

Λυμένες ασκήσεις

1. Σε μια φθίνουσα ταλάντωση το πλάτος μειώνεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$A_{(t)} = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}.$$

α) Να δείξετε ότι η σχετική μείωση του πλάτους ανά περίοδο δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{|\Delta A|}{A_k} = \frac{|A_k - A_{k+1}|}{A_k} = |1 - e^{-\Lambda T}|.$$

β) Να δείξετε ότι η σχετική μείωση της ενέργειας ανά περίοδο δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{|\Delta E|}{E_k} = \frac{|E_k - E_{k+1}|}{E_k} = |1 - e^{-2\Lambda T}|.$$

Λύση

α) Από τη σχέση $A_{(t)} = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}$ προκύπτει ότι στη διάρκεια της πρώτης περιόδου T :

$$A_1 = A_0 \cdot e^{-\Lambda T} \quad \text{ή} \quad \frac{A_1}{A_0} = e^{-\Lambda T} \quad (1)$$

Η σχετική μείωση του πλάτους, ανά περίοδο, είναι:

$$\frac{|\Delta A|}{A_k} = \frac{|A_k - A_{k+1}|}{A_k} = \left| 1 - \frac{A_{k+1}}{A_k} \right| \quad (2)$$

Αλλά για τη συγκεκριμένη φθίνουσα ταλάντωση ισχύει:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \dots = \frac{A_k}{A_{k+1}} \quad \text{ή} \quad \frac{A_1}{A_0} = \frac{A_{k+1}}{A_k}$$

Έτσι από την εξίσωση (1) προκύπτει: $\frac{A_{k+1}}{A_k} = e^{-\Lambda T} \quad (3)$

Τελικά από (2) και (3) βρίσκουμε ότι:

$$\frac{|\Delta A|}{A_k} = |1 - e^{-\Lambda T}|.$$

β) Η σχετική μείωση της ενέργειας ανά περίοδο είναι:

$$\frac{|\Delta E|}{E_k} = \left| \frac{E_k - E_{k+1}}{E_k} \right| = \left| 1 - \frac{E_{k+1}}{E_k} \right| \quad (4)$$

$$\text{Αλλά: } E_k = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A_k^2 \quad \text{και} \quad E_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A_{k+1}^2$$

Έτσι η εξίσωση (4) δίνει:

$$\frac{|\Delta E|}{E_k} = \left| 1 - \left(\frac{A_{k+1}}{A_k} \right)^2 \right| \quad (5)$$

Οπότε με βάση την εξίσωση (3) $\frac{A_{k+1}}{A_k} = e^{-\Lambda t}$, η εξίσωση (5) δίνει:

$$\frac{|\Delta E|}{E_k} = \left| 1 - (e^{-\Lambda T})^2 \right| \quad \text{ή} \quad \boxed{\frac{|\Delta E|}{E_k} = |1 - e^{-2\Lambda T}|}$$

Άσκηση για λύση (1.1)

Σε μια φθίνουσα ταλάντωση το πλάτος μειώνεται σύμφωνα με την εξίσωση: $A_{(t)} = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}$. Αν η σχετική μείωση του πλάτους είναι **10 %** να βρεθεί η σχετική μείωση της ολικής ενέργειας.

$$[\text{Απ. } \frac{|\Delta E|}{E_k} = 19\%]$$

2. Σύστημα (**m-K**) εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση (με μικρό **b**) στην οποία το πλάτος μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A_{(t)} = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}$ (1).

α) Αν η απομάκρυνση (στην αντίστοιχη αμείωτη ταλάντωση) δίνεται από τη σχέση: $x_{(t)} = 0,06 \cdot \sin(20\pi \cdot t)$ (σε **m**) (2) και το πλάτος μειώνεται κατά **10%** ανά περίοδο να βρεθεί η σταθερά **Λ**.

β) Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης μετά από χρόνο **t=0,3 sec** από τη στιγμή που άρχισε η ταλάντωση.

