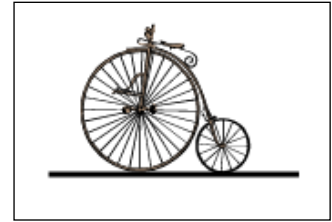


ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

B.1 ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

SB1.1 Το παλιό ποδήλατο που φαίνεται στο σχήμα έχει ακτίνα μπροστινής ρόδας R_1 και της πίσω R_2 με $R_1=2R_2$. Το ποδήλατο κινείται με σταθερή επιτάχυνση και οι ρόδες του κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν. Αν οι ρόδες διαγράφουν N_1 και N_2 περιστροφές αντιστοίχως σε χρόνο Δt , τότε ο λόγος N_1/N_2 είναι ίσος με



α. 2

β. $\frac{1}{4}$

γ. $\frac{1}{2}$

Απάντηση: (γ)

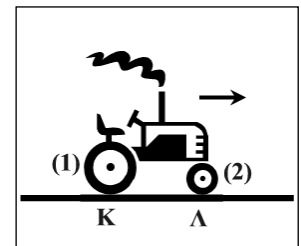
Και οι δυο ρόδες έχουν την ίδια επιτάχυνση του CM, a_{cm} αλλά όχι τις ίδιες γωνιακές επιταχύνσεις αφού έχουν διαφορετικές ακτίνες.

$$a_{\gamma v,1}=a_{cm}/R_1 \text{ και } a_{\gamma v,2}=a_{cm}/R_2$$

$$\text{Για τις περιστροφές της κάθε ρόδας ισχύει } N=\frac{\Delta\theta}{2\pi}=\frac{\frac{1}{2}a_{\gamma v}\cdot t^2}{2\pi}$$

$$\text{Αρα: } \frac{N_1}{N_2}=\frac{a_{\gamma v,1}}{a_{\gamma v,2}}=\frac{a_{cm}/R_1}{a_{cm}/R_2}=\frac{R_2}{R_1}\rightarrow \frac{N_1}{N_2}=\frac{1}{2}$$

SB1.2 Το τρακτέρ κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα και οι τροχοί κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν. Οι μεγάλοι (1) έχουν ακτίνα R και οι μικροί (2) ακτίνα r . Η σχέση των ακτίνων των τροχών είναι $R=7r/4$. Τη χρονική στιγμή t_1 δύο σημεία Κ και Λ των τροχών βρίσκονται ταυτόχρονα σε επαφή με το έδαφος. Τη χρονική στιγμή t_2 τα ίδια σημεία βρίσκονται για πρώτη φορά και πάλι ταυτόχρονα σε επαφή με το έδαφος. Στο χρονικό διάστημα $\Delta t=t_2-t_1$ το όχημα έχει μετατοπιστεί κατά



α. $8\pi R$

β. $6\pi R$

γ. $9,5\pi R$

Απάντηση: (α)

$$\text{Οι δύο τροχοί έχουν την ίδια ταχύτητα κέντρου μάζας άρα } v_1=v_2\rightarrow \omega_1 R=\omega_2 r\rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r}{R} \quad (1)$$

Στο χρονικό διάστημα Δt και μέχρι τα Κ και Λ να βρεθούν ταυτόχρονα στο έδαφος ο κάθε τροχός θα έχει κάνει ακέραιες περιφέρειες. Έστω ότι ο τροχός (1) κάνει κ και ο τροχός (2) λ περιστροφές. Άρα το τόξο που θα διαγράψουν θα είναι

$$\Delta\theta_1=\omega_1\cdot\Delta t=\kappa\cdot 2\pi \text{ και } \Delta\theta_2=\omega_2\cdot\Delta t=\lambda\cdot 2\pi. \quad (2)$$

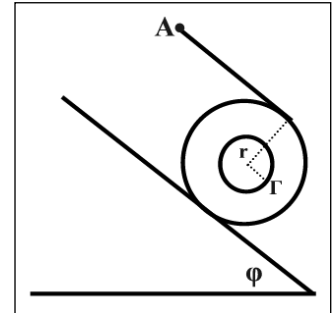
$$\text{Από (1)(2)}\rightarrow \frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2}=\frac{\omega_1\cdot\Delta t}{\omega_2\cdot\Delta t}=\frac{\kappa\cdot 2\pi}{\lambda\cdot 2\pi}\rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{\kappa}{\lambda}\rightarrow \frac{r}{R}=\frac{\kappa}{\lambda}\rightarrow \frac{\kappa}{\lambda}=\frac{4}{7}$$

Συνεπώς ο τροχός (1) κάνει $\kappa=4$ και ο τροχός (2), $\lambda=7$, περιστροφές.

Άρα η μετατόπιση του cm της κάθε ρόδας, έστω της (1), θα είναι

$$\Delta x_1=v_{cm} \Delta t=\omega_1\cdot R\cdot\Delta t=\Delta\theta_1\cdot R=\kappa\cdot 2\pi\cdot\Delta t=4\cdot 2\pi\cdot R=8\pi\cdot R\rightarrow \Delta x=8\pi R$$

SB1.3 Το νήμα είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια κυλίνδρου ακτίνας R που μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο. Το σημείο Γ απέχει απόσταση $r=R/2$ από το κέντρο του κυλίνδρου και αρχικά βρίσκεται σε τέτοια θέση ώστε να απέχει απόσταση R από το κεκλιμένο επίπεδο. Τραβάμε το νήμα από το άκρο A και ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς ολίσθηση προς τα πάνω. Μέχρι το Γ να απέχει και πάλι για πρώτη φορά απόσταση R από το κεκλιμένο επίπεδο,
I. το σημείο A θα έχει μετατοπιστεί κατά



- α. πR β. $2\pi R$ γ. $\frac{1}{2}\pi R$

II. Το μήκος του νήματος που θα έχει ξετυλιχτεί κατά τη διάρκεια της κίνησης είναι

- α. πR β. $2\pi R$ γ. $\frac{1}{2}\pi R$

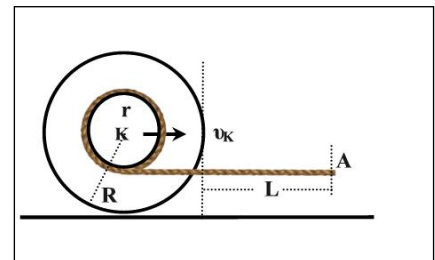
Απάντηση: (β), (α)

I. Όταν το σημείο Γ θα απέχει και πάλι απόσταση R από το επίπεδο, θα έχει διαγράψει τόξο γωνία $\Delta\theta=\pi$ rad, όπως και κάθε σημείο του κυλίνδρου. Άρα η μετατόπιση του κέντρου μάζας του στερεού θα είναι $\Delta x_{cm}=R\cdot\Delta\theta=R\cdot\pi=\pi R$. Επειδή όμως το σημείο A απέχει απόσταση $2R$ από το κεκλιμένο θα έχει και διπλάσια ταχύτητα από το κέντρο μάζας και άρα

$$\Delta x_A=2\Delta x_{cm}\rightarrow \Delta x_A=2\pi R$$

II. Το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται είναι πάντα $\Delta\ell=R\cdot\Delta\theta=R\cdot\pi\rightarrow \Delta\ell=\pi\cdot R$

SB1.4 Το οριζόντιο τμήμα του νήματος που εξέρχει από την περίμετρο του κυλίνδρου έχει αρχικά μήκος L . Τραβάμε το άκρο A και ο τροχός κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση. Για τις ακτίνες ισχύει $R=2r$. Όταν το κέντρο μάζας του τροχού μετατοπιστεί κατά $\Delta x=\frac{1}{2}L$ τότε το μήκος του οριζόντιου τμήματος του σχοινιού που εξέρχει από την περίμετρο θα είναι:



- α. $x=2L$ β. $x=2L/3$ γ. $x=3L/4$

Απάντηση: (γ)

Η ταχύτητα του άκρου A : $v_A=v_K-\omega r=\frac{1}{2}v_K$

Η μετατόπιση του κέντρου K : $\Delta x_K=\frac{1}{2}L\rightarrow v_K\Delta t=\frac{1}{2}L$

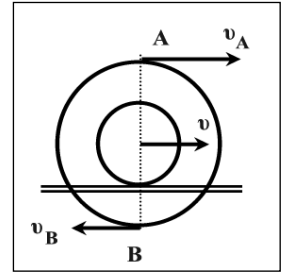
Η μετατόπιση του άκρου A : $\Delta x_A=v_A\Delta t=\frac{1}{2}v_K\Delta t=L/4$

Άρα το A θα έχει βγει από την περίμετρο κατά $L+L/4=5L/4$

Αλλά το κέντρο μάζας K θαχει στον ίδιο χρόνο μετατοπιστεί κατά $\frac{1}{2}L$ συνεπώς το A θα εξέρχει κατά

$$x=5L/4-L/2\rightarrow x=3L/4$$

SB1.5 Καρούλι με εσωτερική ακτίνα R και εξωτερική $2R$ κυλίνεται χωρίς ολίσθηση πάνω σε μια οριζόντια ράγα με την εσωτερική του επιφάνεια να εφάπτεται στη ράγα, όπως στο σχήμα. Αν v_A είναι το μέτρο της ταχύτητας του ανώτερου σημείου (A) και v_B το μέτρο του κατώτερου σημείου B, τότε ισχύει:



α. $\frac{v_B}{v_A} = 1$ β. $\frac{v_B}{v_A} = 3$ γ. $\frac{v_B}{v_A} = \frac{1}{3}$

Απάντηση: (γ)

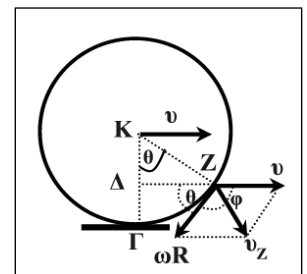
Το καρούλι κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει με την εσωτερική του επιφάνεια ακτίνας R να εφάπτεται της ράγας. Συνεπώς η ταχύτητα του κέντρου μάζας, v θα ισούται με ωR . Η ταχύτητα στα σημεία A και B θα προκύψει ως διανυσματικό άθροισμα της v και της ταχύτητας λόγω περιστροφής που είναι $\omega \cdot 2R$. Τα μέτρα των ταχυτήτων θα είναι:

$$v = \omega R$$

$$v_A = v + \omega \cdot 2R = v + 2v = 3v$$

$$v_B = |v - \omega \cdot 2R| = |v - 2v| = v \quad \text{Άρα:} \quad \frac{v_B}{v_A} = \frac{v}{3v} \rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{1}{3}$$

SB1.6 Ο τροχός ακτίνας R , που φαίνεται στο σχήμα κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Το κέντρο μάζας του τροχού έχει ταχύτητα v . Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Z που βρίσκεται στην περιφέρεια και απέχει από το έδαφος απόσταση $R/2$ είναι:



α. v β. $3v/2$ γ. $2v$

Απάντηση: (α)

Το σημείο Z απέχει από το έδαφος απόσταση $R/2$, άρα $(\Delta\Gamma) = R/2$ και $(K\Delta) = R/2$ άρα,

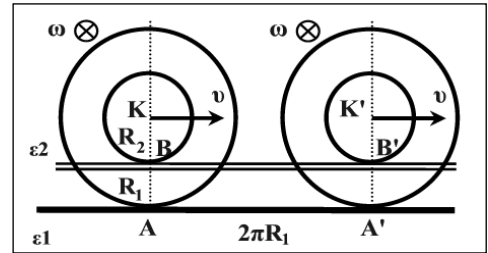
$$\sin\theta = \frac{K\Delta}{KZ} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = 60^\circ.$$

Το σημείο Z έχει δύο ταχύτητες μια λόγω μεταφοράς ίση με την ταχύτητα v του κέντρου μάζας και μια ωR λόγω περιστροφής που είναι εφαπτόμενη στην περιφέρεια του τροχού. Επειδή όμως ο τροχός κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει ότι $v = \omega R$. Η συνολική ταχύτητα του Z θα είναι το διανυσματικό άθροισμα των δύο αυτών ταχυτήτων που σχηματίζουν γωνία, ϕ , όπου $\phi = 180^\circ - \theta = 120^\circ$.

