

Σώματα σε επαφή και Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Σε όλες τις περιπτώσεις που θα εξετάσουμε το δάπεδο είναι λείο. Επίσης τα σύμβολα των διανυσματικών μεγεθών αντιπροσωπεύουν τις αλγεβρικές τους τιμές.

A. Η επιφάνεια επαφής είναι κάθετη στη διεύθυνση της ταλάντωσης (το ένα σώμα «σπρώχνει» το άλλο).

A1. ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ – ΙΔΑΝΙΚΟ ΕΛΑΤΗΡΙΟ

Θα εξετάσουμε την κίνηση των δύο σωμάτων για όσο χρόνο παραμένουν σε επαφή μεταξύ τους. Το σώμα Σ_1 είναι δεμένο στο ελατήριο ενώ το σώμα Σ_2 απλώς ακουμπάει στο Σ_1 .

Αν θεωρήσουμε τα δύο σώματα σύστημα εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε πως όσο τα σώματα είναι σε επαφή το σύστημα αυτό κάνει τμήμα ΑΑΤ με σταθερά $D = k$ όπου k η σταθερά του ελατηρίου.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση

$$k = (m_1 + m_2)\omega^2$$

Για το σύστημα των 2 σωμάτων επίσης ισχύει:

$$\Sigma F_x = F_{\varepsilon\lambda} + F_{21} + F_{12} = F_{\varepsilon\lambda}$$

αφού οι δυνάμεις που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο είναι αντίθετες μεταξύ τους ως εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος.

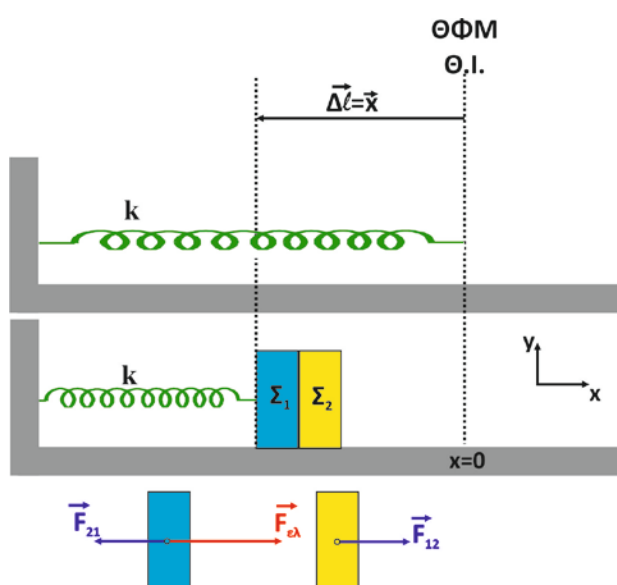
Για το χρονικό διάστημα στο οποίο τα σώματα κινούνται μαζί θα ισχύει επίσης:

$$\Sigma F_x = -Dx = -kx$$

οπότε τελικά έχουμε:

Σύστημα Σ_1 και Σ_2

$$\Sigma F_x = F_{\varepsilon\lambda} = -kx \quad (1)$$



Ας μελετήσουμε τώρα (για όσο χρόνο υπάρχει επαφή) την κίνηση του σώματος Σ_1 :

$$\Sigma F_{x,1} = F_{\varepsilon\lambda} + F_{21}$$

Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\text{Σώμα } \Sigma_1 \quad \Sigma F_{x,1} = m_1 a = m_1 (-\omega^2 x) = -m_1 \omega^2 x \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + F_{21} = -m_1 \omega^2 x \quad (2)$$

(Σημείωση: Σε κάποιες περιπτώσεις στις πανελλαδικές εξετάσεις έχει ζητηθεί η σταθερά της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 . Είναι η ποσότητα $m_1 \omega^2$ που συνήθως συμβολίζεται με D_1).

