

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΔΕΚ. 22 ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α: **A1:** α **A2:** γ **A3:** α **A4:** β **A5:** Λ / Σ / Σ / Λ / Σ

ΘΕΜΑ Β **B1**

Το σώμα μπορεί να χάσει επαφή σε μια θέση πάνω από την ΘΙΤ του συστήματος. Δεν χάνει επαφή όσο $N \geq 0$. Σε μια τυχαία θέση:

$$\Sigma F = -m\omega^2 y \Rightarrow N - mg = -m\omega^2 y \Rightarrow N = mg - m\omega^2 y$$

$$\text{Για το σύστημα η γωνιακή συχνότητα θα είναι } \omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = \sqrt{\frac{k}{3m}}$$

$$N \geq 0 \Rightarrow g - \omega^2 y \geq 0 \Rightarrow g \geq \frac{k}{3m} y \Rightarrow \frac{3mg}{y} \geq k$$

Στην ακραία θέση $y = d$, οπότε προκύπτει η σωστή απάντηση.

B2 Η Γη περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο σε ελλειπτική τροχιά. Η μόνη δύναμη που δέχεται η Γη είναι η βαρυτική έλξη F_g από τον Ήλιο. Η δύναμη αυτή είναι κεντρική, δηλαδή ο φορέας της περνά από τον Ήλιο, επομένως η ροπή της ως προς τον Ήλιο είναι μηδέν, $\Sigma \tau = 0$. Θεωρώντας τη Γη σημειακή μάζα σε σχέση με τον Ήλιο συμπεραίνουμε ότι η στροφορμή της, ως προς τον άξονα που περνά από τον Ήλιο και είναι κάθετος στο επίπεδο περιστροφής, παραμένει σταθερή κατά την περιστροφή της. Δηλαδή:

$$L_{\Pi} = L_A \Rightarrow$$

$$M_{\Gamma} \cdot v_{\Pi} \cdot r_{\Pi} = M_{\Gamma} \cdot v_A \cdot r_A \Rightarrow \omega_{\Pi} \cdot r_{\Pi} \cdot r_{\Pi} = \omega_A \cdot r_A \cdot r_A \Rightarrow \omega_{\Pi} = \omega_A \cdot (r_A / r_{\Pi})^2 \text{ Επομένως,}$$

$$\omega_{\Pi} = 100/81 \omega_A$$

B3

Διατήρηση της ορμής στον άξονα y

$$0 + 0 = mv'_1 \eta \mu 30 - 2mv'_2 \eta \mu 30 \Rightarrow v'_1 = 2v'_2$$

Διατήρηση της ορμής στον άξονα x

$$mv_1 = mv'_1 \sigma \nu 30 + 2mv'_2 \sigma \nu 30 \Rightarrow v_1 = 2\sqrt{3}v'_2$$

Ο ζητούμενος λόγος θα είναι:

$$\frac{K'_B}{K_A} = \frac{\frac{1}{2}2mv'^2_2}{\frac{1}{2}mv^2_1} = \frac{2v'^2_2}{v^2_1} = \frac{1}{6}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Γ για την κίνηση του σώματος Σ₂, έχουμε:

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Rightarrow 0 + m_2 g d = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gd} \Rightarrow v_2 = 4 \text{ m/s}$$

Για την ταχύτητα του σώματος Σ₁ στην κεντρική ελαστική κρούση του με το σώμα Σ₂ έχουμε:

$$v'_1 = \frac{2m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 2 \text{ m/s}$$

Όμως η ταχύτητα v'_1 είναι η μέγιστη ταχύτητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης του σώματος Σ₁, αφού βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, άρα:

$$v'_1 = \omega A_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \cdot A_1 \Rightarrow k = \frac{m_1 \cdot v'^2_1}{A_1^2} \Rightarrow k = 300 \text{ N/m}$$

Γ2. Για την ταχύτητα του σώματος Σ₂ στην κεντρική ελαστική κρούση του με το σώμα Σ₁ έχουμε:

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} = -2 \text{ m/s}$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του Σ₂ αμέσως μετά την κρούση του μέχρι το μέγιστο ύψος h που θα φτάσει και έχουμε:

$$K_{2A} + U_{2A} = K'_2 + U'_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 + 0 = 0 + m_2 g h \Rightarrow h = \frac{v'^2_2}{2g} \Rightarrow h = 0,2 \text{ m}$$

Γ3. Στη θέση που το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά το ήμισυ της μέγιστης συσπείρωσής του, δηλαδή $\Delta l = \frac{A_1}{2} = 0,1 \text{ m}$ και το σώμα κινείται προς τα δεξιά έχουμε: $x = -\frac{A_1}{2} = -0,1 \text{ m}$, η δύναμη του ελατηρίου είναι προς τα δεξιά, καθώς και η ταχύτητα του σώματος, επομένως το σώμα κινείται προς τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, πράγμα που σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μειώνεται, έτσι ο ρυθμός μεταβολής της είναι αρνητικός, άρα

$$\frac{dU_{\text{ελατ.}}}{dt} = \frac{-dW_{F_{\text{ελ}}}}{dt} = \frac{-F_{\text{ελ}} \cdot dx}{dt} = -F_{\text{ελ}} \cdot v = -k \Delta l \cdot v \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης ενέργειας στην ταλάντωση (ΑΔΕΤ), οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A_1^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m_1} \cdot (A_1^2 - x^2)} = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

