

Δ ΘΕΜΑΤΑ

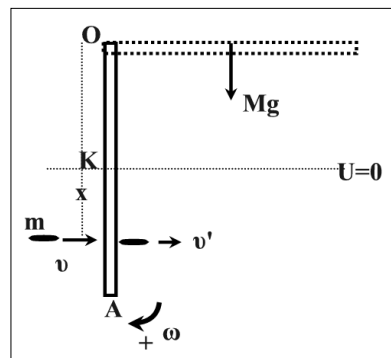
Δ.1 Ομογενής ράβδος μήκους $d=10/3\text{m}$ και μάζας, M κρέμεται ελεύθερα από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το πάνω άκρο της O . Φέρνουμε τη ράβδο σε οριζόντια θέση και την αφήνουμε ελεύθερη να περιστραφεί χωρίς τριβές. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I_{(O)}=md^2/3$ και το $g=10\text{m/s}^2$ και το $M=1,8\text{kg}$.

A. Πόσο είναι ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερη;

B. Πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή που φτάνει στην κατακόρυφη θέση;

Γ. Τη στιγμή που η ράβδος γίνεται κατακόρυφη, βλήμα μάζας $m=0,1\text{kg}$ κινούμενο οριζόντια και σε αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα $v=200\text{m/s}$ χτυπάει τη ράβδο και αφού τη διαπεράσει βγαίνει με οριζόντια ταχύτητα $v'=100\text{m/s}$. Σε πόση απόσταση από τον άξονα περιστροφής πρέπει να γίνει αυτή η κρούση ώστε μετά την κρούση η ράβδος να μείνει ακίνητη;

Δ. Αν η κρούση διαρκεί $dt=0,02\text{s}$ πόσο είναι το μέτρο της μέσης ροπής που άσκησε το βλήμα στη ράβδο κατά τη διάρκεια της κρούσης;



Λύση

A. Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας είναι η γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\psi}$. Από το 2^ο νόμο

$$\text{Newton: } \Sigma\tau = I_{(O)}\alpha_{\gamma\psi} \rightarrow Mg\frac{d}{2} = \frac{Md^2}{3}\alpha_{\gamma\psi} \rightarrow \alpha_{\gamma\psi} = 4,5\text{rad/s}^2$$

B. Για τη γωνιακή ταχύτητα ω , γράφουμε ΑΔΜΕ για τη ράβδο από την οριζόντια στην κατακόρυφη θέση με στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας βαρύτητας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το μέσον K της ράβδου στην κατακόρυφη θέση ($U=0$).

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \rightarrow Mg\frac{d}{2} = \frac{I_{(O)}\omega^2}{2} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{d}} \rightarrow \omega = 3\text{rad/s}$$

Γ. Έστω x η απόσταση του σημείου κρούσης από τον άξονα περιστροφής της ράβδου (O). Το σύστημα βλήματος και ράβδου δεν δέχεται εξωτερικές ροπές τη στιγμή της κρούσης διότι η ροπή του βάρους τους ως προς τον άξονα (O) είναι μηδέν, ($\Sigma\tau_{\epsilon\chi}=0$). Άρα η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή κατά την κρούση:

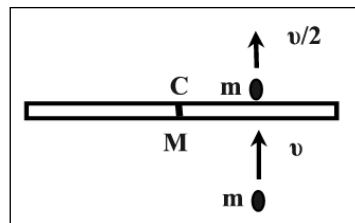
Θεωρώ θετική της φορά περιστροφής της ράβδου.

$$L_{\pi\rho\sigma} = L_{\mu\epsilon\tau\alpha} \rightarrow I_{(O)}\omega - mvx = 0 - mv'x \rightarrow x = \frac{Md^2\omega}{3m(v-v')} \rightarrow x = 2\text{m}$$

Δ. Η ροπή που ασκεί το βλήμα στη ράβδο κατά την κρούση είναι αντίθετη με τη ροπή που δέχεται η ράβδος από το βλήμα σύμφωνα με το νόμο δράσης – αντίδρασης. Το μέτρο της ροπής αυτής θα ισούται με το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου κατά την κρούση.

$$\tau = \frac{|\Delta L_{\rho\alpha\beta}|}{\Delta t} = \frac{L_{\rho\alpha\beta,\mu\epsilon\tau\alpha} - L_{\rho\alpha\beta,\pi\rho\sigma}}{\Delta t} = \frac{0 - I_{(O)}\omega}{\Delta t} = -\frac{Md^2\omega}{3\Delta t} \rightarrow \tau = -10^3\text{Nm}$$

Α.2 Πρισματική ομογενής ράβδος μήκους $L=1\text{m}$ και μάζας $M=1\text{kg}$ ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Βλήμα μάζας $m=0,1\text{kg}$ κινείται παράλληλα με το επίπεδο με ταχύτητα $v=100\text{m/s}$ και σε διεύθυνση κάθετη στο μήκος της ράβδου. Το βλήμα συγκρούεται κάθετα στη ράβδο σε απόσταση $x=1/4\text{m}$ από το κέντρο της και βγαίνει σε χρόνο $dt=1/1200\text{s}$ με ταχύτητα $v'=v/2$ στην ίδια διεύθυνση με την ταχύτητα εισόδου. Μετά την κρούση η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας της αλλά και να μεταφέρεται χωρίς τριβές. Να βρεθούν.



A. Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά την κρούση.

B. Η κινητική ενέργεια της ράβδου μετά την κρούση.

Γ. Το μέτρο της ροπής που δέχτηκε η ράβδος ως προς το κέντρο μάζας της λόγω κρούσης στο χρονικό διάστημα dt .

Δ. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα λόγω κρούσης.

Ε. Η μετατόπιση του κέντρου μάζας C σε χρόνο $\Delta t=10\text{s}$ και ο αριθμός των περιστροφών της ράβδου στον ίδιο χρόνο 10s . Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτήν $I=ML^2/12$.

Λύση

A. Το βλήμα εισέρχεται με ταχύτητα, v και βγαίνει με v' ενώ η ράβδος αποκτά αμέσως μετά την κρούση μεταφορική ταχύτητα, V και γωνιακή ταχύτητα, ω . Στο απομονωμένο σύστημα «ράβδου – βλήματος» ισχύουν ταυτόχρονα η αρχή διατήρησης στροφορμής και η αρχή διατήρησης της ορμής.

AΔ στροφορμής: $L_{\text{αρχ}}=L_{\text{τελ}} \rightarrow m v x = m v' x + I \omega \rightarrow \omega = 15 \text{ rad/s}$.

B. **AΔ** ορμής: $p_{\text{αρχ}}=p_{\text{τελ}} \rightarrow m v = m v' + M V \rightarrow V = 5 \text{ m/s}$.

$K_{\text{ραβδου}} = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M V^2 \rightarrow K_{\text{ραβδου}} = 21,875 \text{ J}$

Γ. Η ροπή που δέχεται η ράβδος από το χτύπημα του βλήματος ισούται με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου.

$$\tau_{\text{ραβ}} = \frac{dL_{\text{ραβ}}}{dt} = \frac{I\omega - 0}{dt} \rightarrow \tau_{\text{ραβ}} = 1500 \text{ Nm}$$

Δ. $K_{\text{προ}} = \frac{1}{2} m v^2 = 500 \text{ J}$

$K_{\text{μετα}} = K_{\text{ραβδου}} + K_{\text{βλήματος}} = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v'^2 = 21,875 \text{ J} + 125 \text{ J} \rightarrow K_{\text{μετα}} = 146,875 \text{ J}$

Η θερμότητα λόγω κρούσης είναι η απόλυτη τιμή της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος πριν και μετά την κρούση:

$|\Delta K| = |K_{\text{μετα}} - K_{\text{προ}}| = 353,125 \text{ J}$

$$\frac{\Delta K}{K_{\text{προ}}} 100\% = \frac{353,125}{500} 100\% \rightarrow \frac{\Delta K}{K_{\text{προ}}} 100\% = 70,625\%$$

Ε. Το κέντρο μάζας μετά την κρούση έχει ταχύτητα, V . Άρα: $\Delta x = V \Delta t = 5 \text{ m/s} \cdot 10 \text{ s} \rightarrow \Delta x = 50 \text{ m}$

Μετά την κρούση η ράβδος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα, ω και σε χρόνο $\Delta t=10\text{s}$ διαγράφει γωνία: $\Delta \theta = \omega \cdot \Delta t = 15 \text{ rad/s} \cdot 10 \text{ s} \rightarrow \Delta \theta = 150 \text{ rad}$

Άρα το πλήθος των περιστροφών είναι: $N = \frac{\Delta \theta}{2\pi} = \frac{150}{2\pi} \rightarrow N = 75/\pi$ στροφές

Δ.3 Μια κατακόρυφη ράβδος μήκους $(OA)=\ell=0,3\text{m}$, έχει μάζα $M=3\text{kg}$ είναι αρχικά ακίνητη και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το άκρο της O . Ροπή αδράνειας της ράβδου $I_O=M\ell^2/3$. Σημειακό βλήμα μάζας $m=1\text{kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v_0=3\sqrt{5}\text{m/s}$ και σφηνώνεται ακαριαία στο ελεύθερο άκρο της ράβδου. Να υπολογιστούν:

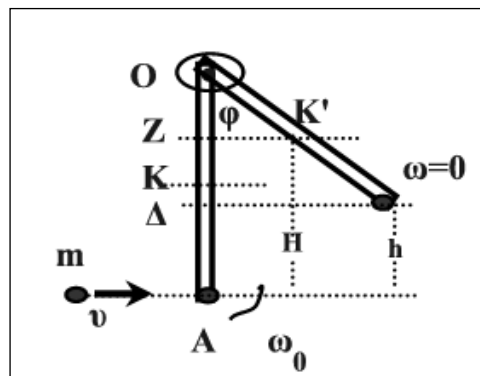
A. Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος – βλήμα αμέσως μετά την κρούση.

B. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος που μεταφέρθηκε στη ράβδο λόγω κρούσης

Γ. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα κατά την κρούση.

Δ. Τη μέγιστη γωνία εκτροπής της ράβδου από την κατακόρυφη θέση.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



Λύση

A. Από τη διατήρηση της στροφορμής του συστήματος κατά την κρούση:

$$L_{\text{προ}}=L_{\text{μετ}} \rightarrow mv \cdot \ell = I_{O\lambda(O)} \cdot \omega_0 \rightarrow \omega_0 = 5\sqrt{5}\text{rad/s}$$

$$\text{Όπου: } I_{O\lambda(O)} = I_p + m\ell^2 = I_{\text{cm}} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m\ell^2 = \frac{M\ell^2}{12} + M\frac{\ell^2}{4} + m\ell^2 = 0,18\text{kgm}^2$$

B. Η κινητική ενέργεια του βλήματος πριν την κρούση: $K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = 22,5\text{J}$,

Η κινητική ενέργεια της ράβδου μετά την κρούση: $K_p = \frac{1}{2}I_p\omega_0^2 = 5,625\text{J}$

Το ποσοστό της ενέργειας του m που πήγε στη ράβδο: $\frac{K_p}{K_0}100\% = \frac{5,625}{22,5}100\% = 25\%$

Γ. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα, αντιστοιχεί στην απόλυτη τιμή του ποσοστού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση:

$$\frac{|\Delta K|}{K_{\text{προ}}}100\% = \frac{|\frac{1}{2}I_{O\lambda}\omega_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2|}{\frac{1}{2}mv_0^2} = 50\%$$

Δ. Γράφω την ΑΔΜΕ για το συσσωμάτωμα μετά την κρούση από την αρχική κατακόρυφη θέση μέχρι τη θέση όπου υποθέτω ότι η ράβδος σταματάει στιγμιαία ($\omega=0$). Η γωνία μεταξύ των δύο θέσεων είναι η ζητούμενη φ .

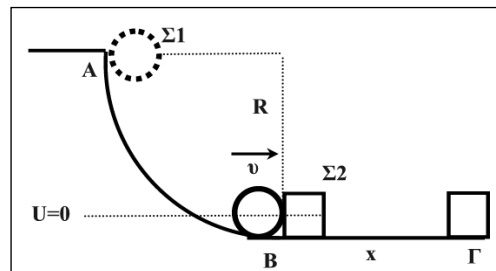
$$E_a = K_a + U_a = \frac{1}{2}I_{O\lambda}\omega_0^2 + Mg\frac{\ell}{2} \quad (1)$$

$$E_\tau = K_\tau + U_\tau = 0 + mgh + Mgh \quad (2)$$

$$H = (OA) - (OZ) = \ell - \frac{\ell}{2}\sin\varphi \quad \text{και} \quad h = (OA) - (OD) = \ell - \ell\sin\varphi \quad (3)$$

$$E_a = E_\tau \rightarrow \frac{1}{2}I_{O\lambda}\omega_0^2 + Mg\frac{\ell}{2} = mg(\ell - \ell\sin\varphi) + Mg(\ell - \ell\sin\varphi) \rightarrow \dots \rightarrow \sin\varphi = -0,5 \rightarrow \varphi = 120^\circ$$

Δ.4 Από την κορυφή ενός κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου, ακτίνας $R=2\text{m}$ αφήνεται να κινηθεί μια σφαίρα Σ_1 μάζας $m_1=2\text{kg}$. Η σφαίρα αρχικά ολισθαίνει για λίγο, ενώ στη συνέχεια κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και φτάνοντας στη βάση του επιπέδου, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με κύβο Σ_2 , μάζας $m_2=1\text{kg}$ και ακμής $d=2r$, όπου $r=0,2\text{m}$ η ακτίνα της σφαίρας. Μετά την κρούση ο κύβος Σ_2 κινείται στο οριζόντιο επίπεδο και διανύει απόσταση $B\Gamma=x=4\text{m}$, μέχρι να σταματήσει εξαιτίας της τριβής ολίσθησης. Δίνεται ο συντελεστής τριβής μεταξύ του κύβου Σ_2 και του επιπέδου, $\mu=0,2$ και $g=10\text{m/s}^2$. Κατά τη διάρκεια της κρούσης δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ σφαίρας-κύβου.



A. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του κύβου Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

B. Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια της σφαίρας, ελάχιστα πριν την κρούση.

Γ. Να υπολογιστεί το ποσοστό της αρχικής δυναμικής ενέργειας της σφαίρας, το οποίο μετατρέπεται σε θερμική, κατά τη διάρκεια της ολίσθησής της στο τεταρτοκύκλιο. Θεωρείστε μηδενική τη δυναμική της ενέργεια, ελάχιστα πριν την κρούση (σημείο, B).

Δ. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας όταν θα συγκρουστεί και πάλι με τον κύβο Σ_2 . Θεωρούμε ότι η σφαίρα συνεχίζει την κύλιση χωρίς ολίσθηση και στο οριζόντιο επίπεδο.

Η ροπή αδράνειας της σφαίρας είναι ίση με $I=0,4\text{m}r^2$.

Λύση

A. Από το ΘΜΚΕ για την ολίσθηση του Σ_2 υπολογίζω την ταχύτητα του κύβου αμέσως μετά την κρούση: $W_T = \Delta K_2 \rightarrow -\mu m_2 g x = -\frac{1}{2} m_2 V_2^2 \rightarrow V_2 = 4\text{m/s}$.

B. Η κρούση είναι ελαστική κεντρική με $v_2=0$. Άρα ισχύουν:

$$V_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_1 \rightarrow v_1 = 3\text{m/s}, \quad V_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} v_1 \rightarrow V_1 = 1\text{m/s}$$

Η σφαίρα κυλίεται (XO) πριν την κρούση, άρα $K_{1\pi\rho} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2 = \frac{7}{10} m_1 v_1^2 \rightarrow K_{1\pi\rho} = 12,6\text{J}$

Γ. Η αρχική δυναμική ενέργεια της σφαίρας στο σημείο A είναι $U = m_1 g (R-r) = 36\text{J}$.

