\dfrac{2E}{k}} \Rightarrow \mathbf{A = 0,5\,m}$

Εφαρμόζω την Α.Δ.Ε. την στιγμή της αποκόλλησης

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\ \ m_1 + m_2\ \ \upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{k\ \ A^2 - x_1^2}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{200\ \ 0,25 - 0,07}{2}} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = 3\sqrt{2}\ \frac{m}{s}}$$

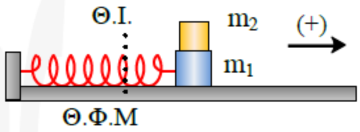
γ. Η νέα ταλάντωση ξεκινά αμέσως μετά την αποκόλληση του σώματος μάζας m_2.

Για να βρούμε το νέο πλάτος θα εφαρμόσουμε την Α.Δ.Ε. για την νέα ταλάντωση:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow A' = \sqrt{\frac{18}{200} + 0,07} \Rightarrow \mathbf{A' = 0,4\,m}\ .$$

Δύο σώματα σε οριζόντιο ελατήριο που ταλαντώνονται με την βοήθεια της τριβής.

3. Σε λείο οριζόντιο δάπεδο βρίσκεται σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1 = 3$ kg δεμένο στο ένα άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς k = 125 N το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Πάνω στο σώμα $Σ_1$ τοποθετούμε σώμα $Σ_2$ μάζας $m_2 = 2$ kg όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Μεταξύ των δύο σωμάτων υπάρχουν τριβές με συντελεστή τριβής $μ_s = 0{,}4$. Εκτρέπουμε το σύστημα έτσι ώστε να ταλαντώνεται με πλάτος A = 0,1 m. Να βρείτε:



α. την σταθερά επαναφοράς κάθε σώματος χωριστά

β. την μέγιστη τιμή του μέτρου της στατικής τριβής

γ. το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος των δύο σωμάτων όταν το μέτρο της στατικής τριβής είναι T_1 = 3 N.

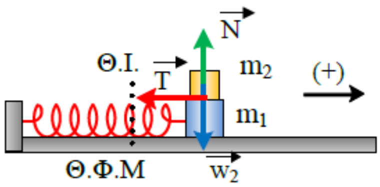
δ. την μέγιστη ενέργεια που μπορούμε να προσφέρουμε στο σύστημα χωρίς να παρατηρηθεί ολίσθηση μεταξύ των δύο σωμάτων.

Λύση

α. Εφόσον τα δύο σώματα ταλαντώνονται χωρίς να χάνεται η επαφή, θα έχουν κοινό πλάτος και κοινή κυκλική συχνότητα $D = (m_1 + m_2)\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{125}{5}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 5\dfrac{rad}{s}}$

Άρα $D_1 = m_1\omega^2 \Rightarrow \mathbf{D_1 = 75\ N/m}$ και $D_1 + D_2 = D = k \Rightarrow \mathbf{D_2 = 50\ N/m}$

β. Για το σώμα m_2 έχουμε:



$\Sigma\vec{F} = -D_2\vec{x} \Rightarrow \vec{T}_{στατ} = -D_2\vec{x} \Rightarrow -T_{στατ} = -D_2 x \Rightarrow T_{στατ} = D_2 x \Rightarrow$

$T_{στατ,max} = D_2 A \Rightarrow \mathbf{T_{στατ,max} = 5N}$

γ. Σε κάποια θέση x_1 θα έχουμε και στατική τριβή με μέτρο T_1

Αποδείξαμε παραπάνω ότι $T_{στ} = D_2 x \Rightarrow 3 = 50x_1 \Rightarrow x_1 = 0{,}06$ m.

Εφαρμόζω την Α.Δ.Ε. την στιγμή που έχουμε $x_1 = 0{,}06$ m

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{k(A^2 - x_1^2)}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{125(0,01 - 0,0036)}{5}} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = 4\ \frac{m}{s}}$$

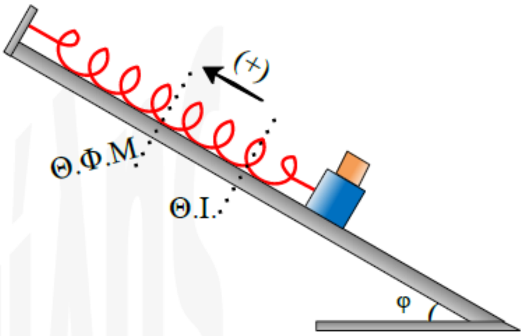
δ. Για να βρούμε την μέγιστη ενέργεια που μπορούμε να προσφέρουμε στο σύστημα χωρίς να υπάρξει ολίσθηση χρειάζεται να βρούμε το μέγιστο πλάτος που μπορούμε να έχουμε ώστε να μην χάνεται η επαφή.

Για το μέτρο της στατικής τριβής έχουμε: $T_{\sigma\tau\alpha\tau} \le \mu_s N \Rightarrow m_2\omega^2 x \le \mu_s m_2 g \Rightarrow x \le \frac{\mu_s g}{\omega^2} \Rightarrow A_{\text{οριακο}} = \frac{\mu_s g}{\omega^2}$

$$\Rightarrow A_{\text{οριακο}} = \frac{0,4.10}{25} \Rightarrow \boldsymbol{A_{\text{οριακο}} = 0,16\,m}.$$

Άρα η μέγιστη ενέργεια είναι: $E_{max} = \frac{1}{2}kA_{\text{ορ}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 125 \cdot 0,0256 \Rightarrow \boldsymbol{E_{max} = 1,6\,J}$

Δύο σώματα σε κεκλιμένο επίπεδο με ελατήριο που ταλαντώνονται με την βοήθεια της τριβής.



4. Σε λείο κεκλιμένο επίπεδο βρίσκεται σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1,5$ kg δεμένο στο ένα άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς $k = 50$ N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Πάνω στο σώμα Σ_1 τοποθετούμε σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 0,5$ kg όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Μεταξύ των δύο σωμάτων υπάρχουν τριβές με συντελεστή τριβής $\mu_s = 1$. Εκτρέπουμε το σύστημα έτσι ώστε να ταλαντώνεται με πλάτος $A = 1$ cm. Να βρείτε:

α. την σταθερά επαναφοράς κάθε σώματος χωριστά

β. την μέγιστη τιμή του μέτρου της στατικής τριβής

γ. το μέγιστο πλάτος που μπορεί να ταλαντώνεται το σύστημα χωρίς να παρατηρηθεί ολίσθηση μεταξύ των δύο σωμάτων.