Δηλαδή: $\vec{v_Z} = \vec{v} + \vec{\omega R}$

Το μέτρο της ταχύτητας: $v_Z = \sqrt{v^2 + (\omega R)^2 + 2v(\omega R)\cos 120^\circ} = \sqrt{v^2 + v^2 + 2v^2(-0,5)} \rightarrow v_Z = v.$

SB1.7 Δύο ομόκεντρον κύλινδροι με ακτίνες R_1, R_2 ($R_2 < R_1$) είναι καλά συνδεδεμένοι μεταξύ τους και αποτελούν ένα ενιαίο σύστημα που κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο (ε_1). Ταυτόχρονα ο μικρότερος τροχός κυλίνεται πάνω σε παράλληλο επίπεδο (ε_2), όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ο κύλινδρος κάνει μια πλήρη περιστροφή και το σημείο A μετατοπιστεί οριζόντια κατά $2\pi R_1$, τότε το σημείο B θα έχει μετατοπιστεί κατά



- α. $2\pi R_1$ β. $2\pi R_2$ γ. $2\pi(R_1 - R_2)$

Απάντηση: (α)

Ο τροχός ακτίνας R_1 κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο επίπεδο (1) και αν κάνει μια πλήρη περιστροφή ($\Delta\theta = 2\pi \text{ rad}$) το κέντρο μάζας του, K, θα έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = R_1 \cdot \Delta\theta = 2\pi R_1$. Μαζί με το K θα μετατοπιστεί και κάθε σημείο του κυλίνδρου άρα και το B, δηλαδή κατά $2\pi R_1$.

► Σημ: Κάποιος θα έλεγε ότι ταυτόχρονα και ο μικρότερος τροχός κάνει μια περιστροφή συνεπώς και το B θα έπρεπε να μετατοπιστεί οριζόντια στο δικό του επίπεδο ε_2 κατά $2\pi R_2 \neq 2\pi R_1$. Άρα υπάρχει κάποιο παράδοξο. Όμως αυτό είναι λάθος γιατί ο τροχός R_2 δεν κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση, αφού το σημείο B δεν έχει ταχύτητα μηδέν.

$$v = \omega R_1 \quad v_A = v - \omega R_1 = 0$$

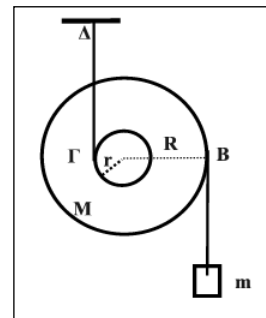
$$\text{Αλλά: } v_B = v - \omega R_2 \rightarrow v_B = \omega(R_1 - R_2) \neq 0 \quad \text{ή } v_B = v(1 - \frac{R_2}{R_1})$$

Το σημείο A δεν έχει ταχύτητα συνεπώς σε χρόνο μιας περιόδου, T, διαγράφει γωνία τόξου $\Delta\theta = \omega T$ και μήκος τόξου $\Delta s_A = R_1 \Delta\theta = R_1 \omega T = 2\pi R_1$.

Το B έχει ταχύτητα v_B προς τα δεξιά άρα μετατοπίζεται κατά $x_1 = v_B T = \omega(R_1 - R_2)T = 2\pi(R_1 - R_2)$ ενώ ταυτόχρονα διαγράφει και αντίθετο τόξο μήκους $x_2 = \omega R_2 T = 2\pi R_2$

Άρα: $\Delta s_B = x_1 - x_2 = 2\pi(R_1 - R_2) - 2\pi R_2 = 2\pi R_1$. Δεν υπάρχει κανένα παράδοξο.

SB1.8 Η διπλή τροχαλία του σχήματος μάζας M μπορεί να κινείται ελεύθερα σε κατακόρυφο επίπεδο. Γύρω από την περιφέρεια ακτίνας r είναι τυλιγμένο λεπτό νήμα το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στην οροφή (σημείο, Δ). Γύρω από την περιφέρεια $R = 2r$ είναι τυλιγμένο πολλές φορές άλλο λεπτό αβαρές νήμα στο άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σώμα μάζας m. Το σύστημα ελευθερώνεται από την ακινησία. Το σώμα m πέφτει με επιτάχυνση α_1 και το κέντρο μάζας της τροχαλίας με α_2 . Η σχέση που συνδέει τα α_1 και α_2 είναι



- α. $\alpha_1 = \alpha_2$ β. $\alpha_1 = 2\alpha_2$ γ. $\alpha_1 = 3\alpha_2$

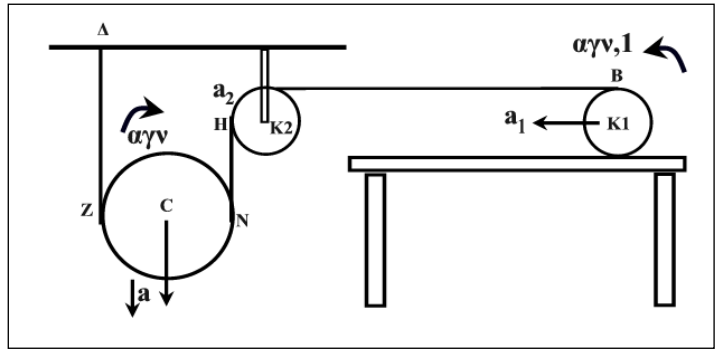
Απάντηση: (γ)

Το σώμα m πέφτει με επιτάχυνση α_1 , η τροχαλία πέφτει με $\alpha_2 = a_{cm}$ και περιστρέφεται με $\alpha_{\gamma\upsilon}$. Το σημείο Γ όπως και το Δ παραμένουν ακίνητα, αφού είναι συνδεδεμένα με την οροφή, συνεπώς:

$$\alpha_{\Gamma} = 0 \rightarrow a_{cm} - \alpha_{\gamma\upsilon} r = 0 \rightarrow \alpha_2 = \alpha_{\gamma\upsilon} r \quad (1)$$

$$\text{Το σημείο B: } a_B = \alpha_1 = a_{cm} + \alpha_{\gamma\upsilon} R \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_{\gamma\upsilon} \cdot 2r = \alpha_2 + 2\alpha_2 \rightarrow \alpha_1 = 3\alpha_2$$

SB1.9 Στο σύστημα που φαίνεται στο σχήμα η μικρή τροχαλία K_2 έχει ακτίνα r και το αβαρές σχοινί συνδέει τον κύλινδρο, K_1 , ίδιας ακτίνας r με το δίσκο C , ακτίνας R . Ο κύλινδρος K_1 κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει καθώς το τυλιγμένο σε αυτόν νήμα ξετυλίγεται. Αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. Αν το κέντρο μάζας του δίσκου C έχει επιτάχυνση a και το κέντρο μάζας του κυλίνδρου K έχει επιτάχυνση a_1 τότε



α. $a=a_1$

β. $a=2 \cdot a_1$

γ. $a=3a_1$

Απάντηση: (α)

Τα σημεία B , H , N του σχήματος είναι σημεία του ίδιου νήματος και συνεπώς έχουν την ίδια επιτάχυνση, $a_B=a_H=a_N$ (1)

Η επιτάχυνση του σημείου B είναι $a_B=a_1+a_{\gamma v,1} \cdot r \rightarrow a_B=2a_1$. (2)

Από (1)(2) $\rightarrow a_N=2a_1$ (3)

Το σημείο Z είναι συνδεδεμένο με το Δ , συνεπώς έχει ταχύτητα και επιτάχυνση μηδενική άρα $a_Z=0 \rightarrow a-a_{\gamma v}R=0 \rightarrow a=a_{\gamma v}R$ (4)

Ως σημείο του δίσκου C , το σημείο N έχει επιτάχυνση $a_N=a_{\gamma v}R + a \rightarrow a_N=2a$ (5)

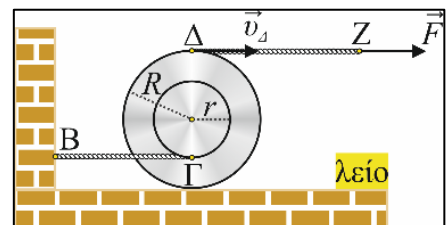
Από (3)(5) $\rightarrow a=a_1$

SB1.10 Ο τροχός του σχήματος κάνει σύνθετη κίνηση στο λείο δάπεδο. Τα νήματα είναι τυλιγμένα πολλές φορές γύρω από τα αυλάκια του τροχού και ισχύει $R = 2r$. Ο λόγος της ταχύτητας του σημείου Δ προς την ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι:

α. $v_\Delta/v_{cm} = 2$

β. $v_\Delta/v_{cm} = 1$

γ. $v_\Delta/v_{cm} = 3$



Απάντηση: (γ)

Το σημείο Γ είναι συνδεδεμένο μέσω του νήματος με το σημείο B του τοίχου που είναι ακίνητο.

Άρα είναι: $v_\Gamma = 0 \Rightarrow v_{cm} - \omega r = 0 \Rightarrow v_{cm} - \frac{1}{2}\omega R = 0 \Rightarrow \omega R = 2v_{cm}$.

Άρα: $v_\Delta = v_{cm} + \omega R = v_{cm} + 2v_{cm} = 3v_{cm} \Rightarrow v_\Delta/v_{cm} = 3$.

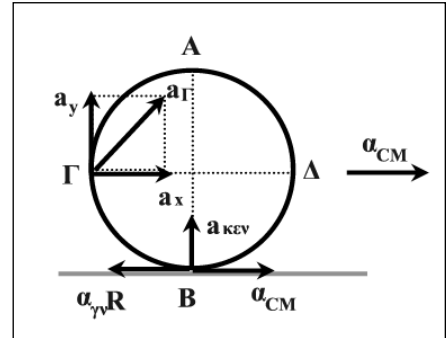
Γ.1 ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΣΓ1.1 Ο τροχός του σχήματος, ακτίνας $R=0,8\text{m}$ ανήκει σε ένα αυτοκίνητο που κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a=1\text{m/s}^2$ και ξεκίνησε τη χρονική στιγμή $t=0$ από την ηρεμία. Οι τροχοί του αυτοκινήτου κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν.

