ΚΥΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

1. Δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων βρίσκονται σε δύο σημεία της επιφάνειας ενός υγρού δημιουργώντας εγκάρσια κύματα τα οποία διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού με ταχύτητα 0,5 m/s. Οι δύο πηγές ταλαντώνονται με εξίσωση $y = 0{,}3\eta\mu 2\pi t$ (S.I.). Μικρό κομμάτι φελλού που βρίσκεται σε σημείο Κ της επιφάνειας του υγρού απέχει από την πηγή Π_1 απόσταση $r_1 = 2$ m και από την πηγή Π_2 απόσταση $r_2 = 5$ m.

α. Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις των ταλαντώσεων που εκτελεί το κομμάτι φελλού εξαιτίας του κύματος από την πηγή Π_1 και εξαιτίας του κύματος από την πηγή Π_2 ξεχωριστά,

β. Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης του φελλού μετά την έναρξη της συμβολής των δύο κυμάτων στο σημείο Κ.

γ. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του φελλού από τη θέση ισορροπίας του μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Κ.

Λύση

α. Ο φελλός βρίσκεται σε σημείο Κ που είναι πιο κοντά στην πηγή Π_1 (αφού $r_1 < r_2$). Αφού τα δύο κύματα διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού με την ίδια ταχύτητα, ο φελλός θα αρχίσει να ταλαντώνεται πρώτα με τη δράση του κύματος από την πηγή Π_1. Επειδή η εξίσωση της ταλάντωσης της πηγής Π_1 είναι της μορφής:

$y = A\eta\mu\omega t = A\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$, η εξίσωση ταλάντωσης του φελλού εξαιτίας του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π_1 είναι της μορφής: $y_{1(K)} = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$ για $t \geq t_{1(K)}$ όπου $t_{1(K)}$ η χρονική στιγμή που φτάνει το κύμα από την πηγή Π_1 στο σημείο Κ.

Από την εξίσωση ταλάντωσης της πηγής έχουμε **$A = 0{,}3$ m** και **$\omega = 2\pi$ rad/s** ή **$T = 1$ s**.

Επιπλέον ισχύει ότι $\upsilon = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow$ **$\lambda = 0{,}5$ m**. Επομένως:

$$y_{1(K)} = 0{,}3\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{1} - \frac{r_1}{0{,}5}\right) \Rightarrow \mathbf{y_{1(K)} = 0{,}3\eta\mu(2\pi t - 8\pi)\ (S.I.)}$$

Αφού την $t = 0$ το κύμα ξεκινά τη διάδοση του από την πηγή $Π_1$, θα φτάσει στο φελλό τη χρονική στιγμή $t_{1(K)}$ που μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση: $υ = \frac{r_1}{t_{1(K)}} \Rightarrow$ **$t_{1(K)} = 4$ s**

Συνεπώς η ζητούμενη εξίσωση είναι η: **$y_{1(K)} = 0{,}3ημ(2πt - 8π)$ (S.I.)** για **$t \geq 4$ s**

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε την εξίσωση ταλάντωσης του φελλού εξαιτίας του κύματος που προέρχεται από την πηγή $Π_2$. Είναι: $y_{2(K)} = Aημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{λ}\right)$ για $t \geq t_{2(K)}$

Έχουμε: $υ = \frac{r_2}{t_{2(K)}} \Rightarrow t_{2(K)} = \frac{r_2}{υ} \Rightarrow$ **$t_{2(K)} = 10$ s**

Συνεπώς: $y_{2(K)} = 0{,}3ημ2π\left(\frac{t}{1} - \frac{5}{0{,}5}\right) \Rightarrow$ **$y_{2(K)} = 0{,}3ημ(2πt - 20π)$ (S.I.)** για **$t \geq 10$ s**

β. Το πλάτος της ταλάντωσης του φελλού μετά τη στιγμή 4 s που φτάνει και το δεύτερο κύμα μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση: $A_K = 2A\left|συν\frac{π(r_2 - r_1)}{λ}\right| \Rightarrow A_K = 0{,}6\left|συν\frac{π(5-2)}{0{,}5}\right| \Rightarrow$ **$A_K = 0{,}6\,m$**

Αφού το πλάτος της ταλάντωσης του φελλού ισούται με 2Α, στο σημείο Κ συμβαίνει **ενισχυτική συμβολή**.

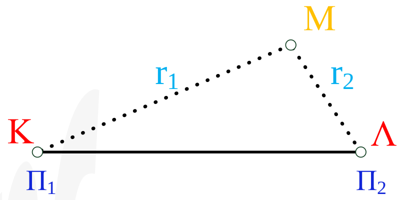
γ. Η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης του φελλού από τη θέση ισορροπίας του μετά τη χρονική στιγμή της έναρξης της συμβολής των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό (4 s) δίνεται από τον τύπο:

$$y_K = 2Aσυν\frac{π(r_2 - r_1)}{λ}ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2 + r_1}{2λ}\right) \Rightarrow y_K = 0{,}6συν\frac{π(5-2)}{0{,}5}ημ2π\left(\frac{t}{1} - \frac{5+2}{1}\right) \Rightarrow$$

$$y_K = 0{,}6συν6π \cdot ημ(2πt - 14π) \Rightarrow \mathbf{y_K = 0{,}6ημ(2πt - 14π)\ \ (S.I.)}$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει από τη χρονική στιγμή 10 s που φτάνει και το δεύτερο κύμα στο φελλό.

Άρα: **$y_K = 0{,}6ημ(2πt - 14π)$ (S.I.)** για **$t \geq 4$ s.**



2. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ που βρίσκονται στα σημεία Κ και Λ της επιφάνειας ενός ελαστικού μέσου και οι οποίες ταλαντώνονται με χρονική εξίσωσης $y = 0{,}4ημ20πt$ (S.I.). Οι πηγές δημιουργούν εγκάρσια αρμονικά κύματα τα οποία διαδίδονται στην επιφάνεια του ελαστικού μέσου με ταχύτητα 2 m/s. Υλικό σημείο Μ του ελαστικού μέσου, το οποίο απέχει από την πηγή $Π_1$ απόσταση $r_1 = 1$ m και από την πηγή $Π_2$ απόσταση r_2 (με $r_1 > r_2$), ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή 0,3 s.

α. Να βρείτε τη διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων που εκτελεί ταυτόχρονα το υλικό σημείο Μ μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό.

β. Να διερευνήσετε αν στο σημείο Μ συμβαίνει ενισχυτική ή ακυρωτική συμβολή,

γ. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση απομάκρυνσης του υλικού σημείου Μ από τη θέση ισορροπίας του για $t \geq 0$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων.