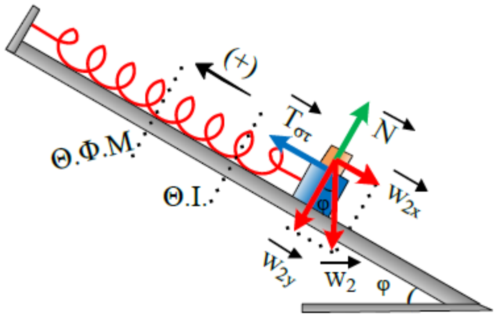
Δίνεται $g = 10\ m/s^2$, ημφ = 0,6, συνφ = 0,8.

Λύση

α. Εφόσον τα δύο σώματα ταλαντώνονται χωρίς να χάνεται η επαφή, θα έχουν κοινό πλάτος και κοινή κυκλική συχνότητα $D=(m_1+m_2)\omega^2=k \Rightarrow \omega=\sqrt{\dfrac{k}{m_1+m_2}} \Rightarrow \omega=\sqrt{\dfrac{50}{2}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega=5\dfrac{rad}{s}}$

Άρα $D_1 = m_1\omega^2 \Rightarrow \mathbf{D_1 = 37{,}5\ N/m}$ και $D_1 + D_2 = D = k \Rightarrow \mathbf{D_2 = 12{,}5\ N/m}$

β. Για το σώμα m_2 έχουμε:



$\Sigma\vec{F}=-D_2\vec{x} \Rightarrow \vec{T}_{στατ}+\vec{w}_{2x}=-D_2\vec{x} \Rightarrow T_{στατ}-w_{2x}=-D_2x \Rightarrow$

$T_{στατ}=m_2 g ημφ - m_2\omega^2 x$

Δηλαδή το μέτρο της στατικής τριβής γίνεται μέγιστο στην ακραία αρνητική θέση ($x = -A$) δηλαδή

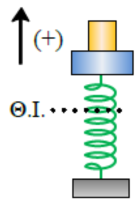
$T_{στατ.(max)} = m_2 g ημφ + m_2\omega^2 A \Rightarrow T_{στατ.(max)} = 0{,}5\cdot 10\cdot 0{,}6 + 0{,}5\cdot 25\cdot 0{,}01 \Rightarrow \mathbf{T_{στατ.(max)} = 3{,}125\ N.}$

γ. Για το μέτρο της στατικής τριβής έχουμε:

$T_{στατ} \le \mu_s N \Rightarrow m_2 g ημφ + m_2\omega^2|x| \le \mu_s m_2 g συνφ \Rightarrow |x| \le \dfrac{\mu_s g συνφ - g ημφ}{\omega^2} \Rightarrow A_{οριακο} = \dfrac{\mu_s g συνφ - g ημφ}{\omega^2} \Rightarrow$

$A_{οριακο} = \dfrac{1\cdot 10\cdot 0,8 - 10\cdot 0,6}{25} \Rightarrow \mathbf{A_{οριακο} = 0{,}02\,m}$

Δύο σώματα σε κατακόρυφο ελατήριο



5. Το σύστημα των δύο σωμάτων m_1 = 2 kg και m_2 = 1 kg ισορροπεί δεμένο σε ελατήριο σταθεράς k = 300 N/m. Προκαλούμε επιπλέον παραμόρφωση προς τα κάτω d = 0,2 m και αφήνουμε το σύστημα να ταλαντωθεί.

α. να αποδείξετε ότι θα χαθεί η επαφή στην θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

β. να γράψετε και να σχεδιάσετε την δύναμη που δέχεται το σώμα μάζας m_2 από το m_1 για όσο διάστημα υπάρχει επαφή, σε σχέση με την απομάκρυνση

Να βρείτε:

γ. την ταχύτητα την στιγμή που χάνεται η επαφή

δ. το πλάτος της νέας ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1 θεωρώντας ότι απομακρύνουμε το σώμα μάζας m_2 μόλις φτάσει στο μέγιστο ύψος του

ε. το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα μάζας m_2.

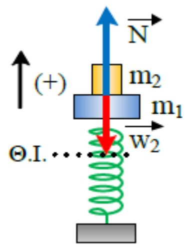
Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

Λύση

α. Εφόσον τα δύο σώματα ταλαντώνονται χωρίς να χάνεται η επαφή, θα έχουν κοινό πλάτος και κοινή κυκλική συχνότητα $D=(m_1+m_2)\omega^2=k \Rightarrow \omega=\sqrt{\dfrac{k}{m_1+m_2}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega=10\dfrac{rad}{s}}$

$D_1=m_1\omega^2 \Rightarrow \mathbf{D_1=200\ N/m}$ και $D_2=m_2\omega^2 \Rightarrow \mathbf{D_2=100\ N/m}$

Για το σώμα μάζας m_2 ισχύει



$\Sigma\vec{F}=-D_2\vec{x} \Rightarrow \vec{N}+m_2\vec{g}=-m_2\omega^2\vec{x} \Rightarrow N-m_2g=-m_2\omega^2x \Rightarrow N=m_2(g-\omega^2x)$

Το σώμα χάνει την επαφή με το δίσκο, όταν θα έχουμε $N=0$.

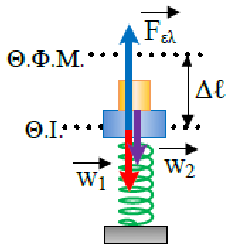
Μέγιστο πλάτος έχουμε όταν το σώμα οριακά χάνει την επαφή του.

Για να έχουμε επαφή θα πρέπει $N\ge 0 \Rightarrow m_2(g-\omega^2x)\ge 0 \Rightarrow g-\omega^2x\ge 0 \Rightarrow x\le\dfrac{g}{\omega^2}$

Άρα το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης είναι: $A_{max}=\dfrac{g}{\omega^2} \Rightarrow \mathbf{A_{max}=0{,}1\,m}$

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι όσο η αρχική εκτροπή δηλαδή $A = d = 0{,}2\ m > A_{max}$, άρα θα χαθεί η επαφή.