A. Να υπολογίσετε τις επιταχύνσεις των σημείων A, B τη χρονική στιγμή $t=0$, όπου τα σημεία A και B είναι στα άκρα μιας κατακόρυφης διαμέτρου του τροχού.

B. Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης των σημείων, B και Γ και την ταχύτητα του σημείου Δ, τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του σημείου A είναι 4m/s . Τα σημεία αυτά φαίνονται στο σχήμα.

Γ. Πόσες περιστροφές κάνει ο τροχός σε χρόνο $\Delta t=4\text{s}$.



Λύση

A. Τη χρονική στιγμή $t=0$ ο τροχός δεν έχει αρχική ταχύτητα άρα δεν υπάρχει και κεντρομόλος επιτάχυνση σε κανένα σημείο του. Συνεπώς

$$a_A = a_{cm} + a_{\gamma\nu} \cdot R = 2 a_{cm} \rightarrow a_A = 2\text{m/s}^2 \text{ και } a_B = a_{cm} - a_{\gamma\nu} \cdot R \rightarrow a_B = 0.$$

B. Η ταχύτητα του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή t θα υπολογιστεί ως εξής:

Ισχύει $v_A = 2v_{cm} \rightarrow v_{cm} = 2\text{m/s}$. Άρα η κεντρομόλος επιτάχυνση κάθε σημείου της περιφέρειας θα είναι

$a_{κεν} = v_{cm}^2 / R = 5\text{m/s}^2$. Άρα και το σημείο B θα έχει επιτάχυνση ίση με την κεντρομόλο αφού οι άλλες δύο a_{cm} και $a_{\gamma\nu}R$ αλληλοεξουδετερώνονται: Συνεπώς:

$$a_{κεν,B} = v_{cm}^2 / R = 5\text{m/s}^2$$

Για το σημείο Γ υπάρχουν δύο συνιστώσες της επιτάχυνσης.

Η οριζόντια που είναι: $a_x = a_{cm} + a_{κεν} = 1\text{m/s}^2 + 5\text{m/s}^2 \rightarrow a_x = 6\text{m/s}^2$

Η κατακόρυφη που είναι: $a_y = a_{\gamma\nu}R = a_{cm} = 1\text{m/s}^2$.

Η συνισταμένη επιτάχυνση θα είναι: $a_\Gamma = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \rightarrow a_\Gamma = \sqrt{37}\text{m/s}^2$

Η ταχύτητα του σημείου Δ την ίδια χρονική στιγμή θα είναι $v_\Delta = v_{cm}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\text{m/s}$

Γ. Η γωνιακή επιτάχυνση είναι $a_{\gamma\nu} = a_{cm} / R \rightarrow a_{\gamma\nu} = 5/4 \text{ rad/s}^2$

Άρα η γωνιακή μετατόπιση θα είναι $\Delta\theta = \frac{1}{2}a_{\gamma\nu}t^2 \rightarrow \Delta\theta = 10\text{rad}$. Άρα ο αριθμός των περιστροφών είναι

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{5}{\pi} \text{ στροφές}$$

B.2 ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

SB2.1 Κυλινδρικό ομογενές βαρέλι ακτίνας R και βάρους w βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και στηρίζεται σ' αυτό με την κυλινδρική του επιφάνεια. Το βαρέλι ακουμπάει σε σκαλοπάτι ύψους $h=R/4$. Η ελάχιστη δύναμη F που πρέπει να ασκηθεί στο σημείο A και σε οριζόντια κατεύθυνση ώστε το βαρέλι να χάσει την επαφή του με το οριζόντιο έδαφος είναι η

α. $F_{\min}=w\sqrt{7/7}$ β. $F_{\min}=w$ γ. $F_{\min}=w\sqrt{7}$

Απάντηση: (α)

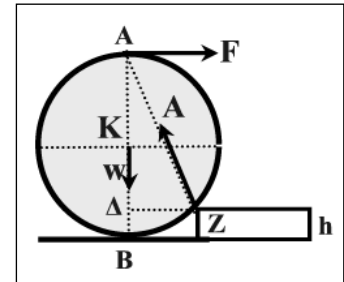
Αν η F έχει την κατάλληλη τιμή ώστε το βαρέλι να χάσει την επαφή του με το πάτωμα η αντίδραση N του πατώματος μηδενίζεται. Για να συμβεί αυτό πρέπει $\tau_F \geq \tau_w$ ως προς το σημείο περιστροφής Z .

$$\tau_F \geq \tau_w \rightarrow F(A\Delta) \geq w(\Delta Z) \rightarrow F \geq \frac{w(\Delta Z)}{A\Delta} \quad (1)$$

$$(\Delta Z) = \sqrt{R^2 - (K\Delta)^2} = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{h(2R-h)} = \frac{R}{4}\sqrt{7} \quad (2)$$

$$(A\Delta) = 2R - h = 7R/4 \quad (3)$$

$$(1) \rightarrow F \geq w\sqrt{7/7} \rightarrow F_{\min} = w\sqrt{7/7}$$



* Αν το βαρέλι ξεκολλήσει από το έδαφος θα υπερπηδήσει το εμπόδιο γιατί όσο ανεβαίνει θα αυξάνεται η ροπή της F και θα μειώνεται η ροπή του βάρους.

SB2.2 Η ομογενής δοκός μήκους $AG=L$ ισορροπεί μεταξύ ενός λείου κατακόρυφου τοίχου και του πατώματος. Η γωνία μεταξύ της δοκού και του πατώματος είναι ϕ . Ο συντελεστής μέγιστης στατικής τριβής μεταξύ της δοκού και του πατώματος είναι μ_σ .

I. Η ελάχιστη τιμή της γωνίας ϕ για την οποία η ράβδος δεν ολισθαίνει πάνω στο πάτωμα δίνεται από τη σχέση:

α. $\epsilon\phi\phi_{\min}=1/\mu_\sigma$ β. $\epsilon\phi\phi_{\min}=1/2\mu_\sigma$ γ. $\epsilon\phi\phi_{\min}=\mu_\sigma$

II. Η δύναμη που δέχεται η ράβδος από το πάτωμα είναι ίση μικρότερη ή μεγαλύτερη από το βάρος της ράβδου;

Απάντηση: (β)

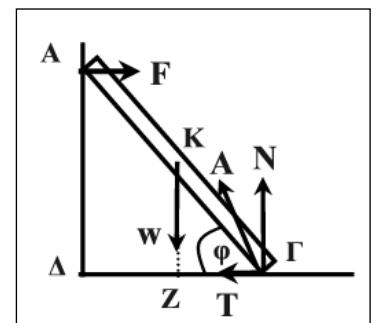
I. Η ράβδος μήκους L ισορροπεί υπό την επίδραση των δυνάμεων: Του βάρους της w , της κάθετης αντίδρασης, F του τοίχου, αφού αυτός είναι λείος, και της αντίδρασης A του εδάφους. Η A αναλύεται σε δύο συνιστώσες στην οριζόντια αντίδραση του εδάφους που είναι η δύναμη της στατικής τριβής, T και την κάθετη αντίδραση του εδάφους, N . Αφού ισορροπεί ισχύουν οι τρεις συνθήκες ισορροπίας:

$$\Sigma \tau_I = 0 \rightarrow w(Z\Gamma) - F(A\Delta) = 0 \rightarrow F = w \frac{(Z\Gamma)}{(A\Delta)} = w \frac{\frac{L}{2} \sin \phi}{L \eta \mu \phi} \rightarrow F = \frac{w}{2 \epsilon \phi \phi} \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F - T = 0 \rightarrow F = T \quad (2) \quad \text{Από (1),(2)} \rightarrow T = \frac{w}{2 \epsilon \phi \phi} \quad (4)$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - w = 0 \rightarrow N = w \quad (3)$$

$$\text{Για να μην ολισθαίνει θα πρέπει } T \leq \mu_\sigma N \rightarrow \mu_\sigma \geq \frac{T}{N} \xrightarrow{(3)(4)} \mu_\sigma \geq \frac{\frac{w}{2 \epsilon \phi \phi}}{w} \rightarrow \mu_\sigma \geq \frac{1}{2 \epsilon \phi \phi} \rightarrow \epsilon \phi \phi \geq \frac{1}{2 \mu_\sigma} \rightarrow \epsilon \phi \phi_{\min} = \frac{1}{2 \mu_\sigma}$$



II.

$$A = \sqrt{N^2 + T^2} \rightarrow A = \sqrt{w^2 + T^2} > w \rightarrow A > w$$

Άρα το μέτρο της αντίδρασης A είναι μεγαλύτερο από το βάρος

Σημ.1 Η αντίστοιχη μέγιστη τιμή της δύναμης F που δέχεται η δοκός από τον τοίχο είναι

$$F_{\max} = \frac{w}{2\epsilon\phi_{\min}} = \mu_{\sigma} \cdot w$$

SB2.3 Σε κύλινδρο ακτίνας R, ύψους $h=4R$ και βάρους w , που βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο ασκούμε δύναμη $F=w/3$ σε απόσταση $h/2$ από το οριζόντιο έδαφος. Για να ισορροπεί ο κύλινδρος θα πρέπει το σημείο εφαρμογής της κάθετης δύναμης N, να απέχει από το άκρο B απόσταση x που είναι

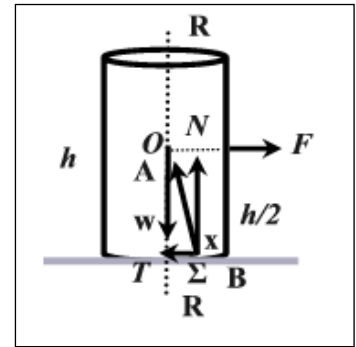
α. $x=R/2$

β. $x=R/3$

γ. $x=2R/3$

Απάντηση: (β)

Έστω A η δύναμη που ασκεί το δάπεδο στο κύλινδρο και Σ το σημείο εφαρμογής της που απέχει απόσταση x από το σημείο B του κυλίνδρου. Η δύναμη A αναλύεται σε δύο ορθογώνιες συνιστώσες, την N, που είναι η κάθετη δύναμη και την T την οριζόντια που είναι η στατική τριβή. Οι άλλες δυνάμεις είναι το βάρος w και η δύναμη F που ασκούμε προκειμένου να τον μετακινήσουμε. Λόγω της ισορροπίας ο κύλινδρος ούτε μεταφέρεται αλλά και ούτε περιστρέφεται.