Γράφω ΘΜΚΕ για τη σφαίρα από το A μέχρι B μόλις πριν την κρούση όπου η σφαίρα έχει κινητική ενέργεια $K_{1\pi\rho}$ και δυναμική ενέργεια μηδέν, για να υπολογίσω το έργο της τριβής ολίσθησης.

$$W_w + W_T = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \rightarrow m_1 g (R-r) + W_T = K_{1\pi\rho} \rightarrow W_T = -23,4\text{J} \rightarrow Q = 23,4\text{J}$$

$$\pi\% = \frac{Q}{U} 100\% = \frac{23,4}{36} 100\% \rightarrow \pi\% = 65\%$$

Δ. Τα δύο σώματα ξεκινάνε μαζί από το B το Σ_2 με $V_2=4\text{m/s}$ και η Σ_1 με $V_1=1\text{m/s}$. Η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα V_1 , ενώ ο κύβος επιβραδύνεται με επιβράδυνση,

$\alpha = \frac{T}{m} = \frac{\mu m g}{m} = \mu g = 0,2 \cdot 10 = 2\text{m/s}^2$. Πρέπει να διερευνήσουμε πότε θα συναντηθούν. Όταν ο κύβος θα έχει σταματήσει ή όταν θα είναι εν κινήσει. Για να σταματήσει ο Σ_2 θέλει χρόνο $t_{\text{stop}} = V_2/\alpha = 2\text{s}$. Για να συναντηθούν εν κινήσει θέλουν χρόνο t που τον υπολογίζουμε από την κινηματική:

$$x_1 = x_2 \rightarrow V_1 t = V_2 t - \frac{1}{2} \alpha t^2 \rightarrow t = 3\text{s}. \text{ Άρα θα συγκρουστούν και πάλι όταν ο } \Sigma_2 \text{ θα έχει σταματήσει δηλαδή στα } 2\text{s}.$$

Η κρούση είναι ελαστική με τον ακίνητο κύβο και συνεπώς

$$V_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} V_1 \rightarrow V_1' = 1/3 \text{ m/s}$$

Α.5 Η ράβδος, $OA=L$ του σχήματος έχει μάζα $M=3\text{kg}$, μήκος $L=2\text{m}$, βάρος $w=Mg$, είναι ομογενής και μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της O . Η ράβδος στηρίζεται με τη βοήθεια νήματος, $ΑΛ$, που είναι δεμένο στο άλλο άκρο της A έτσι ώστε $\angle OΛ = \varphi = 60^\circ$

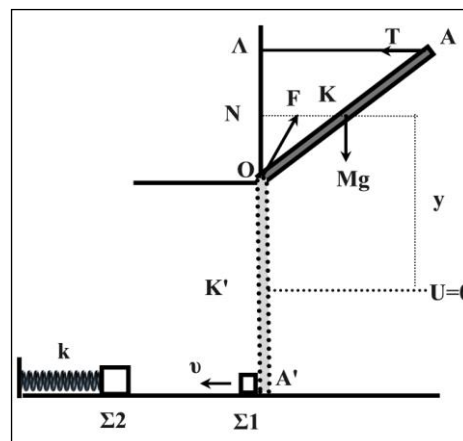
Α. Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης, T , που ασκείται από το νήμα στη ράβδο.

Β. Κόβουμε το νήμα και η ράβδος αρχίζει να στρέφεται γύρω από τον άξονα. Να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση τη στιγμή που η ράβδος ξεκινάει.

Γ. Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν γίνεται κατακόρυφη.

Δ. Τη χρονική στιγμή που γίνεται κατακόρυφη συγκρούεται με σώμα Σ_1 , μάζας $m_1=1\text{kg}$ που ήταν ακίνητο και μετά σταματάει ακαριαία. Να εξετάσετε αν η κρούση είναι ελαστική.

Ε. Το σώμα, Σ_1 μετά την κρούση εκτοξεύεται οριζόντια, κινείται χωρίς τριβές και συγκρούεται πλαστικά με σώμα Σ_2 , μάζας $m_2=2\text{kg}$ που είναι προσαρμοσμένο σε ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$ το οποίο έχει το φυσικό του μήκος. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα με το ελατήριο κάνουν ΑΑΤ. Να βρεθεί το πλάτος τους, A . Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας, $I = ML^2/12$ και $g=10\text{m/s}^2$.



Λύση

Α. Η ράβδος ισορροπεί υπό την επίδραση του βάρους w , της τάσης T και της F από τον άξονα.

$$\Sigma \tau_O = 0 \rightarrow T(O\Lambda) - w(KN) = 0 \rightarrow TL \sin \varphi - Mg(OK) \eta \mu \varphi = 0 \rightarrow \dots \rightarrow T = Mg\sqrt{3}/8 \rightarrow T = 3,75\sqrt{3}\text{N}$$

Β. $I_O = I_K + M(L/2)^2 = ML^2/3 \rightarrow I_O = 4\text{kgm}^2$ και $(KN) = (L/2)\eta \mu \varphi = \sqrt{3}/2$

$$\Sigma \tau_{(O)} = I_{(O)} \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow Mg(KN) = I_{(O)} \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow \alpha_{\gamma\gamma} = 3,75\sqrt{3}\text{rad/s}^2.$$

Γ. Γράφουμε την ΑΔΜΕ από την αρχική θέση OA έως την κατακόρυφη θέση OA' με $U=0$ το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το K' .

$$U_{\text{αρχ}} + K_{\text{αρχ}} = U_{\text{τελ}} + K_{\text{τελ}} \rightarrow Mgy + 0 = 0 + \frac{1}{2}I_{(O)}\omega^2 \quad \text{με } y = (OK') + (ON) = L/2 + (L/2)\sin 60^\circ = 3L/4$$

$$\text{Άρα:} \quad Mg\frac{3L}{4} = \frac{1}{2}I_{(O)}\omega^2 \rightarrow \omega = 1,5\sqrt{10}\text{rad/s}$$

Δ. Γράφουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής κατά την κρούση της ράβδου με το σώμα Σ_1 , αφού το σύστημα δεν δέχεται εξωτερικές ροπές. Μετά την κρούση το Σ_1 φεύγει με ταχύτητα, v .

$$L_{(O)\pi\text{ριν}} = L_{(O)\text{μετα}} \rightarrow I_{(O)}\omega = m_1 v L \rightarrow v = 3\sqrt{10}\text{m/s}.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι $K_{\pi\text{ριν}} = \frac{1}{2}I_{(O)}\omega^2 = 45\text{J}$

Μετά την κρούση είναι $K_{\text{μετα}} = \frac{1}{2}m_1 v^2 = 45\text{J}$. Άρα ισχύει $K_{\pi\text{ριν}} = K_{\text{μετα}}$ οπότε η κρούση είναι **ελαστική**.

Ε. Τα σώματα Σ_1, Σ_2 συγκρούονται πλαστικά. Ισχύει η ΑΔΟ: $m_1 v = (m_1 + m_2)V \rightarrow V = \sqrt{10}\text{m/s}$.

Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχει ταχύτητα, V , στη θέση ισορροπίας και αρχίζει οριζόντια απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $k=100\text{N/m}$. Γράφουμε τη ΑΔΕ για τον ταλαντωτή για να βρούμε το πλάτος, A .

$$E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} \rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow A = \sqrt{0,3}\text{m}$$

Α.6 Σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου και στερεωμένου ελατηρίου κάνει ΑΑΤ με μέγιστη κινητική ενέργεια $K_0=2\text{J}$ και πλάτος $A=0,2\text{m}$. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x=-0,2\text{m}$. Τη στιγμή t_1 που το σώμα m περνάει για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς την πλευρά που το ελατήριο επιμηκύνεται κόβεται το ελατήριο και το σώμα συνεχίζει μόνο του πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο.

Α. Να γραφεί η εξίσωση απομάκρυνσης των ΑΑΤ του σώματος και να υπολογιστούν η χρονική στιγμή t_1 και η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που κόβεται το ελατήριο.

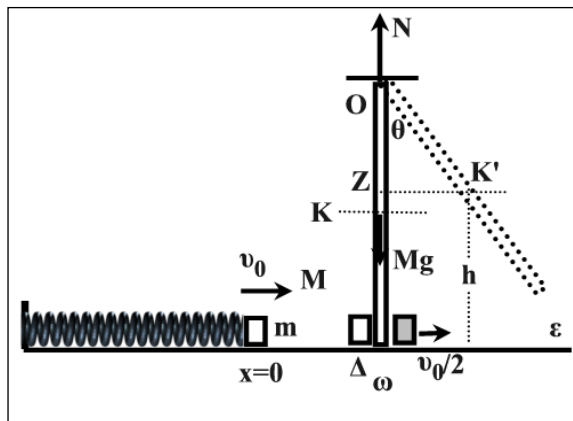
Το σώμα μετά συγκρούεται με το άκρο Δ, ράβδου μήκους $d=1\text{m}$, μάζας $M=2\text{kg}$ το ένα άκρο της οποίας είναι στερεωμένο στο σημείο Ο, και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές. Μετά την κρούση το σώμα m συνεχίζει την κίνησή του στην ίδια κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου ίσου με το μισό αυτής που είχε πριν την κρούση. Η κρούση διαρκεί χρόνο $\Delta t=0,02\text{s}$. Να υπολογιστούν:

Β. Η ροπή τ που άσκησε το σώμα στη ράβδο κατά την κρούση, αν η ροπή θεωρηθεί σταθερή.

Γ. Η απώλεια μηχανικής ενέργειας του συστήματος, «σώμα – ράβδος» λόγω κρούσης.

Δ. Το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο άξονας, Ο, στη ράβδο αμέσως μετά την κρούση.

Ε. Το συνημίτονο της γωνίας θ που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφο τη στιγμή που σταματάει στιγμιαία. Δίνονται για τη ράβδο $I_K=Md^2/12$ και $g=10\text{m/s}^2$.



Λύση

Α. $E=K_0 \rightarrow \frac{1}{2}kA^2=K_0 \rightarrow k=100\text{N/m}$. $\omega=\sqrt{k/m} \rightarrow \omega=10\text{rad/s}$.

$x=A\sin(\omega t+\phi_0) \xrightarrow{t=0, x=-A} \sin\phi_0=-1 \rightarrow \phi_0=3\pi/2\text{rad}$. Άρα η εξίσωση απομάκρυνσης: $x=0,2\sin(10t+3\pi/2)$ (SI)
Στη θέση $x=0$, $v=v_0=A\omega \rightarrow v_0=2\text{m/s}$. Η χρονική στιγμή είναι: $t=T/4=2\pi/4\omega=\pi/2\omega \rightarrow t=\pi/20\text{s}$.

Β. Μετά την κρούση η ράβδος αποκτά γωνιακή ταχύτητα, ω και το σώμα ταχύτητα $v_0/2$. Γράφουμε αρχή διατήρησης της στροφορμής στην κρούση: $L_{\pi\rho}=L_{\mu\epsilon} \rightarrow mv_0d=I_{(O)}\omega+m(v_0/2)d$ (1)

όπου $I_{(O)}=I_K+M(d/2)^2=Md^2/3=2/3\text{kgm}^2$ (2). Από (1)(2) $\rightarrow \omega=1,5\text{rad/s}$

Η ροπή που δέχτηκε η ράβδος από το χτύπημα του σώματος m , ισούται με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου που θεωρείται σταθερή, σύμφωνα με τα δεδομένα.

$$\tau=\frac{\Delta L_{\rho}}{\Delta t}=\frac{L_{\rho,\mu\epsilon}-L_{\rho,\pi\rho}}{\Delta t}=\frac{I_{(O)}\omega-0}{\Delta t} \rightarrow \tau=50\text{Nm}.$$

Γ. Η απώλεια ενέργειας λόγω κρούσης: $|\Delta E|=|E_{\mu\epsilon\alpha}-E_{\pi\rho\eta}|=|\frac{1}{2}I_{(O)}\omega^2+\frac{1}{2}m(v_0/2)^2-\frac{1}{2}mv_0^2| \rightarrow |\Delta E|=0,75\text{J}$

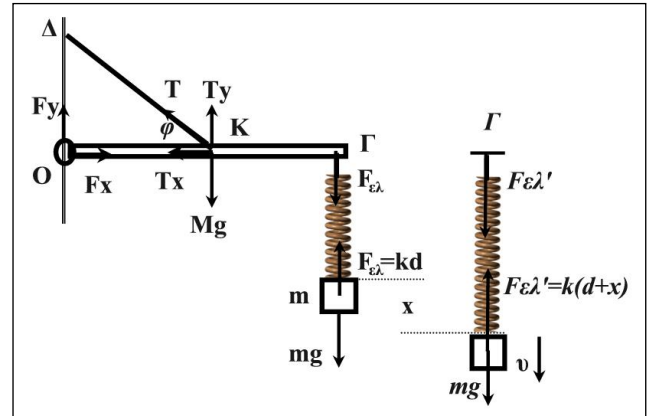
Δ. Από την κεντρομόλο δύναμη: $\Sigma F_y=M\omega^2 \cdot \frac{d}{2} \rightarrow N-Mg=M\omega^2 \cdot \frac{d}{2} \rightarrow N=Mg+M\omega^2 \cdot \frac{d}{2} \rightarrow N=22,25\text{N}$

Ε. Μετά την κρούση η ράβδος ξεκινάει με γωνιακή ταχύτητα $\omega=1,5\text{rad/s}$ να περιστρέφεται γύρω από το Ο. Το κέντρο μάζας της φτάνει μέχρι ύψος h πάνω το επίπεδο, ϵ και σταματάει στιγμιαία. Γράφουμε ΑΔΜΕ με $U=0$, στο επίπεδο, ϵ .

$$U_{\alpha\rho\chi}+K_{\alpha\rho\chi}=U_{\tau\epsilon\lambda}+K_{\tau\epsilon\lambda} \rightarrow Mg(d/2)+\frac{1}{2}I_{(O)}\omega^2=Mgh \rightarrow h=43/80=0,54\text{m}$$

$$(OZ)=(OD)-(Z\Delta)=\delta-h=1-0,54 \rightarrow (OZ)=0,46\text{m}. \quad \sin\theta=\frac{(OZ)}{(OK')}=\frac{0,46}{0,5} \rightarrow \sin\theta=0,92$$

Α.7 Ομογενής ράβδος ΟΓ μήκους $\lambda=3\text{m}$ και μάζας $M=2\text{kg}$ ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια νήματος που είναι δεμένο στο κέντρο της Κ. Το νήμα σχηματίζει με τη ράβδο γωνία $\phi=30^\circ$ ενώ το άκρο Ο συνδέεται στον τοίχο μέσω άρθρωσης. Στο άκρο Γ είναι δεμένο ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$ που στο άλλο του άκρο έχει δεθεί σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ και ισορροπεί. Δίνουμε στο σώμα m στη θέση ισορροπίας της αρχική ταχύτητα $v_0=2\text{m/s}$ με φορά προς τα κάτω οπότε το σύστημα της μάζας και του ελατηρίου αρχίζει να κάνει ΑΑΤ. Το όριο θραύσης του νήματος είναι $T_0=120\text{N}$. Να υπολογιστούν:



- Α.** Το μέτρο της τάσης του νήματος T , όταν το σύστημα μάζα – ελατήριο ισορροπεί.
Β. Η εξίσωση απομάκρυνσης των ταλαντώσεων της μάζας m , σε σχέση με το χρόνο, αν θεωρηθεί ως $t_0=0$ η χρονική στιγμή που ξεκίνησε η μάζα m με ταχύτητα $v_0=2\text{m/s}$ και θετική η φορά προς τα κάτω.
Γ. Η χρονική στιγμή t που θα κοπεί το νήμα.
Δ. Η ταχύτητα της μάζας m τη στιγμή που κόβεται το νήμα.
Ε. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής όλου του συστήματος τη στιγμή αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

Α. Το σώμα m ισορροπεί: $\Sigma F_m=0 \rightarrow F_{ελ}-mg=0 \rightarrow F_{ελ}=mg=10\text{N}$.

Η ράβδος ισορροπεί: $\Sigma \tau_{(O)}=0 \rightarrow T_y \frac{\lambda}{2} - Mg \frac{\lambda}{2} - F_{ελ} \lambda = 0 \rightarrow T_y = 40\text{N} \rightarrow T \eta \mu \phi = 40\text{N} \rightarrow T = 80\text{N}$.

Β. Το m κάνει ΑΑΤ με $\omega = \sqrt{k/m} = 10\text{rad/s}$ και πλάτος, A : $v_0 = A\omega \rightarrow A = 0,2\text{m}$.

Για $t_0=0$, $x=0$ και $v=v_0>0$. Άρα $\phi_0=0$ και η εξίσωση είναι: $x=0,2\eta\mu(10t)$ SI.

Γ. Το νήμα κόβεται τη στιγμή που η τάση θα πάρει την τιμή θραύσης, $T_0=120\text{N}$.

Όταν το σώμα m ισορροπεί το ελατήριο έχει επιμήκυνση, d : $kd-mg=0 \rightarrow d=0,1\text{m}$.

Όταν το σώμα ταλαντώνεται, το νήμα σπάει σε μια πρόσθετη επιμήκυνση, x , στην οποία η δύναμη του ελατηρίου έχει γίνει $F_{ελ}'=k(d+x)$ και η τάση του νήματος, $T=T_0=120\text{N}$.

$$\Sigma \tau_{(O)}=0 \rightarrow T_{0y} \frac{\lambda}{2} - Mg \frac{\lambda}{2} - F_{ελ}' \lambda = 0 \rightarrow F_{ελ}' = 20\text{N}.$$

$$F_{ελ}' = k(d+x) \rightarrow 20 = 100(0,1+x) \rightarrow x = 0,1\text{m}.$$

$$\text{Από } x = 0,2\eta\mu(10t) \xrightarrow{x=0,1\text{m}} 0,1 = 0,2\eta\mu 10t \rightarrow \eta\mu(10t_1) = \eta\mu(\pi/6) \rightarrow t_1 = \pi/60\text{s}.$$

$$\text{Δ. Από την εξίσωση της ταχύτητας: } v = v_0 \sin(10t) \rightarrow 2 \sin(10\pi/60) \rightarrow v = \sqrt{3}\text{m/s}.$$

Ε. Αφού κοπεί το νήμα η T μηδενίζεται. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ισούται με τη συνισταμένη των εξωτερικών ροπών, δηλαδή των ροπών των βαρών Mg και mg .