Για την ισορροπία των σωμάτων ισχύει:



$\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi}=0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=(m_1+m_2)g \Rightarrow k\Delta\ell=(m_1+m_2)g \Rightarrow \Delta\ell=\dfrac{(m_1+m_2)g}{k} \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell=0{,}1\,m}$

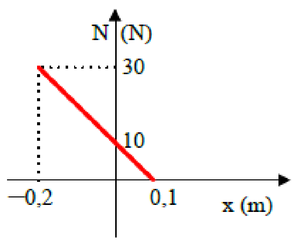
Άρα η επαφή χάνεται στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Σημείωση: Η επαφή όταν χάνεται, χάνεται πάντα στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

β. υπολογίσαμε παραπάνω ότι $N=m_2g-D_2x$ άρα

$\mathbf{N=10-100x\ (S.I.)}$ για $-0{,}2\ m\le x\le 0{,}1\ m$

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

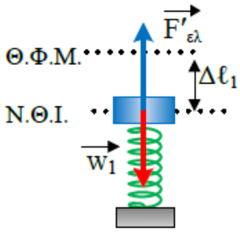


γ. Λίγο πριν χαθεί η επαφή τα δύο σώματα εκτελούν Α.Α.Τ.

Εφαρμόζω την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση στην θέση που χάνεται η επαφή ($x = A_{max}$):

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2 + \frac{1}{2}kA_{max}^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{k(A^2 - A_{max}^2)}{m_1+m_2}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{300\cdot(0,04-0,01)}{3}} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = \sqrt{3}\,\frac{m}{s}}$$

δ. Μόλις αποχωριστούν τα δύο σώματα αλλάζει η Θ.Ι. της ταλάντωσης η οποία τώρα βρίσκεται στη θέση



$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow F'_{ελ} = m_1 g \Rightarrow k\Delta\ell_1 = m_1 g \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\ell_1 = \frac{2}{30}\,m}$$

Εφαρμόζω την Α.Δ.Ε. για την νέα ταλάντωση στη Θ.Φ.Μ. για το σώμα μάζας m_1, και έχουμε:

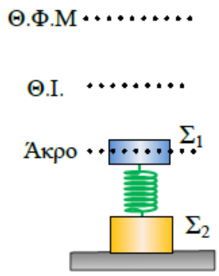
$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell_1^2 \Rightarrow A' = \sqrt{\frac{m_1\upsilon^2}{k} + \Delta\ell_1^2} \Rightarrow A' = \sqrt{\frac{2\cdot 3}{300} + \frac{4}{900}} \Rightarrow \boldsymbol{A' = \frac{\sqrt{22}}{30}\,m}$$

ε. Για να βρούμε το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το σώμα m_2 μετά το χάσιμο επαφής από το σώμα m_1 εφαρμόζω Θ.Μ.Κ.Ε. από την στιγμή που χάνεται η επαφή και έχουμε ταχύτητα υ που υπολογίσαμε παραπάνω μέχρι το μέγιστο ύψος όπου μηδενίζεται η ταχύτητα στιγμιαία.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 = m_2 g h_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{\upsilon^2}{2g} \Rightarrow \boldsymbol{h_{max} = 0,15\,m}.$$

Δύο σώματα σε κατακόρυφο ελατήριο και το χάσιμο επαφής του κάτω σώματος

6. Το σώμα Σ_1 μάζας m_1 = 1 kg ισορροπεί δεμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k = 100 N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο στο σώμα Σ_2 μάζας m_2 = 3 kg. Συμπιέζουμε το ελατήριο ώστε να παραμορφωθεί επιπλέον κατά 0,3 m και αφήνουμε το Σ_1 να εκτελέσει ταλάντωση. Να βρείτε:



α. τη σχέση της δύναμης του ελατηρίου σε σχέση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του Σ_1, x.

β. την δύναμη που δέχεται το σώμα Σ_2 από το δάπεδο σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x και να την σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες.

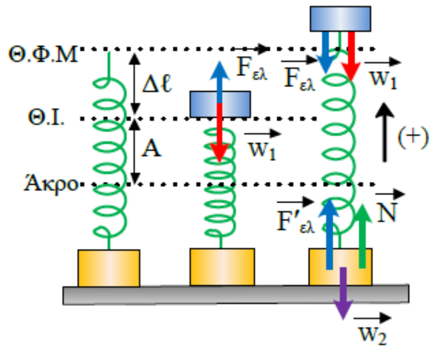
γ. το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης του Σ_1 ώστε να μην χάνεται η επαφή με το δάπεδο του Σ_2.

Δίνεται g = 10 m/s^2, θετική η φορά προς τα πάνω.

Το σώμα m_2 κινδυνεύει να χάσει την επαφή με το δάπεδο, όταν το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί, ώστε η $F_{ελ}$ να έχει φορά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα. Στην οριακή περίπτωση που μόλις χάνεται η επαφή θα έχουμε Ν = 0 άρα:

Λύση

α. Για το σώμα m_1 ισχύει:



$$\Sigma\vec{F} = -D\vec{x} \Rightarrow F_{ελ} - m_1 g = -kx \Rightarrow F_{ελ} = kx - m_1 g \Rightarrow$$

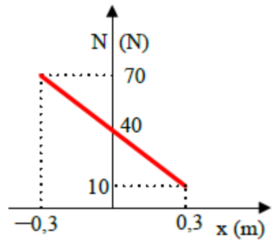
$$\mathbf{F_{ελ} = 100x - 10 \ \ (S.I.)} \text{ με } -0{,}3 \text{ m} \le x \le 0{,}3 \text{ m}$$

β. Για το σώμα m_2:

$$\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow F'_{ελ} + N = w_2 \overset{F_{ελ} = F'_{ελ}}{\Rightarrow} N = m_2 g - F_{ελ} \Rightarrow N = 30 - (100x - 10) \Rightarrow$$

$$\mathbf{N = 40 - 100x \ \ \ (S.I.)} \quad \text{με } -0{,}3 \text{ m} \le x \le 0{,}3 \text{ m}$$

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



γ. Για να υπάρχει επαφή θα πρέπει η δύναμη επαφής $\vec{N}$ να είναι θετική.