δ. Ποια η ελάχιστη μείωση της συχνότητας ώστε στο σημείο Μ να έχουμε ενισχυτική συμβολή αν αρχικά είχαμε ακυρωτική συμβολή ή ακυρωτική συμβολή αν αρχικά είχαμε ενισχυτική συμβολή

Λύση

α. Από την εξίσωση ταλάντωσης των πηγών προκύπτει ότι **$A = 0{,}4$ m** και **$ω = 20π$ rad/s** άρα και **$f = 10$ Hz** καθώς επίσης **$T = 0{,}1$ s**. Το μήκος κύματος είναι: $υ = λf \Rightarrow$ **$λ = 0{,}2$ m**.

Το υλικό σημείο Μ, μετά τη στιγμή που φτάνουν και τα δύο κύματα στο σημείο αυτό, εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις οι οποίες εμφανίζουν μεταξύ τους διαφορά φάσης. Η διαφορά φάσης που εμφανίζουν οι δύο ταλαντώσεις οφείλεται στη χρονική διαφορά άφιξης των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό. Έχουμε:

$Δφ = ωΔt$ όπου Δt η χρονική διαφορά άφιξης των δύο κυμάτων στο σημείο Δ. Έστω $t_{1(M)}$ η χρονική στιγμή που φτάνει το κύμα από την πηγή $Π_1$ στο σημείο Μ και $t_{2(M)}$ η χρονική στιγμή που φτάνει το κύμα από την πηγή $Π_2$ στο σημείο Μ. Επειδή το σημείο Μ είναι πιο μακριά από την πηγή $Π_1$ σε σχέση με την πηγή $Π_2$ είναι $t_{1(M)} > t_{2(M)}$. Ισχύει: $t_{1(M)} = \frac{r_1}{υ} \Rightarrow t_{1(M)} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ **$t_{1(M)} = 0{,}5\,s$**. Η χρονική στιγμή $t_{2(M)}$ είναι ίση με **$t_{2(M)} = 0{,}3$ s** αφού το υλικό σημείο Μ αρχίζει να ταλαντώνεται μόλις φτάσει το κύμα από την πιο κοντινή πηγή.

Άρα: $\Delta\varphi = \omega\Delta t \Rightarrow \Delta\varphi = 20\pi\cdot 0{,}2 \Rightarrow$ **$\Delta\varphi = 4\pi$ rad**.

Παρατήρηση: Την διαφορά φάσης μπορούμε να την βρούμε και χωρίς τον υπολογισμό του χρόνου άφιξης κάθε κύματος στο σημείο Μ ως εξής: Βρίσκουμε την απόσταση $r_2 = \upsilon t_{2(M)} \Rightarrow$ **$r_2 = 0{,}6$ m**.

$$\Delta t = t_{1(M)} - t_{2(M)} \Rightarrow \Delta t = \frac{r_1}{\upsilon} - \frac{r_2}{\upsilon} = \frac{r_1 - r_2}{\upsilon}$$

Άρα: $\Delta\varphi = \omega\Delta t \Rightarrow \Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{T}\dfrac{r_1 - r_2}{\upsilon} \Rightarrow \Delta\varphi = \dfrac{2\pi(r_1 - r_2)}{\lambda} \Rightarrow$ **$\Delta\varphi = 4\pi$ rad**

β. Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Μ μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A_M = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi(r_1 - r_2)}{\lambda}\right| \Rightarrow A_M = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi(1-0{,}6)}{0{,}2}\right| \Rightarrow A_M = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\right| = 2A \Rightarrow \mathbf{A_M = 0{,}8\,m}$$

Αφού $A_M = 2A$, στο σημείο Μ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

γ. Τα δύο κύματα ξεκινούν από τις δύο πηγές ταυτόχρονα, τη χρονική στιγμή $t = 0$. Μέχρι να φτάσει το πρώτο κύμα (το κύμα από την κοντινότερη πηγή (Π_2)) στο σημείο Μ, το σημείο Μ είναι ακίνητο. Η χρονική στιγμή που φτάνει το πρώτο κύμα στο σημείο Μ είναι η $t_{2(M)} = 0{,}3$ s. Άρα: $y = 0$ για $0 \le t < 0{,}3$ s

Μετά τη χρονική στιγμή 0,3 s και μέχρι να φτάσει και το δεύτερο κύμα στο σημείο Μ, το σημείο αυτό εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση για την οποία "ευθύνεται" μόνο το κύμα που έχει φτάσει πρώτο. Το δεύτερο κύμα φτάνει τη χρονική στιγμή $t_{1(M)} = 0{,}5$ s.

Δηλαδή στη χρονική διάρκεια $0{,}3\text{ s} \le t < 0{,}5\text{ s}$ το υλικό σημείο Μ εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση:

$$y_M = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) \Rightarrow y_M = 0{,}4\eta\mu 2\pi(10t - 3) \text{ (S.I.)}$$

Από τη χρονική στιγμή 0,5 s και μετά, που έχει φτάσει και το δεύτερο κύμα (άρα έχει ξεκινήσει η συμβολή των δύο κυμάτων), η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Μ δίνεται από τη σχέση:

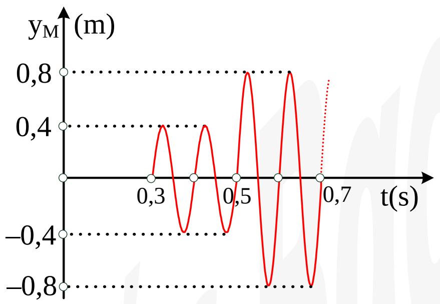
$$y_M = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{\pi(r_1 - r_2)}{\lambda}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow y_M = 0{,}8\sigma\upsilon\nu 2\pi\cdot\eta\mu 2\pi(10t - 4) \Rightarrow \mathbf{y_M = 0{,}8\eta\mu 2\pi(t - 4)\ (S.I.)}$$ για

$t \ge 1$ s.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε: $y_M = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 0,3s \\ 0,4\eta\mu 2\pi(t-3) & 0,3s \le t < 0,5\ s \\ 0,8\eta\mu 2\pi(t-4) & t \ge 0,5\ s \end{cases}$ (S.I.)

Είναι T = 0,1 s, οπότε στη χρονική διάρκεια 0,3 s → 0,5 s το υλικό σημείο Μ έχει εκτελέσει 2 ταλαντώσεις.

Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



δ. Στο σημείο Μ αρχικά είχαμε ενισχυτική συμβολή, οπότε τώρα πρέπει να βρούμε για ποια συχνότητα έ-χουμε ακυρωτική συμβολή. Έχουμε: $|r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{\lambda'}{2} \Rightarrow |r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{\upsilon}{2f'} \Rightarrow \mathbf{f = (2N+1)\cdot 2,5}$ (S.I.)