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau_{(O), \epsilon\xi} = Mg \frac{\lambda}{2} + mg \lambda \rightarrow \frac{dL}{dt} = 60\text{Nm}.$$

Λ.8 Στη διάταξη του σχήματος έχουμε μια τροχαλία μάζας $M=6\text{kg}$, ακτίνας R , τυλιγμένη με νήμα στο άκρο του οποίου κρέμεται σώμα, Σ_1 , μάζας $m_1=2\text{kg}$. Από κάτω έχουμε ένα κατακόρυφο ελατήριο με σώμα, Σ_2 , μάζας $m_2=6\text{kg}$ που κάνει κατακόρυφες ταλαντώσεις με εξίσωση απομάκρυνσης $y=0,1\eta\mu\omega t$, (S.I) όπου $\omega=10\sqrt{3}/3\text{rad/s}$. Αφήνουμε το σώμα Σ_1 να πέσει και όταν έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους $h=0,5\text{m}$ αυτό συγκρούεται ελαστικά και μετωπικά με το άλλο σώμα Σ_2 το οποίο εκείνη τη στιγμή βρίσκεται στη μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του και πάνω από αυτήν. Να υπολογιστούν:

A. Η ταχύτητα του σώματος Σ_1 μόλις πριν την κρούση.

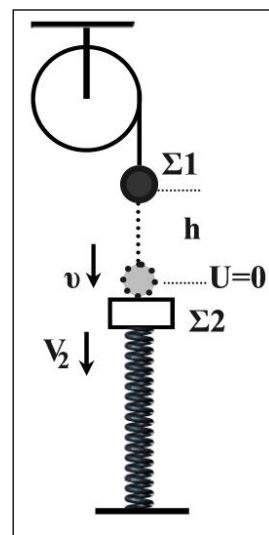
B. Η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

Γ. Το νέο πλάτος ταλάντωσης του σώματος Σ_2 .

Δ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

Ως θετική φορά για την ταλάντωση να θεωρηθεί η κατακόρυφη προς τα πάνω.

Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ και για την τροχαλία $I=\frac{1}{2}MR^2$.



Λύση

A. Γράφουμε ΑΔΜΕ για το σύστημα «τροχαλία–σώμα Σ_1 » για την πτώση του σώματος κατά h . Τότε το σώμα θα έχει ταχύτητα, v , και η τροχαλία γωνιακή ταχύτητα ω , όπου $\omega=v/R$. Η τροχαλία δεν μετατοπίζεται και η δυναμική της ενέργεια, $U_{\text{τροχ}}$ μένει σταθερή.

$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \rightarrow U_{\text{τροχ}} + m_1gh = U_{\text{τροχ}} + \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow v=2\text{m/s}.$$

B. Στην ελαστική κρούση διατηρούνται ορμή και κινητική ενέργεια του συστήματος. Πριν την κρούση το Σ_2 είναι ακίνητο αφού βρίσκεται στη μέγιστη θετική του απομάκρυνση. Μετά την κρούση το Σ_1 έχει ταχύτητα, V_1 και το Σ_2 , ταχύτητα μέτρου, V_2 .

$$m_1v = m_1V_1 + m_2V_2$$

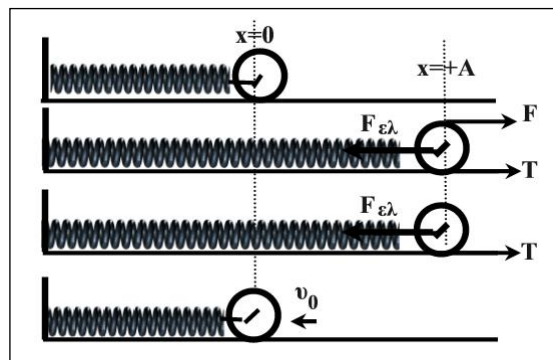
$$\frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 \dots \rightarrow V_2 = \frac{2m_1v}{m_1+m_2} \rightarrow V_2=1\text{m/s}$$

Γ. Μετά την κρούση το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $y=0,1\text{m}$ (στο πλάτος της αρχικής του ΑΑΤ) και έχει ταχύτητα μέτρου $V_2=1\text{m/s}$ με φορά προς τα κάτω. Το σώμα κάνει ΑΑΤ με ίδια συχνότητα, ω , και νέο πλάτος A' . Η σταθερά επαναφοράς είναι $D=m_2\omega^2$. Γράφουμε την ΑΔΕ του ταλαντωτή μετά την κρούση:

$$K+U=E \rightarrow \frac{1}{2}m_2V_2^2 + \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}DA'^2 \rightarrow A'=0,2\text{m}$$

$$\Delta. \frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F_y \cdot V_2 = -Dy \cdot V_2 = -m_2\omega^2 \cdot y \cdot V_2 \rightarrow -(6\text{kg}) \cdot \left(\frac{10}{3}\text{rad}^2/\text{s}^2\right) \cdot (0,1\text{m}) \cdot (-1\text{m/s}) \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = 2\text{J/s}$$

Δ.9 Ο κύλινδρος που φαίνεται στο σχήμα έχει μάζα $m=2\text{kg}$, ακτίνα R και ροπή αδράνειας $I=\frac{1}{2}mR^2$. Είναι συνδεδεμένος με κατάλληλη διάταξη με ελατήριο σταθεράς $k=300\text{N/m}$ που του επιτρέπει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι συνδεδεμένο σε ακλόνητο σημείο. Αρχικά το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Επιμηκύνουμε το ελατήριο κατά $A=+0,2\text{m}$, απομακρύνοντας τον κύλινδρο από τη θέση ισορροπίας του και τον κρατάμε ακίνητο στη θέση αυτή με τη βοήθεια μιας δύναμης F , όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ η δύναμη F καταργείται και ο κύλινδρος αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.



Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ η δύναμη F καταργείται και ο κύλινδρος αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.

A. Να βρείτε το μέτρο της δύναμης F .

B. Να βρείτε την ταχύτητα του cm του κυλίνδρου τη στιγμή που περνάει από τη θέση ισορροπίας.

Γ. Να δείξετε ότι ο κύλινδρος θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και υπολογίστε την εξίσωση απομάκρυνσης.

Δ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής στροφορμής της στιγμή που περνάει από τη θέση ισορροπίας.

E. Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας στη θέση, $x_1=0,1\text{m}$ από τη θέση ισορροπίας και το μέτρο του ρυθμού μεταβολής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου στη θέση αυτή.

Λύση

A. Από συνθήκες ισορροπίας: $\Sigma F_x=0 \rightarrow F+T-F_{\text{ελ}}=0 \rightarrow F_{\text{ελ}}=F+T$ (1)

$$\Sigma \tau_K=0 \rightarrow FR-TR=0 \rightarrow F=T \xrightarrow{(1)} F_{\text{ελ}}=2F \rightarrow kA=2F \rightarrow \mathbf{F=30\text{N}}$$

B. Ισχύει η ΑΔΜΕ για το σύστημα κύλινδρος – ελατήριο:

$$E_{\text{αρχ}}=E_{\text{τελ}} \rightarrow \frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv_{0\text{cm}}^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \xrightarrow{\omega=v_0/R} v_{0\text{cm}}=A\cdot\sqrt{2k/3m} \rightarrow \mathbf{v_{0cm}=2\text{m/s.}}$$

$$\mathbf{\Gamma. \text{ Για μια τυχαία απομάκρυνση, } x: \Sigma \tau_K=I\alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow TR=\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{\alpha_{\text{cm}}}{R} \rightarrow T=\frac{m\alpha_{\text{cm}}}{2}} \quad (2)$$

$$\Sigma F=m\alpha_{\text{cm}} \xrightarrow{(2)} F_{\text{ελ}}-T=2T \rightarrow F_{\text{ελ}}=3T \rightarrow -kx=3T \rightarrow T=-kx/3 \quad (3)$$

$$\text{Οπότε: } \Sigma F=F_{\text{ελ}}-T=3T-T=2T \rightarrow \Sigma F=2(-kx/3) \rightarrow \mathbf{\Sigma F=-2kx/3} \quad (4)$$

Άρα, κάνει ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς $D=2k/3=200\text{N/m}$ και $\omega=\sqrt{D/m}=10\text{rad/s}$. Για $t_0=0$, $x=+A$ άρα $\phi_0=\pi/2\text{rad}$, οπότε η εξίσωση απομάκρυνσης είναι: $\mathbf{x=0,2\eta\mu(10t+\pi/2) \text{ (SI)}}$

$$\mathbf{\Delta. \quad \frac{\Delta L}{\Delta t}=\Sigma \tau=T\cdot R=\frac{kx}{3}\cdot R \xrightarrow{x=0} \frac{\Delta L}{\Delta t}=0}$$

E. Το (κμ) του κυλίνδρου κάνει ΑΑΤ, οπότε γράφω της ΑΔΕ του ταλαντωτή σε απομάκρυνση x_1 και ταχύτητα v_{cm} : $E=K+U \rightarrow \frac{1}{2}Dx_1^2=\frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2+\frac{1}{2}Dx_1^2 \rightarrow |v_{\text{cm}}|=\sqrt{3\text{m/s}} \quad (1)$

Ο κύλινδρος όμως κάνει μεταφορική και περιστροφική κίνηση:

$$|\frac{\Delta K}{\Delta t}|=|\Sigma Fv_{\text{cm}}|+|\Sigma \tau\omega|=(F_{\text{ελ}}-T)v_{\text{cm}}+TR\omega=(F_{\text{ελ}}-T)v_{\text{cm}}+Tv_{\text{cm}}=F_{\text{ελ}}v_{\text{cm}}=kx_1v_{\text{cm}} \rightarrow |\frac{\Delta K}{\Delta t}|=\mathbf{30\sqrt{3}\text{J/s}}$$

¹ Ισοδύναμη σχέση με τη ΑΔΕ του ταλαντωτή, δηλ. του κέντρου μάζας, είναι η ΑΔΜΕ του συστήματος, κύλινδρος – ελατήριο, δηλαδή:

$$E_{\text{αρχ}}=E_{\text{τελ}} \rightarrow \frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow |v_{\text{cm}}|=\sqrt{3\text{m/s}}$$

Δ.10 Τροχαλία μάζας $M=2\text{kg}$ και ακτίνας R , είναι στερεωμένη, όπως φαίνεται στο σχήμα και μπορεί να στρέφεται γύρω από τον άξονά της. Από την τροχαλία διέρχεται νήμα στο ένα άκρο του οποίου δένεται νήμα στο ένα άκρο του οποίου δένεται σώμα μάζας $m=4\text{kg}$, ενώ το άλλο άκρο δένεται στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k=80\text{N/m}$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Ανοψώνουμε το σώμα ως το σημείο Α, έτσι ώστε το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος, ενώ το νήμα είναι τεντωμένο. Αφήνουμε το σώμα ελεύθερο.

Α. Πόση είναι η επιτάχυνση του σώματος όταν η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι $x_1=0,2\text{m}$;

Β. Πόση είναι η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου;

Γ. Πόση πρέπει να είναι η κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος μέχρι το σώμα να αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα.

Δ. Πόση είναι η μέγιστη ταχύτητα.

Ε. Πόσο είναι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος «τροχαλία – σώμα», όταν η ταχύτητα του σώματος είναι $v=2\text{m/s}$;

Ζ. Εξετάστε αν το σώμα μάζας m κάνει ΑΑΤ.

Δίνεται $I=\frac{1}{2}MR^2$, $g=10\text{m/s}^2$. Το νήμα δεν ολισθαίνει μέσα στο λούκι της τροχαλίας.

Λύση

Α. Για τυχαία επιμήκυνση $x=x_1$, ισχύουν:

Για το σώμα: $\Sigma F=ma \rightarrow mg-F_1=ma$ (1)

Για το ελατήριο $F_2=F_{ελ}=kx_1$ (2)

Για τροχαλία: $\Sigma \tau=I\alpha_{\gamma} \rightarrow F_1R-F_2R=\frac{MR^2}{2} \cdot \frac{a}{R} \xrightarrow{(2)} F_1-kx_1=\frac{Ma}{2}$ (3)

(1)(3) $\rightarrow mg-kx_1=(m+M/2)a \rightarrow a=\frac{mg-kx_1}{(m+M/2)}$ (4) $\rightarrow a=4,8\text{m/s}^2$

Β. ΑΔΜΕ για το σύστημα «ελατήριο – τροχαλία – σώμα» από τη θέση Α, όπου το σώμα είναι ακίνητο και το ελατήριο στο φυσικό μήκος ως τη θέση Δ, όπου το σώμα σταματάει, το ελατήριο έχει μέγιστη επιμήκυνση x_m . Θεωρώ ότι $U_{βαρ}=0$ στο σημείο, Δ.

$E_A=E_{\Delta} \rightarrow U_{\text{τροχ}}+mgx_m=U_{\text{τροχ}}+\frac{1}{2}kx_m^2 \rightarrow x_m=2mg/k \rightarrow x_m=1\text{m}$

Γ. Η δύναμη που δέχεται το σώμα είναι $\Sigma F=mg-kx=ma$. Για να αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα v_0 πρέπει να μηδενιστεί η επιτάχυνση, a και αυτό συμβαίνει όταν:

$\Sigma F=0 \rightarrow mg-kx_0=0 \rightarrow x_0=mg/k=0,5\text{m}$.

Δ. ΑΔΜΕ για το ίδιο σύστημα από το Α έως το Γ όπου $v=v_0$ (μέγιστη), και $U_{βαρ}=0$ στο σημείο, Δ.

$E_A=E_{\Gamma} \rightarrow U_{\text{τροχ}}+mgx_m=U_{\text{τροχ}}+mg(x_m-x_0)+\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \xrightarrow{\omega=v_0/R} v_0=2\text{m/s}$.

Ε. Όταν όμως $v=v_0=2\text{m/s}$, τότε $\Sigma F=0 \rightarrow mg-kx_0=0$ (βλέπε ερώτηση γ). Άρα:

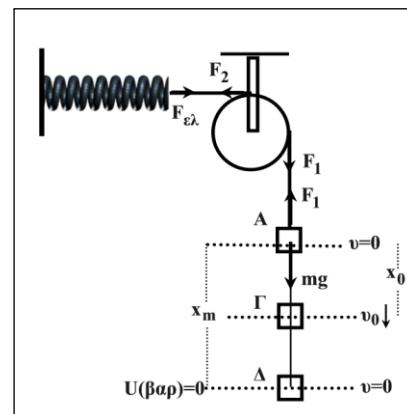
$\frac{\Delta K}{\Delta t}=\frac{\Delta K_m}{\Delta t}+\frac{\Delta K_{\text{τροχ}}}{\Delta t}=\Sigma F \cdot v+\Sigma \tau \cdot \omega=(mg-F_1)v+(F_1-F_2)R\omega=(mg-F_2)v=(mg-kx_0)v \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t}=0$

Ζ. Στη θέση ισορροπίας Δ, η απομάκρυνση είναι $y=0$ και η επιμήκυνση του ελατηρίου, $x_0=0,5\text{m}$. Σε τυχαία θέση η απομάκρυνση είναι y και η επιμήκυνση $x=y+x_0$, οπότε από την (4) η a είναι:

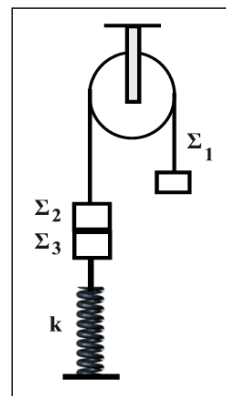
(4) $\rightarrow a=\frac{mg-kx}{(m+M/2)}=\frac{mg-k(x_0+y)}{(m+M/2)} \rightarrow a=-16y$.

Άρα $\Sigma F=ma \rightarrow \Sigma F=4(-16y) \rightarrow \Sigma F=-64y$. Άρα κάνει ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς **D=64N/m**.

