

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ-ΚΡΟΥΣΕΙΣ

ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

1. Ένα σώμα μάζας $m=4\text{kg}$ είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k=400\text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένη. Το σώμα αρχικά ισορροπεί και τη χρονική στιγμή $t=0$ το εκτοξεύουμε με ταχύτητα $v=4\text{m/sec}$ με φορά προς την θετική ακραία θέση ταλάντωσης. Αν η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι $\omega=10\text{rad/sec}$, να υπολογίσετε:

α. Την ολική ενέργεια και το πλάτος ταλάντωσης.

β. τη μεταβολή της ορμής του σώματος από τη χρονική στιγμή που διέρχεται από τη θέση $x_1=+A/2$ πρώτη φορά με θετική ταχύτητα, μέχρι τη χρονική στιγμή που διέρχεται από τη θέση $x_2=-A\sqrt{3}/2$ με αρνητική ταχύτητα πάλι πρώτη φορά.

γ. Το έργο της δύναμης του ελατηρίου στη χρονική διάρκεια του ερωτήματος β.

[Απ. (α) 32J, 0,4m (β) -21,6kgm/sec, (γ) -16J]

2. Σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$, η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη. Εκτρέπουμε το σώμα απ' τη θέση ισορροπίας του κατά $x_1=0,1\sqrt{3}\text{m}$ και τη χρονική στιγμή $t=0$ το εκτοξεύουμε με ταχύτητα $v_1=1\text{m/sec}$ με φορά προς την θετική ακραία θέση ταλάντωσης.

α. Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει ΑΑΤ και να βρείτε την περίοδο της κίνησης.

β. Να γράψετε τις εξισώσεις απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

γ. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης επαναφοράς από τη στιγμή της εκτόξευσης του σώματος μέχρι τη στιγμή που διέρχεται από τη θέση $x_2=-A/2$, όπου A το πλάτος ταλάντωσης.

[Απ. (α) 0,2m, $\pi/3$ rad (β) $x=0,2\eta\mu(10t+\pi/3)$ (SI), (γ) 1J]

3. Ένα σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k=200\text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο και μπορεί να κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα αρχικά ισορροπεί και τη χρονική στιγμή $t=0$ το εκτοξεύουμε με ταχύτητα v με φορά προς την θετική ακραία θέση ταλάντωσης. Η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος είναι $x_{\max}=0,3\text{m}$.

α. Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της.

β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα εκτόξευσης v του σώματος.

γ. Να γράψετε τις εξισώσεις απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

δ. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της ορμής του σώματος από τη στιγμή που εκτοξεύτηκε μέχρι τη στιγμή που η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου έγινε μέγιστη για πρώτη φορά.

[Απ. (α) 0,2πsec, (β) 3m/sec, (γ) $x=0,3\eta\mu(10t)$, (δ) -6kgm/sec]

ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

4. Σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k , το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στην οροφή. Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του μέχρι να φτάσει στη θέση φυσικού μήκους και τη χρονική στιγμή $t=0$ το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Το σώμα σταματάει στιγμιαία για πρώτη φορά μετά από χρόνο $\Delta t=0,1\pi$ sec, αφού διανύσει απόσταση $\Delta S=0,2\text{m}$.

α. Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης.

β. Να γράψετε τις εξισώσεις απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

- γ. Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\pi/30 \text{ sec}$.
- δ. Τη στιγμή που το σώμα διέρχεται πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας του ασκούμε σ' αυτό στιγμιαία δύναμη F με αποτέλεσμα η φορά της ταχύτητας να αντιστραφεί ακαριαία και το μέτρο της να αυξηθεί κατά 1 m/sec . Να υπολογίσετε το νέο πλάτος ταλάντωσης του σώματος.
- [Απ. (α) 40 rad/sec , (β) $x = 0,1 \text{ m}$ ($40t + \pi/2$)(SI), (γ) 36 J , 2 J , (δ) $0,125 \text{ m}$]

ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

5. Ένα σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ ισορροπεί στο κάτω άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο. Το ελατήριο θεωρείται ιδανικό με σταθερά $k = 100 \text{ N/m}$. Η γωνία κλίσης του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\varphi = 30^\circ$. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου κατά $A = 0,05 \text{ m}$ και το αφήνουμε ελεύθερο.
- α. Να δείξετε ότι το σύστημα θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο T .
- β. Όταν το σώμα βρίσκεται στις θέσεις $x = \pm 0,05 \text{ m}$ να βρείτε
- τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης.
 - τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.
 - το ρυθμό μεταβολής της ορμής του.
- [Απ. (α) $\pi/5$ (β) i) $0,125 \text{ J}$ ii) $0,5 \text{ J}$, 0 iii) -5 N , 5 N]

ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΜΕ ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

6. Οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 250 \text{ N/m}$ με το ένα του άκρο ακλόνητα στερεωμένο και στο άλλο άκρο του δένεται σώμα μάζας $M = 2,4 \text{ kg}$ που μπορεί να κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Βλήμα μάζας $m = 100 \text{ g}$ κινείται οριζόντια, στην διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, με ταχύτητα $v = 100 \text{ m/s}$, και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα M . Η σύγκρουση γίνεται στην θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και το σώμα είναι αρχικά ακίνητο.
- α. Ποια είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση;
- β. Ποιο το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος;
- γ. Ποια η συχνότητα και ποια η περίοδος της ταλάντωσης;

ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΜΕ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ

7. Σώμα μάζας $m_1 = 4 \text{ kg}$ έχει δεθεί στο ελεύθερο άκρο ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 400 \text{ N/m}$ και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A = 0,3 \text{ m}$. Σε κάποια στιγμή και ενώ βρίσκεται στη μέγιστη απομάκρυνση, συγκρούεται ανελαστικά με σώμα μάζας $m_2 = 1 \text{ kg}$, που κινείται με ταχύτητα $v_2 = 12 \text{ m/s}$. Μετά την κρούση το σώμα m_1 ταλαντώνεται με πλάτος $0,5 \text{ m}$. Ζητούνται:
- α. Η περίοδος ταλάντωσης του σώματος m_1 πριν και μετά την κρούση.
- β. Η ταχύτητα του σώματος m_2 μετά την κρούση.
- γ. Η απώλεια της Μηχανικής ενέργειας κατά τη κρούση.

ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

8. Σώμα μάζας $m = 0,5 \text{ kg}$ είναι στερεωμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $K = 200 \text{ N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο στην οροφή. Αρχικά το σώμα ισορροπεί ακίνητο. Την χρονική στιγμή $t = 0$ εκτοξεύουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του με αρχική κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου $v_0 = 10 \text{ m/s}$ και με φορά προς τα πάνω.
- α. Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει Α.Α.Τ. και να βρείτε τη περίοδο της ταλάντωσης του.

- b. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του, θεωρώντας θετική τη φορά της αρχικής του ταχύτητας.
- c. Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
- d. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος στη θέση $x = + 0,25 \text{ m}$.

ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟ ΜΕ ΠΛΑΣΤΙΚΗ

9. Ένα πουλί μάζας $m = 0.5 \text{ kg}$ είναι ακίνητο πάνω στο δίσκο μιας ζυγαριάς, το ελατήριο της οποίας είναι κατακόρυφο με σταθερά $K = 200 \text{ N/m}$. Ο δίσκος έχει μάζα $M = 2 \text{ kg}$ και το σύστημα ισορροπεί αρχικά. Ξαφνικά το πουλί πετάει κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα $v = 1 \text{ m/s}$ και το ελατήριο με τον δίσκο εκτελούν Α.Α.Τ.

α. Να υπολογιστεί το πλάτος της ταλάντωσης.

β. Να προσδιοριστεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του δίσκου από την θέση ισορροπίας του.

γ. Μετά από πόσο χρόνο από την στιγμή $t = 0$ που πετάει το πουλί, ο δίσκος περνάει για πρώτη φορά από την θέση ισορροπίας του;

ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟ ΜΕ ΕΛΑΣΤΙΚΗ

10. Δίσκος μάζας $M = 3 \text{ kg}$ ισορροπεί στο άνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $K = 300 \text{ N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο στο δάπεδο. Σφαίρα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ αφήνεται να πέσει από ύψος $h = 0,8 \text{ m}$ πάνω από τον δίσκο. Αν η κρούση της σφαίρας με το δίσκο είναι ελαστική να βρείτε:

a. Το ύψος στο οποίο θα φτάσει η σφαίρα μάζας m , μετά την κρούση.

b. Την ταχύτητα του δίσκου αμέσως μετά την κρούση.

c. Το πλάτος και την περίοδο της ταλάντωσης του δίσκου μετά τη κρούση και θεωρώντας ότι η σφαίρα απομακρύνεται έτσι ώστε να μην ξαναχτυπήσει στον δίσκο.

ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟ ΜΕ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ

11. Σώμα μάζας $M = 8 \text{ kg}$ ισορροπεί δεμένο στο πάνω ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 200 \text{ N/m}$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο στο δάπεδο. Από κάποιο ύψος αφήνεται σφαίρα $m = 2 \text{ kg}$ η οποία συγκρούεται με το σώμα M με ταχύτητα $v_1 = 10 \text{ m/s}$ και αναπηδά με $v_2 = 6 \text{ m/s}$.

a. να βρείτε τη ταχύτητα του σώματος M αμέσως μετά τη κρούση.

β. να αποδείξετε ότι το σώμα μάζας M θα εκτελέσει Α.Α.Τ. μετά την απομάκρυνση της σφαίρας m .

γ. να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης του M .

δ. να βρείτε τη θερμότητα που παράχθηκε κατά τη κρούση.