$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F = T \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = w \quad (2)$$

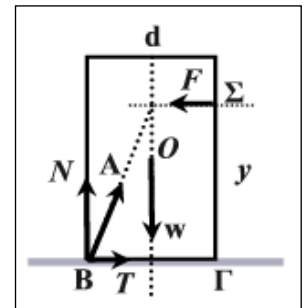
$$\Sigma \tau_{\Sigma} = 0 \rightarrow w(R-x) - F \frac{h}{2} = 0 \rightarrow w(R-x) = \frac{w}{3} \frac{h}{2} \rightarrow R-x = \frac{h}{6} \rightarrow x = R/3$$

SB2.4 Κιβώτιο πλάτους d και βάρους w ισορροπεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το μέγιστο ύψος y από τη βάση του κιβωτίου που μπορούμε να ασκήσουμε οριζόντια δύναμη F, χωρίς το κιβώτιο να ανατρέπεται είναι

α. $y_{\max} = \frac{w \cdot d}{2F}$

β. $y_{\max} = \frac{2w \cdot d}{F}$

γ. $y_{\max} = \frac{w \cdot d}{F}$



Απάντηση: (α)

Έστω ότι ασκούμε δύναμη $\vec{F}$ στο σημείο Σ. Το κιβώτιο έχει την τάση να περιστραφεί γύρω από την κορυφή B, στην οποία ασκείται και η δύναμη $\vec{A}$ από το πάτωμα. Αναλύουμε την $\vec{A}$ σε δύο συνιστώσες την κάθετη δύναμη $\vec{N}$ και την στατική τριβή T. Οι δυνάμεις $\vec{F}$, $\vec{A}$ και $\vec{w}$ πρέπει να διέρχονται από το ίδιο σημείο αφού το κιβώτιο ισορροπεί. Για να μην ανατρέπεται πρέπει

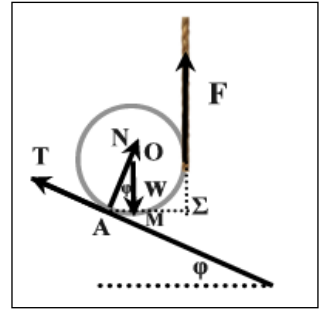
$$\Sigma \tau_B \leq 0 \rightarrow F \cdot y - w \frac{d}{2} \leq 0 \rightarrow 2F \cdot y \leq wd \rightarrow y \leq \frac{w \cdot d}{2F}$$

SB2. 5 Ένας κύλινδρος, βάρους w βρίσκεται σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$. Ο κύλινδρος κρατιέται στο επίπεδο με τη βοήθεια ενός νήματος, τυλιγμένο γύρω από μια εγκοπή που υπάρχει στην κυλινδρική του επιφάνεια και ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Ασκούμε στο νήμα κατακόρυφη δύναμη F . Το μέτρο της δύναμης F ώστε ο κύλινδρος να ισορροπεί είναι

α. $F=w$

β. $F=w/2$

γ. $F=w/3$



Απάντηση: (γ)

Ο κύλινδρος δέχεται συνολικά 4 δυνάμεις. Την $\vec{F}$ από το νήμα το βάρος w την κάθετη αντίδραση N από το κεκλιμένο και την στατική τριβή T που είναι αντίρροπη την F και δεν του επιτρέπει να περιστρέφεται. Για ευκολία θα πάρουμε τις ροπές ως προς το σημείο A στο οποίο ο κύλινδρος έχει επαφή με το επίπεδο

$$\Sigma \tau_A = 0 \rightarrow F \cdot (A\Sigma) - w(AM) = 0 \rightarrow F = \frac{w(AM)}{(A\Sigma)} \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } (AM) = R \cdot \eta\mu\varphi = R/2 \text{ και } (A\Sigma) = (AM) + (M\Sigma) = \frac{1}{2}R + R = \frac{3}{2}R \quad (2)$$

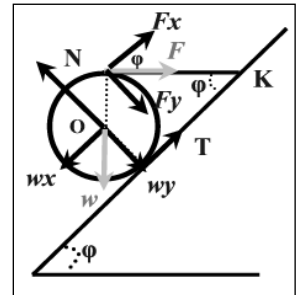
$$\text{Από (1) και (2)} \rightarrow \mathbf{F = w/3}$$

SB2.6 Ο ομογενής τροχός του σχήματος έχει βάρος w και ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=60^\circ$ με τη βοήθεια νήματος. Η δύναμη F του νήματος και η δύναμη A που ασκεί το κεκλιμένο επίπεδο στον τροχό συναρτήσει του βάρους w είναι

α. $F=w\sqrt{3}/3$ & $A=F$

β. $F= w\sqrt{3}/3$ & $A=2F$

γ. $F=w\sqrt{3}/3$ & $A=3F$



Απάντηση : (β)

$$\Sigma \tau_O = 0 \rightarrow T \cdot R - F \cdot R = 0 \rightarrow F = T \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_x + T - w_x = 0 \rightarrow F \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + T = w \cdot \eta\mu\varphi \quad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - F_y - w_y = 0 \rightarrow N = F \eta\mu\varphi + w \sigma\upsilon\nu\varphi \quad (3)$$

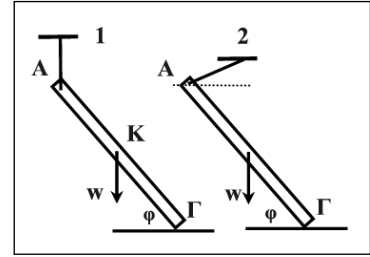
$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow \mathbf{F = T = w\sqrt{3}/3} \quad (4)$$

$$\text{Από (3)(4)} \rightarrow N = (w\sqrt{3}/3)\sqrt{3}/2 + w/2 \rightarrow N = w \quad (5)$$

Η δύναμη A που ασκεί το κεκλιμένο στον τροχό είναι η συνισταμένη των N και T . Άρα

$$A = \sqrt{N^2 + T^2} = \sqrt{w^2 + w^2/3} \rightarrow \mathbf{A = 2\sqrt{3}w/3 = 2F}$$

SB2.7 Δύο όμοιες ομογενείς ράβδοι βάρους w , ισορροπούν πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο σχηματίζουν την ίδια γωνία φ . Οι ράβδοι συγκρατούνται από ακλόνητα σημεία με τη βοήθεια νημάτων. Η σχέση των κάθετων αντιδράσεων N , των επιπέδων στο άκρο Γ κάθε ράβδου είναι:



α. $N_1=N_2$

β. $N_2>N_1$

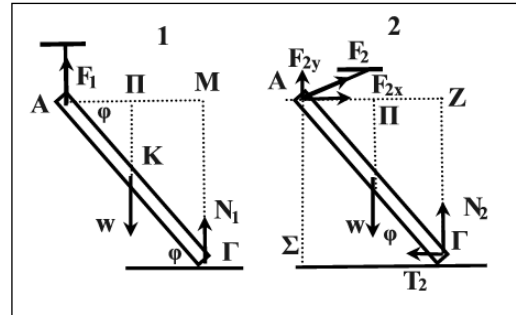
γ. $N_1>N_2$

Απάντηση: (β)

Το οριζόντιο επίπεδο στο οποίο πατάει η ράβδος (1) είναι λείο καθότι η αντίδραση N του πατώματος πρέπει να είναι κάθετη στην επιφάνεια επαφής, δηλαδή στο πάτωμα, για να ισορροπεί η ράβδος με αυτές τις δυνάμεις.

(1): $\Sigma \tau_A=0 \rightarrow N_1(AM) - w \cdot (A\Pi) = 0 \rightarrow$
 $N_1 l \sin \varphi = w \cdot (\ell/2) \sin \varphi \rightarrow N_1 = w/2$ (1)

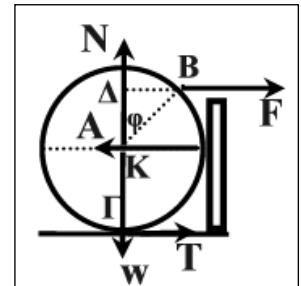
(2): $\Sigma \tau_A=0 \rightarrow N_2(AZ) - w(A\Pi) - T_2(A\Sigma) = 0 \rightarrow$
 $N_2 l \sin \varphi - w(\ell/2) \sin \varphi - T_2 l \cos \varphi = 0 \rightarrow$
 $N_2 = (w/2) + T_2 \cot \varphi$ (2)
 Από (1)(2) $\rightarrow N_2 > N_1$



SB2.8 Ο κύλινδρος του σχήματος έχει βάρος w και ισορροπεί εφαπτόμενος ενός λείου κατακόρυφου τοίχου. Στο σημείο B ασκούμε δύναμη $F=w$ έτσι ώστε η γωνία $B\hat{K}\Delta = \varphi = 60^\circ$.

I. Η δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος από τον τοίχο είναι
 α. $A=w$ β. $A=3w/2$ γ. $A=2w$

II. Η δύναμη της τριβής που δέχεται από το πάτωμα είναι
 α. $T=0$ β. $T=w/2$ γ. $T=w/4$



Απάντηση: I(β) και II(β).

I. Η δύναμη A που δέχεται ο κύλινδρος από τον τοίχο πρέπει να είναι κάθετη στην επιφάνεια επαφής τους αφού οι τοίχος είναι λείος. Συνεπώς διέρχεται από το κέντρο, K . Αφού ισορροπεί η συνολική ροπή που δέχεται θα είναι μηδέν ως προς οποιοδήποτε σημείο άρα και το σημείο επαφής με το πάτωμα δηλαδή το Γ .

$\Sigma \tau_\Gamma = 0 \rightarrow F(\Delta\Gamma) - A(K\Gamma) = 0 \rightarrow F(\Delta A + K\Gamma) - A \cdot (K\Gamma) = 0 \rightarrow F(R + R \sin \varphi) = A \cdot R \rightarrow F \cdot \frac{3R}{2} = A \cdot R \rightarrow A = 3w/2$.

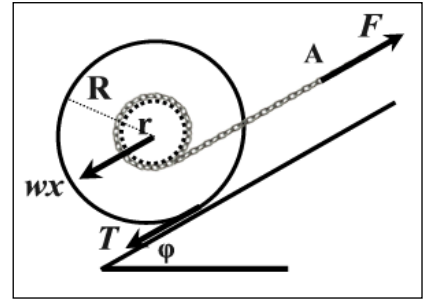
II. Ο κύλινδρος δεν περιστρέφεται συνεπώς θα πρέπει η συνολική ροπή ως προς το κέντρο του να είναι μηδέν. Άρα πρέπει να υπάρχει τριβή T ώστε η ροπή της να εξισορροπεί τη ροπή της F .

$\Sigma \tau_K = 0 \rightarrow F(K\Delta) - T(\Gamma A) = 0 \rightarrow FR \sin \varphi = TR \rightarrow T = \frac{F}{2} \rightarrow T = w/2$

SB2.9 Ο κύλινδρος του σχήματος ακτίνας R και μάζα 5kg , έχει εγκοπή βάθους $r=R/2$ στην οποία έχει τυλιχθεί ένα αβαρές νήμα, στο άκρο A του οποίου ασκούμε δύναμη F , παράλληλη στο επίπεδο. Δίνονται $\eta\mu\varphi=0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,8$, ενώ $g=10\text{m/s}^2$.