Δ Θέματα Στερεού με λύσεις Δ 10



Δ.11 Τροχαλία μάζας $M=6\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,25\text{m}$ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Γύρω από την τροχαλία υπάρχει αβαρές νήμα. Στα άκρα του νήματος υπάρχουν σε κατακόρυφη θέση τα σώματα Σ_1, Σ_2 με μάζες $m_1=4\text{kg}$ και $m_2=1\text{kg}$ αντίστοιχα. Το σώμα Σ_2 είναι κολλημένο με σώμα Σ_3 μάζας $m_3=1\text{kg}$, το οποίο συγκρατείται από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί όπως στο σχήμα. Κάποια χρονική στιγμή την οποία θεωρούμε ως χρονική στιγμή $t=0$ τα σώματα Σ_2 και Σ_3 αποκολλώνται και το Σ_3 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κατά τη διεύθυνση της κατακόρυφης. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$. Να υπολογιστούν:



- A.** Η εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος Σ_3 σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα επάνω.
B. Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας μετά την αποκόλληση των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 .
Γ. Η στροφορμή του συστήματος τροχαλία – σώματα τη χρονική στιγμή $t=0,1\text{s}$.
Δ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή $t=0,1\text{s}$.

Λύση

A. Τα σώματα και η τροχαλία αρχικά ισορροπούν με το ελατήριο σε επιμήκυνση κατά x από το φυσικό του μήκος. Η δύναμη επαφής των Σ_2, Σ_3 είναι F . Από τις συνθήκες ισορροπίας έχουμε:

$$T_2 = T_1$$

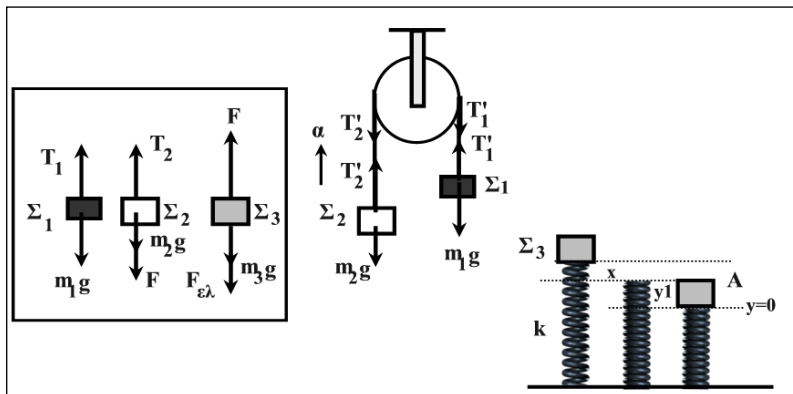
$$T_1 - m_1 g = 0 \rightarrow T_1 = 40\text{N}$$

$$T_2 - F - m_2 g = 0 \rightarrow F = 30\text{N}$$

$$F - F_{\text{ελ}} - m_3 g = 0 \rightarrow F_{\text{ελ}} = 20\text{N} \text{ Άρα: } F_{\text{ελ}} - kx \rightarrow x = 0,2\text{m}$$

Τη στιγμή $t_0=0$ που τα σώματα αποχωρίζονται το Σ_3 έχει απομάκρυνση $y_1 + x = A$ από τη θέση ισορροπίας, $y=0$. Από τη συνθήκη ισορροπίας: $\Sigma F_3 = 0 \rightarrow m_3 g - ky_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0,1\text{m}$.

Το Σ_3 αρχίζει τις ΑΑΤ με πλάτος $A = x + y_1 = 0,3\text{m}$, $\phi_0 = \pi/2\text{rad}$ και $\omega = \sqrt{k/m_3} = 10\text{rad/s}$. Άρα η εξίσωση είναι: **$y = 0,3\eta\mu(10t + \pi/2)$ (SI)**



B. Η τροχαλία τώρα στρέφεται με επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\gamma}$ ενώ τα Σ_1 και Σ_2 κινούνται με επιτάχυνση a . Οι τάσεις των νημάτων είναι T_1' και T_2' .

$$m_1 g - T_1' = m_1 a \quad (1)$$

$$\text{Από (1)(2)(3)} \rightarrow \alpha_{\gamma\gamma} = 15\text{m/s}^2 \text{ και } \alpha_{\gamma\gamma} = a/R \rightarrow \alpha_{\gamma\gamma} = 15\text{rad/s}$$

$$T_2' - m_2 g = m_2 a \quad (2)$$

$$T_1' R - T_2' R = I \alpha_{\gamma\gamma} = \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{a}{R} \rightarrow T_1' - T_2' = \frac{Ma}{2} \quad (3)$$

Γ. Τη χρονική στιγμή $t=0,1\text{s}$ έχουμε: $\omega = \alpha_{\gamma\gamma} t = 1,5\text{rad/s}$ και $v = \omega R = 0,375\text{m/s}$.

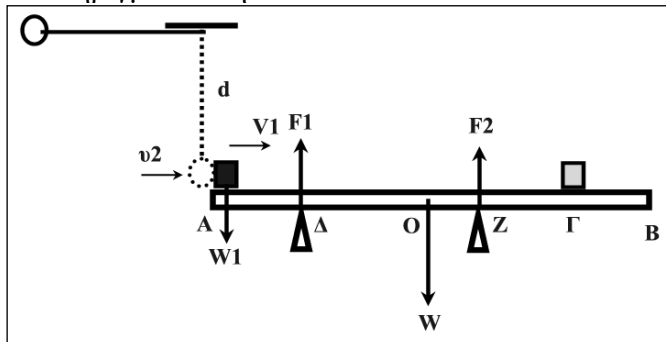
Η στροφορμή του συστήματος τροχαλίας και σωμάτων Σ_1, Σ_2 είναι:

$$L = I_{\text{τρ}} \omega + m_1 v R + m_2 v R \rightarrow \mathbf{L = 0,75\text{kgm}^2/\text{s}}$$

$$\mathbf{A. \quad \frac{\Delta K_{\text{τρ}}}{\Delta t} = \Sigma \tau \cdot \omega = I_{\text{τρ}} \alpha_{\gamma\gamma} \omega \rightarrow \frac{\Delta K_{\text{τρ}}}{\Delta t} = 4,21\text{J/s}}$$

Δ.12 Στη διάταξη του σχήματος η ομογενής και ισοπαχής σανίδα AB, μήκους $\ell=2\text{m}$ και βάρους $w=50\text{N}$ ισορροπεί πάνω στα δύο στηρίγματα Δ και Ζ τα οποία απέχουν από το μέσον της Ο αποστάσεις $ΟΔ=0,6\text{m}$ και $ΟΖ=0,2\text{m}$. Η σανίδα φέρει στο άκρο της Α σώμα, Σ_1 , βάρους $w_1=20\text{N}$.
Α. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που ασκούν τα στηρίγματα στη σανίδα.

Β. Σφαίρα, Σ_2 , μάζας $m_2=3\text{kg}$ είναι δεμένη με νήμα μήκους $d=0,2\text{m}$ κρέμεται από ακλόνητο σημείο και ισορροπεί στην κατακόρυφη θέση. Εκτρέπουμε το νήμα από τη θέση ισορροπίας του κατά 90° και αφήνουμε τη σφαίρα ελεύθερη. Αυτή όταν φτάνει στο κατώτερο σημείο της τροχιάς της συγκρούεται μετωπικά ελαστικά με το σώμα Σ_1 . Πόση είναι η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση;



Γ. Μετά την κρούση το σώμα Σ_1 ολισθαίνει πάνω στη σανίδα και σταματάει σε σημείο Γ αυτής, στο οποίο η σανίδα είναι έτοιμη να ανατραπεί περιστρεφόμενη γύρω από το στήριγμα Ζ. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Γ από το άκρο Β.

Δ. Να υπολογιστεί ο συντελεστής τριβής, μ , μεταξύ σώματος Σ_1 και σανίδας. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

Α. Η ράβδος ισορροπεί με την επίδραση των δυνάμεων w , w_1 , F_1 , F_2 .

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_1 + F_2 - w - w_1 = 0 \rightarrow F_1 + F_2 = 70\text{N} \quad (1)$$

$$\Sigma \tau_\Delta = 0 \rightarrow w(O\Delta) - F_2(\Delta Z) - w_1(A\Delta) = 0 \rightarrow F_2 = 27,5\text{N} \quad (2)$$

$$\text{Από (1) (2)} \rightarrow F_1 = 42,5\text{N}$$

Β. ΑΔΜΕ για τη σφαίρα: $m_2 g d = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \rightarrow v_2 = \sqrt{2gd} \rightarrow v_2 = 2\text{m/s}$

Η κρούση των Σ_2 , Σ_1 είναι μετωπική ελαστική. Ισχύουν οι αρχές διατήρησης ορμής και κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων:

$$m_2 v_2 = m_2 V_2 + m_1 V_1 \quad (3) \quad m_2 (v_2 - V_2) = m_1 V_1 \quad v_2 + V_2 = V_1 \rightarrow V_2 = V_1 - v_2 \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \frac{1}{2} m_1 V_1^2 \quad (4) \quad m_2 (v_2 - V_2)(v_2 + V_2) = m_2 V_1^2$$

$$\text{Από (3)(5)} \rightarrow V_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \rightarrow V_1 = 2,4\text{m/s}$$

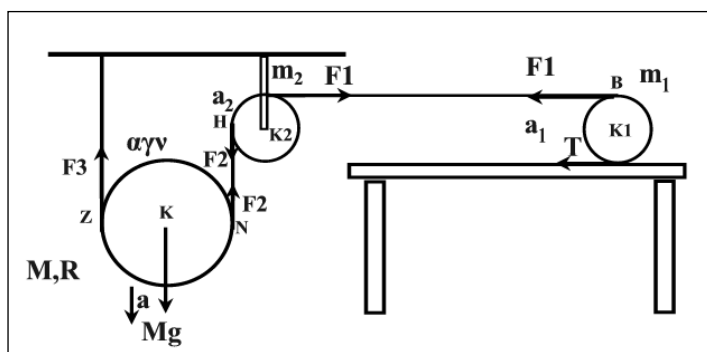
Γ. Το σώμα Σ_1 διανύει την απόσταση ΑΓ και σταματάει στο και σε απόσταση ΓΒ = x από το άλλο άκρο, Β. Όταν φτάνει στο Γ η σανίδα είναι έτοιμη να εγκαταλείψει την επαφή της με το στήριγμα Δ και να αρχίσει να περιστρέφεται γύρω από το Ζ. Συνεπώς $F_1 = 0$.

$$\Sigma \tau_Z = 0 \rightarrow w_1(Z\Gamma) - w(OZ) = 0 \rightarrow w_1(OB - B\Gamma) - w(OZ) \rightarrow (B\Gamma) = x = 0,3\text{m}.$$

Δ. Κατά την ολίσθηση από το Α ως το Γ ισχύει το ΘΜΚΕ:

$$\Delta K = W_T \rightarrow 0 - \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = -\mu m_1 g (A\Gamma) \rightarrow \mu = \frac{v_2^2}{2g(A\Gamma)} \rightarrow \mu = 0,17$$

► **Δ.13** Στο σύστημα που φαίνεται στο σχήμα η μικρή τροχαλία K_2 είναι μάζας $m_2=1\text{kg}$, ακτίνας r και το αβαρές σχοινί συνδέει τον κύλινδρο, K_1 , μάζας $m_1=8\text{kg}$, ακτίνας r με το δίσκο, K , μάζας $M=4\text{kg}$ και ακτίνας R . Ο κύλινδρος κυλίνει χωρίς να ολισθαίνει καθώς το τυλιγμένο σε αυτόν νήμα ξετυλίγεται. Αν αφήσουμε το σύστημα ελεύθερο τη χρονική στιγμή $t_0=0$, να υπολογιστούν:



A. Οι επιταχύνσεις a_1 και a των κέντρων μάζας K_1 και K .

B. Οι τάσεις όλων των νημάτων F_1 , F_2 , F_3 .

Γ. Η πτώση του κέντρου μάζας του δίσκου, K και η μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, K_1 τη χρονική στιγμή $t=2\text{s}$.

Δ. Το ποσοστό της δυναμικής ενέργειας του δίσκου, (K) που μετατράπηκε σε κινητικές ενέργειες του δίσκου, της τροχαλίας και του κυλίνδρου, μέχρι τη χρονική στιγμή $t=2\text{s}$.

Ε. Ο ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t=2\text{s}$.

Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας και των τριών στερεών $I=mr^2/2$.

Λύση

A. Για τον κύλινδρο K_1 . $F_1+T=m_1a_1$ (1) και $F_1r-Tr=\frac{m_1r^2}{2}\cdot\frac{a_1}{r}$ (2) $\rightarrow F_1=\frac{3m_1a_1}{4}$ (3)

Για την τροχαλία K_2 : $F_2r-F_1r=\frac{m_2r^2}{2}\cdot\frac{a_2}{r} \rightarrow F_2-F_1=\frac{m_2a_2}{2}$ (4)

Για το δίσκο, K : $Mg-F_2-F_3=Ma$ (5) και $F_3R-F_2R=\frac{MR^2}{2}\cdot\frac{a}{R} \rightarrow F_3-F_2=\frac{Ma}{2}$ (6)

$$a_B=a_H=a_2=2a_1$$

$$a_2=a_H=a_N=a_{\gamma\gamma}R+a \rightarrow a_2=2a \text{ και } a=a_1 \quad (7)$$

$$a_Z=0 \rightarrow a-a_{\gamma\gamma}R=0 \rightarrow a=a_{\gamma\gamma}R$$

Από (3)+(4)+(5)+(6) και με τη βοήθεια της (7) : $a=\frac{2Mg}{3M+4m_2+3m_1} \rightarrow a=a_1=2\text{m/s}^2$ και $a_2=4\text{m/s}^2$

B. Από (3) $\rightarrow F_1=12\text{N}$, (4) $\rightarrow F_2=14\text{N}$ και από (6) $\rightarrow F_3=20\text{N}$.

Γ. $y_K=\frac{1}{2}at^2=4\text{m}$ και $v_K=at=4\text{m/s}$ $y_1=\frac{1}{2}at^2=4\text{m}$ και $v_1=4\text{m/s}$

Δ. $U_K=Mgy_K=160\text{J}$

$$K_1=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_1r^2)\cdot(\frac{v_1}{r})^2 \rightarrow K_1=\frac{3}{4}m_1v_1^2 \rightarrow K_1=96\text{J}$$

$$K_2=\frac{1}{2}I_2\omega_2^2=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_2r^2)\cdot(\frac{v_2}{r})^2=\frac{1}{4}m_2v_2^2=\frac{1}{4}m_2(2v_1)^2 \rightarrow K_2=16\text{J}$$

$$K=\frac{1}{2}Mv_K^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\cdot(\frac{v_K}{R})^2 \rightarrow K=\frac{3}{4}Mv_K^2 \rightarrow K_1=48\text{J}$$

Άρα τα ποσοστά είναι: $K_1/U=96/160$ $K_2/U=16/160$ και $K/U=48/160$

Ε. $\Delta K_1/\Delta t=\Sigma F\cdot v_1+\Sigma \tau\cdot \omega_1=(F_1+T)v_1+(F_1-T)\omega_1r=2F_1v_1 \rightarrow \Delta K_1/\Delta t=96\text{J/s}$

Δ. Μετά την κρούση η σφαίρα έχει γωνιακή ταχύτητα, ω την ίδια που είχε και πριν αφού δεν δέχτηκε ροπή κατά την κρούση. Έχει και μεταφορική ταχύτητα $v_1=3\text{m/s}$. Άρα:

$v_1=\omega r=3\text{m/s}$ ενώ $V_1=1\text{m/s}$. Τότε όμως: $\omega r > V_1$ συνεπώς δεν κάνει κύλιση ΧΟ. Λόγω της τριβής που δέχεται στο οριζόντιο επίπεδο θα χρειαστεί κάποιο χρόνο t και κάποια μετατόπιση d μέχρι να γίνει $V=\Omega r$ ώστε να αρχίσει η κύλιση ΧΟ. Η T έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά για να την επιταχύνει μεταφορικά και να την επιβραδύνει ταυτόχρονα περιστροφικά.

$$T=\mu_0 m_2 g=2\text{N}$$

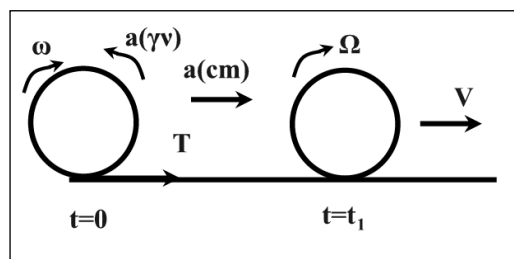
$$\Sigma F=m_2 a \rightarrow a=T/m \rightarrow a=2\text{m/s}^2 \quad \Sigma \tau=I \alpha_{\gamma v} \rightarrow T r=\frac{2 m r^2}{5} \alpha_{\gamma v} \rightarrow \alpha_{\gamma v}=5/r$$

$$\text{Άρα ισχύουν: } V=V_1+at \quad \text{και} \quad \Omega=\omega-\alpha_{\gamma v} t \quad \text{με } V=\Omega r \quad \text{Άρα:}$$

$$V=\Omega r \rightarrow V_1+at=(\omega-\alpha_{\gamma v} t)r \rightarrow V_1+at=\omega r-\alpha_{\gamma v} t \cdot r \rightarrow V_1+at=v_1-\alpha_{\gamma v} t \cdot r \rightarrow \dots t=2/7\text{s}.$$

Σε αυτό το χρονικό διάστημα το CM της σφαίρας θα έχει μετατοπιστεί κατά d όπου:

$d=V_1 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma v} t^2 \rightarrow \dots d=30/49\text{m}$. Αλλά η απόσταση d που διανύει η σφαίρα μέχρι να αρχίσει η ΚΧΟ είναι μικρότερη της απόστασης $x=4\text{m}$ που έχει διανύσει ο κύβος ολισθαίνοντας και έχει σταματήσει. Συνεπώς όταν η σφαίρα το συναντά και πάλι κάνει ήδη κύλιση ΧΟ και πέφτει πάνω του με σταθερή ταχύτητα την οποία αποκτάει τη χρονική στιγμή $t=2/7\text{s}$. Δηλαδή: $V=V_2+at=1\text{m/s}+2\text{m/s}^2 \cdot (2/7\text{s}) \rightarrow V=11/7\text{m/s}$.