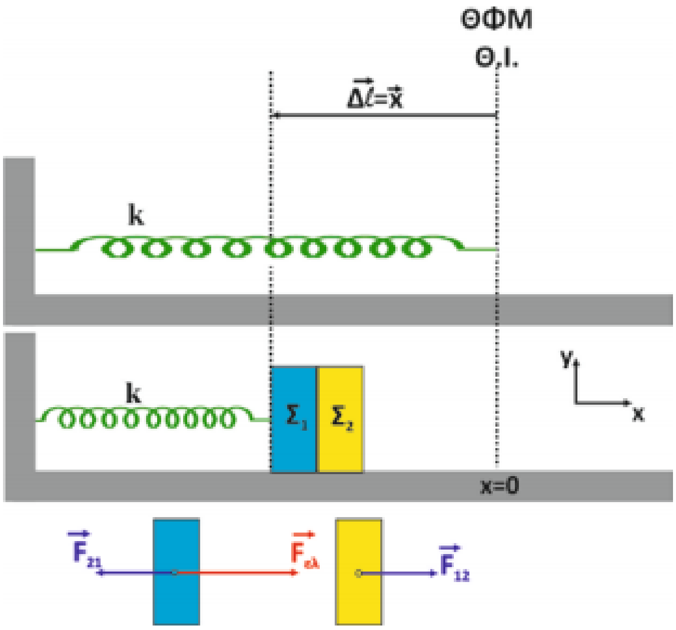
$$N \ge 0 \Rightarrow 40 - 100x \ge 0 \Rightarrow 40 \ge 100x \Rightarrow \mathbf{x \le 0{,}4\,m}$$

Οπότε η μέγιστη τιμή της απομάκρυνσης είναι και το πλάτος της ταλάντωσης: $\mathbf{A_{max} = 0{,}4\,m}$

Α. Η επιφάνεια επαφής είναι κάθετη στη διεύθυνση της ταλάντωσης (το ένα σώμα «σπρώχνει» το άλλο).

Α1. Οριζοντια Ταλαντωση – Ιδανικο Ελατηριο

Θα εξετάσουμε την κίνηση των δύο σωμάτων για όσο χρόνο παραμένουν σε επαφή μεταξύ τους. Το σώμα Σ_1 είναι δεμένο στο ελατήριο ενώ το σώμα Σ_2 απλώς ακουμπάει στο Σ_1.



Αν θεωρήσουμε <u>τα δύο σώματα σύστημα</u> εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε πως όσο τα σώματα είναι σε επαφή το σύστημα αυτό κάνει τμήμα ΑΑΤ με σταθερά $D = k$ όπου k η σταθερά του ελατηρίου.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση

$$k = (m_1 + m_2)\omega^2$$

Για το σύστημα των 2 σωμάτων επίσης ισχύει:

$$\Sigma F_x = F_{\varepsilon\lambda} + F_{21} + F_{12} = F_{\varepsilon\lambda}$$

αφού οι δυνάμεις που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο είναι αντίθετες μεταξύ τους ως εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος.

Για το χρονικό διάστημα στο οποίο τα σώματα κινούνται μαζί θα ισχύει επίσης:

$$\Sigma F_x = -Dx = -kx$$

οπότε τελικά έχουμε:

Σύστημα Σ_1 και Σ_2	$\Sigma F_x = F_{\varepsilon\lambda} = -kx \quad (1)$

Ας μελετήσουμε τώρα (για όσο χρόνο υπάρχει επαφή) την κίνηση του <u>σώματος Σ_1</u>:

$$\Sigma F_{x,1} = F_{\varepsilon\lambda} + F_{21}$$

Ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα δίνει:

Σώμα Σ_1	$\Sigma F_{x,1} = m_1 a = m_1(-\omega^2 x) = -m_1\omega^2 x \quad \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + F_{21} = -m_1\omega^2 x \quad (2)$

(Σημείωση: Σε κάποιες περιπτώσεις στις πανελλαδικές εξετάσεις έχει ζητηθεί η σταθερά της ταλάντωσης του σώματος Σ_1. Είναι η ποσότητα $m_1\omega^2$ που συνήθως συμβολίζεται με D_1).

Ας μελετήσουμε τέλος (για όσο χρόνο υπάρχει επαφή) και την κίνηση του σώματος Σ_2:

$$\Sigma F_{x,2} = F_{12}$$

Ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα δίνει:

Σώμα Σ_2	$\Sigma F_{x,2} = m_2 a = m_2(-\omega^2 x) = -m_2\omega^2 x \quad \Rightarrow F_{12} = -m_2\omega^2 x \quad (3)$

(Σημείωση: Σε κάποιες περιπτώσεις στις πανελλαδικές εξετάσεις έχει ζητηθεί η σταθερά της ταλάντωσης του σώματος Σ_2. Είναι η ποσότητα $m_2\omega^2$ που συνήθως συμβολίζεται με D_2).

Θα χαθεί η επαφή των δύο σωμάτων; Και αν ναι πού;

Απώλεια επαφής των δύο σωμάτων έχουμε όταν πάψει να υπάρχει δύναμη επαφής ανάμεσά τους, δηλαδή

$$F_{21} = F_{12} = 0$$

Έστω ότι συμβολίζουμε την απομάκρυνση στη θέση όπου χάνεται η επαφή με x^*.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε τη σχέση (2) είτε τη σχέση (3). Η σχέση (3) είναι προφανώς απλούστερη και μας δίνει

$$0 = m_2\omega^2 x^* \Rightarrow \mathbf{x^* = 0}$$

Δηλαδή η επαφή χάνεται στη Θέση Φυσικού Μήκους (ΘΦΜ) του ελατηρίου η οποία στην περίπτωσή μας ταυτίζεται με τη Θέση Ισορροπίας (ΘΙ) της ταλάντωσης.