Προσοχή εδώ, δεν ζητάμε την ελάχιστη συχνότητα που θα ήταν η f_{min} = 2,5 Hz, αλλά την ελάχιστη μείωση της συχνότητας. Θα πρέπει δηλαδή πρώτα να βρούμε την συχνότητα που είναι πιο κοντά στην αρχική συ-χνότητα ώστε να πετύχουμε ελάχιστη μεταβολή. Με δοκιμές στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η τιμή f′ = 7,5 Hz είναι πιο κοντά στην αρχική συχνότητα και ταυτόχρονα έχουμε ακυρωτική συμβολή. Άρα:

Δf = f′ – f = –2,5 Hz, δηλαδή μείωση κατά 2,5 Hz.

3. Δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ που απέχουν μεταξύ τους απόσταση 0,88 m εκτελούν ταλαντώσεις με εξίσωση $y = 0{,}2ημωt$ (y σε m) και δημιουργούν εγκάρσια αρμονικά κύματα τα οποία διαδίδονται στην επιφάνεια ελαστικού μέσου με ταχύτητα 2 m/s. Στο υλικό σημείο Μ της επιφάνειας του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στο μέσον της απόστασης των δύο πηγών τα κύματα από τις δύο πηγές φτάνουν ταυτόχρονα και το εξαναγκάζουν να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με μέγιστη ταχύτητα 8π m/s, ενώ σε υλικό σημείο Ζ της επιφάνειας του ελαστικού μέσου τα κύματα από τις δύο πηγές φτάνουν με χρονική διαφορά 1,3 s.

α. Να διερευνήσετε αν στο σημείο Ζ συμβαίνει ενισχυτική ή ακυρωτική συμβολή,

β. Να βρείτε ποια σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $Π_1Π_2$ ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος και ποια σημεία παραμένουν ακίνητα εξαιτίας της συμβολής των κυμάτων που προέρχονται από τις δύο πηγές.

γ. Να σχεδιάσετε τις υπερβολές ενισχυτικής και τις υπερβολές ακυρωτικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$.

δ. Ποια είναι η ελάχιστη συχνότητα για την οποία θα έχουμε δύο υπερβολές ενίσχυσης περισσότερες στο ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$.

Λύση

α. Το υλικό σημείο Μ βρίσκεται στο μέσον της απόστασης των δύο πηγών, επομένως στο σημείο αυτό συμβαίνει ενισχυτική συμβολή (όπως και σε κάθε άλλο σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος $Π_1Π_2$). Συνεπώς το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Μ είναι 2A και η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης του υπολογίζεται από τη σχέση: $υ_{max(M)} = ωA_M \Rightarrow υ_{max(M)} = ω2A \Rightarrow ω = \dfrac{υ_{max(M)}}{2A} \Rightarrow$ **$ω = 20π$ rad/s**

Για να διερευνήσουμε το είδος της συμβολής στο σημείο Ζ, θα υπολογίσουμε το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου αυτού μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων. Είναι: $A_Z = 2A\left|συν\dfrac{π(r_1 - r_2)}{λ}\right|$

όπου r_1 και r_2 οι αποστάσεις του σημείου Ζ από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ αντίστοιχα. Είναι:

$$Δt = |t_1 - t_2| \Rightarrow Δt = \left|\frac{r_1}{υ} - \frac{r_2}{υ}\right| \Rightarrow Δt = \left|\frac{r_1 - r_2}{υ}\right| \Rightarrow |r_1 - r_2| = υΔt \Rightarrow \mathbf{|r_1 - r_2| = 2{,}6\,m}$$

Επίσης είναι $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow$ **T = 0,1 s** και $\upsilon = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow$ **λ = 0,2 m**.

Συνεπώς: $A_Z = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi 2,6}{0,2}\right| = 2A \Rightarrow \mathbf{A_Z = 0,4\,m}$. Επομένως στο σημείο Ζ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

β. i. Σημεία ενισχυτικής συμβολής

Όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου στα οποία συμβαίνει ενισχυτική συμβολή απέχουν από τις δύο πηγές Π_1 και Π_2 αποστάσεις r_1 και r_2 αντίστοιχα που ικανοποιούν τη σχέση: $d_1 - d_2 = N\lambda$ με $N = 0, \pm1, \pm2, ...$

Επειδή ενδιαφερόμαστε μόνο για τα σημεία ενισχυτικής συμβολής του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$, εκτός από τον παραπάνω τύπο θα ισχύει και ο τύπος $d_1 + d_2 = d$. Προσθέτοντας κατά μέλη τους δύο αυτούς τύπους προκύπτει: $2d_1 = d + N\lambda \Rightarrow 2d_1 = d + N\lambda \Rightarrow \mathbf{d_1 = \frac{d + N\lambda}{2}}$ με $N = 0, \pm1, \pm2, ...$ (1)

Με τον τύπο $d_1 = \frac{d + N\lambda}{2}$ υπολογίζουμε την απόσταση από την πηγή Π_1 κάθε σημείου του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ στο οποίο συμβαίνει ενισχυτική συμβολή. Πρέπει όμως $0 \leq d_1 \leq d$. Συνεπώς:

$$0 \leq \frac{d + N\lambda}{2} \leq d \Rightarrow -\frac{d}{2} \leq \frac{N\lambda}{2} \leq \frac{d}{2} \Rightarrow -\frac{d}{\lambda} \leq N \leq \frac{d}{\lambda} \Rightarrow \mathbf{-4,4 \leq N \leq 4,4}$$

Επομένως $N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ (εννιά σημεία ενισχυτικής συμβολής). Οι αποστάσεις των σημείων αυτών από την πηγή Π_1 υπολογίζονται από τη σχέση (1). Έχουμε:

Για $N = -4$: $d_1 = 0,04$ m

Για $N = -3$: $d_1 = 0,14$ m

Για $N = -2$: $d_1 = 0,24$ m

Για $N = -1$: $d_1 = 0,34$ m

Για $N = 0$: $d_1 = 0,44$ m

Για $N = 1$: $d_1 = 0,54$ m

Για $N = 2$: $d_1 = 0,64$ m

Για $N = 3$: $d_1 = 0,74$ m

Για $N = 4$: $d_1 = 0,84$ m

ii. Σημεία ακυρωτικής συμβολής

Με την ίδια μέθοδο βρίσκουμε τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $Π_1Π_2$ στα οποία συμβαίνει ακυρωτική συμβολή. Για τα σημεία αυτά ισχύουν οι εξισώσεις: $d_1 - d_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$ με $N = 0, \pm1, \pm2, ...$

και $d_1 + d_2 = d$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω εξισώσεις έχουμε:

$2d_1 = d + N\lambda + \lambda/2 \Rightarrow \mathbf{d_1 = \frac{d}{2} + \frac{N\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}}$ με $N = 0, \pm1, \pm2, ...$ ή $\mathbf{d_1 = 0{,}49 + 0{,}1N}$ (2)

Όμως πρέπει $0 \le d_1 \le d$. Συνεπώς:

$$0 \le \frac{d}{2} + \frac{N\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \le d \Rightarrow -\frac{d}{2} \le \frac{N\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \le \frac{d}{2} \Rightarrow -\frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2} \le N \le \frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{-4{,}9 \le N \le 3{,}9}$$

Συνεπώς $N = 0, \pm1, \pm2, \pm3, -4$ (8 σημεία ακυρωτικής συμβολής). Οι αποστάσεις των σημείων αυτών από την πηγή $Π_1$ υπολογίζονται από τη σχέση (2). Έχουμε:

Για $N = -4$: $d_1 = 0{,}09$ m

Για $N = -3$: $d_1 = 0{,}19$ m

Για $N = -2$: $d_1 = 0{,}29$ m

Για $N = -1$: $d_1 = 0{,}39$ m

Για $N = 0$: $d_1 = 0{,}49$ m

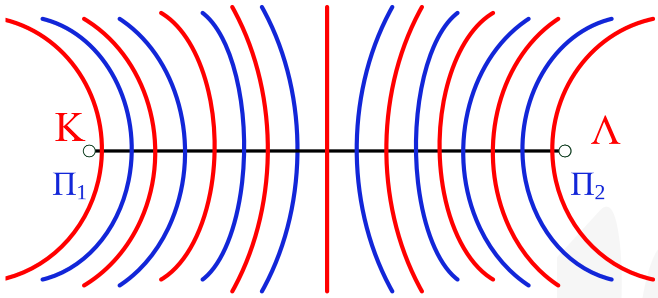
Για $N = 1$: $d_1 = 0{,}59$ m

Για $N = 2$: $d_1 = 0{,}69$ m

Για $N = 3$: $d_1 = 0{,}79$ m

Παρατήρηση: Από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει ότι δύο διαδοχικά σημεία ενισχυτικής συμβολής του τμήματος $Π_1Π_2$ απέχουν μεταξύ τους 0,1 m, δηλαδή $\frac{\lambda}{2}$, ενώ δύο διαδοχικά σημεία ενισχυτικής και ακυρωτικής συμβολής του τμήματος $Π_1Π_2$ απέχουν μεταξύ τους απόσταση 0,05 m, δηλαδή $\frac{\lambda}{4}$. Αυτό το συμπέρασμα ισχύει πάντοτε για τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $Π_1Π_2$ και μπορούμε να το χρησιμοποιούμε αν θέλουμε να επαληθεύσουμε γρήγορα την ορθότητα των υπολογισμών μας για τον αριθμό και τις θέσεις των σημείων ενισχυτικής και ακυρωτικής συμβολής, ξεκινώντας όμως πάντοτε από ένα σημείο για το οποίο είμαστε σίγουροι ότι είναι σημείο ενισχυτικής ή ακυρωτικής συμβολής (π.χ. το μέσο Μ).

γ. Οι ζητούμενες υπερβολές ενισχυτικής και ακυρωτικής συμβολής φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



κόκκινη γραμμή – ενισχυτική συμβολή
Μπλε γραμμή ακυρωτική συμβολή

δ. Είδαμε στο παραπάνω ερώτημα ότι έχουμε 9, εφόσον τώρα θέλουμε 2 ακόμη γραμμές ενίσχυσης δηλαδή 11. Για την 9 υπερβολές ενίσχυσης το Ν παίρνει τιμές έως και ±4, άρα για να έχουμε 11 υπερβολές ενίσχυσης θα πρέπει το Ν να παίρνει τώρα και την τιμή ±5. Δουλεύοντας όπως παραπάνω καταλήγουμε στην σχέση $-\frac{d}{\lambda'} \leq N \leq \frac{d}{\lambda'}$ και επειδή η ταχύτητα διάδοσης του κύματος παραμένει σταθερή με την αλλαγή της συχνότητας μπορούμε να γράψουμε την προηγούμενη σχέση ως $-\frac{d}{\frac{\upsilon}{f'}} \leq N \leq \frac{d}{\frac{\upsilon}{f'}} \Rightarrow -\frac{df'}{\upsilon} \leq N \leq \frac{df'}{\upsilon}$ και χρησιμοποιώντας μόνο την μία ανισωτική σχέση έχουμε: $N \leq \frac{df'}{\upsilon} \Rightarrow f' \geq \frac{N\upsilon}{d} \Rightarrow f' \geq \frac{2N}{0,88} \Rightarrow f' \geq \frac{N}{0,44}$ και επειδή όπως αναλύσαμε παραπάνω η μέγιστη τιμή του Ν είναι 5 θα έχουμε: $f' \geq \frac{5}{0,44} \Rightarrow \mathbf{f'_{min} = \frac{5}{0,44}\,Hz = \frac{125}{11}\,Hz}$

4. Σε δύο σημεία Κ και Λ της επιφάνειας ενός ελαστικού μέσου που απέχουν μεταξύ τους απόσταση 1,2 m υπάρχουν δύο σύγχρονες πηγές εγκάρσιων κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ αντίστοιχα, οι οποίες εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση μηδενικής αρχικής φάσης. Οι πηγές αυτές δημιουργούν κύματα πλάτους 3 mm και μήκους κύματος 0,2 m που διαδίδονται στην επιφάνεια του ελαστικού μέσου με ταχύτητα 2 m/s.

α. Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης των δύο πηγών.

β. Να υπολογίσετε, μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων, τη μέγιστη επιτάχυνση ταλάντωσης ενός τυχαίου υλικού σημείου Μ το οποίο βρίσκεται στην ευθεία που διέρχεται από τις δύο πηγές και είναι εκτός του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

γ. Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης και της ταχύτητας ταλάντωσης ενός υλικού σημείου Ν της επιφάνειας του ελαστικού μέσου σε συνάρτηση με το χρόνο, αν το σημείο αυτό απέχει από την πηγή $Π_1$ απόσταση $r_1 = 1,7$ m και από την πηγή $Π_2$ απόσταση $r_2 = 1$ m.

δ. Η υπερβολή (ενίσχυσης ή απόσβεσης) που περνά από το Ν τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$ στο σημείο Δ. Η δεύτερη υπερβολή ενίσχυσης αριστερά της μεσοκαθέτου τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$ στο σημείο Γ. Να βρείτε την απόσταση (ΓΔ) = x

Λύση

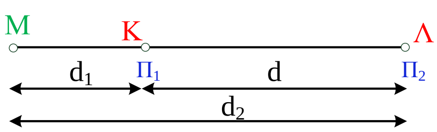
α. Οι δύο πηγές είναι σύγχρονες και εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση μηδενικής αρχικής φάσης. Συνεπώς η εξίσωση ταλάντωσης κάθε πηγής είναι της μορφής: $y = Αημωt$

Το πλάτος Α ισούται με το πλάτος των κυμάτων που διαδίδονται στο ελαστικό μέσο.