Δ.14 Λεπτή, άκαμπτη και ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους $d = 2\text{m}$ και μάζας $M = 5,6\text{ kg}$ ισορροπεί με τη βοήθεια οριζόντιου νήματος, μη εκτατού, που συνδέεται στο μέσο της, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το άκρο Α της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο.

Δίνεται: $\eta\mu\varphi = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$

A. Να προσδιορίσετε τη δύναμη F που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση.

Μικρή ομογενής σφαίρα, μάζας $m = 0,4\text{ kg}$ και ακτίνας $r = 1/70\text{ m}$ κυλίεται χωρίς ολίσθηση, έχοντας εκτοξευθεί κατά μήκος της ράβδου από το σημείο Κ προς το άκρο Γ.

B. Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας κατά την κίνησή της από το Κ μέχρι το Γ.

Γ. Με δεδομένο ότι η σφαίρα φτάνει στο άκρο Γ, να βρείτε τη σχέση που περιγράφει την τάση του νήματος σε συνάρτηση με την απόσταση του σημείου επαφής της σφαίρας με τη ράβδο, από το σημείο Κ.

Αφού η σφαίρα έχει εγκαταλείψει τη ράβδο, κόβουμε το νήμα. Η ράβδος στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α, χωρίς τριβές.

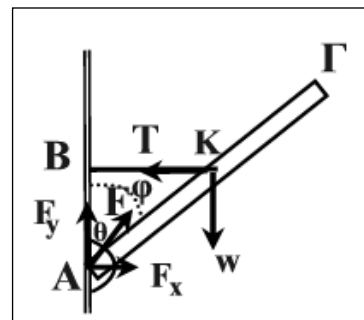
Δ. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου στη θέση στην οποία η ράβδος σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφο που διέρχεται από το άκρο Α, όπως στο παρακάτω σχήμα.

Δεύτερη λεπτή, άκαμπτη και ομογενής ράβδος ΑΔ, μήκους $d' = d$ και μάζας $M' = 3M$ είναι αρθρωμένη και αυτή στο σημείο Α γύρω από τον ίδιο άξονα περιστροφής με την ράβδο ΑΓ. Η ράβδος ΑΔ συγκρατείται ακίνητη, με κατάλληλο μηχανισμό, σε θέση όπου σχηματίζει γωνία φ με τον κατακόρυφο τοίχο όπως στο σχήμα. Οι δύο ράβδοι συγκρούονται και ταυτόχρονα ο μηχανισμός ελευθερώνει τη ράβδο ΑΔ χωρίς απώλεια ενέργειας. Οι ράβδοι μετά την κρούση κινούνται σαν ένα σώμα, χωρίς τριβές. Ο χρόνος της κρούσης θεωρείται αμελητέος.

Ε. Να υπολογίσετε το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση. Όλες οι κινήσεις πραγματοποιούνται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας I_p λεπτής ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους d , ως προς άξονα που διέρχεται από το ένα της άκρο και είναι κάθετος σε αυτή: $I_p = 1/3 M d^2$.

Η ροπή αδράνειας $I_{\sigma\varphi}$ ομογενούς σφαίρας μάζας m και ακτίνας r ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της: $I_{\sigma\varphi} = (2/5)mr^2$ και $g = 10\text{m/s}^2$



Λύση

A. Ισορροπία ράβδου: $\Sigma\tau_A = 0 \rightarrow T(AB) - w(BK) = 0 \rightarrow$

$$T \frac{d}{2} \sigma\upsilon\nu\varphi = w \frac{d}{2} \eta\mu\varphi \rightarrow T = 42\text{N}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_x = T = 42\text{N} \text{ και } \Sigma F_y = 0 \rightarrow F_y = w = 56\text{N}$$

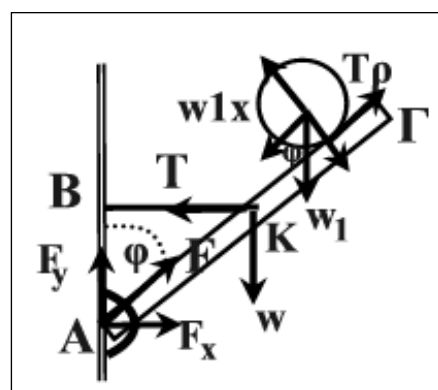
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \rightarrow F = 70\text{N} \text{ με } \epsilon\varphi\theta = \frac{F_x}{F_y} = \frac{42}{56} = \frac{3}{4} = \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \epsilon\varphi\varphi \rightarrow \theta = \varphi$$

B. Η κύλιση της σφαίρας είναι επιβραδυνόμενη

$$\Sigma F_x = ma_1 \rightarrow mg \sigma\upsilon\nu\varphi - T = ma_2 \rightarrow mg \sigma\upsilon\nu\varphi - T_p = ma_{\gamma\nu} r \quad (1)$$

$$\Sigma\tau = I a_{\gamma\nu} \rightarrow T_p r = \frac{2mr^2}{5} \cdot a_{\gamma\nu} \rightarrow T_p = \frac{2mr a_{\gamma\nu}}{5} \quad (2)$$

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow a_{\gamma\nu} = 5g \sigma\upsilon\nu\varphi / 7r \rightarrow a_{\gamma\nu} = 400\text{rad/s}^2$$

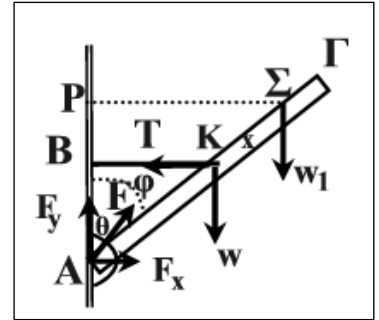


$$\Gamma. \Sigma\tau_A=0 \rightarrow T(AB) - Mg(BK) - mg(\Sigma P) = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma P = (A\Sigma)\eta\mu\varphi = \left(\frac{d}{2} + x\right)\eta\mu\varphi = 0,6(1+x),$$

$$BK = \frac{d}{2}\eta\mu\varphi = 0,6\text{m και } AB = \frac{d}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$$

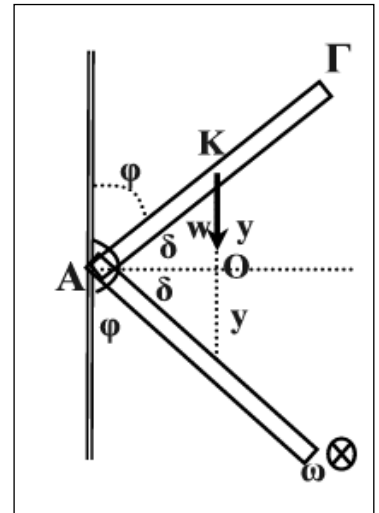
$$(3) \rightarrow T = \frac{Mg(BK) + mg(\Sigma P)}{(AB)} \rightarrow T = 45 + 3x \text{ με } 0 \leq x \leq 1\text{m}$$



Α. Το κέντρο μάζας της ράβδου πέφτει κατά $h=2y$ όπου $y = (d/2)\eta\mu\delta \rightarrow y = (d/2)\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8\text{m}$

Από την ΑΔΜΕ μεταξύ των δύο θέσεων που σχηματίζουν γωνία 2δ μεταξύ τους: $Mg2y = \frac{1}{2} \frac{Md^2}{3} \omega^2 \rightarrow \omega = 2\sqrt{6} \text{ rad/s}$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma\tau \cdot \omega = Mg(OA) \cdot \omega = Mg \frac{d}{2} \eta\mu\varphi \cdot \omega \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = 67,2\sqrt{6} \text{ J/s}$$



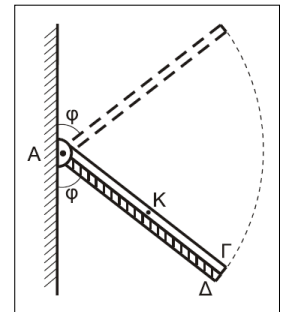
Ε. Από την Αρχή διατήρησης της στροφορμής:

$$L_{\text{προ}} = L_{\text{μετα}} \rightarrow I_1\omega = (I_1 + I_2)\omega' \rightarrow \frac{Md^2}{3}\omega = \left(\frac{Md^2}{3} + \frac{3Md^2}{3}\right)\omega' \rightarrow \omega' = \omega/4 \rightarrow$$

$$\omega' = 0,5\sqrt{6} \text{ rad/s}$$

$$K_{\text{προ}} = \frac{1}{2} \frac{Md^2}{3} \omega^2 \text{ και } K_{\text{μετα}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4Md^2}{3} \omega'^2$$

$$\Pi\% = \frac{K_{\text{μετα}} - K_{\text{προ}}}{K_{\text{προ}}} 100\% \rightarrow \Pi\% = -75\%$$



Δ.15 Από το εσωτερικό σημείο Α ενός ημισφαιρίου ακτίνας $R=1,6\text{m}$ αφήνεται να κυλίσει μια μικρή σφαίρα μάζας $m=1,4\text{kg}$ ακτίνας $r=R/8$. Το ημισφαίριο είναι βυθισμένο στο έδαφος όπως φαίνεται στο σχήμα 3 και η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση.

Α. Να εκφράσετε τη στατική τριβή T_σ που ασκείται στη σφαίρα συναρτήσει με το συνημίτονο της γωνίας, ϕ που σχηματίζει η ακτίνα ΟΓ του ημισφαιρίου με την ευθεία ΑΕ της επιφάνειας του εδάφους.

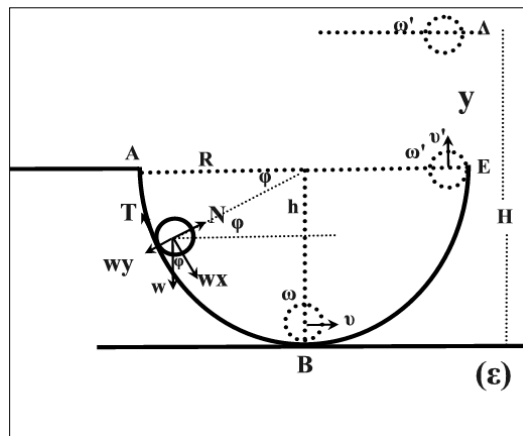
Β. Να υπολογίσετε την κάθετη δύναμη που ασκεί η ημισφαιρική επιφάνεια στη σφαίρα όταν αυτή βρίσκεται στο σημείο Γ όπου $\phi=30^\circ$.

Μια άλλη σφαίρα, όμοια με την προηγούμενη εκτοξεύεται από το κατώτατο σημείο Δ του ημισφαιρίου με ταχύτητα $v=6\text{m/s}$ και κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει στο εσωτερικό του με κατεύθυνση προς το άκρο, Ε.

Γ. Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος από την επιφάνεια του εδάφους που θα φτάσει η σφαίρα κατά την κίνησή της.

Δ. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας και το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας αμέσως μόλις χάσει την επαφή με την επιφάνεια τη ημισφαιρίου στο σημείο, Ε.

Δίνεται για τη σφαίρα $I_{\text{cm}}=0,4mr^2$.



Λύση:

Α. $\Sigma F_x = ma \rightarrow mg \sin \phi - T_\sigma = ma$ (1) και

$\Sigma \tau = I_{\gamma v} \rightarrow T_\sigma r = 0,4mr^2(a/r) \rightarrow T_\sigma = 2ma/5$ (2)

Από (1) (2) $\rightarrow T_\sigma = 2mg \sin \phi / 7 \rightarrow T_\sigma = 4 \sin \phi$

Β. $N - w_y = \frac{mv^2}{x}$ όπου $x = R - r = R - \frac{R}{8} = \frac{7R}{8}$ και $w_y = mg \eta \mu \phi = mg/2$

Άρα $N = \frac{mg}{2} + \frac{mv^2}{x}$ (3)

Από την ΑΔΜΕ: $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow mgh = \frac{7}{10}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{10gh/7}$ όπου $\eta \mu \phi = h/x \rightarrow h = x/2$

Άρα $v = \sqrt{5gx/7}$ (4)

Από (3)(4) $\rightarrow N = \frac{mg}{2} + \frac{5mg}{7} \rightarrow N = 17\text{N}$

Γ. Από την ΑΔΜΕ Από το Β στο Ε με $v = \omega r$ και $v' = \omega' r$:

$E_B = E_E \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}0,4mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}0,4mr^2\omega'^2 + mg(R-r) \rightarrow v' = 4\text{m/s}$

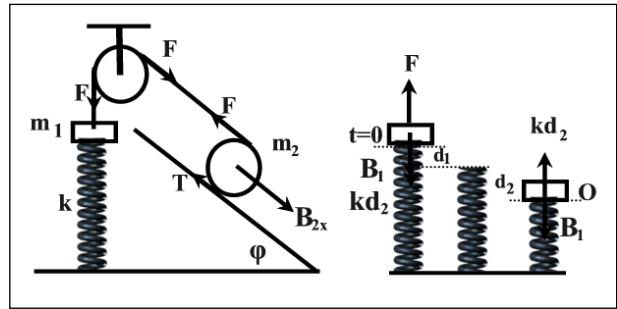
Από την ΑΔΜΕ από το Ε στο Δ με $\omega' = \text{σταθερό}$ και $v_\Delta = 0$

$E_E = E_\Delta \rightarrow \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}0,4mr^2\omega'^2 = \frac{1}{2}0,4mr^2\omega'^2 + mgy \rightarrow y = \frac{v'^2}{2g} \rightarrow y = 0,8\text{m}$

Δ. $\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta K_\pi}{\Delta t} + \frac{\Delta K_\mu}{\Delta t} = 0 + (-mgv) = -mgv \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = -56\text{J/s}$

$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma \tau = 0$

Δ.16 Σώμα μάζας $m_1=1\text{kg}$ ισορροπεί δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$ το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο οριζόντιο έδαφος. Ομογενής κύλινδρος μάζας $m_2=8\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,2\text{m}$ βρίσκεται τοποθετημένος πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$ και συνδέεται με αβαρές νήμα στο πάνω άκρο του Α, μέσω αβαρούς τροχαλίας, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί.



A. Να υπολογιστεί η τάση F του νήματος και η επιμήκυνση του ελατηρίου.

B. Τη χρονική $t=0$ κόβεται το νήμα οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, ενώ το σώμα m_1 κάνει ΑΑΤ. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Γ. Αν για την ΑΑΤ θεωρήσουμε ως θετική τη φορά προς τα κάτω να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο.

Δ. Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t που το σώμα m_1 περνάει για δεύτερη φορά από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Ε. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του κυλίνδρου την ίδια χρονική στιγμή.

Δίνονται για το κύλινδρο η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του $I=\frac{m_2 R^2}{2}$ και το $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

A. Ο κύλινδρος ισορροπεί : $\Sigma \tau_2=0 \rightarrow FR-TR=0=F=T$

$$\Sigma F_{2x}=0 \rightarrow m_2 g \sin \varphi - F - T = 0 \rightarrow \mathbf{F=20\text{N}}$$

Το m_1 ισορροπεί με το ελατήριο να έχει αρχική επιμήκυνση d_1 . Η δύναμη του ελατηρίου είναι, $F_{ελ}=kd_1$ $\Sigma F_1=0 \rightarrow F - m_1 g - F_{ελ}=0 \rightarrow F - m_1 g - kd_1 \rightarrow \mathbf{d_1=0,1\text{m}}$.

B. Ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς ολίσθηση: $\Sigma F_x = m a_{cm} \rightarrow m_2 g \sin \varphi - T = m_2 a_{cm}$ (1)

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow TR = I \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow TR = \frac{m_2 R^2}{2} \cdot \frac{a_{cm}}{R} \rightarrow T = \frac{m_2 a_{cm}}{2} \quad (2). \text{ Από (1)(2)} \rightarrow T=40/3\text{N και } \mathbf{a_{cm}=10/3\text{m/s}^2}.$$

Γ. Τη στιγμή $t_0=0$ το ελατήριο έχει επιμήκυνση $d_1=0,1\text{m}$ από το φυσικό του μήκος. Στη θέση ισορροπίας (O), η συσπείρωση του ελατηρίου είναι d_2 : $m_2 g - kd_2=0 \rightarrow d_2=0,1\text{m}$.

Άρα το πλάτος είναι $A=d_1+d_2 \rightarrow \mathbf{A=0,2\text{m}}$.

$x=A \sin(\omega t + \varphi_0)$ με $\omega=\sqrt{k/m_1}=10\text{rad/s}$ και για $t_0=0$, $x=-A$. Άρα $-A=A \sin \varphi_0 \rightarrow \sin \varphi_0=-1=\varphi_0=3\pi/2\text{rad}$. Άρα: $x=0,2 \sin(10t+3\pi/2)$ (SI).

Δ. Η θέση του φυσικού μήκους είναι η $x=-d_2=-0,1\text{m}$.

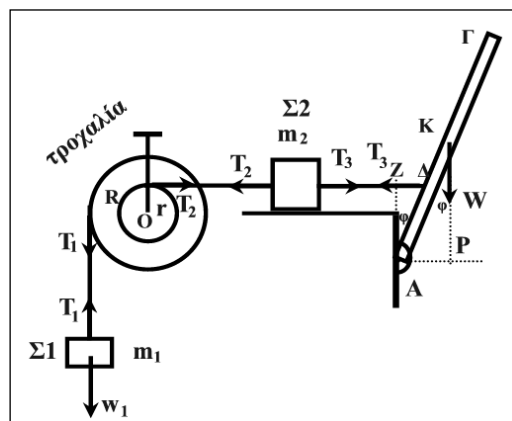
$-0,1=0,2 \sin(10t+3\pi/2) \rightarrow \sin(10t+3\pi/2)=-1/2 \rightarrow t_1=\pi/30\text{s}$ και $t_2=5\pi/30\text{s}$. Άρα $t=3\pi/20\text{s}$ για 2^η φορά.

Άρα η μετατόπιση του κέντρου μάζας θα είναι $x_{cm}=1/2 a_{cm} t^2 \rightarrow \mathbf{x_{cm}=0,46\text{m}}$

Ε. Η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου θα είναι: $\omega=\alpha_{\gamma\gamma} t_2=a_{cm} R t_2$.

$$\text{Άρα η στροφορμή: } L=I\omega=\frac{m_2 R^2}{2} \cdot a_{cm} R t \rightarrow \mathbf{L=0,016\pi \text{ kgm}^2/\text{s}}.$$

Δ.17 Ακαμπτη ομογενής ράβδος ΑΓ με μήκος $d=2\text{m}$ και μάζα $M=4\text{kg}$ έχει το άκρο της Α αρθρωμένο και ισορροπεί έτσι ώστε να σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία κλίσης φ , ($\eta\mu\varphi=0,8$, $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,6$) Στο σημείο Δ δένεται με νήμα και ισχύει $A\Delta=d/3$. Το νήμα συνδέεται με σώμα μάζας $m_2=1\text{kg}$ που ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο και με τη βοήθεια δευτέρου νήματος που είναι τυλιγμένο στο αυλάκι ακτίνας $r=0,1\text{m}$ της τροχαλίας. Στο εξωτερικό αυλάκι της τροχαλίας ακτίνας R είναι τυλιγμένο νήμα που φέρει σώμα $m_1=4\text{kg}$ που ισορροπεί. Η τροχαλία έχει $I=0,62\text{kgm}^2$. Για τη ράβδο δίνεται $I_K=Md^2/12$ και $g=10\text{m/s}^2$.



A. Κατά τη διάρκεια της ισορροπίας του συστήματος να υπολογίσετε τις τάσεις και των τριών νημάτων και η ακτίνα R .

Τη χρονική στιγμή $t=0$ κόβουμε το νήμα στο σημείο Δ. Να υπολογίσετε:

B. Τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου και τις επιταχύνσεις των δύο σωμάτων m_1 και m_2 .

Τη χρονική στιγμή t , που το σώμα m_1 θα έχει πέσει κατά $h=1\text{m}$ να υπολογίσετε :

Γ. την ταχύτητα και το ρυθμό μεταβολής κινητικής ενέργειας του m_1

Δ. τη γωνιακή ταχύτητα το πλήθος των περιστροφών και το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας.

Ε. το ποσοστό της δυναμικής ενέργειας του σώματος m_1 που έγινε κινητική του m_2 .

Ζ. Να υπολογιστούν η γωνιακή ταχύτητα, ω , της ράβδου, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής της ενέργειας και το μέτρο της δύναμης που δέχεται από την άρθρωση Α, τη χρονική στιγμή που γίνεται οριζόντια.

Λύση:

A. $T_1=m_1g \rightarrow T_1=40\text{N}$

$\Sigma \tau_A=0 \rightarrow T_3(AZ)-w(AP) \rightarrow T_3(A\Delta)\sigma\upsilon\nu\varphi=w(AK)\eta\mu\varphi \rightarrow T_3=80\text{N}$

$T_2=T_3=80\text{N}$

$\Sigma \tau_O=0 \rightarrow T_2r-T_1R=0 \rightarrow R=\frac{T_2r}{T_1} \rightarrow R=0,2\text{m}$

B. Όταν κόβεται το νήμα η ράβδος περιστρέφεται γύρω από το Α με $\alpha_{\gamma\nu}$, η τροχαλία γύρω από το Ο με $\alpha_{\gamma\nu}'$. Το σώμα Σ_1 έχει επιτάχυνση a_1 και το Σ_2 , a_2 . Οι τάσεις των νημάτων αλλάζουν και γίνονται T_1' , T_2'

$\Sigma \tau_K=I\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow w(AP)=\frac{Md^2}{3}\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\nu}=\frac{3g\eta\mu\varphi}{2d} \rightarrow \alpha_{\gamma\nu}=6\text{rad/s}$

Σώμα Σ_1 : $m_1g-T_1'=m_1a_1 \rightarrow T_1'=m_1g-m_1a_1$ (1)

Τροχαλία: $T_1'R-T_2'r=I\alpha_{\gamma\nu}' \rightarrow T_1'R-T_2'r=I\cdot\frac{a_1}{R}$ (2)

Σώμα Σ_2 : $T_2'=m_2a_2$ (3) Η σχέση των επιταχύνσεων $\frac{a_1}{R}=\frac{a_2}{r} \rightarrow a_2=\frac{a_1}{2}$ (4)

Με τις (1) (3) και (4) μέσα στην (2) έχουμε: $a_1=2\text{m/s}^2$ και $a_2=1\text{m/s}^2$

Γ. Για πτώση του Σ_1 κατά $h=1\text{m}$ ο χρόνος είναι: $h=\frac{1}{2}a_1t^2 \rightarrow t=1\text{s}$ και η ταχύτητα $v_1=2\text{m/s}$

Δ Θέματα Στερεού με λύσεις

$$\frac{\Delta K_1}{\Delta t} = \Sigma F_1 v_1 = m a_1 v_1 \rightarrow \frac{\Delta K_1}{\Delta t} = 16 \text{ J/s}$$

$$\Lambda. a_1 = \alpha_{\gamma v} R \rightarrow \alpha_{\gamma v} = 10 \text{ rad/s} \quad \omega = \alpha_{\gamma v} t = 10 \text{ rad/s}, \Delta \theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma v} t^2 \rightarrow \Delta \theta = 5 \text{ rad}, \quad N = \frac{\Delta \theta}{2\pi} \rightarrow N = 2,5/\pi \text{ στροφές}$$

$$\frac{\Delta K_{\tau p}}{\Delta t} = \Sigma \tau_O \cdot \omega = -I \alpha_{\gamma v} \omega \rightarrow \frac{\Delta K_{\tau p}}{\Delta t} = 62 \text{ J/s}$$

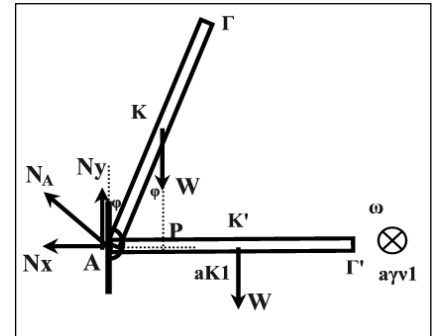
$$E. v_2 = a_2 t = 1 \text{ m/s} \quad K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \rightarrow K_2 = 0,5 \text{ J} \quad U = m_1 g h = 40 \text{ J} \quad \pi \% = \frac{K_2}{U} 100\% = 1,25\%$$

Z. Γράφω το ΘΜΚΕ από την αρχική έως την οριζόντια θέση για να βρω τη γωνιακή ταχύτητα, ω .

$$W_w = K_{\tau \epsilon \lambda} - K_{\alpha \rho \chi} \rightarrow M g (K P) = \frac{1}{2} I_A \omega^2 \rightarrow M g \frac{d}{2} \sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{M d^2}{3} \omega^2 \rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3 g \sin \varphi}{d}} \rightarrow \omega = 3 \text{ rad/s}$$

$$\frac{\Delta K_{\pi \epsilon p}}{\Delta t} = \Sigma \tau \cdot \omega = M g \frac{d}{2} \cdot \omega \rightarrow \frac{\Delta K_{\pi \epsilon p}}{\Delta t} = 120 \text{ J/s}$$



Υπολογίζω την $\alpha_{\gamma v_1}$ στην οριζόντια θέση: $\Sigma \tau_1 = I_A \alpha_{\gamma v_1} \rightarrow M g \frac{d}{2} = \frac{M d^2}{3} \alpha_{\gamma v_1} \rightarrow \alpha_{\gamma v_1} = 7,5 \text{ rad/s}^2$. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας, K θα είναι: $a_{K1} = \alpha_{\gamma v_1} (d/2) = 7,5 \text{ m/s}^2$

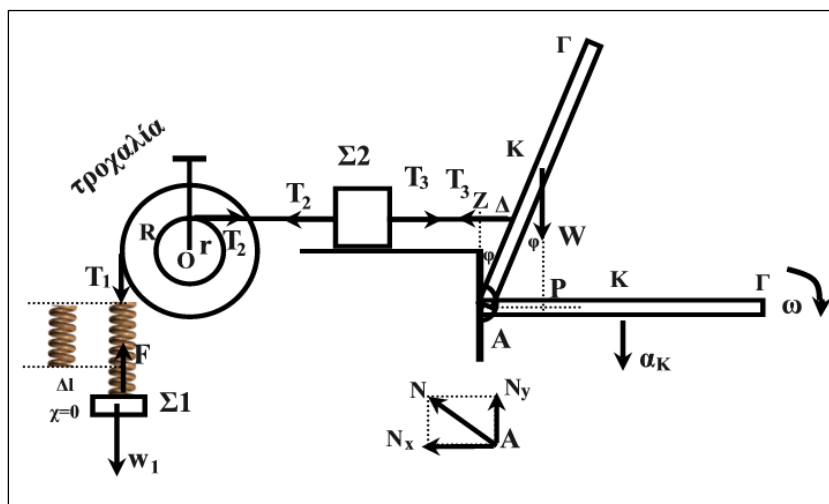
Η ράβδος δέχεται στην άρθρωση A δύο συνιστώσες δυνάμεις N_x , και N_y η συνισταμένη των οποίων είναι η N_A . Η N_x οφείλεται στην κεντρομόλο επιτάχυνση και η N_y στο βάρος, w και την επιτάχυνση a_{K1} του κέντρου μάζας.

$$\Sigma F_x = F_{\kappa \epsilon v} \rightarrow N_x = M \omega^2 \frac{d}{2} \rightarrow N_x = 36 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = M a_{K1} \rightarrow M g - N_y = M a_{K1} \rightarrow N_y = M g - M a_{K1} \rightarrow N_y = 10 \text{ N}$$

$$\text{Άρα } N_A = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} \rightarrow N = 37,36 \text{ N}$$

Δ.18 Άκαμπτη ομογενής ράβδος ΑΓ με μήκος $d=2\text{m}$ και μάζα $M=4\text{kg}$ έχει το άκρο της Α αρθρωμένο και ισορροπεί έτσι ώστε να σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία κλίσης φ , (ημφ=0,8, συνφ=0,6). Στο σημείο Δ δένεται με νήμα και ισχύει $A\Delta=d/3$. Το νήμα συνδέεται με σώμα Σ_2 που ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο και με τη βοήθεια δεύτερου νήματος που είναι τυλιγμένο στο αυλάκι ακτίνας $r=0,1\text{m}$ της τροχαλίας. Στο εξωτερικό αυλάκι της τροχαλίας ακτίνας R είναι σταθερά στερεωμένο αβαρές ελατήριο σταθερά $k=100\text{N/m}$ που φέρει στο ελεύθερο άκρο του σώμα μάζας $m_1=4\text{kg}$ που ισορροπεί. Κατά τη διάρκεια της ισορροπίας του συστήματος να υπολογίσετε



A. τις τάσεις και των δύο νημάτων

B. την ακτίνα R .

Γ. Σταθεροποιούμε την τροχαλία και απομακρύνουμε προς τα κάτω το σώμα από τη θέση ισορροπίας κατά $A=0,8\text{m}$ και το αφήνουμε ελεύθερο. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που περνάει για πρώτη φορά από τη θέση του φυσικού μήκους και η χρονική στιγμή που περνάει, αν θεωρήσουμε ως $t=0$ τη στιγμή που αρχίζει η ΑΑΤ και ως θετική τη φορά προς τα κάτω.

Δ. Κόβουμε τα νήματα οπότε η ράβδος περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο Α. Να υπολογιστούν η επιτάχυνση του κέντρου μάζας Κ και η γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου τη χρονική στιγμή που αυτή διέρχεται από την οριζόντια θέση.

Ε. Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης N που ασκεί ο άξονας στη ράβδο όταν αυτή διέρχεται από την οριζόντια θέση.

Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το άκρο Α και είναι κάθετος σ αυτήν, $I_A=\frac{Md^2}{3}$

Λύση:

A. Το σώμα Σ_1 ισορροπεί υπό την επίδραση του βάρους και της δύναμης του ελατηρίου F .

$$F=m_1g \rightarrow F=40\text{N}$$

$$\Sigma \tau_A=0 \rightarrow T_3(AZ)-w(AP) \rightarrow T_3(A\Delta)\text{συν}\varphi=w(AK)\text{ημ}\varphi \rightarrow T_3=80\text{N}$$

$$\text{Από την ισορροπία του σώματος } \Sigma_2 \text{ έχουμε } \Sigma F_2=0 \rightarrow T_2=T_3=80\text{N}$$

$$\text{B. Από την ισορροπία της τροχαλίας: } \Sigma \tau_O=0 \rightarrow T_2r-FR=0 \rightarrow R=\frac{T_2r}{F} \rightarrow R=0,2\text{m}$$

$$\text{Γ. Το σώμα } \Sigma_1 \text{ ισορροπεί. } \Sigma F_1=0 \rightarrow F=k\Delta l_1 \rightarrow \Delta l_1=0,4\text{m}$$

Στη θέση του ΦΜ η απομάκρυνση είναι $x=-0,4\text{m}$. Από την ΑΔΕΤ

$$\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v=-2\sqrt{3}\text{m/s} \text{ (επειδή κινείται προς τα αρνητικά)}$$

Η εξίσωση απομάκρυνσης είναι: $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$

$$\omega=5\text{rad/s}, A=0,8\text{m} \text{ και } \varphi_0=\pi/2 \text{ rad. Άρα } x=0,8\eta\mu(5t+\pi/2)$$

$$\text{για } x=-0,4\text{m} \rightarrow -0,4=0,8\eta\mu(5t+\pi/2) \rightarrow \dots t=2\pi/15\text{s}$$

Δ Θέματα Στερεού με λύσεις

Δ. Για τη γωνιακή ταχύτητα στην οριζόντια θέση γράφω ΘΜΚΕ για τη ράβδο

$$W_{\beta} = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \rightarrow Mg(KP) = \frac{1}{2} I_A \omega^2 \rightarrow Mg \frac{d}{2} \sin \varphi = \frac{1}{2} \frac{M d^2}{3} \cdot \omega^2 \rightarrow \omega = 3 \text{ rad/s}$$

Για τη γωνιακή επιτάχυνση στην οριζόντια θέση γράφω τον θεμελιώδη νόμο

$$\Sigma \tau_O = I_A \cdot \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow Mg \frac{d}{2} = \frac{M d^2}{3} \cdot \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow \alpha_{\gamma\gamma} = 7,5 \text{ rad/s}^2 \quad \text{και} \quad \alpha_K = \alpha_{\gamma\gamma} \cdot \frac{d}{2} \rightarrow \alpha_K = 7,5 \text{ m/s}^2$$

Ε. Η ράβδος δέχεται από τον άξονα στο Α τη δύναμη Ν που αναλύεται σε δύο συνιστώσες η οριζόντια N_x που υπολογίζεται από την κεντρομόλο δύναμη και η κατακόρυφη N_y που υπολογίζεται από το 2^ο νόμο του Newton

$$\Sigma F_x = F_{\text{κεν}} \rightarrow N_x = M \omega^2 \cdot \frac{d}{2} \rightarrow N_x = 18 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = M \cdot \alpha_K \rightarrow Mg - N_y = M \cdot \alpha_K \rightarrow N_y = 10 \text{ N}$$

$$\text{Άρα: } N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} \rightarrow N = \sqrt{424} = 20,6 \text{ N}$$

Δ.19 Ομογενής ράβδος AB μήκους $L=3\text{m}$ μάζας $M=12\text{kg}$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα που περνάει από το σημείο O και είναι κάθετος σε αυτήν. Η απόσταση AO είναι $AO=1\text{m}$. Στο άκρο B υπάρχει σταθερά στερεωμένη σημειακή σφαίρα Σ_2 μάζας $m_2=2\text{kg}$. Στο άκρο A η ράβδος συνδέεται με τεντωμένο νήμα ΑΔ με σώμα Σ_1 μάζας $m_1=1\text{kg}$ που είναι στερεωμένο και δεμένο στο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=400\text{N/m}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Όλο το σύστημα αρχικά ισορροπεί.