Το μέτρο της δύναμης F , ώστε ο κύλινδρος να ισορροπεί, είναι

- α. $F=60\text{N}$ β. $F=30\text{N}$ γ. $F=120\text{N}$



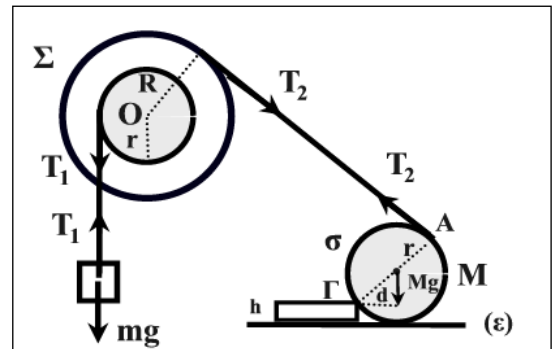
Απάντηση: (α)

Για να ισορροπεί πρέπει να μην μεταφέρεται αλλά και να μην περιστρέφεται. Άρα η στατική τριβή πρέπει να έχει κατεύθυνση προς τα κάτω ώστε η ροπή της να αντισταθεί στη ροπή της F .

$$\Sigma\tau=0 \rightarrow Fr - TR = 0 \rightarrow T = Fr/R \rightarrow T = F/2$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F - m g \eta\mu\varphi - T = 0 \rightarrow F = 2m g \eta\mu\varphi \rightarrow \mathbf{F=60N}.$$

SB2.10 Το στερεό Σ αποτελείται από δύο δίσκους με ακτίνες R και r , με $R=2r$. Το στερεό μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του O και είναι κάθετος σαντό. Στον μικρό δίσκο είναι τυλιγμένο νήμα από το οποίο κρέμεται σώμα μάζας m . Στον εξωτερικό δίσκο του στερεού Σ είναι τυλιγμένο άλλο νήμα το οποίο τυλίγεται γύρω από δίσκο, σ , μάζας M , ακτίνας r . Το στερεό σ μένει ακίνητο με τη βοήθεια σκαλοπατιού ύψους $h=R/8$. Η διάμετρος $ΑΓ$ του δίσκου συνδέει το τυλιγμένο νήμα με την ακμή του σκαλοπατιού. Όλο το σύστημα ισορροπεί χωρίς καμία τριβή ενώ το στερεό σ είναι έτοιμο να ανασηκωθεί από το οριζόντιο επίπεδο, (ϵ) . Η σχέση των μαζών M και m είναι



- α. $m=\frac{1}{2}M\sqrt{7}$ β. $m=\frac{1}{4}M$ γ. $m=\frac{1}{4}M\sqrt{7}$

Απάντηση: (γ)

$$\text{Για το σώμα } m \text{ που ισορροπεί: } \Sigma F=0 \rightarrow T_1 = mg \quad (1)$$

$$\text{Για το στερεό } \Sigma \text{ που ισορροπεί: } \Sigma\tau_0=0 \rightarrow T_2 R - T_1 r = 0 \rightarrow T_2 = \frac{1}{2}mg \quad (2)$$

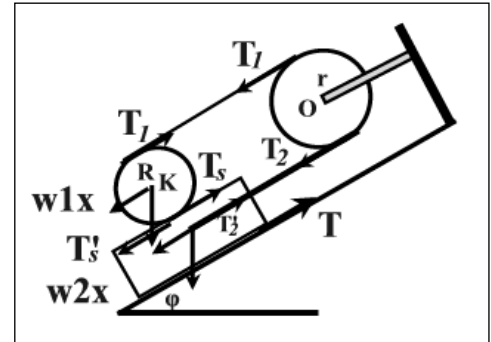
Το στερεό σ ισορροπεί οριακά, δηλαδή η κάθετη δύναμη από το επίπεδο (ϵ) είναι $N=0$. Συνεπώς δέχεται 3 δυνάμεις το βάρος του Mg , την τάση T_2 του νήματος και την αντίδραση από την κόγχη του σκαλοπατιού στο Γ .

$$\Sigma\tau_1=0 \rightarrow T_2 \cdot (ΑΓ) - Mg \cdot d = 0 \quad (3)$$

$$\text{με } (ΑΓ)=2r=R \rightarrow r=\frac{1}{2}R \text{ και } h=R/8 \text{ και } d=\sqrt{r^2-(r-h)^2} \rightarrow d=R\sqrt{7}/8 \quad (4)$$

$$\text{Από (2)(3)(4)} \rightarrow \mathbf{m=M\sqrt{7}/4}$$

SB2.11 Ο κύλινδρος έχει μάζα $m_1=2\text{kg}$ και η πλάκα $m_2=3\text{kg}$. Ο κύλινδρος συνδέεται με αβαρές νήμα με την πλάκα. Το νήμα ξεκινά από το κέντρο του κυλίνδρου, περνάει από την τροχαλία και καταλήγει στην ορθογώνια πλάκα. Τα τμήματα του νήματος που δείχνει το σχήμα είναι παράλληλα στο κεκλιμένο επίπεδο. Ουδέν σώμα είναι λείο. Ο άξονας της τροχαλίας, (O) είναι σταθερός. Δίνονται $\varphi=30^\circ$ και $g=10\text{m/s}^2$. Η δύναμη T της στατικής τριβής που δέχεται η πλάκα από το κεκλιμένο επίπεδο είναι



α. $T=15\text{N}$

β. $T=25\text{N}$

γ. $T=10\text{N}$

Απάντηση: (α)

Η Τροχαλία δέχεται τις τάσεις T_1, T_2 των νημάτων και τη δύναμη στον άξονα O.

Για την τροχαλία: $\Sigma \tau_O=0 \rightarrow T_1 r - T_2 \cdot r=0 \rightarrow T_1=T_2$ (1)

Ο κύλινδρος δέχεται στον άξονα x την συνιστώσα του βάρους του $w_{1x}=m_1 g \eta \mu \varphi$, την τάση T_1 και τη στατική τριβή T_s .

Για τον κύλινδρο: $\Sigma \tau_K=0 \rightarrow T_1 R - T_s R=0 \rightarrow T_1=T_s$ (2)

Και $\Sigma F_x=0 \rightarrow T_1 + T_s - m_1 g \cdot \eta \mu \varphi=0 \rightarrow 2T_1 = m_1 g \cdot \eta \mu \varphi \rightarrow T_1=5\text{N}$

Από (1)(2) $\rightarrow T_s=5\text{N}$

Η πλάκα ισορροπεί και δέχεται στον άξονα x την τάση του νήματος T_2' , τη συνιστώσα του βάρους της $w_2=m_2 g \eta \mu \varphi$, την T_s' που είναι αντίδραση της στατικής τριβής T_s και την τριβή T από το κεκλιμένο.

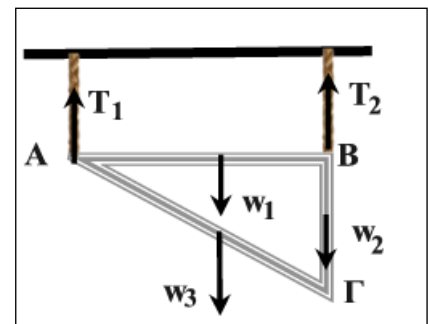
Για την πλάκα: $\Sigma F_x=0 \rightarrow T + T_2' - T_s' - m_2 g \eta \mu \varphi=0 \rightarrow T = T_s + m_2 g \eta \mu \varphi - T_2' \rightarrow T=15\text{N}$

SB2.12 Τρεις ομογενείς ισοπαχείς ράβδοι από το ίδιο υλικό συνδέονται μεταξύ τους ώστε να σχηματίζουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με κάθετες πλευρές $AB=\ell$ και $B\Gamma=3\ell/4$. Το βάρος της ράβδου AB είναι w . Το τρίγωνο κρέμεται από την οροφή με τη βοήθεια δύο νημάτων που συνδέονται με τις κορυφές A και B. Αν T_1 είναι η τάση του νήματος που συνδέεται στο σημείο A και T_2 του νήματος που συνδέεται στο σημείο B τότε ο λόγος T_1/T_2 θα είναι

α. $T_1/T_2=4/5$

β. $T_1/T_2=3/5$

γ. $T_1/T_2=2/5$



Απάντηση (β)

Από το Πυθαγόρειο : $AG = \sqrt{(AB)^2 + (B\Gamma)^2} \rightarrow AG = 5\ell/4$

Άρα $W_1=W$ και αφού οι ράβδοι είναι από το ίδιο υλικό και με το ίδιο πάχος $W_2=3w/4$ και $W_3=5\ell/4$

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow T_1 + T_2 - W_1 - W_2 - W_3=0 \rightarrow T_1 + T_2=3W \quad (1)$$

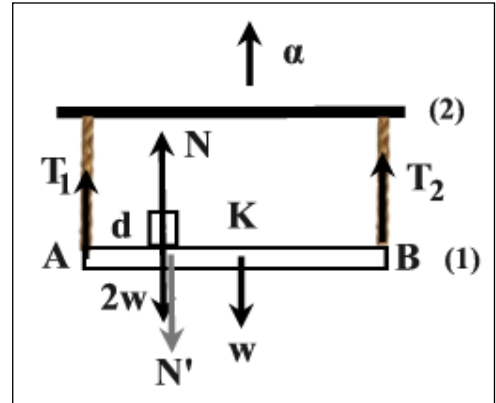
$$\Sigma \tau_B=0 \rightarrow T_1 \ell - W_1(\ell/2) - W_3(\ell/2)=0 \rightarrow T_1=\frac{9}{8}W \quad (2)$$

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow T_2=\frac{15}{8}W \quad (3)$$

$$\text{Από (2)(3)} \rightarrow T_1/T_2=3/5$$

SB2.13 Το σύστημα που φαίνεται στο σχήμα αποτελείται από δύο δοκούς (1) και (2) οι οποίοι συνδέονται με δύο κατακόρυφα νήματα. Η δοκός (1) έχει βάρος $w=mg$, μήκος ℓ και πάνω της υπάρχει τοποθετημένο σώμα βάρους $2w=2mg$ σε απόσταση $d=\ell/4$ από το άκρο A. Το σύστημα επιταχύνεται προς τα πάνω με επιτάχυνση $a=g/3$ όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Οι τάσεις των νημάτων είναι

- α. $T_1 = T_2 = 3mg$
 β. $T_1 = 4mg/3$ και $T_2 = 8mg/3$
 γ. $T_1 = 8mg/3$ και $T_2 = 4mg/3$



Απάντηση (γ)

Το σώμα επιταχύνεται προς τα πάνω με a . Συνεπώς: $\Sigma F = 2m \cdot a \rightarrow N - 2mg = 2m \cdot a \rightarrow N = 8mg/3$.

Η δοκός (1) επιταχύνεται προς τα πάνω με επιτάχυνση a . Τις ασκούνται οι τάσεις των νημάτων T_1 και T_2 , το βάρος της $w=mg$ και η N' που είναι η αντίδραση της N που αυτή ασκεί στο σώμα. Φυσικά $N = N' = 8mg/3$. Άρα:

$$\Sigma F_p = m \cdot a \rightarrow T_1 + T_2 - N' - w = m(g/3) \rightarrow T_1 + T_2 = 8mg/3 + mg + mg/3 \rightarrow T_1 + T_2 = 4mg \quad (1)$$

Η ράβδος, μόνη της ως ελεύθερο στερεό δεν περιστρέφεται και συνεπώς η συνολική ροπή ως προς το κέντρο μάζας της, K (και όχι κάποιος τυχαίο σημείο) είναι μηδενική.