Συνεπώς είναι **A = 0,003 m**. Επιπλέον ισχύει: $υ = \frac{λ}{T} \Rightarrow \mathbf{T = 0,1 s}$

Άρα $ω = \frac{2π}{T} \Rightarrow$ **ω = 20π rad/s**. Η ζητούμενη εξίσωση είναι η: **y = 0,003ημ20πt (S.I.)**

β. Είναι $α_{max(M)} = ω^2 A_M$. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο Μ μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό



υπολογίζεται από τη σχέση: $A_M = \left|2Aσυνπ\frac{d_2 - d_1}{λ}\right|$

Όμως $d_2 - d_1 = d$. Συνεπώς: $A_M = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi d}{\lambda}\right|$

Δηλαδή όλα τα υλικά σημεία της ευθείας x'x που διέρχεται από τις δύο πηγές, εκτός από εκείνα του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ, ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος. Για το τυχαίο σημείο Μ είναι:

$$A_M = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi d}{\lambda}\right| \Rightarrow A_M = 0,6\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi\cdot 1,2}{0,2}\right| \Rightarrow A_M = 0,006\left|\sigma\upsilon\nu 6\pi\right| \Rightarrow \mathbf{A_M = 0,006m}.$$

Άρα: $\alpha_{max(M)} = \omega^2 A_M \Rightarrow \alpha_{max(M)} = 400\pi^2 \cdot 0,006 \Rightarrow \alpha_{max(M)} = 24\ m/s^2$.

γ. Το υλικό σημείο Ν ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή που φτάνει το πρώτο κύμα στο σημείο αυτό. Το κύμα αυτό προέρχεται από την πηγή Π_2, η οποία είναι πιο κοντά στο σημείο Ν. Άρα:

$$t_{2(N)} = \frac{r_2}{\upsilon} \Rightarrow \mathbf{t_{2(N)} = 0,5s}$$

Τη χρονική στιγμή $t_{1(N)}$ που φτάνει στο Ν και το δεύτερο κύμα αρχίζει η συμβολή των δύο κυμάτων.

Είναι: $t_{1(\Delta)} = \dfrac{r_1}{\upsilon} \Rightarrow \mathbf{t_{1(N)} = 0,85s}$

Στη χρονική διάρκεια 0,5 s → 0,85 s το υλικό σημείο Ν εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση:

$$y_N = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) \Rightarrow \mathbf{y_N = 0,003\eta\mu 2\pi(10t - 5)\ \ (S.I.)} \quad \text{για } 0,5\ s \le t \le 0,85\ s$$

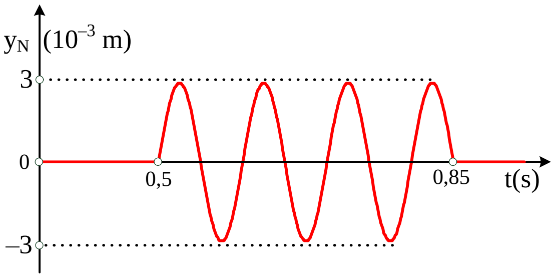
Συνεπώς η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης είναι:

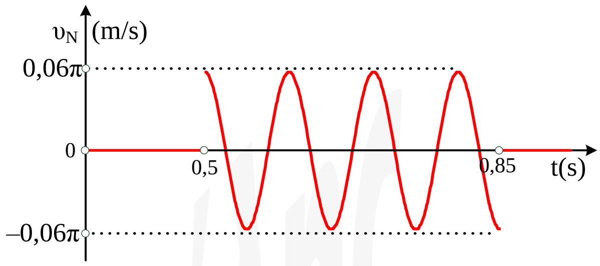
$\mathbf{\upsilon_N = 0,06\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi(10t - 5)\ \ (S.I.)}$ για $0,5\ s \le t \le 0,85\ s$

Από τη χρονική στιγμή 0,85 s και μετά το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Ν είναι:

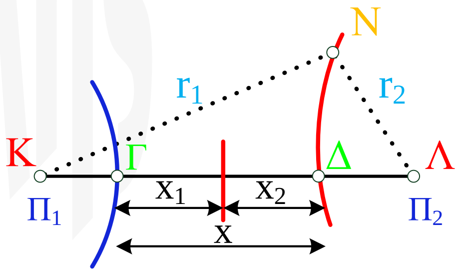
$$A_N = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi(r_1 - r_2)}{\lambda}\right| \Rightarrow A_N = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi(1,7-1)}{0,2}\right| \Rightarrow A_N = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 3,5\pi\right| \Rightarrow \mathbf{A_N = 0}$$

Δηλαδή το υλικό σημείο Ν από τη στιγμή 0,85 s και μετά παύει να ταλαντώνεται. Επειδή T = 0,1 s, στη χρονική διάρκεια Δt = 0,85 – 0,5 = 0,35 s το υλικό σημείο Ν έχει εκτελέσει 3,5 ταλαντώσεις. Η γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας ταλάντωσής του σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.





δ. Τα σημεία μιας υπερβολής έχουν σταθερές διαφορές από τις εστίες (πηγές), έτσι ισχύει:

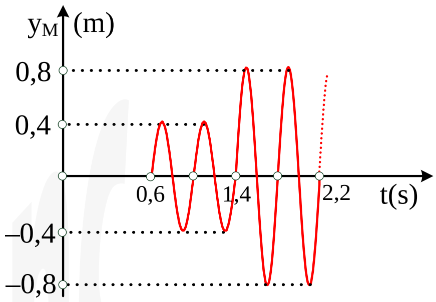


$$r_1 - r_2 = d_{1(Δ)} - d_{2(Δ)} = 0,7\,\text{m} \Rightarrow \frac{d}{2} + x_2 - \left(\frac{d}{2} - x_2\right) = 0,7\,\text{m} \Rightarrow \mathbf{x_2 = 0,35\,m}$$

Για την δεύτερη υπερβολή ενίσχυσης που τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$ στο σημείο Γ ισχύει:

$$d_{2(Γ)} - d_{1(Γ)} = 2λ \Rightarrow \frac{d}{2} + x_1 - \left(\frac{d}{2} - x_1\right) = 0,4\,\text{m} \Rightarrow \mathbf{x_1 = 0,2\,m}$$

Άρα σύμφωνα με το σχήμα έχουμε: (ΓΔ) = x = $x_1 + x_2 \Rightarrow$ **(ΓΔ) = 0,55 m**.



5. Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Π_1, Π_2 που βρίσκονται στα σημεία Κ και Λ της επιφάνειας ελαστικού μέσου αρχίζουν να ταλαντώνονται τη χρονική στιγμή t = 0 με εξίσωση της μορφής y = Αημωt. Οι δύο πηγές απέχουν μεταξύ τους απόσταση d = 3 m και τα κύματα που δημιουργούν διαδίδονται στην επιφάνεια του ελαστικού μέσου με ταχύτητα 2 m/s. Στο διπλανό σχήμα παριστάνεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας για ένα υλικό σημείο Μ του ελαστικού μέσου που απέχει απόσταση r_1 από την πηγή Π_1 και απόσταση r_2 από την πηγή Π_2 με $r_2 > r_1$.

α. Να βρείτε τις αποστάσεις r_1 και r_2 και να προσδιορίσετε σε ποια υπερβολή ενισχυτικής συμβολής ανήκει το σημείο Μ.

β. Η υπερβολή ενισχυτικής συμβολής που διέρχεται από το σημείο Μ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ σε σημείο Ν. Να υπολογίσετε πόσα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΚΝ παραμένουν ακίνητα μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων.

γ. Μεταβάλλουμε ταυτόχρονα τη συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών έτσι ώστε να παραμένουν σύγχρονες. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της συχνότητας των δύο πηγών ώστε το σημείο Μ να παραμένει σημείο ενισχυτικής συμβολής.

Λύση

α. Από τη γραφική παράσταση $y_z = f(t)$ παρατηρούμε ότι το υλικό σημείο Μ του ελαστικού μέσου ξεκίνησε να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}6$ s. Αυτό συμβαίνει διότι έφτασε στο σημείο αυτό το κύμα από την πιο κοντινή πηγή (Π_1). Συνεπώς: $\upsilon = \frac{r_1}{t_1} \Rightarrow 2 = \frac{r_1}{0{,}6} \Rightarrow \mathbf{r_1 = 1{,}2\,m}$

Επίσης, από τη γραφική παράσταση $y_z = f(t)$ παρατηρούμε ότι τη χρονική στιγμή $t_2 = 1{,}4$ s το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Μ άλλαξε και μάλιστα διπλασιάστηκε. Αυτό σημαίνει ότι τη χρονική στιγμή t_2 έφτασε και το $2^{ο}$ κύμα στο σημείο Μ, οπότε ξεκίνησε η συμβολή των δύο κυμάτων, η οποία είναι ενισχυτική. Συνεπώς: $\upsilon = \frac{r_2}{t_2} \Rightarrow 2 = \frac{r_2}{1{,}4} \Rightarrow \mathbf{r_2 = 2{,}8\,m}$

Από τη γραφική παράσταση $y_z = f(t)$ παρατηρούμε ότι στη χρονική διάρκεια από την $t_1 = 0,6$ s έως την $t_2 = 1,4$ s το υλικό σημείο Μ έχει εκτελέσει 2 πλήρεις ταλαντώσεις. Συνεπώς: $\Delta t = t_2 - t_1 = 2T \Rightarrow$ **$T = 0,4$ s**

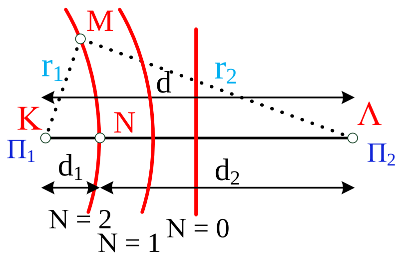
Το μήκος κύματος των αρμονικών κυμάτων υπολογίζεται από τη σχέση: $\upsilon = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = \upsilon \cdot T \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0,8\,m}$

Οι αποστάσεις r_1 και r_2 των σημείων ενισχυτικής συμβολής από τις δύο πηγές ικανοποιούν τη σχέση: $|r_1 - r_2| = N\lambda$ με $N = 0, \pm1, \pm2, ...$

Άρα για το σημείο Μ είναι: $N = \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \Rightarrow$ **$N = 2$**

Δηλαδή το σημείο Μ ανήκει στην υπερβολή ενισχυτικής συμβολής αριστερά της μεσοκαθέτου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

β. Αφού το σημείο Ν βρίσκεται στην ίδια υπερβολή ενισχυτικής συμβολής με το σημείο Μ, οι αποστάσεις d_1 και d_2 του σημείου Ν από τις δύο πηγές ικανοποιούν τη σχέση $d_2 - d_1 = N\lambda$ για $N = 2$. Δηλαδή:



$d_2 - d_1 = 2 \cdot 0,8 \Rightarrow d_2 - (d - d_2) = 1,6 \Rightarrow 2d_2 = 3 + 1,6 \Rightarrow$ **$d_2 = 2,3$ m**

και $d_1 = d - d_2 \Rightarrow$ **$d_1 = 0,7$ m**

Για τα σημεία ακυρωτικής συμβολής στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ έχουμε:

$$\ell_1 - \ell_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{και} \quad \ell_1 + \ell_2 = d$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές εξισώσεις έχουμε:

$$2\ell_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} + d \Rightarrow \ell_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \Rightarrow \ell_1 = (2N+1)0,2 + 1,5 \Rightarrow \boldsymbol{\ell_1 = 1,7 + 0,4N} \quad \text{με} \quad N = 0, \pm1, \pm2, ...$$

Επειδή ζητάμε μόνο τα σημεία ακυρωτικής συμβολής που βρίσκονται στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΝ, έχουμε:

$$0 \le \ell_1 \le 0,7 \Rightarrow 0 \le 0,4N + 1,7 \le 0,7 \Rightarrow -1,7 \le 0,4N \le -1 \Rightarrow -4,25 \le N \le -2,5$$

Δηλαδή $N = -4, -3$, άρα υπάρχουν **2 σημεία ακυρωτικής συμβολής**.

γ. Μεταβάλλοντας τη συχνότητα των δύο πηγών, μεταβάλλεται το μήκος κύματος των κυμάτων που διαδίδονται στην επιφάνεια του ελαστικού μέσου. Αφού το σημείο Μ παραμένει σημείο ενισχυτικής συμβολής, οι αποστάσεις r_1 και r_2 θα ικανοποιούν και πάλι τη σχέση: $r_1 - r_2 = N\lambda'$ με $N = 0, \pm1, \pm2, ...$

όπου λ' το νέο μήκος κύματος. Επειδή $r_2 > r_1$ είναι: $r_2 - r_1 = N\lambda' \Rightarrow r_2 - r_1 = N\dfrac{\upsilon}{f'} \Rightarrow f' = \dfrac{N\upsilon}{r_2 - r_1} \Rightarrow$

$f' = \dfrac{2N}{1,6} \Rightarrow f' = 1,25N$ με $N = 1,2,\ldots$

Η ελάχιστη συχνότητα προκύπτει για N = 1. Συνεπώς: $\mathbf{f'_{min} = 1,25\,Hz}$.

6. Δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ βρίσκονται στα σημεία Κ και Λ της ελεύθερης επιφάνειας νερού και απέχουν μεταξύ τους απόσταση d = 4 m. Οι πηγές αρχίζουν την t = 0 να εκτελούν κατακόρυφες ταλαντώσεις χωρίς αρχική φάση, με ίδιο πλάτος Α = 0,2 m και συχνότητα 20 Hz, οπότε δημιουργούν εγκάρσια κύματα που διαδίδονται στην επιφάνεια του νερού με ταχύτητα 8 m/s. Ένα υλικό σημείο Ζ της επιφάνειας του νερού βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και απέχει από τα σημεία Κ και Λ αποστάσεις (ΚΖ) = r_1 και (ΛΖ) = r_2 με $r_1 > r_2$. Μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο υλικό σημείο Ζ, αυτό ταλαντώνεται με πλάτος ίσο με 0,4 m και στο ευθύγραμμο τμήμα ΖΜ, όπου Μ το μέσο του ΚΛ, δεν υπάρχουν άλλα σημεία τα οποία να ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος. Να υπολογίσετε:

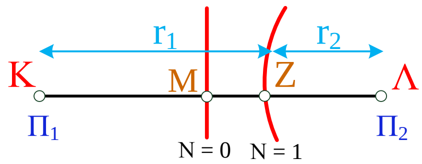
α. τις αποστάσεις r_1 και r_2,

β. την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του υλικού σημείου Ζ τη χρονική στιγμή $t' = \frac{7}{30}$ s,

γ. τη χρονική στιγμή που το υλικό σημείο Ζ φτάνει για πρώτη φορά σε απομάκρυνση $0,2\sqrt{2}$ m από τη θέση ισορροπίας του.

Λύση

α. Το μήκος κύματος των κυμάτων είναι $\upsilon = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon}{f} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0,4\,m}$.



Μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων το υλικό σημείο Κ ταλαντώνεται με πλάτος διπλάσιο από το πλάτος ταλάντωσης των πηγών. Αυτό σημαίνει ότι είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής. Σύμφωνα με την εκφώνηση, στο ευθύγραμμο τμήμα ΖΜ υπάρχουν δεν σημεία ενισχυτικής συμβολής. Από το διπλανό σχήμα προκύπτει ότι το σημείο Ζ ανήκει στην πρώτη υπερβολή ενίσχυσης μετά την μεσοκάθετο, δηλαδή για Ν = 1. Άρα:

$r_1 - r_2 = N\lambda \Rightarrow r_1 - r_2 = \lambda \Rightarrow r_1 - (d - r_1) = \lambda \Rightarrow 2r_1 = d + \lambda \Rightarrow$ $\boldsymbol{r_1 = 2,2\ m}$ και $\boldsymbol{r_2 = 1,8\ m}$

β. Το υλικό σημείο Ζ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή που φτάνει το κύμα από την πηγή $Π_2$ (η πιο κοντινή στο σημείο Ζ). Είναι: $t_2 = \frac{r_2}{\upsilon} \Rightarrow \boldsymbol{t_2 = 0,225\,s}$

Η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Ζ ξεκινά τη χρονική στιγμή t_1 που φτάνει και το κύμα από την πιο απομακρυσμένη πηγή (Π_1). Είναι: $t_1 = \frac{r_1}{\upsilon} \Rightarrow \mathbf{t_1 = 0,275\,s}$

Μεταξύ των χρονικών στιγμών 0,225 s και 0,275 s το υλικό σημείο Ζ ταλαντώνεται εξαιτίας του κύματος από την πηγή Π_2. Συνεπώς για τη χρονική διάρκεια 0,225 s < t <0,275 s είναι:

$$y_Z = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) \Rightarrow y_Z = 0,2\eta\mu 2\pi(20t - 4,5) \text{ (S.I.)}$$

Για $t = t' = \frac{7}{30}$ s έχουμε: $y_Z = 0,2\eta\mu 2\pi(20 \cdot \frac{7}{30} - 4,5) \Rightarrow y_Z = 0,2\eta\mu\frac{28\pi - 27\pi}{3} \Rightarrow \mathbf{y_Z = 0,1\sqrt{3}\,m}$

γ. Σε απομάκρυνση $y_1 = 0,2\sqrt{2}$ m φτάνει το σημείο Ζ μόνο μετά την έναρξη της συμβολής στο σημείο αυτό. Η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου Ζ από τη θέση ισορροπίας του από τη χρονική στιγμή 0,275 s που ξεκινά η συμβολή και μετά είναι η: $y_Z = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{\pi(r_1 - r_2)}{\lambda}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow$

$$y_Z = 0,4\sigma\upsilon\nu\frac{0,4\pi}{0,4}\eta\mu 2\pi\left(20t - \frac{4}{0,8}\right) \Rightarrow \mathbf{y_Z = -0,4\eta\mu(40\pi t - 10\pi)} \text{ (S.I.) για } t \geq 0,275\text{s}$$

Θέτουμε στην εξίσωση αυτή όπου $y_Z = y_1 = 0,2\sqrt{2}$ m και παίρνουμε:

$$0,2\sqrt{2} = -0,4\eta\mu(40\pi t - 10\pi) \Rightarrow \eta\mu(40\pi t - 10\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 40\pi t - 10\pi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \\ 40\pi t - 10\pi = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 160\pi t - 40\pi = 8\kappa\pi - \pi \\ 160\pi t - 40\pi = 8\kappa\pi + 5\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t = \frac{8\kappa + 39}{160} \\ t = \frac{8\kappa + 45}{160} \end{array}\right\} \text{ για } t \geq 0,275\text{ s} = \frac{44}{160}\text{s}$$

Από την πρώτη σειρά λύσεων παίρνω τις τιμές $\frac{39}{160}$s, $\frac{47}{160}$s,… η πρώτη απορρίπτεται αφού $\frac{39}{160} < \frac{44}{160}$

Από την δεύτερη σειρά λύσεων παίρνω τις τιμές $\frac{45}{160}$s, $\frac{53}{160}$s,…

Έτσι λοιπόν προκύπτει ότι για πρώτη φορά που ισχύει $y_Z = y_1 = 0,2\sqrt{2}$ m είναι η χρονική στιγμή $\frac{45}{160}$s αφού είναι η πρώτη κατά σειρά αποδεκτή λύση.