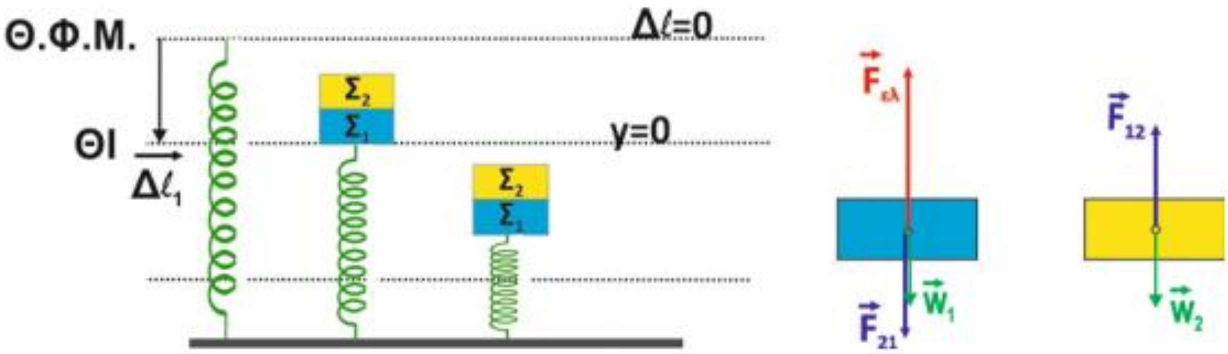
Παρατηρήσεις

1. Το σύστημα των σωμάτων θα περάσει υποχρεωτικά από τη ΘΦΜ (αφού είναι η ΘΙ) οπότε η επαφή θα χαθεί οπωσδήποτε.
2. Μπορούμε να προβλέψουμε την απώλεια επαφής στη ΘΦΜ αφού μετά απ' αυτήν το μέτρο της ταχύτητας του Σ_1 θα αρχίσει να μειώνεται λόγω της δράσης της δύναμης από το

ελατήριο ενώ το $Σ_2$ δεν δέχεται οριζόντιες δυνάμεις που μπορούν να μειώσουν το μέτρο της ταχύτητάς του και θα συνεχίσει κάνοντας Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με ταχύτητα τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης.

3. Μετά την απώλεια επαφής το σώμα $Σ_1$, καθώς παραμένει δεμένο στο ελατήριο, θα κάνει νέα Απλή Αρμονική Ταλάντωση η οποία:
   - Θα έχει την ίδια Θέση Ισορροπίας
   - Θα έχει σταθερά ταλάντωσης D= k
   - Θα έχει διαφορετική γωνιακή συχνότητα ω' : $k = m_1\omega'^2$
   - Θα έχει ίδια μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης
   - Θα έχει διαφορετικό πλάτος αφού $u_{max,1} = u'_{max,1} \Rightarrow \omega A = \omega' A'$

Α2. Κατακορυφη Ταλαντωση – Ιδανικο Ελατηριο



Η μελέτη μας και πάλι αφορά το χρονικό διάστημα για το οποίο τα σώματα παραμένουν σε επαφή μεταξύ τους. Το σώμα $Σ_1$ είναι δεμένο στο ελατήριο ενώ το σώμα $Σ_2$ απλώς ακουμπάει στο $Σ_1$.

Αν θεωρήσουμε τα δύο σώματα σύστημα, εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε πως όσο τα σώματα είναι σε επαφή το σύστημα αυτό κάνει τμήμα ΑΑΤ με σταθερά $D = k$ όπου k η σταθερά του ελατηρίου.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης αυτής υπολογίζεται από τη σχέση

$k = (m_1 + m_2)\omega^2$

Για το σύστημα των 2 σωμάτων επίσης ισχύει:

$$\Sigma F = F_{\varepsilon\lambda} + F_{21} + F_{12} + w_1 + w_2 = F_{\varepsilon\lambda} + w_1 + w_2$$

αφού οι δυνάμεις που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο είναι αντίθετες μεταξύ τους ως εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος.

Για το χρονικό διάστημα που τα σώματα κινούνται μαζί θα ισχύει επίσης:

$$\Sigma F = -Dy = -ky$$

οπότε τελικά έχουμε:

Σύστημα Σ_1 και Σ_2	$\Sigma F = F_{\varepsilon\lambda} + w_1 + w_2 = -ky \quad (1)$

Ας μελετήσουμε τώρα (για όσο χρόνο υπάρχει επαφή) την κίνηση του <u>σώματος Σ_1</u>:

$$\Sigma F_1 = F_{\varepsilon\lambda} + F_{21} + w_1$$

Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει:

Σώμα Σ_1	$\Sigma F_1 = m_1 a = m_1(-\omega^2 y) = -m_1\omega^2 y \quad \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + F_{21} + w_1 = -m_1\omega^2 y \quad (2)$

(Σημείωση: Σε κάποιες περιπτώσεις στις πανελλαδικές εξετάσεις έχει ζητηθεί η σταθερά της ταλάντωσης του σώματος Σ_1. Είναι η ποσότητα $m_1\omega^2$ που συνήθως συμβολίζεται με D_1).

Ας μελετήσουμε τέλος (για όσο χρόνο υπάρχει επαφή) και την κίνηση <u>του σώματος Σ_2</u>:

$$\Sigma F_2 = F_{12} + w_2$$

Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει:

Σώμα Σ_2	$\Sigma F_2 = m_2 a = m_2(-\omega^2 y) = -m_2\omega^2 y \quad \Rightarrow F_{12} + w_2 = -m_2\omega^2 y \quad (3)$

(Σημείωση: Σε κάποιες περιπτώσεις στις πανελλαδικές εξετάσεις έχει ζητηθεί η σταθερά της ταλάντωσης του σώματος Σ_2. Είναι η ποσότητα $m_2\omega^2$ που συνήθως συμβολίζεται με D_2).