Ας μελετήσουμε τέλος (για όσο χρόνο υπάρχει επαφή) και την κίνηση του σώματος Σ_2 :

$$\Sigma F_{x,2} = F_{12}$$

Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\text{Σώμα } \Sigma_2 \quad \Sigma F_{x,2} = m_2 a = m_2 (-\omega^2 x) = -m_2 \omega^2 x \Rightarrow F_{12} = -m_2 \omega^2 x \quad (3)$$

(Σημείωση: Σε κάποιες περιπτώσεις στις πανελλαδικές εξετάσεις έχει ζητηθεί η σταθερά της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 . Είναι η ποσότητα $m_2 \omega^2$ που συνήθως συμβολίζεται με D_2).

Θα χαθεί η επαφή των δύο σωμάτων; Και αν ναι πού;

Απώλεια επαφής των δύο σωμάτων έχουμε όταν πάψει να υπάρχει δύναμη επαφής ανάμεσά τους, δηλαδή

$$F_{21} = F_{12} = 0$$

Έστω ότι συμβολίζουμε την απομάκρυνση στη θέση όπου χάνεται η επαφή με x^* .

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε τη σχέση (2) είτε τη σχέση (3). Η σχέση (3) είναι προφανώς απλούστερη και μας δίνει

$$0 = m_2 \omega^2 x^* \Rightarrow \mathbf{x^* = 0}$$

Δηλαδή η επαφή χάνεται στη Θέση Φυσικού Μήκους (ΘΦΜ) του ελατηρίου η οποία στην περίπτωση μας ταυτίζεται με τη Θέση Ισορροπίας (ΘΙ) της ταλάντωσης.

Παρατηρήσεις

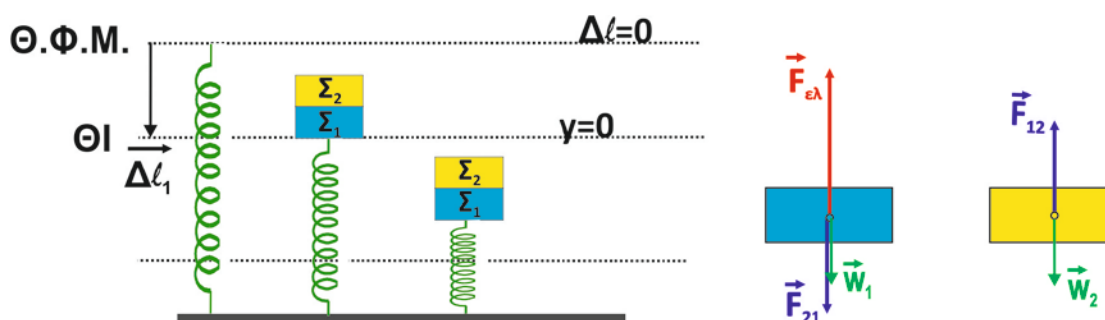
1. Το σύστημα των σωμάτων θα περάσει υποχρεωτικά από τη ΘΦΜ (αφού είναι η ΘΙ) οπότε η επαφή θα χαθεί οπωσδήποτε.
2. Μπορούμε να προβλέψουμε την απώλεια επαφής στη ΘΦΜ αφού μετά απ' αυτήν το μέτρο της ταχύτητας του Σ_1 θα αρχίσει να μειώνεται λόγω της δράσης της δύναμης από το

ελατήριο ενώ το Σ_2 δεν δέχεται οριζόντιες δυνάμεις που μπορούν να μειώσουν το μέτρο της ταχύτητάς του και θα συνεχίσει κάνοντας Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με ταχύτητα τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης.

3. Μετά την απώλεια επαφής το σώμα Σ_1 , καθώς παραμένει δεμένο στο ελατήριο, θα κάνει νέα Απλή Αρμονική Ταλάντωση η οποία:

- Θα έχει την ίδια Θέση Ισορροπίας
- Θα έχει σταθερά ταλάντωσης $D = k$
- Θα έχει διαφορετική γωνιακή συχνότητα $\omega' : k = m_1 \omega'^2$
- Θα έχει ίδια μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης
- Θα έχει διαφορετικό πλάτος αφού $u_{\max,1} = u'_{\max,1} \Rightarrow \omega A = \omega' A'$

A2. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ – ΙΔΑΝΙΚΟ ΕΛΑΤΗΡΙΟ



Η μελέτη μας και πάλι αφορά το χρονικό διάστημα για το οποίο τα σώματα παραμένουν σε επαφή μεταξύ τους. Το σώμα Σ_1 είναι δεμένο στο ελατήριο ενώ το σώμα Σ_2 απλώς ακουμπάει στο Σ_1 .