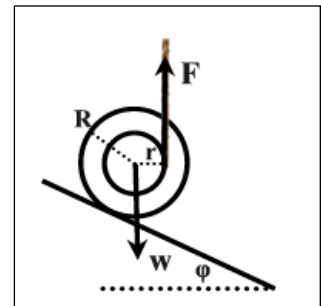
$$\Sigma \tau_K = 0 \rightarrow T_2 \frac{\ell}{2} - T_1 \frac{\ell}{2} - N' \left(\frac{\ell}{2} - d \right) = 0 \rightarrow T_2 - T_1 = 4mg/3 \quad (2)$$

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow T_1 = 8mg/3 \quad \text{και} \quad T_2 = 4mg/3$$

SB2.14 Ένας κύλινδρος, βάρους w βρίσκεται σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$. Αποτελείται από δύο ομοκεντρικά κυλινδρικά μέρη το εξωτερικό με ακτίνα R και το εσωτερικό με ακτίνα r . Ο κύλινδρος ισορροπεί οριακά στο επίπεδο με τη βοήθεια ενός νήματος, τυλιγμένο γύρω από μια εγκοπή που υπάρχει στην εσωτερική κυλινδρική του επιφάνεια όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ισορροπία επιτυγχάνεται με τη βοήθεια κατακόρυφης δύναμης F που ασκείται στο νήμα.

I. Για το συντελεστή οριακής τριβής ισχύει

(α) $\mu_{op} = 1/2 \epsilon \varphi \varphi$ (β) $\mu_{op} = 0,6 \epsilon \varphi \varphi$ (γ) $\mu_{op} = \epsilon \varphi \varphi$



II. Το μέτρο της δύναμης F ώστε ο κύλινδρος να ισορροπεί είναι

(α) $F = \frac{w \eta \mu \varphi}{(\eta \mu \varphi + r/R)}$ (β) $F = \frac{w \eta \mu \varphi}{(\sigma \nu \eta \varphi + r/R)}$ (γ) $F = \frac{w \epsilon \varphi \varphi}{(\sigma \nu \eta \varphi + r/R)}$

Απάντηση (γ), (α)

I. Η ισορροπία του στερεού επιβάλλει να γράψουμε τις τρεις συνθήκες ισορροπίας:

$$\Sigma \tau_K = 0 \rightarrow F \cdot r - T \cdot R = 0 \rightarrow F \cdot r = T \cdot R \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_x + T - w_x = 0 \rightarrow F \eta \mu \phi + T = w \cdot \eta \mu \phi \quad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_y + N - w_y = 0 \rightarrow F \sigma \nu \phi + N = w \cdot \sigma \nu \phi \quad (3)$$

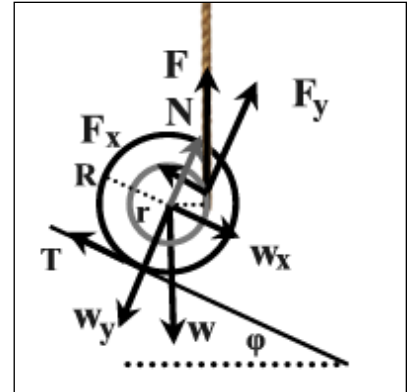
$$(2) \rightarrow T = (w - F) \eta \mu \phi$$

$$(3) \rightarrow N = (w - F) \sigma \nu \phi \quad \frac{T}{N} = \epsilon \phi \phi \quad (4)$$

Για να μην ολισθαίνει πρέπει: $T \leq \mu_{\sigma} N \rightarrow \mu_{\sigma} \geq \epsilon \phi \phi \rightarrow \mu_{\sigma p} = \epsilon \phi \phi$.

II. Από (1) $\rightarrow T = F \cdot r / R$ (5)

$$\text{Από (2)(5)} \rightarrow F \eta \mu \phi + F \cdot (r/R) = w \eta \mu \phi \rightarrow F = \frac{w \eta \mu \phi}{(\eta \mu \phi + r/R)}$$



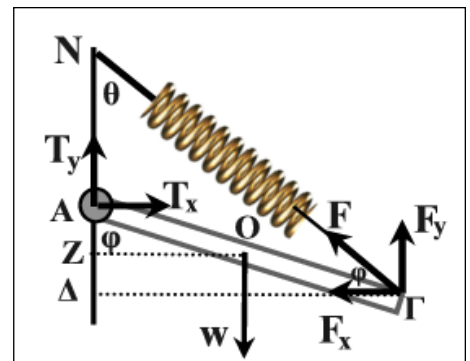
SB2.15 Ομογενής ράβδος βάρους w και μήκους $AG = \ell$ είναι στερεωμένη στο ένα άκρο της A με άρθρωση και στο άλλο άκρο της συνδέεται με ελατήριο σταθεράς k . Το σύστημα ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα με τις γωνίες να είναι $\theta = 30^\circ$ και $\phi = 60^\circ$. Η δύναμη στην άρθρωση A έχει μέτρο

$$\alpha. T = w$$

$$\beta. T = w/2$$

$$\gamma. T = w/4$$

Απάντηση: (β)



Στη ράβδο εκτός του βάρους w ασκείται η δύναμη T_a στην άρθρωση A που αναλύεται σε T_x και T_y και η δύναμη F του τεντωμένου ελατηρίου στο Γ που αναλύεται σε T_x και T_y . Γράφω τις 3 συνθήκες ισορροπίας:

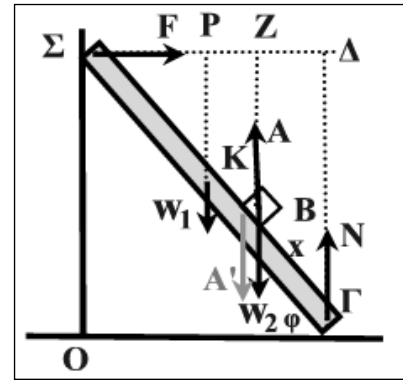
$$\Sigma \tau_A = 0 \rightarrow F_y (\Gamma \Delta) - F_x (A \Delta) - w (OZ) = 0 \rightarrow F \eta \mu \phi \cdot \ell \eta \mu \phi - F \sigma \nu \phi \cdot \ell \sigma \nu \phi = w (\ell/2) \eta \mu \phi \rightarrow \dots \rightarrow F = w \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow T_x - F_x = 0 \rightarrow T_x = F \sigma \nu \phi \rightarrow T_x = w \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow T_y + F_y - w = 0 \rightarrow T_y = w - F \eta \mu \phi \rightarrow T_y = w - w \frac{3}{4} \rightarrow T_y = \frac{w}{4}$$

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \rightarrow T = w/2$$

►SB2.16 Μια ομοιόμορφη σανίδα, μήκους $L=12\text{m}$, βάρους $w_1=100\text{N}$ στηρίζεται με το ένα άκρο της Α σε τελείως λείο κατακόρυφο τοίχο και με το άλλο της, Γ σε οριζόντιο τραχύ δάπεδο. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σανίδας και οριζοντίου δαπέδου είναι $\mu_s=0,5$ και η σανίδα ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία $\varphi=45^\circ$ με το δάπεδο. Σώμα βάρους $w_2=120\text{N}$ μπορεί να ισορροπεί πάνω στην επιφάνεια της σανίδας σε διάφορα σημεία από το Γ προς το Α.



I. Η εξίσωση μεταβολής της στατικής τριβής, T μεταξύ σανίδας και οριζοντίου επιπέδου και απόσταση x του σώματος από το σημείο Γ είναι

α. $T=50-10x$ (SI)

β. $T=50+10x$ (SI)

γ. $T=60+10x$ (SI)

II. Οι τιμές του x ώστε η σανίδα να μην ολισθαίνει είναι

α. $x \leq 10\text{m}$

β. $x \leq 6\text{m}$

γ. $x \leq 4\text{m}$

Απάντηση: (β), (β)

I. Το σώμα δέχεται τη δύναμη του βάρους του w_2 και την δύναμη A από τη σανίδα. Λόγω δράσης αντίδρασης η σανίδα δέχεται την $A'=A$. Επειδή το σώμα ισορροπεί $\Sigma F_y=0 \rightarrow A=w_2$ (1)

$$\Sigma \tau_A=0 \rightarrow N(A\Delta)-T(AO)-w_1(AP)-A'(AZ)=0 \rightarrow N\ell \sin\varphi-T\ell \mu\varphi-w_1(\ell/2)\sin\varphi-A'(\ell-x)\sin\varphi=0$$
 (2)

$$\text{και } \Sigma F_y=0 \rightarrow N-w_1-A'=0 \rightarrow N=w_1+w_2=220\text{N} \quad (2)$$

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow T=50+10x \quad \text{στο SI}$$

$$\text{II. Για να μην ολισθαίνει η σανίδα πρέπει: } T \leq \mu N \rightarrow 50+10x \leq 0,5 \cdot 220 \rightarrow 10x \leq 60 \rightarrow x \leq 6\text{m}.$$

Γ.2 ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΣΓ2.1 Η σανίδα ΔΓ βάρους $w_1=10\text{N}$, μήκους $\ell=1\text{m}$ ισορροπεί όπως στο σχήμα με τη βοήθεια δύο κατακόρυφων νημάτων. Η σανίδα σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφο. Σε απόσταση $d=0,2\text{m}$ από το άκρο Δ ισορροπεί μικρό κιβώτιο βάρους $w_2=10\text{N}$ με τη βοήθεια της στατικής τριβής. Δίνονται $\eta\mu\varphi=0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,8$. Να υπολογιστούν οι τάσεις των νημάτων στα σημεία Δ και Γ.

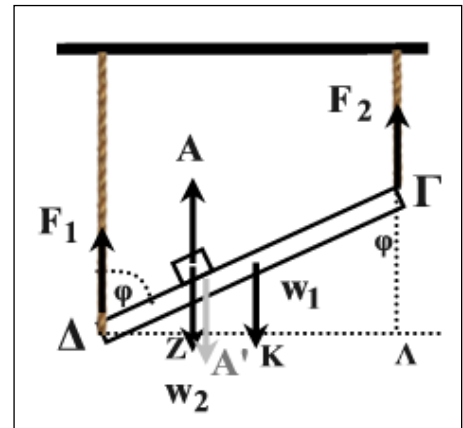
Λύση

Η σανίδα δέχεται τις τάσεις των νημάτων F_1 , F_2 το βάρος της w_1 και τη δύναμη A' από το κιβώτιο w_2 . Το κιβώτιο ισορροπεί δεχόμενο το βάρος του w_2 και τη δύναμη στήριξης A από τη σανίδα και φυσικά ισχύει:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow A=w_2=10\text{N} \text{ και λόγω δράσης αντίδρασης}$$

$$A'=A=10\text{N}.$$

Η δύναμη A είναι η συνισταμένη της στατικής τριβής, T και της κάθετης δύναμης N με τις οποίες δεν έχουμε λόγω να εμπλακούμε. Για την ισορροπία της σανίδας ισχύουν



$$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_1+F_2-w_1-A'=0 \rightarrow F_1+F_2=20\text{N} \quad (1)$$

$$\Sigma \tau_\Delta=0 \rightarrow F_2(\Delta\Lambda)-w_1(\Delta K)-A'(\Delta Z)=0 \rightarrow F_2\ell\cdot\eta\mu\varphi-w_1\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi-A'\cdot d\eta\mu\varphi=0 \rightarrow F_2=7\text{N} \quad (2)$$

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow F_1=13\text{N}$$

Σημ: Στην ουσία το βάρος του κιβωτίου μεταφέρεται εξ ολοκλήρου στη σανίδα.