Θα χαθεί η επαφή των δύο σωμάτων; Και αν ναι πού;

Απώλεια επαφής των δύο σωμάτων έχουμε όταν πάψει να υπάρχει δύναμη επαφής ανάμεσά τους, δηλαδή

$$F_{21} = F_{12} = 0$$

Έστω ότι συμβολίζουμε την απομάκρυνση στη θέση όπου χάνεται η επαφή με y^*.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε τη σχέση (2) είτε τη σχέση (3). Η σχέση (3) είναι απλούστερη και μας δίνει

$$0 + w_2 = -m_2\omega^2 y^* \Rightarrow y^* = -\frac{g}{\omega^2} \Rightarrow \boldsymbol{y^* = -\frac{(m_1+m_2)g}{k}}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και τη σχέση $k = (m_1+m_2)\omega^2$

Η παραμόρφωση του ελατηρίου $\Delta\ell_1$ μέχρι τη Θέση Ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων είναι:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + w_1 + w_2 = 0 \Rightarrow -k\Delta l_1 - (m_1 + m_2)g = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta l_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}}$$

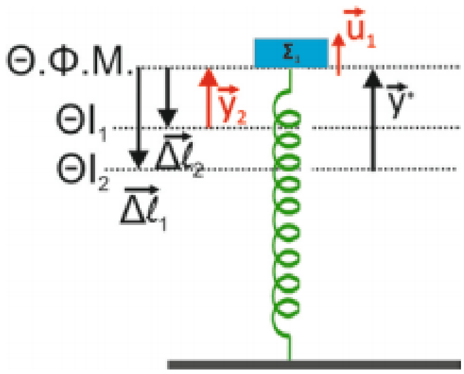
Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta l_1}$ και $\overrightarrow{y^*}$ έχουν αντίθετες αλγεβρικές τιμές, δηλαδή είναι αντίθετα μεταξύ τους. Επίσης το ένα διάνυσμα ξεκινά εκεί που τελειώνει το άλλο. Επομένως **η θέση απώλειας επαφής είναι και πάλι η Θέση Φυσικού Μήκους του ελατηρίου**.

Παρατηρήσεις

1. Το σύστημα των σωμάτων δεν περνά υποχρεωτικά από τη ΘΦΜ οπότε δεν είναι βέβαιο ότι η επαφή θα χαθεί. Αυτό εξαρτάται από το πλάτος της ταλάντωσης. Η επαφή χάνεται μόνο αν ισχύει A> $|\Delta l_1|$.
2. Μπορούμε να προβλέψουμε την απώλεια επαφής στη ΘΦΜ μια και στη θέση αυτή το βάρος προσδίδει σε κάθε σώμα επιτάχυνση g, αλλά το σώμα που είναι δεμένο στο ελατήριο θα έχει επιπλέον επιτάχυνση με φορά προς τα κάτω λόγω της δύναμης που δέχεται από το ελατήριο.
3. Μετά την απώλεια επαφής (εφόσον υπάρξει) το σώμα Σ_2, θα κάνει κατακόρυφη βολή με αρχική ταχύτητα της οποίας το μέτρο (έστω u_1) μπορεί να προσδιοριστεί με εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων:

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)u_1^2 + \tfrac{1}{2}ky^{*2} = \tfrac{1}{2}kA^2$$

4. Μετά την απώλεια επαφής (εφόσον υπάρξει) το σώμα Σ_1, καθώς παραμένει δεμένο στο ελατήριο, θα κάνει νέα Απλή Αρμονική Ταλάντωση η οποία:
   - Θα έχει *διαφορετική* Θέση Ισορροπίας
   - Θα έχει σταθερά ταλάντωσης D= k
   - Θα έχει διαφορετική γωνιακή συχνότητα ω' : $k = m_1\omega'^2$
   - Θα έχει πλάτος ταλάντωσης Α΄ που υπολογίζεται με εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας της ταλάντωσης, για την νέα ταλάντωση του Σ_1 (στο σχήμα η νέα θέση ισορροπίας συμβολίζεται με $ΘΙ_1$ ενώ η παλιά με $ΘΙ_2$) :



$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}ky_2^2 = \frac{1}{2}kA'^2$$

Η απομάκρυνση y_2 είναι αντίθετη της παραμόρφωσης $\Delta\ell_1$ του ελατηρίου όταν το άκρο του βρίσκεται στη $ΘΙ_1$: $y_2 = -\Delta l_1 = -\frac{m_1 g}{k}$ (το πρόσημο **–** δείχνει απλώς ότι η αλγεβρική τιμή τής y_2 έχει αντίθετο πρόσημο από την αλγεβρική τιμή της g)

Εννοείται πως πρέπει να απομακρυνθεί με κάποιον τρόπο το σώμα Σ_2 ώστε να μην έχουμε κρούση των δύο σωμάτων κατά την κάθοδό του.

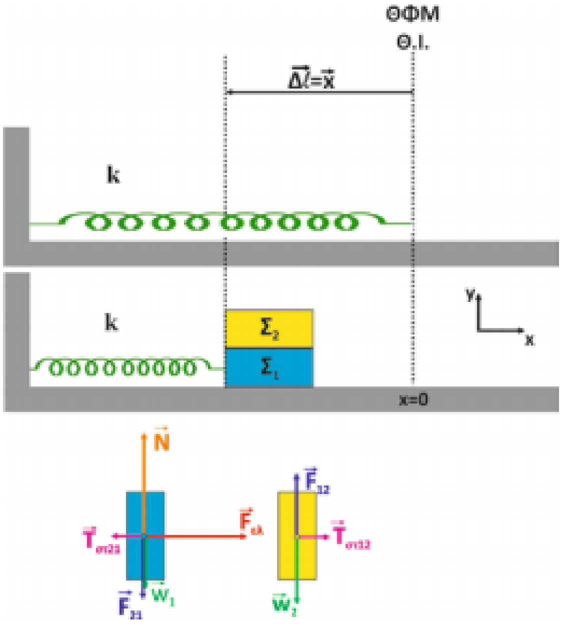
Α3. Ταλαντωση Σε Πλαγιο Επιπεδο– Ιδανικο Ελατηριο

Ισχύουν όσα αναφέραμε και στην κατακόρυφη ταλάντωση με μόνη διαφορά ότι τα βάρη πρέπει να αντικατασταθούν από τις συνιστώσες τους που είναι παράλληλες με το πλάγιο επίπεδο, δηλαδή $w \to w\,\eta\mu\varphi$ όπου φ η γωνία κλίσης του πλαγίου επιπέδου.

Πάντως, ως συμπέρασμα, ας αναφέρουμε ότι **η απώλεια επαφής, _<u>αν συμβεί</u>_, θα συμβεί στη Θέση Φυσικού Μήκους του ελατηρίου**.

Β. Η επιφάνεια επαφής είναι παράλληλη στη διεύθυνση της ταλάντωσης (το ένα σώμα «κάθεται» πάνω στο άλλο).