Αν θεωρήσουμε τα δύο σώματα σύστημα, εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε πως όσο τα σώματα είναι σε επαφή το σύστημα αυτό κάνει τμήμα ΑΑΤ με σταθερά $D = k$ όπου k η σταθερά του ελατηρίου.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης αυτής υπολογίζεται από τη σχέση

$$k = (m_1 + m_2)\omega^2$$

Για το σύστημα των 2 σωμάτων επίσης ισχύει:

$$\Sigma F = F_{\varepsilon\lambda} + F_{21} + F_{12} + w_1 + w_2 = F_{\varepsilon\lambda} + w_1 + w_2$$

αφού οι δυνάμεις που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο είναι αντίθετες μεταξύ τους ως εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος.

Για το χρονικό διάστημα που τα σώματα κινούνται μαζί θα ισχύει επίσης:

$$\Sigma F = -Dy = -ky$$

οπότε τελικά έχουμε:

Σύστημα Σ_1 και Σ_2

$$\Sigma F = F_{ελ} + w_1 + w_2 = -ky \quad (1)$$

Ας μελετήσουμε τώρα (για όσο χρόνο υπάρχει επαφή) την κίνηση του σώματος Σ_1 :

$$\Sigma F_1 = F_{ελ} + F_{21} + w_1$$

Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει:

Σώμα Σ_1

$$\Sigma F_1 = m_1 a = m_1(-\omega^2 y) = -m_1 \omega^2 y \Rightarrow F_{ελ} + F_{21} + w_1 = -m_1 \omega^2 y \quad (2)$$

(Σημείωση: Σε κάποιες περιπτώσεις στις πανελλαδικές εξετάσεις έχει ζητηθεί η σταθερά της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 . Είναι η ποσότητα $m_1 \omega^2$ που συνήθως συμβολίζεται με D_1).

Ας μελετήσουμε τέλος (για όσο χρόνο υπάρχει επαφή) και την κίνηση του σώματος Σ_2 :

$$\Sigma F_2 = F_{12} + w_2$$

Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει:

Σώμα Σ_2

$$\Sigma F_2 = m_2 a = m_2(-\omega^2 y) = -m_2 \omega^2 y \Rightarrow F_{12} + w_2 = -m_2 \omega^2 y \quad (3)$$

(Σημείωση: Σε κάποιες περιπτώσεις στις πανελλαδικές εξετάσεις έχει ζητηθεί η σταθερά της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 . Είναι η ποσότητα $m_2 \omega^2$ που συνήθως συμβολίζεται με D_2).

Θα χαθεί η επαφή των δύο σωμάτων; Και αν ναι πού;

Απώλεια επαφής των δύο σωμάτων έχουμε όταν πάψει να υπάρχει δύναμη επαφής ανάμεσά τους, δηλαδή

$$F_{21} = F_{12} = 0$$

Έστω ότι συμβολίζουμε την απομάκρυνση στη θέση όπου χάνεται η επαφή με y^* .

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε τη σχέση (2) είτε τη σχέση (3). Η σχέση (3) είναι απλούστερη και μας δίνει

$$0 + w_2 = -m_2 \omega^2 y^* \Rightarrow y^* = -\frac{g}{\omega^2} \Rightarrow y^* = -\frac{(m_1 + m_2)g}{k}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και τη σχέση $k = (m_1 + m_2)\omega^2$

Η παραμόρφωση του ελατηρίου Δl_1 μέχρι τη Θέση Ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων είναι:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} + w_1 + w_2 = 0 \Rightarrow -k\Delta l_1 - (m_1 + m_2)g = 0 \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$$

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta l_1}$ και $\overrightarrow{y^*}$ έχουν αντίθετες αλγεβρικές τιμές, δηλαδή είναι αντίθετα μεταξύ τους. Επίσης το ένα διάνυσμα ξεκινά εκεί που τελειώνει το άλλο. Επομένως η θέση απώλειας επαφής είναι και πάλι η Θέση Φυσικού Μήκους του ελατηρίου.