ε. να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του M στη θέση $x = A/2$

ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

12. Ιδανικό ελατήριο σταθεράς $K = 200 \text{ N/m}$ βρίσκεται κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\theta = 30^\circ$, με το άνω άκρο του ακλόνητα στερεωμένο και στο κάτω άκρο του συνδεδεμένο σώμα μάζας $m = 4 \text{ kg}$. Το σώμα μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο και αρχικά ισορροπεί ακίνητο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ εκτοξεύουμε το σώμα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $v = 2 \text{ m/s}$.

a. Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει α.α.τ. και να υπολογίσετε την περίοδο της.

b. Να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

- c. Να υπολογίσετε μετά από πόσο χρόνο από την στιγμή της εκτόξευσης το σώμα θα βρεθεί στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου για πρώτη φορά.
- d. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος τη χρονική στιγμή που το σώμα έχει διανύσει διάστημα $S=1\text{m}$ από τη στιγμή της εκτόξευσής του

ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΜΕ ΠΛΑΣΤΙΚΗ

13. Ελατήριο σταθεράς $k=200\text{N/m}$ έχει το ένα άκρο του δεμένο στη βάση λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$. Στο πάνω άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο και ισορροπεί σώμα μάζας $M=8\text{kg}$. Από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου και από σημείο που απέχει $s=0,25\text{m}$ από το σώμα M αφήνεται να ολισθήσει ελεύθερα ένα δεύτερο σώμα μάζας ίσης με το πρώτο, με το οποίο συγκρούεται πλαστικά.

- a. Να υπολογιστεί το πλάτος των ταλαντώσεων που θα πραγματοποιήσει το σύστημα.
- β. Να εξεταστεί αν το συσσωμάτωμα κατά την ταλάντωσή του θα περάσει
- από την θέση ισορροπίας του πρώτου σώματος.
 - Από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Αν περνάει ποίο είναι το μέτρο της ταχύτητας του στις θέσεις αυτές;

ΧΑΣΙΜΟ ΕΠΑΦΗΣ

14. Το ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200 \text{ N/m}$ είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο. Στο άλλο άκρο του είναι σταθερά συνδεδεμένος δίσκος Δ μάζας $M = 1,5 \text{ kg}$. Πάνω στο δίσκο είναι τοποθετημένο σώμα Σ μάζας $m = 0,5 \text{ kg}$. Το σύστημα ισορροπεί. Πιέζουμε το σύστημα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $d = \sqrt{5}/10\text{m}$ και το αφήνουμε ελεύθερο.

- a. Να δείξετε ότι το σώμα Σ θα εγκαταλείπει το δίσκο Δ .
- β. Ποια είναι η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος Σ τη στιγμή που εγκαταλείπει το δίσκο;
- γ. Σε πόσο ύψος θα φθάσει το σώμα Σ πάνω από τη θέση στην οποία εγκαταλείπει το δίσκο;
- [Απ. (α) εγκαταλείπει στη θέση $\chi_1 = -0,1\text{m}$ (β) $v = -2\text{m/s}$, $a = 10 \text{ m/s}^2$ (γ) $h = 0,2 \text{ m}$]

15. Σώμα μάζας $m=1 \text{ kg}$ βρίσκεται σε επαφή με δίσκο μάζας $M=4 \text{ kg}$ ο οποίος είναι στερεωμένος ακλόνητα στο άνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $K=500 \text{ N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο δάπεδο. Αρχικά το σύστημα των δυο σωμάτων ισορροπεί ακίνητο. Απομακρύνουμε το σύστημα των δυο σωμάτων από τη θέση ισορροπίας τους συσπειρώνοντας επιπλέον το ελατήριο κατά $\chi_1=0,2\text{m}$ και τη χρονική στιγμή $t=0$ το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί από τη θέση που το εκτρέψαμε χωρίς αρχική ταχύτητα.

- a. Να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του συστήματος και του κάθε σώματος ξεχωριστά.
- b. Να αποδείξετε ότι το σώμα μάζας m χάνει την επαφή του με το δίσκο όταν διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.
- c. Να βρείτε τη δύναμη που δέχεται το σώμα μάζας m από το δίσκο σε συνάρτηση με το χρόνο, για το χρονικό διάστημα που το σώμα είναι σε επαφή με το δίσκο.

16. Δίσκος μάζας $M=0,1\text{kg}$ βρίσκεται στο άνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $K=40 \text{ N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο στο έδαφος. Πάνω στο δίσκο τοποθετούμε σώμα μάζας $m=0,3 \text{ kg}$ και το αφήνουμε να ισορροπήσει.

- a. Να αποδείξετε ότι αν το σύστημα εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του θα εκτελέσει Α.Α.Τ. και να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς του συστήματος και του κάθε σώματος ξεχωριστά.
- b. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή $A_{\max}$ του πλάτους της Α.Α.Τ. που μπορεί να εκτελέσει ο δίσκος χωρίς να χάνει την επαφή του το σώμα m .