Λύση

α) Αν η ταλάντωση αρχίζει με πλάτος A_0 , τότε μετά την πρώτη περίοδο το πλάτος θα έχει γίνει το **90%** του A_0 , δηλ. $A_1 = 0,9A_0$.

$$\text{ή } \frac{|\Delta A|}{A_0} = 10\% = \frac{10}{100} = 0,1 \Rightarrow \frac{A_0 - A_1}{A_0} = 0,1 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_1 = 0,9 \cdot A_0$$

$$\text{οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει: } 0,9 \cdot A_0 = A_0 \cdot e^{-\Lambda T} \Rightarrow e^{\Lambda T} = \frac{10}{9}$$

$$\Rightarrow \Lambda \cdot T = \ln\left(\frac{10}{9}\right) \Rightarrow \Lambda = \frac{1}{T} \cdot \ln\left(\frac{10}{9}\right) \quad (2)$$

Από την εξίσωση (2) (της εκφώνησης) προκύπτει ότι: $\omega = 20\pi$ (r/s), οπότε

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{1}{10} \text{ sec} \quad (3)$$

$$\text{Έτσι η εξίσωση (2) δίνει: } \Lambda = 10 \cdot \ln\left(\frac{10}{9}\right) \quad (4)$$

β) Η εξίσωση (1) με βάση τη σχέση (4) γίνεται: $A_{(t)} = 0,06 \cdot e^{-10 \cdot \ln\left(\frac{10}{9}\right) \cdot \frac{3}{10}}$

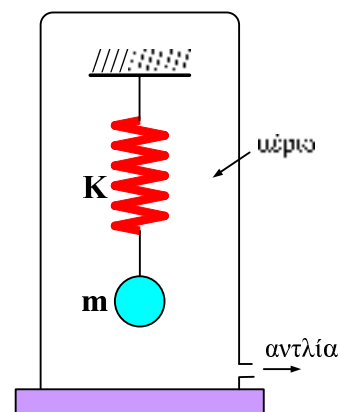
$$\Rightarrow A_{(t)} = \frac{0,06}{e^{3 \cdot \ln\left(\frac{10}{9}\right)}} \Rightarrow A_{(t)} = \frac{0,06}{e^{\ln\left(\frac{10}{9}\right)^3}} = \frac{0,06}{\left(\frac{10}{9}\right)^3} = 0,06 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3$$

$$\Rightarrow A_{(t)} = 4,374 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

3. Στη διάταξη του σχήματος (παραγωγή φθίνουσας ταλάντωσης με μικρό **b**) το σώμα έχει μάζα $m=1 \text{ Kg}$ και το ελατήριο σταθερά $K=100 \text{ N/m}$. Εκτρέπουμε το σώμα (**m**) προς τα κάτω κατά $0,1 \text{ m}$ και το αφήνουμε ελεύθερο.

α) Αν η απώλεια ενέργειας, κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου, είναι $\Delta E=0,05 \text{ J}$ να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης μετά το τέλος της πρώτης περιόδου.

β) Να βρεθεί η απώλεια ενέργειας για το χρονικό διάστημα από $2T$ μέχρι $3T$.



Λύση

α) Από την εκφώνηση προκύπτει ότι το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης είναι $A_0 = 0,1 \text{ m}$. Έτσι η αρχική ενέργεια του ταλαντωτή είναι:

$$E_0 = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A_0^2 \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2} \cdot 100 \left(\frac{\text{N}}{\text{m}} \right) \cdot (0,1 \text{ m})^2 = 0,5 \text{ J}$$

Αφού η απώλεια ενέργειας κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου είναι $\Delta E=0,05 \text{ J}$ τότε η ενέργεια του ταλαντωτή στο τέλος της πρώτης περιόδου (ή στην αρχή της δεύτερης περιόδου) θα είναι:

$$E_1 = E_0 - \Delta E = (0,5 - 0,05) \text{ J} = 0,45 \text{ J}$$

$$\text{Αλλά: } E_1 = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A_1^2 \Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{K}} \Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,45(\text{J})}{100(\text{N/m})}}$$

$$\Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{9}{1000}} \text{ m} \Rightarrow \boxed{A_1 = 3\sqrt{10} \cdot 10^{-2} \text{ m}}$$

β) Η ζητούμενη απώλεια ενέργειας θα βρεθεί ως εξής:

$$\Delta E_{(2T \rightarrow 3T)} = E_2 - E_3 = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (A_2^2 - A_3^2) \quad (1)$$

Υπολογισμός A_2 και A_3 :