ΣΓ2.2 Η λεία σανίδα ΑΒ του σχήματος έχει βάρος $w=100\text{N}$ και ισορροπεί σε πλάγια θέση με τη βοήθεια νήματος που είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο οροφής. Το νήμα είναι τεντωμένο και κάθετο στο μήκος της σανίδας, όπως στο σχήμα. Το άκρο Α της σανίδας πατάει στο οριζόντιο έδαφος και σχηματίζει γωνία φ με αυτό, έτσι ώστε $\eta\mu\varphi=0,8$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,6$. Αβαρές ελατήριο στηρίζεται σε ακλόνητο σημείο Α και φέρει σώμα βάρους $w_1=100\text{N}$ που ισορροπεί χωρίς τριβές σε σημείο Ζ τέτοιο ώστε $AZ=3\ell/4$.

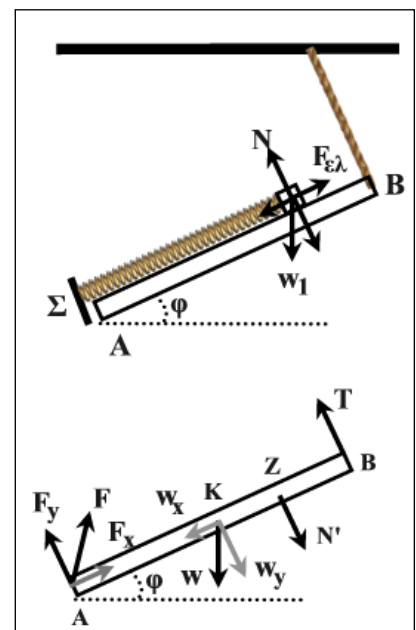
Να υπολογιστούν τα μέτρα της τάσης T του νήματος και της δύναμης F που δέχεται η σανίδα από το έδαφος.

Λύση

Το σώμα ισορροπεί πάνω στη σανίδα με τη βοήθεια της δύναμης του ελατηρίου η οποία τώρα δεν μεταφέρεται στη σανίδα αλλά στο ακλόνητο σημείο του στηρίγματος Σ, του εδάφους. Η κάθετη δύναμη στήριξης N που δέχεται από τη σανίδα είναι

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N-w_1\sigma\upsilon\nu\varphi=0 \rightarrow N=60\text{N}$$

Τώρα η σανίδα δέχεται από το σώμα την αντίδραση $N'=N=60\text{N}$ κάθετη στο μήκος της και με φορά προς τα κάτω (σχήμα 2)



Για την ισορροπία της σανίδας: Αυτή δέχεται το βάρος της w , την αντίδραση N' , την τάση του νήματος T και τη δύναμη F από το οριζόντιο έδαφος. Αναλύω το βάρος w και την F σε συνιστώσες κάθετες και παράλληλες αντιστοίχως προς τη σανίδα.

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F_x=w_x=w\eta\mu\varphi \rightarrow F_x=80\text{N} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_y+T-N'-w_y=0 \quad (2) \quad \text{με } N'=60\text{N και } w_y=w\sin\varphi=60\text{N}$$

$$\Sigma \tau_A=0 \rightarrow T \cdot \ell - N'(3\ell/4) - w_y(\ell/2)=0 \rightarrow T=75\text{N} \quad (3)$$

$$\text{Από (2)(3)} \rightarrow F_y=45\text{N}$$

$$\text{Άρα } F= \sqrt{F_x^2+F_y^2} \rightarrow F \approx 92\text{N}$$

ΣΓ2.3 Η λεία σανίδα AB του σχήματος έχει βάρος $w=100\text{N}$ και ισορροπεί σε πλάγια θέση με τη βοήθεια νήματος που είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο οροφής. Το νήμα είναι τεντωμένο και κάθετο στο μήκος της σανίδας, όπως στο σχήμα. Το άκρο A της σανίδας πατάει στο οριζόντιο έδαφος και σχηματίζει γωνία φ με αυτό, έτσι ώστε $\eta\mu\varphi=0,8$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,6$. Σώμα βάρους $w_1=100\text{N}$ ισορροπεί με τη βοήθεια της στατικής τριβής σε σημείο Z τέτοιο ώστε $AZ=3\ell/4$.

Να υπολογιστούν τα μέτρα της τάσης T του νήματος και της δύναμης F που δέχεται η σανίδα από το έδαφος.

Λύση

Για το σώμα: Το σώμα ισορροπεί πάνω στη σανίδα με τη βοήθεια της στατικής τριβής η αντίδραση της οποίας μεταφέρεται στη σανίδα και φυσικά επηρεάζει την ισορροπία της. Δεν υπάρχει όμως λόγος να αναλύσω τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Αυτό ισορροπεί ενώ δέχεται από τη σανίδα κατακόρυφη δύναμη R που είναι ίση με το βάρος του, $R=w_1=100\text{N}$. (σχ1). Η R είναι η συνισταμένη της τριβής και της κάθετης δύναμης. Η αντίδραση της R ασκείται στη σανίδα και είναι η $R'=R=100\text{N}$ με φορά κατακόρυφη προς τα κάτω (σχ2).

Για την σανίδα: Αυτή ισορροπεί δεχόμενη τη βάρος της w , την R' , την τάση του νήματος T και την δύναμη F από το έδαφος.

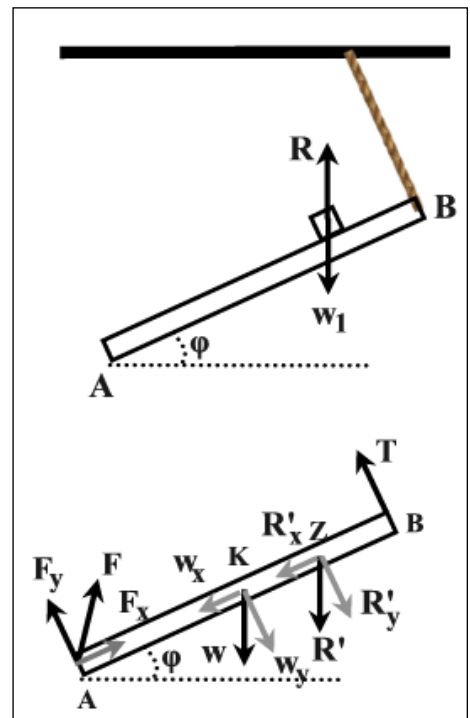
$$\Sigma \tau_A=0 \rightarrow T \cdot \ell - w_y(AK) - R_y(AZ)=0 \rightarrow T\ell - w \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi(\ell/2) - R' \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi(3\ell/4)=0 \rightarrow T=75\text{N}$$

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F_x - w_x - R'_x=0 \rightarrow F_x= w\eta\mu\varphi + R'\eta\mu\varphi \rightarrow F_x=80\text{N}+80\text{N} \rightarrow F_x=160\text{N}$$

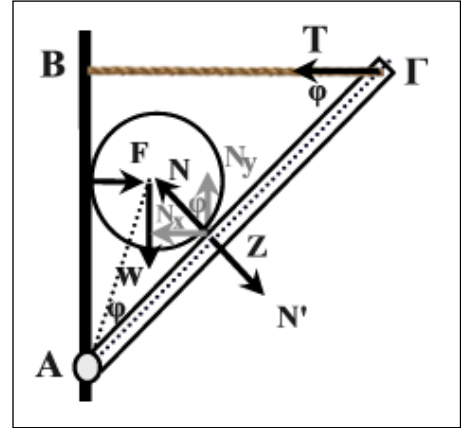
$$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_y+T-w_y-R'_y=0 \rightarrow F_y=w\sigma\upsilon\nu\varphi + R'\sigma\upsilon\nu\varphi - T \rightarrow F_y=60\text{N}+60\text{N}-75\text{N} \rightarrow F_y=45\text{N}$$

$$F= \sqrt{F_x^2+F_y^2} \rightarrow F \approx 166,2\text{N}$$

Σημ. Σε σχέση με την προηγούμενη παρόμοια ισορροπία με τα ίδια νούμερα όπου το σώμα ισορροπούσε με τη βοήθεια ελατηρίου, βλέπουμε ότι η τάση του νήματος είναι ίδια $T=75\text{N}$ αλλά η δύναμη F στη δεύτερη περίπτωση είναι μεγαλύτερα αφού όλο το βάρος του σώματος μεταφέρεται στη σανίδα.



ΣΓ2.4 Η δοκός ΑΓ μήκους $\ell=2\text{m}$ είναι αβαρής και στηρίζεται μέσω άρθρωσης Α στον λείο κατακόρυφο τοίχο ΑΒ. Στο άλλο άκρο της Γ συνδέεται με οριζόντιο νήμα με το σημείο Β του τοίχου. Ανάμεσα στη δοκό και τον τοίχο είναι τοποθετημένη σφαίρα ακτίνας $r=0,5\text{m}$, βάρους $w=20\text{N}$. Η γωνία φ είναι 30° . Να υπολογιστεί η τάση Τ του νήματος και η δύναμη F που δέχεται η σφαίρα από τον τοίχο.



Λύση

Η σφαίρα δέχεται το βάρος της w τη δύναμη F από τον λείο τοίχο που είναι κάθετη στην επιφάνεια επαφής, και τη δύναμη στήριξης N από τη ράβδο την οποία και αναλύσω σε $N_x=N\eta\mu\varphi$ και $N_y=N\sigma\upsilon\nu\varphi$.

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N_y-w=0 \rightarrow N\sigma\upsilon\nu\varphi=w \rightarrow N=40\sqrt{3}/3\text{N}.$$

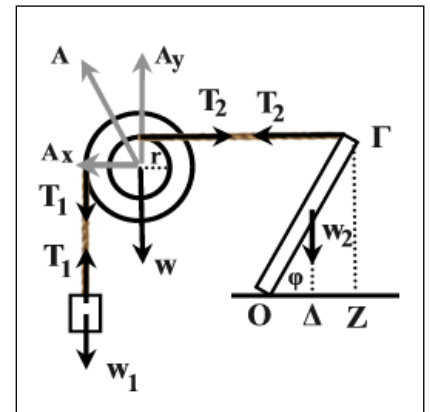
$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F-N_x=0 \rightarrow F=N\cdot\eta\mu\varphi \rightarrow \mathbf{F=20\sqrt{3}/3\text{N}}$$

Η δοκός ισορροπεί με την επίδραση της τάσης Τ του νήματος της δύναμης N' ως αντίδραση της N και της δύναμης στην άρθρωση. Θα υπολογίσω την απόσταση ΑΖ διότι χρειάζεται στις ροπές, όπως και την ΑΒ. Η γωνία ΒΑΓ= 60° συνεπώς η $\epsilon\varphi\varphi=\epsilon\varphi 30^\circ=\sqrt{3}/3$.

$$\text{Άρα: } \epsilon\varphi\varphi=\frac{r}{AZ} \rightarrow AZ=\sqrt{3}/2\text{m και } AB=\ell\eta\mu 30^\circ=1\text{m}$$

$$\Sigma \tau_A=0 \rightarrow T(AB)-N'(AZ)=0 \rightarrow \mathbf{T=20\text{N}}$$

ΣΓ2.5. Το στερεό του σχήματος αποτελείται από δύο δίσκους με ακτίνες $R=2r$ και έχει βάρος $w=30\text{N}$. Συνδέεται μέσω νήματος με κύβο βάρους w_1 και σανίδα ΟΓ βάρους $w_2=60\text{N}$ που είναι αρθρωμένη στο άκρο της Ο με οριζόντιο επίπεδο, όπως στο σχήμα. Να υπολογιστεί το βάρος w_1 μέτρο της δύναμης Α που ασκεί ο άξονας στήριξης στο στερεό. Δίνονται $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,8$ και $\eta\mu\varphi=0,6$.