Παρατηρήσεις

1. Το σύστημα των σωμάτων δεν περνά υποχρεωτικά από τη ΘΦΜ οπότε δεν είναι βέβαιο ότι η επαφή θα χαθεί. Αυτό εξαρτάται από το πλάτος της ταλάντωσης. **Η επαφή χάνεται μόνο αν ισχύει $A > |\Delta l_1|$.**
2. Μπορούμε να προβλέψουμε την απώλεια επαφής στη ΘΦΜ μια και στη θέση αυτή το βάρος προσδίδει σε κάθε σώμα επιτάχυνση g , αλλά το σώμα που είναι δεμένο στο ελατήριο θα έχει επιπλέον επιτάχυνση με φορά προς τα κάτω λόγω της δύναμης που δέχεται από το ελατήριο.
3. Μετά την απώλεια επαφής (εφόσον υπάρξει) το σώμα Σ_2 , θα κάνει κατακόρυφη βολή με αρχική ταχύτητα της οποίας το μέτρο (έστω u_1) μπορεί να προσδιοριστεί με εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)u_1^2 + \frac{1}{2}ky^{*2} = \frac{1}{2}kA^2$$

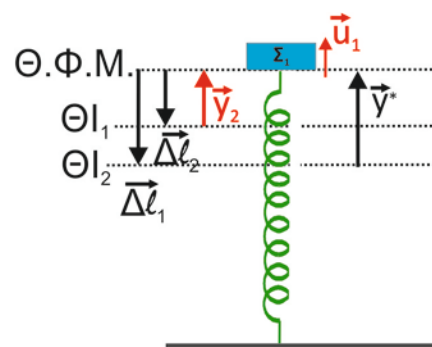
4. Μετά την απώλεια επαφής (εφόσον υπάρξει) το σώμα Σ_1 , καθώς παραμένει δεμένο στο ελατήριο, θα κάνει νέα Απλή Αρμονική Ταλάντωση η οποία:

- Θα έχει διαφορετική Θέση Ισορροπίας
- Θα έχει σταθερά ταλάντωσης $D = k$
- Θα έχει διαφορετική γωνιακή συχνότητα $\omega' : k = m_1 \omega'^2$
- Θα έχει πλάτος ταλάντωσης A' που υπολογίζεται με εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας της ταλάντωσης, για την νέα ταλάντωση του Σ_1 (στο σχήμα η νέα θέση ισορροπίας συμβολίζεται με Θ_1 ενώ η παλιά με Θ_2) :

$$\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}ky_2^2 = \frac{1}{2}kA'^2$$

Η απομάκρυνση y_2 είναι αντίθετη της παραμόρφωσης Δl_1 του ελατηρίου όταν το άκρο του βρίσκεται στη Θ_1 : $y_2 = -\Delta l_1 = -\frac{m_1 g}{k}$ (το πρόσημο – δείχνει απλώς ότι η αλγεβρική τιμή της y_2 έχει αντίθετο πρόσημο από την αλγεβρική τιμή της g)

Εννοείται πως πρέπει να απομακρυνθεί με κάποιον τρόπο το σώμα Σ_2 ώστε να μην έχουμε κρούση των δύο σωμάτων κατά την κάθοδό του.



A3. ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΕ ΠΛΑΓΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟ– ΙΔΑΝΙΚΟ ΕΛΑΤΗΡΙΟ

Ισχύουν όσα αναφέραμε και στην κατακόρυφη ταλάντωση με μόνη διαφορά ότι τα βάρη πρέπει να αντικατασταθούν από τις συνιστώσες τους που είναι παράλληλες με το πλάγιο επίπεδο, δηλαδή $w \rightarrow w \eta \mu \varphi$ όπου φ η γωνία κλίσης του πλαιγίου επιπέδου.

Πάντως, ως συμπέρασμα, ας αναφέρουμε ότι η απώλεια επαφής, αν συμβεί, θα συμβεί στη Θέση Φυσικού Μήκους του ελατηρίου.