Β1. Οριζοντια Ταλαντωση – Ιδανικο Ελατηριο



Θα εξετάσουμε την κίνηση των δύο σωμάτων υποθέτοντας ότι το ένα σώμα δεν ολισθαίνει σε σχέση με το άλλο. Το σώμα Σ_1 είναι δεμένο στο ελατήριο ενώ το σώμα Σ_2 απλώς ακουμπάει στο Σ_1.

Αν θεωρήσουμε <u>τα δύο σώματα σύστημα</u> εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε πως το σύστημα αυτό κάνει ΑΑΤ με σταθερά $D = k$ όπου k η σταθερά του ελατηρίου.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση

$$k = (m_1 + m_2)\omega^2$$

Για το σύστημα των 2 σωμάτων ισχύει:

$$\Sigma F_x = F_{\varepsilon\lambda} + T_{\sigma\tau 21} + T_{\sigma\tau 12} = F_{\varepsilon\lambda}$$

αφού οι δυνάμεις στατικής τριβής που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο είναι αντίθετες μεταξύ τους ως εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος.

Ισχύει επίσης:

$$\Sigma F_x = -Dx = -kx$$

οπότε τελικά έχουμε:

Σύστημα Σ_1 και Σ_2	$\Sigma F_x = F_{\varepsilon\lambda} = -kx \quad (1)$

Ας μελετήσουμε τώρα την κίνηση του <u>σώματος Σ$_1$</u>:

$$\Sigma F_{x,1} = F_{\varepsilon\lambda} + T_{\sigma\tau 21}$$

Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει:

Σώμα Σ$_1$ $\quad \Sigma F_{x,1} = m_1 a = m_1(-\omega^2 x) = -m_1\omega^2 x \quad \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + T_{\sigma\tau 21} = -m_1\omega^2 x \quad (2)$

(Σημείωση: Σε κάποιες περιπτώσεις στις πανελλαδικές εξετάσεις έχει ζητηθεί η σταθερά της ταλάντωσης του σώματος Σ$_1$. Είναι η ποσότητα $m_1\omega^2$ που συνήθως συμβολίζεται με D$_1$).

Ας μελετήσουμε τέλος και την κίνηση του σώματος Σ$_2$:

$$\Sigma F_{x,2} = T_{\sigma\tau 12}$$

Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει:

Σώμα Σ$_2$ $\quad \Sigma F_{x,2} = m_2 a = m_2(-\omega^2 x) = -m_2\omega^2 x \quad \Rightarrow T_{\sigma\tau 12} = -m_2\omega^2 x \quad (3)$

(Σημείωση: Σε κάποιες περιπτώσεις στις πανελλαδικές εξετάσεις έχει ζητηθεί η σταθερά της ταλάντωσης του σώματος Σ$_2$. Είναι η ποσότητα $m_2\omega^2$ που συνήθως συμβολίζεται με D$_2$).

Συνθήκη μη ολίσθησης

Για να μην υπάρχει ολίσθηση μεταξύ των σωμάτων θα πρέπει το μέτρο της στατικής τριβής που απαιτείται να μην υπερβαίνει το μέτρο της μέγιστης στατικής τριβής, δηλαδή:

$$|T_{\sigma\tau 12}| \le |T_{\sigma\tau max}| \Rightarrow m_2\omega^2|x| \le \mu|F_{12}| \Rightarrow m_2\omega^2|x| \le \mu m_2|g| \Rightarrow \boldsymbol{\omega^2|x| \le \mu|g|}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη συνθήκη ισορροπίας του Σ$_2$ στον y-άξονα: $|F_{12}| = m_2|g|$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

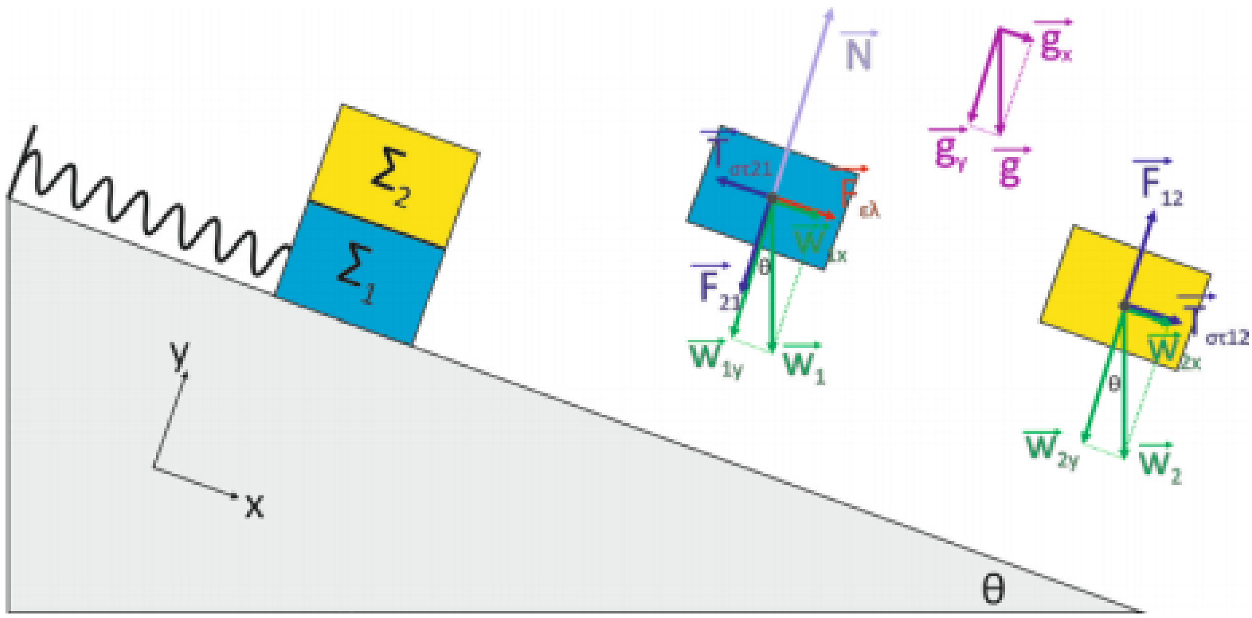
1. Το πλάτος Α της ταλάντωσης είναι δεδομένο