Λύση:

Αφού σχεδιάσουμε όλες τις δυνάμεις γράφουμε συνθήκες ισορροπίας:

$$\Sigma \tau_O=0 \rightarrow T_2(\Gamma Z) - w_2(O\Delta)=0 \rightarrow T_2\ell\eta\mu\varphi=w_2 (\ell/2)\sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow T_2=40\text{N}.$$

$$\Sigma \tau_K=0 \rightarrow T_2r-T_1R=0 \rightarrow T_1=20\text{N}$$

$$\Sigma F_1=0 \rightarrow T_1=w_1 \rightarrow w_1=20\text{N}$$

$$\text{Για το στερεό ισχύει: } \Sigma F_x=0 \rightarrow A_x=T_2=40\text{N}$$

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow A_y=w+T_1 \rightarrow A_y=50\text{N}$$

$$\text{Άρα: } A=\sqrt{A_x^2+A_y^2} \rightarrow \mathbf{A=\sqrt{4100}=10\sqrt{41}\text{N}}$$

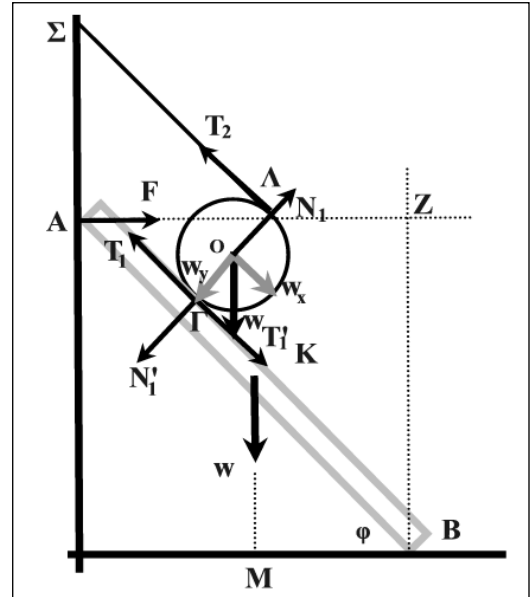
ΣΓ2.6 Η ράβδος AB έχει μήκος ℓ και βάρος w και ισορροπεί ακουμπισμένη στο λείο κατακόρυφο τοίχο και στο τραχύ έδαφος. Πάνω στη ράβδο ισορροπεί κύλινδρος ίδιου βάρους w και ακτίνας r , με τη βοήθεια νήματος ΛΣ που είναι δεμένο στο σημείο Σ του τοίχου και παράλληλο προς τη ράβδο. Όλο το σύστημα ισορροπεί οριακά. Η απόσταση ΑΓ=ℓ/4.

Να υπολογιστούν οι οριακές τιμές

A. της τάσης του νήματος T_2 .

B. της δύναμης F που ασκεί ο τοίχος στη ράβδο.

Γ. των συντελεστών τριβής, μ_1 μεταξύ ράβδου και κυλίνδρου και μ μεταξύ οριζοντίου επιπέδου και ράβδου. Δίνεται $\varphi=45^\circ$.



Λύση

A. Ο κύλινδρος ισορροπεί δεχόμενος το βάρος του W την τάση T_1 του νήματος και τη στατική τριβή T_2 λόγω της επαφής του με τη ράβδο.

$$\Sigma \tau_O = 0 \rightarrow T_2 r - T_1 r = 0 \rightarrow T_1 = T_2$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow T_1 + T_2 - w_x = 0 \rightarrow 2T_2 = w \eta \mu \varphi \rightarrow T_2 = \frac{1}{2} w \cdot \eta \mu \varphi \rightarrow T_2 = w \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_1 = w_y \rightarrow N_1 = w \sigma \nu \varphi = w \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Η ράβδος ισορροπεί δεχόμενη το βάρος της w , την N_1' ως αντίδραση της N_1 , τη δύναμη F από τον τοίχο, την T_1' ως αντίδραση της στατικής τριβής T_1 και τη δύναμη στήριξης από το πάτωμα στο άκρο της B.

$$\text{Άρα } N_1' = N_1 = w \sigma \nu \varphi \text{ και } T_1' = T_1 = w \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{B. } \Sigma \tau_B = 0 \rightarrow N_1' (BG) + w(BM) - F(BZ) = 0 \rightarrow w \cdot \sigma \nu \varphi \cdot \frac{3\ell}{4} + w \frac{\ell}{2} \cdot \sigma \nu \varphi = F \cdot \ell \cdot \eta \mu \varphi \rightarrow F = \frac{5w}{4}$$

$$\text{Γ. Αφού ο κύλινδρος ισορροπεί οριακά } T_1 = \mu_1 N_1 \rightarrow w \frac{\sqrt{2}}{4} = \mu_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \mu_1 = 1/2$$

Σχεδιάζω τη ράβδο ως ανεξάρτητο σώμα με τις δυνάμεις N_1' και T_1' που δέχεται από τον κύλινδρο και φυσικά τις F , και w . Από το οριζόντιο επίπεδο δέχεται την τριβή T και την κάθετη δύναμη N .

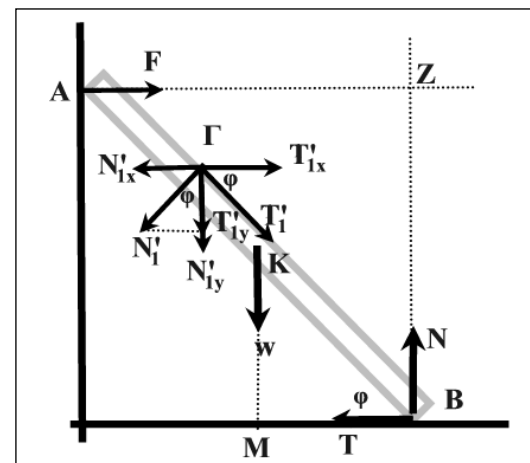
$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F + T_{1x}' - T - N_{1x}' = 0 \rightarrow T = F + T_1 \sigma \nu \varphi - N_1' \eta \mu \varphi \rightarrow$$

$$T = \frac{5w}{4} + w \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - w \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow T = w$$

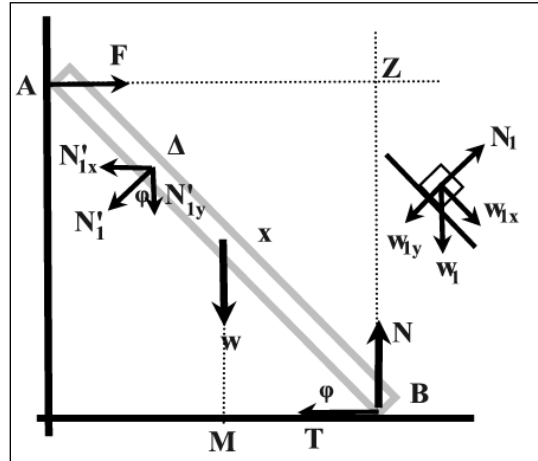
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = w + N_{1y}' + T_{1y}' = w + N_1' \sigma \nu \varphi + T_1' \eta \mu \varphi \rightarrow$$

$$N = w + w \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + w \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow N = \frac{7w}{4}$$

$$\text{Άρα: } T = \mu N \rightarrow \mu = 4/7$$



ΣΓ2.7 Η σανίδα AB έχει μήκος ℓ και βάρος w και ισορροπεί ακουμπισμένη στο λείο κατακόρυφο τοίχο και στο τραχύ έδαφος. Πάνω στη σανίδα μπορεί να κινείται χωρίς τριβές ένας κύβος βάρους $w_1=w$. Για ποιες τιμές της απόστασης x του κύβου από το άκρο B, η σανίδα δεν ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Δίνονται το μήκος ℓ της σανίδας και ο συντελεστής οριακής τριβής μ μεταξύ σανίδας και οριζοντίου επιπέδου.



Λύση

Όταν δεν υπάρχουν τριβές και ο κύβος κινείται τα πράγματα είναι διαφορετικά. Η σανίδα δέχεται από τον κύβο τη δύναμη N_1' που είναι η αντίδραση της N_1 . Και N_1 είναι η κάθετη δύναμη στήριξης που ασκείται από τη σανίδα στον κύβο. Προφανώς ισχύει

$$N_1' = N_1 = w_{1y} = w_1 \sin \varphi. \quad (1)$$

Η σανίδα δέχεται εκτός της N_1' , την F , το βάρος της w , τη N από το οριζόντιο επίπεδο και τη στατική τριβή με αυτό, T .

Για την ισορροπία της σανίδας γράφω τις 3 συνθήκες ισορροπίας

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F = T + N_{1x}' \rightarrow F = T + N_1' \eta \mu \varphi \rightarrow F = T + w_1 \sin \varphi \cdot \eta \mu \varphi \rightarrow F = T + w \sin^2 \varphi \rightarrow F = T + \frac{w}{2} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = w + N_{1y}' \rightarrow N = w + N_1' \sin \varphi \rightarrow N = w + w_1 \sin \varphi \cdot \sin \varphi \rightarrow N = w + w \sin^2 \varphi \rightarrow N = \frac{3W}{2} \quad (2)$$

$$\Sigma \tau_B = 0 \rightarrow F \cdot \ell \eta \mu \varphi - w \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin \varphi - N_1' \cdot (\Delta B) = 0 \rightarrow F \cdot \ell \eta \mu \varphi - w \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin \varphi - w_1 \sin \varphi \cdot x = 0 \rightarrow$$

$$F \ell - w \frac{\ell}{2} - w \cdot x = 0 \quad (3)$$

$$\text{Από (1)(2)(3)} \rightarrow T = \frac{w \cdot x}{\ell} \quad \text{και} \quad N = \frac{3W}{2}$$

Για να μην ολισθαίνει η σανίδα πάνω στο οριζόντιο επίπεδο πρέπει

$$T \leq \mu \cdot N \rightarrow \frac{w \cdot x}{\ell} \leq \mu \frac{3W}{2} \rightarrow x \leq \frac{3\mu \ell}{2}$$

Δηλαδή αν ο συντελεστής στατικής τριβής είναι $\mu = 1/2$ η τιμή της απόστασης είναι $x \leq 3\ell/4$. Αυτό σημαίνει ότι αν ο κύβος φτάσει πάνω από την απόσταση $3\ell/4$ από το άκρο B η σανίδα ολισθαίνει και η ισορροπία καταστρέφεται. Η εμπειρία λέει ότι η σκάλα στον τοίχο κινδυνεύει να ολισθήσει όταν ανεβαίνει πιο ψηλά.