οπότε από τη σχέση (1) βρίσκουμε:

$$\frac{dU_{\text{ελατ.}}}{dt} = -30\sqrt{3} \text{ J/s}$$

Γ4. Η στροφορμή $\vec{L}_2$ του σώματος Σ₂ ως προς τον άξονα $z'z$ που περνά από το σημείο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς του Σ₂ έχει φορέα τον άξονα $z'z$, με φορά από τον αναγνώστη προς την σελίδα και μέτρο:

$$L_2 = m_2 v_2 d \Rightarrow L_2 = 3,2 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

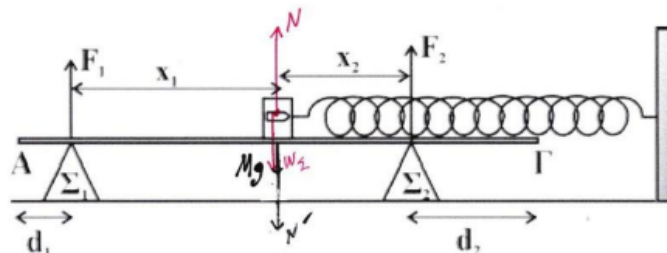
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Επειδή η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα το σύστημα θεωρείται μονωμένο, με εφαρμογή της Α.Δ.Ο : $m_2 v_0 = (m_1 + m_2) v_\Sigma \Rightarrow v_\Sigma = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$.

Άρα ο ζητούμενος λόγος είναι $\frac{Q_\theta}{K_{\beta\lambda\eta\mu}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_0^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_\Sigma^2}{\frac{1}{2} m_2 v_0^2} = \dots = \frac{17}{18}$

Δ2. Η κρούση έγινε στη Θ.Ι άρα $v_\Sigma = v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_\Sigma = \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}} A \Rightarrow A = 3\sqrt{2} m$

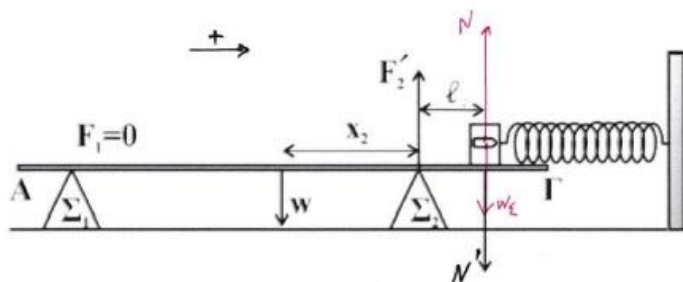
Δ3. Αμέσως μετά την κρούση η ΑΓ ισορροπεί δεχόμενη τις δυνάμεις F_1, F_2 , το βάρος Mg και την αντίδραση $N' = N = (m_1 + m_2)g$ (το συσσωμάτωμα ισορροπεί στον γ'γ).



Για τη ράβδο: $\Sigma \vec{\tau}_{(M)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\tau}_{F_1} + \vec{\tau}_{F_2} + \vec{\tau}_{Mg} + \vec{\tau}_{N'} = \vec{0} \Rightarrow -F_1 x_1 + F_2 x_2 = 0 \Rightarrow 3F_1 = 2F_2$ (1)

και $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = Mg + N' \Rightarrow F_1 + F_2 = Mg + (m_1 + m_2)g$ (2). Λύνοντας το σύστημα προκύπτει: $F_1 = 54 \text{ N}$ και $F_2 = 81 \text{ N}$

Δ4.



Το συσσωμάτωμα τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι στη θέση $x=0$ και έχει $x_2 + \ell_2 = 3m = A'$

$v_\Sigma > 0$, άρα η εξίσωση της ταλάντωσής του είναι της μορφής: $x = 3\sqrt{2}\eta\mu^{10/3} t$, όπου

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}} = 10/3 \text{ rad/s}$$

Η ράβδος οριακά εξακολουθεί να ισορροπεί (η $F_1=0$). Θα ανατραπεί όταν το συσσωμάτωμα βρεθεί εκτός στηριγμάτων.

Για τη ράβδο: $\Sigma \vec{\tau}_{(O)} = \vec{0} \Rightarrow -(m_1 + m_2)g\ell_2 + Mg x_2 = 0 \Rightarrow \ell_2 = 1m$. Άρα η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη Θ.Ι είναι $x=3m$.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση ταλάντωσης

$$3 = 3\sqrt{2}\eta\mu^{10/3} t \Rightarrow \eta\mu^{10/3} t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \eta\mu^{10/3} t = \eta\mu \frac{\pi}{4} \xrightarrow{1^\eta \text{ φορά}} t = \frac{3\pi}{40} \text{ s}$$