B. Η επιφάνεια επαφής είναι παράλληλη στη διεύθυνση της ταλάντωσης (το ένα σώμα «κάθεται» πάνω στο άλλο).

B1. ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ – ΙΔΑΝΙΚΟ ΕΛΑΤΗΡΙΟ

Θα εξετάσουμε την κίνηση των δύο σωμάτων υποθέτοντας ότι το ένα σώμα δεν ολισθαίνει σε σχέση με το άλλο. Το σώμα Σ_1 είναι δεμένο στο ελατήριο ενώ το σώμα Σ_2 απλώς ακουμπάει στο Σ_1 .

Αν θεωρήσουμε τα δύο σώματα σύστημα εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε πως το σύστημα αυτό κάνει ΑΑΤ με σταθερά $D = k$ όπου k η σταθερά του ελατηρίου.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση

$$k = (m_1 + m_2)\omega^2$$

Για το σύστημα των 2 σωμάτων ισχύει:

$$\Sigma F_x = F_{ελ} + T_{\sigma\tau 21} + T_{\sigma\tau 12} = F_{ελ}$$

αφού οι δυνάμεις στατικής τριβής που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο είναι αντίθετες μεταξύ τους ως εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος.

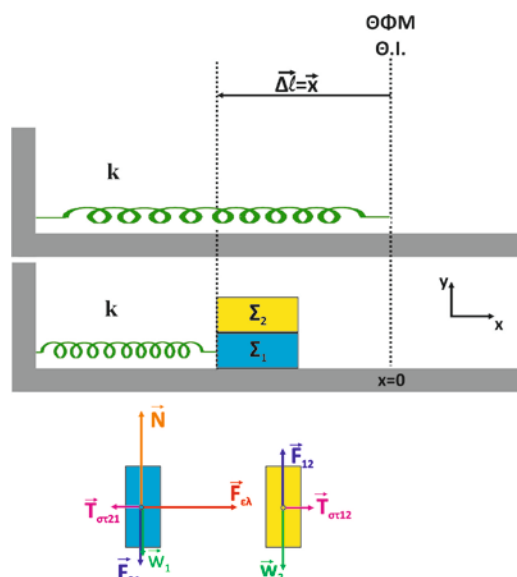
Ισχύει επίσης:

$$\Sigma F_x = -Dx = -kx$$

οπότε τελικά έχουμε:

Σύστημα Σ_1 και Σ_2

$$\Sigma F_x = F_{ελ} = -kx \quad (1)$$



Ας μελετήσουμε τώρα την κίνηση του σώματος Σ_1 :

$$\Sigma F_{x,1} = F_{\varepsilon\lambda} + T_{\sigma\tau 21}$$

Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\text{Σώμα } \Sigma_1 \quad \Sigma F_{x,1} = m_1 a = m_1 (-\omega^2 x) = -m_1 \omega^2 x \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + T_{\sigma\tau 21} = -m_1 \omega^2 x \quad (2)$$

(Σημείωση: Σε κάποιες περιπτώσεις στις πανελλαδικές εξετάσεις έχει ζητηθεί η σταθερά της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 . Είναι η ποσότητα $m_1 \omega^2$ που συνήθως συμβολίζεται με D_1).

Ας μελετήσουμε τέλος και την κίνηση του σώματος Σ_2 :

$$\Sigma F_{x,2} = T_{\sigma\tau 12}$$

Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\text{Σώμα } \Sigma_2 \quad \Sigma F_{x,2} = m_2 a = m_2 (-\omega^2 x) = -m_2 \omega^2 x \Rightarrow T_{\sigma\tau 12} = -m_2 \omega^2 x \quad (3)$$

(Σημείωση: Σε κάποιες περιπτώσεις στις πανελλαδικές εξετάσεις έχει ζητηθεί η σταθερά της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 . Είναι η ποσότητα $m_2 \omega^2$ που συνήθως συμβολίζεται με D_2).