A. Να υπολογιστούν το μέτρο της τάσης του νήματος και το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος στο σημείο O από τον άξονα περιστροφής, όταν ισορροπεί.

Τη χρονική στιγμή $t=0$ κόβουμε το νήμα ΑΔ και το σώμα Σ_1 αρχίζει να ταλαντώνεται αρμονικά, ενώ η ράβδος με το Σ_2 να περιστρέφεται χωρίς τριβές.

B. Να υπολογιστεί το πλάτος της ταλάντωσης και να γραφεί η εξίσωση απομάκρυνσης των ΑΑΤ του σώματος Σ_1 . Ως θετική θεωρείται η κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα πάνω.

Γ. Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή $t_1=\pi/60\text{s}$.

Δ. Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης του ελατηρίου από τη στιγμή $t=0$ μέχρι τη στιγμή που το σώμα Σ_1 σταματάει στιγμιαία για πρώτη φορά.

Ε. Να υπολογιστεί το μέτρο της ροπής που δέχεται η σφαίρα Σ_2 όταν η ράβδος βρίσκεται στην οριζόντια θέση αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος.

Ζ. Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας Σ_2 τη χρονική στιγμή που η ράβδος έχει διαγράψει γωνία $\varphi=30^\circ$ σε σχέση με την αρχική και οριζόντια θέση της.

Δίνεται. Δίνονται το $g=10\text{m/s}^2$, και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της K και είναι κάθετος σαυτήν, $I_K=\frac{ML^2}{12}$

Λύση:

A. $\Sigma \tau_o=0 \rightarrow T_1(AO)-Mg(KO)-m_2g(BO)=0 \rightarrow T_1=100\text{N}$

$\Sigma F_y=0 \rightarrow F=Mg+m_2$

$g+T_1 \rightarrow F=240\text{N}$

B. $T_1 > m_1g$ και άρα το ελατήριο είναι τεντωμένο στη θέση ισορροπίας του σώματος m_1 .

Στην αρχική θέση ισορροπίας: $\Sigma F_1=0 \rightarrow T_1=F_{ελ}+m_1g \rightarrow$

$F_{ελ}=90\text{N} \rightarrow k \cdot \Delta \ell_1=90 \rightarrow \Delta \ell_1=9/40\text{m}$

Στη νέα θέση ισορροπίας του m_1 χωρίς πλέον την τάση T_1 του νήματος:

$\Sigma F_0=0 \rightarrow k \cdot \Delta \ell_2=m_1g \rightarrow \Delta \ell_2=1/40\text{m}$

Το πλάτος είναι $A=\Delta \ell_1+\Delta \ell_2 \rightarrow A=0,25\text{m}$

Η γωνιακή συχνότητα $\omega=\sqrt{k/m_1} \rightarrow \omega=20\text{rad/s}$

Η εξίσωση απομάκρυνσης: $x=0,25\eta\mu(20t+\pi/2)\text{ SI}$

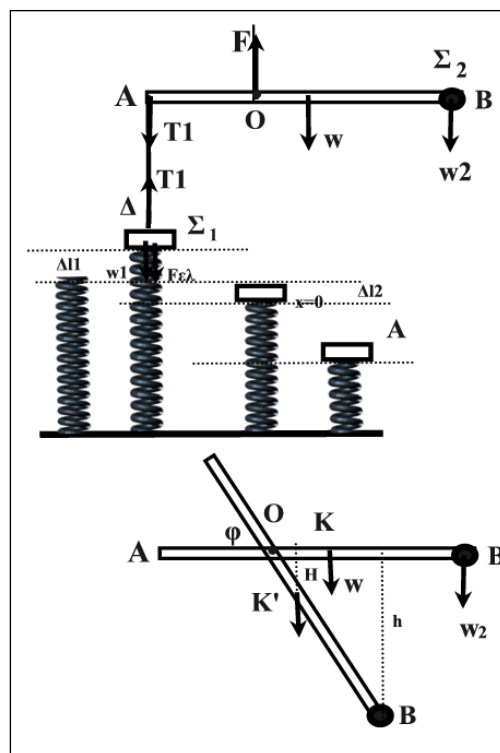
Γ. Η εξίσωση της ταχύτητας: $v=5\cdot\sigma\upsilon\nu(20t+\pi/2)\text{ SI}$

Για $t_1=\pi/60\text{s}$ από τις εξισώσεις παίρνουμε: $x_1=1/8\text{m}$ και

$v=-5\sqrt{3}/2\text{ m/s}$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$\Delta K/\Delta t=\Sigma F \cdot v=-kx \cdot v=125\sqrt{3}\text{J/s}$



Δ Θέματα Στερεού με λύσεις

Δ. Το έργο της δύναμης του ελατηρίου ισούται με την διαφορά των δυναμικών ενεργειών του ελατηρίου από την αρχική επιμήκυνση $\Delta\ell_1$ έως την τελική συσπείρωση $(A+\Delta\ell_2)$ πάντοτε σε σχέση με το φυσικό μήκος.

$$W_{ελ} = U_{αρχ} - U_{τελ} = \frac{1}{2}k\Delta\ell_1^2 - \frac{1}{2}k(A+\Delta\ell_2)^2 \rightarrow W_{ελ} = -5J$$

Ε. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς Ο: $I_{ρ,Ο} = \frac{ML^2}{12} + m(OK)^2 = 12\text{kgm}^2$
Η ροπή αδράνειας της σφαίρας Σ_2 ως προς το Ο. $I_{σ,Ο} = m_2(OB)^2 = 8\text{kg}\cdot\text{m}^2$
Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς το Ο είναι: $I_{ολ} = 20\text{kgm}^2$

Από τον 2^ο νόμο βρίσκω τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος που είναι κοινή για τη ράβδο και τη σφαίρα:

$$\Sigma\tau_O = I_{ολ} \cdot \alpha_{\gamma\upsilon} \rightarrow Mg(OK) + m_2g(OB) = I_{ολ} \cdot \alpha_{\gamma\upsilon} \rightarrow \alpha_{\gamma\upsilon} = 5\text{rad/s}^2$$

Η συνολική ροπή που δέχεται η σφαίρα Σ_2 είναι: $\tau_2 = I_{σ,Ο} \cdot \alpha_{\gamma\upsilon} \rightarrow \tau_2 = 40\text{N}\cdot\text{m}$

Ζ. Γράφω το ΘΜΚΕ για το σύστημα ράβδου – σφαίρας για τη στροφή κατά $\varphi = 30^\circ$. Τα έργα του βάρους και της σφαίρας είναι θετικά λόγω της πτώσης και είναι

$$W_w = Mg \cdot H = Mg(OK) \eta\mu\varphi = 120 \cdot \frac{1}{4} = 30J$$

$$W_{w2} = m_2gh = m_2g(OB) \eta\mu\varphi = 20 \cdot 1 = 20J$$

Όπου από το σχήμα φαίνεται: $H = (OK) \eta\mu\varphi = 1/4\text{m}$ και $h = (OB) \eta\mu\varphi = 1\text{m}$

$$W_w + W_{w2} = \frac{1}{2}I_{ολ} \omega^2 \rightarrow Mg \cdot H + mgh = \frac{1}{2}I_{ολ} \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{5}\text{rad/s}$$

Δ.20 Σώμα Σ_1 μάζας $m_1=1\text{kg}$ ισορροπεί δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$ το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο οριζόντιο έδαφος. Ομογενής κύλινδρος μάζας $M=8\text{kg}$ και ακτίνας R βρίσκεται τοποθετημένος πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$ και συνδέεται με αβαρές νήμα στο πάνω άκρο του Α, μέσω αβαρούς τροχαλίας, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί.

A. Να υπολογιστεί η τάση F του νήματος και η επιμήκυνση του ελατηρίου.

Β. Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή του συντελεστή οριακής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και κεκλιμένου επιπέδου ώστε να μην είναι είναι δυνατή η ολίσθηση του κυλίνδρου.

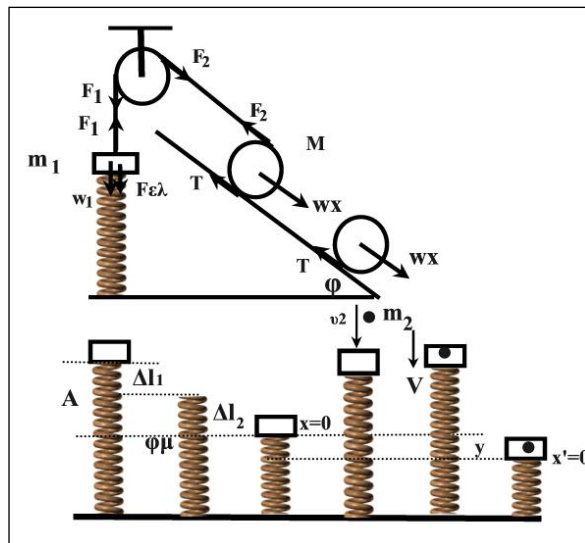
Τη χρονική $t=0$ κόβεται το νήμα οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, ενώ το σώμα m_1 κάνει ΑΑΤ με $D=k$.

Γ. Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο και να βρείτε τη χρονική στιγμή που το σώμα m_1 περνάει για δεύτερη φορά από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Για την AAT να θεωρήσετε ως θετική τη φορά προς τα κάτω.

Δ. Καθώς το σώμα Σ_1 ταλαντώνεται όταν φτάνει στη μέγιστη αρνητική του απομάκρυνση συγκρούεται πλαστικά με σώμα Σ_2 ίσης μάζας, $m_2=m_1$ που πέφτει κατακόρυφα πάνω του με ταχύτητα v_2 . Μετά την κρούση του συσσωμάτωμα κάνει νέες ΑΑΤ με πλάτος $A'=\sqrt{0,41}m$. Να υπολογιστεί η ταχύτητα v_2 του σώματος Σ_2 και ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Ε. Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t=3s$ και ενώ ακόμα κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο.

Δίνονται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον κύριο άξονά του $I_{cm} = \frac{1}{2} M \cdot R^2$ και το $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Λύση

A. Ο κύλινδρος ισορροπεί: $\Sigma \tau_K=0 \rightarrow F_2 R - TR=0 \rightarrow F_2=T$ (1)

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_2 + T = Mg \eta \mu \phi = 0 \rightarrow F_2 = T = 20 \text{ N}$$

B. Για να μην ολισθαίνει πρέπει

$$T \leq T_{op} \rightarrow T \leq \mu_{\sigma} N \rightarrow T \leq \mu_{\sigma} M g \sin \varphi \rightarrow \mu_{\sigma} \geq \frac{T}{M g \sin \varphi} \rightarrow \mu_{\sigma} \geq \sqrt{3/6}$$

Γ. Η τροχαλία ισορροπεί: $\Sigma \tau = 0 \rightarrow F_1 r - F_2 r = 0 \rightarrow F_2 = F_1 = 20 \text{ N}$

Το Σ_1 ισορροπεί: $\Sigma F=0 \rightarrow F_1-F_{\varepsilon\lambda}-m_1g=0 \rightarrow k\Delta l_1=F_1-m_1g \rightarrow \Delta l_1=0,1m$ είναι η επιμήκυνση από το φυσικό μήκος τους ελατηρίου.

Όταν κοπεί το νήμα τότε στη θέση ισορροπίας του Σ_1 ισχύει $\Sigma F_0=0 \rightarrow m_1 g - k \Delta \ell_2 = 0 \rightarrow \Delta \ell_2 = 0,1 \text{ m}$
 η συσπείρωση του ελατηρίου σε σχέση με το φυσικό μήκος.

Άρα το πλάτος είναι $A = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 = 0,2\text{m}$

Δ Θέματα Στερεού με λύσεις

Η γωνιακή συχνότητα είναι: $\omega = \sqrt{k/m_1} \rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$

Και η αρχική φάση $\phi_0 = 3\pi/2$ αφού για $t=0$ $x=-A$

Αρα **$x = 0,2\eta\mu(10t + 3\pi/2)$** (SI)

Στη θέση του φυσικού μήκους $x_1 = -\Delta\ell_1 = -0,1 \text{ m}$. Αρα

$-0,1 = 0,2\eta\mu(10t + 3\pi/2) \rightarrow \eta\mu(10t + 3\pi/2) = \eta\mu(-\pi/6) \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{t = \pi/30 \text{ s}}$

Δ. Μόλις πριν την κρούση το Σ_1 έχει στιγμιαία ταχύτητα μηδέν. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα έχει ταχύτητα V . Από την ΑΔΟ έχουμε:

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V \rightarrow v_2 = \frac{(m_1 + m_2) V}{m_2} \quad (2)$$

Η νέα θέση ισορροπίας του $(m_1 + m_2)$ βρίσκεται πιο χαμηλά από την αρχική κατά y . Η αρχική βρίσκεται κατά $\Delta\ell_2 = 0,1 \text{ m}$ κάτω από το ΦΜ.

$$\Sigma F' = 0 \rightarrow (m_1 + m_2)g = k(\ell_2 + y) \rightarrow |y| = 0,1 \text{ m}.$$

Αρα αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε απομάκρυνση απόλυτης τιμής $|x| = |y| + A = 0,3 \text{ m}$, διότι $x = -0,3 \text{ m}$

Από την ΑΔΕΤ βρίσκουμε την ταχύτητα V μετά την κρούση

$$\frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2} k A'^2 \rightarrow V = 4 \text{ m/s} \quad (3)$$

Από (2)(3) $\rightarrow \mathbf{v_2 = 8 \text{ m/s}}$

Για το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = 0 \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} + \frac{\Delta U}{\Delta t} = 0 \rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{\Delta K}{\Delta t} = -\Sigma F \cdot v = -(-kx) \cdot v_2 = 100(-0,3)4 = \mathbf{-120 \text{ J/s}}$$

Ε. Για την κίνηση του κυλίνδρου με επιτάχυνση του CM ίση με a

$$\Sigma F_x = M \cdot a \rightarrow Mg \eta \mu \phi - T = Ma \quad (1)$$

$$\Sigma \tau_{cm} = I \cdot \alpha_{\gamma\omega} \rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \frac{a}{R} \rightarrow T = \frac{1}{2} M \cdot a \quad (2) \quad \text{Από (1)(2)} \rightarrow \mathbf{a = 10/3 \text{ m/s}^2}$$

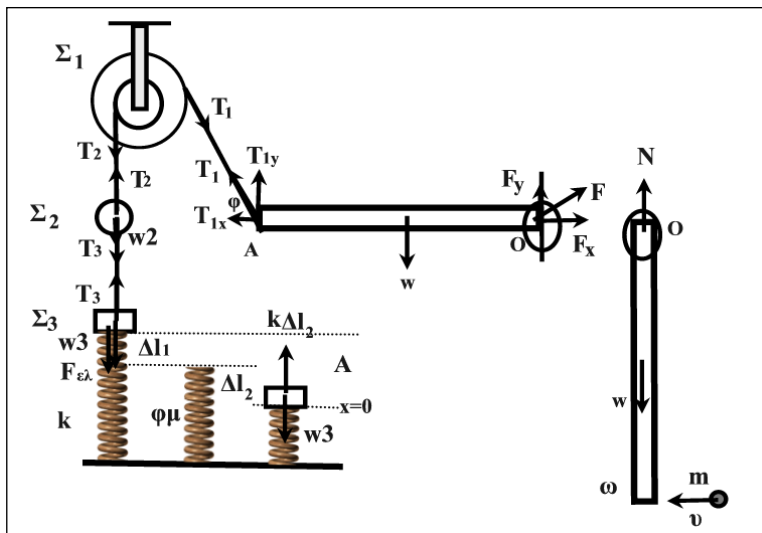
Αρα η ταχύτητα θα είναι $v_{cm} = a \cdot t = 10 \text{ m/s}$ και η κινητική ενέργεια

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{3}{4} M \cdot v_{cm}^2 \rightarrow \mathbf{K = 600 \text{ J}}$$

Δ.21 Στο σύστημα του σχήματος η ράβδος $OA=\ell=3\text{m}$ έχει μάζα $M=2\text{kg}$, η σφαίρα Σ_2 μάζας $m_2=2\text{kg}$ και το σώμα Σ_3 μάζα $m_3=1\text{kg}$. Η τροχαλία είναι σταθερή και αποτελείται από δύο δίσκους με ακτίνες R και r με $R=2r$. Το σώμα Σ_3 είναι συνδεδεμένο με το άκρο ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί με τα αβαρή νήματα τεντωμένα και το ιδανικό ελατήριο τεντωμένο κατά Δl_1 από το φυσικό του μήκος.