7. Δύο σύμφωνες πηγές αρμονικών κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ βρίσκονται στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα της επιφάνειας ενός υγρού και εκτελούν κατακόρυφες αρμονικές ταλαντώσεις που έχουν εξισώσεις $y_1 = Aημ(5πt + φ_0)$ (t σε s) και $y_2 = Aημ5πt$ (t σε s). Τα κύματα που δημιουργούν οι δύο πηγές διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού με ταχύτητα 1 m/s. Σημείο Ζ της επιφάνειας του υγρού απέχει από την πηγή $Π_1$ απόσταση r_1 και από την πηγή $Π_2$ απόσταση r_2.

α. Αν $φ_0 = \frac{π}{4}$ rad, να βρείτε τη σχέση που πρέπει να ικανοποιούν οι αποστάσεις r_1 και r_2 του σημείου Ζ ώστε στο σημείο αυτό να συμβαίνει:

i. ακυρωτική συμβολή, **ii.** ενισχυτική συμβολή.

β. Να βρείτε την τιμή της $φ_0$ ($0 \le φ_o < 2π$ rad) ώστε στα σημεία της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ να συμβαίνει ακυρωτική συμβολή.

Λύση

α. Οι εξισώσεις ταλάντωσης των δύο πηγών είναι οι:

$y_1 = Aημ(10πt + φ_0)$ και $y_2 = Aημ10πt$

Τα κύματα που δημιουργούν οι δύο πηγές έχουν μήκος κύματος που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$υ = λf \Rightarrow λ = \frac{υ}{f}$$

Όμως $ω = 2πf = 5π$ rad/s $\Rightarrow$ **f = 2,5 Hz**.

Συνεπώς: **λ = 0,4 m**

Το σημείο Ζ μετά τη στιγμή έναρξης της συμβολής σε αυτό εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις, εξαιτίας των δύο κυμάτων. Εξαιτίας του κύματος από την πηγή $Π_1$ είναι:

$$y_{1(Z)} = Aημ\left(5πt + \frac{π}{4} - \frac{2πr_1}{λ}\right) \Rightarrow y_{1(Z)} = Aημ(5πt + \frac{π}{4} - 5πr_1)$$

Εξαιτίας του κύματος από την πηγή $Π_2$ είναι: $y_{2(Z)} = Aημ\left(5πt - \frac{2πr_2}{λ}\right) \Rightarrow y_{2(Z)} = Aημ(5πt - 5πr_2)$

Η συνισταμένη ταλάντωση που εκτελεί το σημείο Ζ έχει εξίσωση:

$y_Z = y_{1(Z)} + y_{2(Z)} \Rightarrow y_Z = A\eta\mu(5\pi t + \frac{\pi}{4} - 5\pi r_1) + A\eta\mu(5\pi t - 5\pi r_2)$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}$, οπότε προκύπτει:

$$y_Z = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi(r_1-r_2)+\frac{\pi}{4}}{2}\eta\mu\left(5\pi t + \frac{\frac{\pi}{4}}{2} - \frac{5\pi(r_1+r_2)}{2}\right) \Rightarrow y_Z = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi(r_1-r_2)}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\eta\mu\left(5\pi t + \frac{\pi}{8} - \frac{5\pi(r_1+r_2)}{2}\right)$$

i. Τα σημεία ακυρωτικής συμβολής ικανοποιούν τη σχέση: $2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi(r_1-r_2)}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{5\pi(r_1-r_2)}{2}+\frac{\pi}{8} = (2N+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow 5\pi(r_1-r_2) = (2N+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \mathbf{(r_1-r_2) = \frac{8N+3}{20}}$$ με N =0, ±1, ±2,...

ii. Τα σημεία ενισχυτικής συμβολής ικανοποιούν τη σχέση: $2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi(r_1-r_2)}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right| = 2A \Rightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi(r_1-r_2)}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = \pm 1 \Rightarrow \frac{5\pi(r_1-r_2)}{2}+\frac{\pi}{8} = N\pi \Rightarrow 5(r_1-r_2) = 2N + \frac{1}{4} \Rightarrow \mathbf{r_1 - r_2 = \frac{8N+1}{20}}$$ με N = 0, ±1,±2,

β. Το σημείο Ζ μετά τη στιγμή έναρξης της συμβολής σε αυτό εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις, εξαιτίας των δύο κυμάτων. Εξαιτίας του κύματος από την πηγή Π_1 είναι:

$$y_{1(Z)} = A\eta\mu\left(5\pi t + \varphi_0 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) \Rightarrow y_{1(Z)} = A\eta\mu(5\pi t + \varphi_0 - 5\pi r_1)$$

Εξαιτίας του κύματος από την πηγή Π_2 είναι: $y_{2(Z)} = A\eta\mu\left(5\pi t - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right) \Rightarrow y_{2(Z)} = A\eta\mu(5\pi t - 5\pi r_2)$

Η συνισταμένη ταλάντωση που εκτελεί το σημείο Ζ έχει εξίσωση:

$y_Z = y_{1(Z)} + y_{2(Z)} \Rightarrow y_Z = A\eta\mu(5\pi t + \varphi_0 - 5\pi r_1) + A\eta\mu(5\pi t - 5\pi r_2)$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}$, οπότε προκύπτει:

$$y_Z = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi(r_1-r_2)+\varphi_0}{2}\eta\mu\left(5\pi t + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{5\pi(r_1+r_2)}{2}\right)$$

Αν το σημείο Ζ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΚΛ, τότε ισχύει $r_1 = r_2$. Συνεπώς:

$$y_Z = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi_0}{2}\eta\mu\left(5\pi t + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{10\pi r_1}{2}\right)$$

Για να συμβαίνει στα σημεία της μεσοκαθέτου ακυρωτική συμβολή, πρέπει:

$$2A\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi_0}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\varphi_0}{2} = (2N+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = (2N+1)\pi$$

Επειδή $0 \le \varphi_0 < 2\pi$ rad, προκύπτει: **$\varphi_0 = \pi$ rad**

Παρατήρηση: Όταν οι πηγές δεν είναι σύγχρονες ή είναι σύγχρονες αλλά έχουν αρχική φάση, τότε δεν ι-σχύουν οι τύποι: $r_1 - r_2 = N\lambda$ για τα σημεία ενισχυτικής συμβολής, $r_1 - r_2 = (2N+1)\lambda/2$ για τα σημεία ακυ-ρωτικής συμβολής και $y = 2A\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi(r_1 - r_2)}{\lambda}\eta\mu 2\pi(\dfrac{t}{T} - \dfrac{r_1 + r_2}{2\lambda})$ για την εξίσωση ταλάντωσης μετά τη συμβο-λή. Οι αντίστοιχοι τύποι που ισχύουν πρέπει να αποδειχθούν κάνοντας τη μαθηματική μελέτη της συμβολής από την αρχή.