Συνθήκη μη ολίσθησης

Για να μην υπάρχει ολίσθηση μεταξύ των σωμάτων θα πρέπει το μέτρο της στατικής τριβής που απαιτείται να μην υπερβαίνει το μέτρο της μέγιστης στατικής τριβής, δηλαδή:

$$|T_{\sigma\tau 12}| \leq |T_{\sigma\tau \max}| \Rightarrow m_2 \omega^2 |x| \leq \mu |F_{12}| \Rightarrow m_2 \omega^2 |x| \leq \mu m_2 |g| \Rightarrow \omega^2 |x| \leq \mu |g|$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη συνθήκη ισορροπίας του Σ_2 στον γ-άξονα: $|F_{12}| = m_2 |g|$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

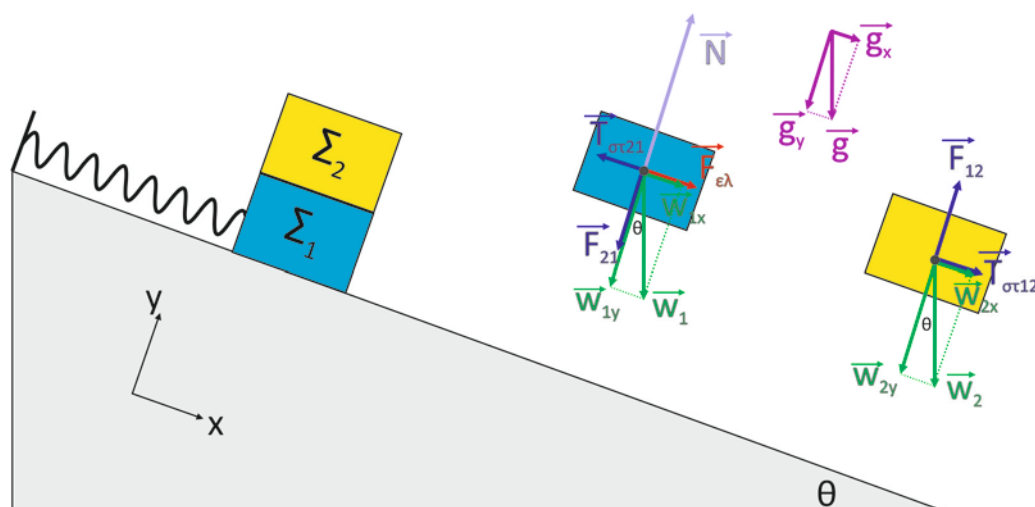
1. Το πλάτος A της ταλάντωσης είναι δεδομένο

Για να μην υπάρχει ολίσθηση θα πρέπει να ισχύει: $\mu \geq \frac{\omega^2 A}{|g|}$ δηλαδή η ελάχιστη τιμή του συντελεστή τριβής ώστε να μην υπάρξει ολίσθηση είναι: $\mu_{\min} = \frac{\omega^2 A}{|g|}$

2. Ο συντελεστής τριβής μ είναι δεδομένος

Για να μην υπάρχει ολίσθηση θα πρέπει να ισχύει: $|x| \leq \frac{\mu |g|}{\omega^2}$ δηλαδή το μέγιστο επιτρεπόμενο πλάτος ταλάντωσης είναι $A = \frac{\mu |g|}{\omega^2}$

B1. ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΕ ΠΛΑΓΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟ – ΙΔΑΝΙΚΟ ΕΛΑΤΗΡΙΟ



Θα εξετάσουμε την κίνηση των δύο σωμάτων υποθέτοντας ότι το ένα σώμα δεν ολισθαίνει σε σχέση με το άλλο. Το σώμα Σ_1 είναι δεμένο στο ελατήριο ενώ το σώμα Σ_2 απλώς ακουμπάει στο Σ_1 .

Αν θεωρήσουμε τα δύο σώματα σύστημα εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε πως το σύστημα αυτό κάνει ΑΑΤ με σταθερά $D = k$ όπου k η σταθερά του ελατηρίου.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση

$$k = (m_1 + m_2)\omega^2$$

Για το σύστημα των 2 σωμάτων ισχύει:

$$\Sigma F_x = F_{\varepsilon\lambda} + w_{1x} + w_{2x} + T_{\sigma\tau 21} + T_{\sigma\tau 12} = F_{\varepsilon\lambda} + w_{1x} + w_{2x}$$

αφού οι δυνάμεις στατικής τριβής που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο είναι αντίθετες μεταξύ τους ως εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος.