Για να μην υπάρχει ολίσθηση θα πρέπει να ισχύει: $\boldsymbol{\mu \ge \frac{\omega^2 A}{|g|}}$ δηλαδή η ελάχιστη τιμή του συντελεστή τριβής ώστε να μην υπάρξει ολίσθηση είναι: $\boldsymbol{\mu_{min} = \frac{\omega^2 A}{|g|}}$

2. Ο συντελεστής τριβής μ είναι δεδομένος

Για να μην υπάρχει ολίσθηση θα πρέπει να ισχύει: $|x| \le \frac{\mu|g|}{\omega^2}$ δηλαδή το μέγιστο επιτρεπόμενο πλάτος ταλάντωσης είναι $\boldsymbol{A = \frac{\mu|g|}{\omega^2}}$

B1. ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΕ ΠΛΑΓΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟ – ΙΔΑΝΙΚΟ ΕΛΑΤΗΡΙΟ



Θα εξετάσουμε την κίνηση των δύο σωμάτων υποθέτοντας ότι το ένα σώμα δεν ολισθαίνει σε σχέση μ ε το άλλο. Το σώμα $Σ_1$ είναι δεμένο στο ελατήριο ενώ το σώμα $Σ_2$ απλώς ακουμπάει στο $Σ_1$.

Αν θεωρήσουμε <u>τα δύο σώματα σύστημα</u> εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε πως το σύστημα αυτό κάνει ΑΑΤ με σταθερά $D = k$ όπου k η σταθερά του ελατηρίου.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση

$k = (m_1 + m_2)\omega^2$

Για το σύστημα των 2 σωμάτων ισχύει:

$$\Sigma F_x = F_{\varepsilon\lambda} + w_{1x} + w_{2x} + T_{\sigma\tau 21} + T_{\sigma\tau 12} = F_{\varepsilon\lambda} + w_{1x} + w_{2x}$$

αφού οι δυνάμεις στατικής τριβής που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο είναι αντίθετες μεταξύ τους ως εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος.

Ισχύει επίσης:

$$\Sigma F_x = -Dx = -kx$$

οπότε τελικά έχουμε:

Σύστημα $Σ_1$ και $Σ_2$	$\Sigma F_x = F_{\varepsilon\lambda} + w_{1x} + w_{2x} = -kx \quad (1)$

Ας μελετήσουμε τώρα την κίνηση του <u>σώματος $Σ_1$</u>:

$$\Sigma F_{x,1} = F_{\varepsilon\lambda} + w_{1x} + T_{\sigma\tau 21}$$

Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει:

Σώμα Σ_1 $\Sigma F_{x,1} = m_1 a = m_1(-\omega^2 x) = -m_1\omega^2 x \quad \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + w_{1x} + T_{\sigma\tau 21} = -m_1\omega^2 x \quad (2)$

(Σημείωση: Σε κάποιες περιπτώσεις στις πανελλαδικές εξετάσεις έχει ζητηθεί η σταθερά της ταλάντωσης του σώματος Σ_1. Είναι η ποσότητα $m_1\omega^2$ που συνήθως συμβολίζεται με D_1).

Ας μελετήσουμε τέλος και την κίνηση του σώματος Σ_2:

$$\Sigma F_{x,2} = w_{2x} + T_{\sigma\tau 12}$$

Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει:

Σώμα Σ_2 $\Sigma F_{x,2} = m_2 a = m_2(-\omega^2 x) = -m_2\omega^2 x \quad \Rightarrow w_{2x} + T_{\sigma\tau 12} = -m_2\omega^2 x \quad (3)$

(Σημείωση: Σε κάποιες περιπτώσεις στις πανελλαδικές εξετάσεις έχει ζητηθεί η σταθερά της ταλάντωσης του σώματος Σ_2. Είναι η ποσότητα $m_2\omega^2$ που συνήθως συμβολίζεται με D_2).

Συνθήκη μη ολίσθησης

Για να μην υπάρχει ολίσθηση μεταξύ των σωμάτων θα πρέπει το μέτρο της στατικής τριβής που απαιτείται να μην υπερβαίνει το μέτρο της μέγιστης στατικής τριβής, δηλαδή:

$$|T_{\sigma\tau 12}| \le |T_{\sigma\tau max}| \overset{(3)}{\Rightarrow} |-m_2\omega^2 x - w_{2x}| \le \mu|F_{12}| \Rightarrow |-m_2\omega^2 x - w_{2x}| \le \mu m_2|g_y|$$
$$\Rightarrow |-\omega^2 x - g_x| \le \mu|g_y| \Rightarrow |\omega^2 x + g_x| \le \mu|g_y| \quad (4)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη συνθήκη ισορροπίας του Σ_2 στον y-άξονα: $|F_{12}| = m_2|g_y|$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

1. Το πλάτος Α της ταλάντωσης είναι δεδομένο

Για να μην υπάρχει ολίσθηση θα πρέπει να ισχύει: $\mu \ge \frac{|\omega^2 x + g_x|}{|g_y|}$

Η x-συνιστώσα του διανύσματος της επιτάχυνσης της βαρύτητας (g_x) κατευθύνεται προς τα κάτω οπότε ο αριθμητής του κλάσματος παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή του όταν η απομάκρυνση x είναι ''όσο πιο κάτω'' γίνεται δηλαδή στην κάτω ακραία θέση και έτσι είναι τελικά: $\mu_{min} = \frac{\omega^2 A + |g_x|}{|g_y|}$

2. Ο συντελεστής τριβής μ είναι δεδομένος

Η σχέση (4) δίνει:

$$-\mu|g_y| \leq \omega^2 x + g_x \leq \mu|g_y| \Rightarrow -\mu|g_y| - g_x \leq \omega^2 x \leq \mu|g_y| - g_x \Rightarrow$$

$$\frac{-\mu|g_y| - g_x}{\omega^2} \leq x \leq \frac{\mu|g_y| - g_x}{\omega^2}$$

Το μέγιστο επιτρεπόμενο πλάτος είναι η μικρότερη τιμή από τις απόλυτες τιμές των δύο άκρων της ανισότητας δηλαδή:

$$\boldsymbol{A_{max} = \left|\frac{\mu|g_y| - |g_x|}{\omega^2}\right|}$$