Για τη φθίνουσα ταλάντωση που μελετάμε ισχύει ότι: $\frac{A_k}{A_{k+1}} = \text{σταθερό}$

$$\text{Έτσι: } \frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow A_2 = \frac{A_1^2}{A_0} \Rightarrow A_2 = \frac{\left(\frac{9}{1000} \text{ m}\right)^2}{0,1 \text{ m}} \Rightarrow A_2 = 81 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{Ομοίως: } \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} \Rightarrow A_3 = \frac{A_2^2}{A_1} \Rightarrow A_3 = \frac{\left(81 \cdot 10^{-3} \text{ m}\right)^2}{\left(\frac{3\sqrt{10}}{100} \text{ m}\right)} \Rightarrow A_3 = 0,069 \dots \text{ m}$$

Έτσι από την εξίσωση (1) προκύπτει:

$$\Delta E_{(2T \rightarrow 3T)} = \frac{1}{2} \cdot 100 (\text{N/m}) \cdot (0,081^2 - 0,069^2) \text{ m}^2$$

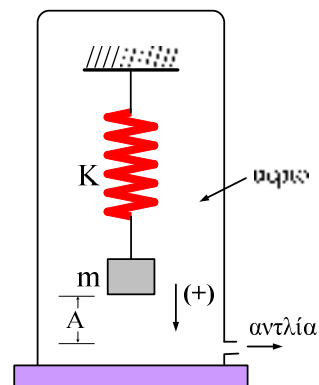
$$\Rightarrow \Delta E_{(2T \rightarrow 3T)} = 0,09 \text{ J}.$$

4. Στη διάταξη του σχήματος παραγωγής φθίνουσας ταλάντωσης με μικρό b , η δύναμη αντίστασης στο σώμα (m) από το αέριο είναι της μορφής: $F_{(t)} = -b \cdot v_{(t)}$ (1).

Αν εκτρέψουμε το σώμα κατά A , από τη θέση ισορροπίας προς τα κάτω και το αφήσουμε ελεύθερο ($t_0=0$),

α) να γράψετε τη σχέση της δύναμης αντίστασης F σε συνάρτηση με το χρόνο και να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση.

β) να γράψετε τη σχέση που δίνει το ρυθμό απώλειας ενέργειας σε συνάρτηση με το χρόνο και να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση.



Λύση

α) Εφόσον τη στιγμή $t_0=0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση της μέγιστης εκτροπής και με $v=0$, τότε η εξίσωση της απομάκρυνσης δίνεται από τη σχέση:

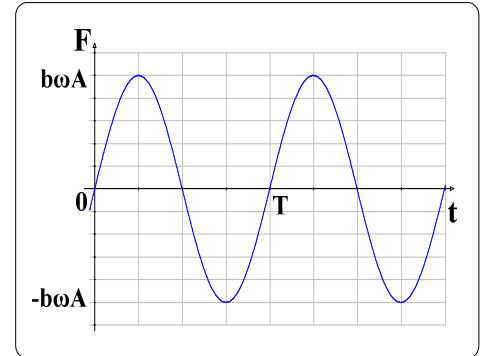
$$x_{(t)} = A \cdot \eta \mu(\omega t + \frac{\pi}{2}) = A \cdot \sigma \nu(\omega t) \quad (2)$$

Η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι: $v_{(t)} = \frac{dx}{dt} = -(\omega \cdot A) \cdot \eta\mu(\omega t)$ (3)

Έτσι η εξίσωση της δύναμης αντίστασης θα είναι:

$$F_{(t)} = -b \cdot v_{(t)} \quad \text{ή} \quad \boxed{F_{(t)} = +(b \cdot \omega \cdot A) \cdot \eta\mu(\omega t)} \quad (4)$$

Η γραφική της συνάρτησης $F(t)$ φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



β) Ο ρυθμός απώλειας ενέργειας υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dW_{(F)}}{dt} = \frac{F_{(t)} \cdot dx}{dt} = F_{(t)} \cdot v_{(t)} \quad (5) \quad \text{(η απώλεια ενέργειας } dE \text{ είναι ίση με το έργο της δύναμης } F).$$

Με βάση τις εξισώσεις (3) και (4) η εξίσωση (5) γίνεται:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -(b \cdot \omega^2 \cdot A^2) \cdot \eta\mu^2(\omega t)} \quad (6) \quad \text{(το πρόσημο (-) έχει φυσική σημασία και δείχνει την "απώλεια").}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $dE/dt=f(t)$ φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

Σημείωση: Ο ρυθμός απώλειας ενέργειας του συστήματος είναι η ισχύς της δύναμης αντίστασης $P_{(F)}$.