Ισχύει επίσης:

$$\Sigma F_x = -Dx = -kx$$

οπότε τελικά έχουμε:

Σύστημα Σ_1 και Σ_2

$$\Sigma F_x = F_{\varepsilon\lambda} + w_{1x} + w_{2x} = -kx \quad (1)$$

Ας μελετήσουμε τώρα την κίνηση του σώματος Σ_1 :

$$\Sigma F_{x,1} = F_{\varepsilon\lambda} + w_{1x} + T_{\sigma\tau 21}$$

Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\text{Σώμα } \Sigma_1 \quad \Sigma F_{x,1} = m_1 a = m_1 (-\omega^2 x) = -m_1 \omega^2 x \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + w_{1x} + T_{\sigma\tau 21} = -m_1 \omega^2 x \quad (2)$$

(Σημείωση: Σε κάποιες περιπτώσεις στις πανελλαδικές εξετάσεις έχει ζητηθεί η σταθερά της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 . Είναι η ποσότητα $m_1 \omega^2$ που συνήθως συμβολίζεται με D_1).

Ας μελετήσουμε τέλος και την κίνηση του σώματος Σ_2 :

$$\Sigma F_{x,2} = w_{2x} + T_{\sigma\tau 12}$$

Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\text{Σώμα } \Sigma_2 \quad \Sigma F_{x,2} = m_2 a = m_2 (-\omega^2 x) = -m_2 \omega^2 x \Rightarrow w_{2x} + T_{\sigma\tau 12} = -m_2 \omega^2 x \quad (3)$$

(Σημείωση: Σε κάποιες περιπτώσεις στις πανελλαδικές εξετάσεις έχει ζητηθεί η σταθερά της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 . Είναι η ποσότητα $m_2 \omega^2$ που συνήθως συμβολίζεται με D_2).

Συνθήκη μη ολίσθησης

Για να μην υπάρχει ολίσθηση μεταξύ των σωμάτων θα πρέπει το μέτρο της στατικής τριβής που απαιτείται να μην υπερβαίνει το μέτρο της μέγιστης στατικής τριβής, δηλαδή:

$$\begin{aligned} |T_{\sigma\tau 12}| &\leq |T_{\sigma\tau \max}| \stackrel{(3)}{\Rightarrow} |-m_2 \omega^2 x - w_{2x}| \leq \mu |F_{12}| \Rightarrow |-m_2 \omega^2 x - w_{2x}| \leq \mu m_2 |g_y| \\ &\Rightarrow |-\omega^2 x - g_x| \leq \mu |g_y| \Rightarrow |\omega^2 x + g_x| \leq \mu |g_y| \quad (4) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη συνθήκη ισορροπίας του Σ_2 στον γ-άξονα: $|F_{12}| = m_2 |g_y|$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

1. Το πλάτος A της ταλάντωσης είναι δεδομένο

Για να μην υπάρχει ολίσθηση θα πρέπει να ισχύει: $\mu \geq \frac{|\omega^2 x + g_x|}{|g_y|}$

Η x-συνιστώσα του διανύσματος της επιτάχυνσης της βαρύτητας (g_x) κατευθύνεται προς τα κάτω οπότε ο αριθμητής του κλάσματος παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή του όταν η απομάκρυνση x είναι “όσο πιο κάτω” γίνεται δηλαδή στην κάτω ακραία θέση και έτσι είναι

τελικά: $\mu_{\min} = \frac{\omega^2 A + |g_x|}{|g_y|}$

2. Ο συντελεστής τριβής μ είναι δεδομένος

Η σχέση (4) δίνει:

$$-\mu|g_y| \leq \omega^2 x + g_x \leq \mu|g_y| \Rightarrow -\mu|g_y| - g_x \leq \omega^2 x \leq \mu|g_y| - g_x \Rightarrow$$

$$\frac{-\mu|g_y| - g_x}{\omega^2} \leq x \leq \frac{\mu|g_y| - g_x}{\omega^2}$$

Το μέγιστο επιτρεπόμενο πλάτος είναι η μικρότερη τιμή από τις απόλυτες τιμές των δύο άκρων της ανισότητας δηλαδή:

$$A_{max} = \left| \frac{\mu|g_y| - |g_x|}{\omega^2} \right|$$