Α. Να υπολογιστούν το μέτρο της δύναμης T_1 που δέχεται η ράβδος από το νήμα στο σημείο A και το μέτρο της δύναμης F που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση στο σημείο O .

Κόβουμε το νήμα που συνδέει τα σώματα Σ_2 και Σ_3 τη χρονική στιγμή $t=0$ και το μεν σώμα Σ_3 με το ελατήριο αρχίζουν τις ΑΑΤ με σταθερά k η δε ράβδος περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το άκρο O .



Β. Να υπολογίσετε το πλάτος A των ΑΑΤ και να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης της ΑΑΤ αν ως θετική θεωρηθεί η φορά προς τα πάνω.

Γ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος Σ_3 τη στιγμή που περνάει από τη θέση του φυσικού μήκους για πρώτη φορά.

Δ. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης του ελατηρίου από τη χρονική στιγμή $t=0$ μέχρι το σώμα να περάσει από τη θέση ισορροπίας του.

Ε. Να υπολογίσετε τα δύναμη που ασκεί ο άξονας O στη ράβδο όταν αυτή φτάνει στην κατακόρυφη θέση.

Ζ. Τη στιγμή που η ράβδος γίνεται κατακόρυφη ένα βλήμα μάζας $m=0,2\text{kg}$ και ταχύτητας v σφηνώνεται κάθετα στο άκρο A της ράβδου ακαριαία. Να βρείτε την ταχύτητα v του βλήματος ώστε μετά την κρούση το συσσωμάτωμα να κινηθεί αντίθετα με ταχύτητα ίσου μέτρου με αυτή που είχε η ράβδος μόλις πριν την κρούση.

Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$, $\eta\mu\phi=0,5$, $\sigma\upsilon\nu\phi=\sqrt{3}/2$ και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που περνάει από το O και είναι κάθετος σ' αυτήν $I_O=\frac{1}{3}M\ell^2$.

Λύση:

Α. Για τη ράβδο:

$$\Sigma\tau_O=0 \rightarrow -T_1\eta\mu\phi + Mg(\ell/2)=0 \rightarrow T_1=20\text{N}$$

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow T_{1x}=F_x \rightarrow F_x=T_1\sigma\upsilon\nu\phi \rightarrow F_x=10\sqrt{3}\text{N}$$

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_y+T_{1y}=Mg \rightarrow F_y=10\text{N}$$

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2} \rightarrow F=20\text{N}$$

Β. Για την τροχαλία: $\Sigma\tau_K=0 \rightarrow T_2r-T_1R=0 \rightarrow T_2=40\text{N}$

Για το σώμα Σ_2 : $\Sigma F_2=0 \rightarrow T_2=T_3+w_2=T_3=20\text{N}$

Για το σώμα Σ_3 : $\Sigma F_3=0 \rightarrow T_3=m_3g+k\Delta l_1 \rightarrow \Delta l_1=0,1\text{m}$

Για το σώμα Σ_3 στη νέα Θ.Ι. $\Sigma F=0 \rightarrow w_3=k\cdot\Delta l_2 \rightarrow \Delta l_2=0,1\text{m}$

Το πλάτος της ΑΑΤ είναι: $A=\Delta l_1+\Delta l_2=0,2\text{m}$

Η γωνιακή συχνότητα είναι: $\omega=\sqrt{k/m_3}=10\text{rad/s}$ για $t=0$, $x=+A$ και άρα $\phi_0=\pi/2\text{ rad}$

Δ Θέματα Στερεού με λύσεις

Η εξίσωση απομάκρυνσης: $x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0) = 0,2 \cdot \eta\mu(10t + \pi/2)$ SI

Γ. Όταν περνάει από τη θέση του φυσικού μήκους τότε η απομάκρυνση είναι $x_1 = \Delta \ell_2 = 0,1\text{m}$

ΑΔΕΤ: $E = K + U \rightarrow \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} m_3 v^2 = \frac{1}{2} k A^2 \rightarrow v = \sqrt{3\text{m/s}}$

Δ. Όταν ξεκινάει η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι $\Delta \ell_1 = 0,1\text{m}$ και όταν περνάει από τη θέση ισορροπίας $\Delta \ell_2 = 0,1\text{m}$. Το έργο της δύναμης του ελατηρίου είναι:

$$W_{ελ} = U_{αρχ} - U_{τελ} = \frac{1}{2} k \Delta \ell_1^2 - \frac{1}{2} k \cdot \Delta \ell_2^2 \rightarrow W_{ελ} = 0$$

Ε. Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν γίνεται κατακόρυφη υπολογίζεται από ΘΜΚΕ:

$$W_w = K_{τελ} - K_{αρχ} \rightarrow Mg \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{5\text{rad/s}}$$

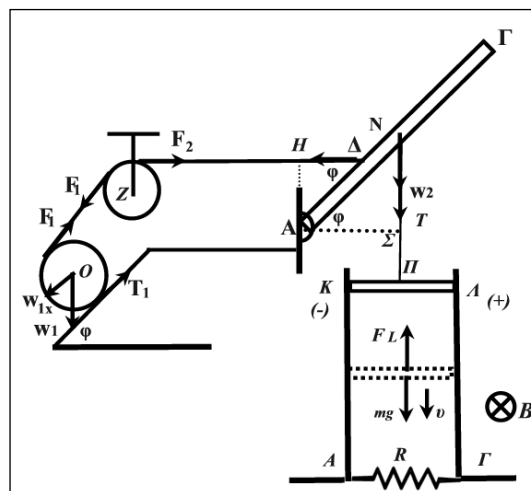
Η δύναμη στον άξονα υπολογίζεται από τον 2^ο νόμο Newton για τη στροφική όμως κίνηση: $\Sigma F = F_{κεν}$, (κεντρομόλος δύναμη).

$$\Sigma F_y = F_{κεν} \rightarrow N - Mg = M \omega^2 \cdot \frac{\ell}{2} \rightarrow N = 45\text{N}$$

Ζ. Για την πλαστική κρούση γράφω την αρχή διατήρησης της στροφορμής ως προς τον άξονα Ο με θετική τη φορά της περιστροφής της ράβδου. Οι γωνιακές ταχύτητες πριν και μετά την κρούση έχουν μέτρο $\omega = \omega' = \sqrt{5\text{rad/s}}$. Η ροπή αδράνειας του συσσωματώματος ως προς τον άξονα Ο, είναι $I_{ολ} = I_O + m \cdot \ell^2 = 6 + 1,8 = 7,8\text{kgm}^2$. Συνεπώς

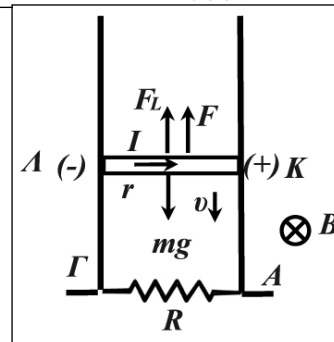
$$L_{\text{προ}} = L_{\text{μετα}} \rightarrow I_O \cdot \omega - m v \ell = - I_{ολ} \cdot \omega' \rightarrow v = 23\sqrt{5}\text{m/s}$$

Δ.22 Στο σύστημα του σχήματος βλέπουμε τον ομογενή κύλινδρο κέντρου O , μάζας $m_1=6\text{kg}$ και ακτίνας x να ισορροπεί πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο με τη βοήθεια νήματος το οποίο αφού περάσει από τροχαλία κέντρου Z ακτίνας b καταλήγει στο σημείο Δ της ομογενούς ράβδου, $ΑΓ$ που έχει μάζα m_2 . Η ράβδος στηρίζεται σε ακλόνητο σημείο μέσω άρθρωσης A . Η απόσταση $A\Delta$ είναι $d/3$, όπου d το μήκος της ράβδου. Οι γωνίες φ έχουν $\eta\mu\varphi=0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,8$. Στο κέντρο N της ράβδου έχει δεθεί νήμα που καταλήγει στο κέντρο ομογενούς αγωγού $ΚΛ$ μάζας $m=0,8\text{kg}$ η οποία ισορροπεί σε επαφή με δύο λείες κατακόρυφες αγωγιμες ράγες αμελητέας αντίστασης.



A. Να υπολογιστεί η μάζα m_2 της ράβδου αν όλο το σύστημα ισορροπεί.

Κόβουμε το νήμα $ΝΠ$ και ο αγωγός $ΚΛ$, του σχήματος, με μήκος $L=1\text{m}$, αντίσταση $r=1\Omega$ απελευθερώνεται και κατεβαίνει τις ράγες χωρίς τριβές, ενώ το κάθετο μαγνητικό πεδίο έχει ένταση $B=2\text{T}$. Οι ράγες συνδέονται στο κάτω μέρος τους με αντιστάτη, αντίστασης $R=3\Omega$. Από τη στιγμή $t_0=0$ που κόβεται το νήμα ο αγωγός $ΚΛ$ δέχεται σταθερή κατακόρυφη δύναμη $F=6\text{N}$ με φορά προς τα πάνω.



B. Να δείξετε ότι ο αγωγός $ΚΛ$ αποκτάει κάποια στιγμή οριακή ταχύτητα και να την υπολογίσετε **Γ.** Αν από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα και ξεκίνησε μέχρι να αποκτήσει οριακή ταχύτητα έπεσε κατά $y=1\text{m}$ να χωρίς να φτάσει στο επίπεδο $ΑΓ$, να υπολογίσετε τη θερμότητα Joule που εκλύθηκε σε κάθε αντιστάτη στο διάστημα αυτό.

Δ. Πόσο φορτίο μετακινήθηκε μέσα από τον αγωγό κατά την πτώση $y=1\text{m}$;

Ε. Μετά το κόψιμο του νήματος απελευθερώνεται και ο κύλινδρος και κατεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο. Για ποιες τιμές του συντελεστή οριακής τριβής είναι δυνατή η κύλιση του κυλίνδρου χωρίς ολίσθηση.

Δίνονται ότι $g=10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον κύριο άξονά του $I_{cm}=\frac{1}{2}m_1\cdot x^2$.

Λύση

A. Ο αγωγός $ΚΛ$ ισορροπεί άρα $mg-T=0 \rightarrow T=8\text{N}$

Η τροχαλία (Σ) ισορροπεί: $\Sigma\tau_Z=0 \rightarrow F_1b-F_2\cdot b=0 \rightarrow F_1=F_2$

Ο δίσκος (O) ισορροπεί: $\Sigma\tau_O=0 \rightarrow F_1x-T_1x=0 \rightarrow F_1=T_1$

$\Sigma F_x=0 \rightarrow F_1+T_1-m_1g\eta\mu\varphi=0 \rightarrow 2F_1=m_1g\eta\mu\varphi \rightarrow F_1=18\text{N}$ άρα $F_1=F_2=18\text{N}$. (1)

Η ράβδος $ΑΓ$ ισορροπεί: $\Sigma\tau_A=0 \rightarrow F_2(AH)-(w_2+T)(A\Sigma)=0$ (2)

με $(AH)=A\Delta\cdot\eta\mu\varphi=\frac{d}{3}\cdot 0,6=0,2d$ και $(A\Sigma)=(AN)\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{d}{2}\cdot 0,8=0,4d$

Από (1)(2) $\rightarrow w_2+T=F_2\cdot\frac{(AH)}{(A\Sigma)} \rightarrow w_2+T=18\cdot\frac{0,2d}{0,4d} \rightarrow w_2+8\text{N}=9\text{N} \rightarrow w_2=1\text{N} \rightarrow m_2=0,1\text{kg}$.

Δ Θέματα Στερεού με λύσεις

Β. Η κίνηση της ράβδου προκαλεί μεταβολή της μαγνητικής ροής που διέρχεται από το εμβαδόν ΑΚΛΓ. Η μεταβολή της ροής προκαλεί στα άκρα ΚΛ, ΗΕΔ από επαγωγή:

$$|E| = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = \frac{\Delta(BS)}{\Delta t} = \frac{B \Delta(S)}{\Delta t} = \frac{BL \cdot \Delta x}{\Delta t} \rightarrow |E| = BLv$$

$$I = \frac{E}{R_{\text{ολ}}} = \frac{BLv}{R+r} \quad F_L = BIL = B \cdot \frac{BLv}{R+r} L = \frac{B^2 v L^2}{R+r}$$

$$\text{Από το 2° Newton: } \Sigma F = ma \rightarrow mg - F - F_L = ma \rightarrow mg - F - \frac{B^2 v L^2}{R+r} = ma \quad (3)$$

Καθώς η ταχύτητα αυξάνεται έρχεται κάποια στιγμή και η συνισταμένη δύναμη και η επιτάχυνση μηδενίζονται, δηλαδή $a=0$. Τότε η ταχύτητα σταθεροποιείται, γίνεται οριακή.

$$(3) \rightarrow mg - F - \frac{B^2 v L^2}{R+r} = 0 \rightarrow v_{\text{op}} = \frac{(mg-F)(R+r)}{B^2 L^2} \rightarrow v_{\text{op}} = 2 \text{ m/s}$$

Γ. Από το ΘΜΚΕ για την πτώση κατά y έχουμε:

$$W_{\text{mg}} + W_F + W_{FL} = K_{\text{op}} - 0 \rightarrow mgy - F \cdot y + W_{FL} = \frac{1}{2} m v_{\text{op}}^2 \rightarrow W_{FL} = -0,4 \text{ J}$$

Άρα η θερμότητα Joule κατά την πτώση $y=1 \text{ m}$ είναι **$Q=0,4 \text{ J}$**

$$W_r + W_R = 0,4 \text{ J}$$

$$\frac{W_r}{W_R} = \frac{\Sigma I^2 r dt}{\Sigma I^2 R dt} = \frac{r}{R} = \frac{1}{3} \quad \text{Από τη λύση του συστήματος } \mathbf{W_r=0,1 \text{ J}} \text{ και } \mathbf{W_R=0,3 \text{ J}}$$

$$\mathbf{\Delta. Από το νόμο του Neumann: } q = \frac{\Delta \Phi}{R+r} \rightarrow q = \frac{B(y \cdot L)}{R+r} \rightarrow \mathbf{q=0,5 \text{ C}}$$

Ε. Για την κίνηση του κυλίνδρου με επιτάχυνση του CM ίση με a .

$$\Sigma F_x = m_1 \cdot a \rightarrow m_1 g \eta \mu \phi - T = m_1 \cdot a \quad (1)$$

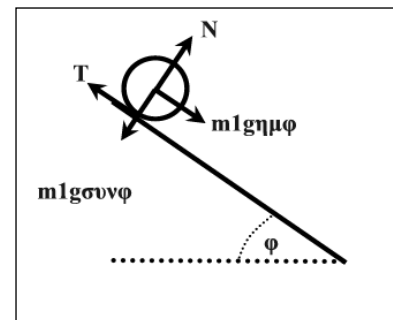
$$\Sigma \tau_{\text{cm}} = I \cdot \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} m_1 x^2 \cdot \frac{a}{R} \rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 \cdot a \quad (2)$$

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow T = \frac{1}{3} m_1 g \eta \mu \phi \quad (3)$$

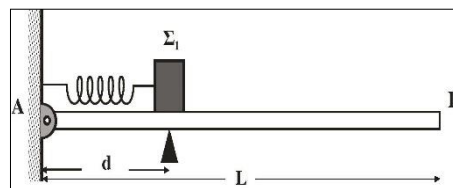
Για να μην ολισθαίνει θα πρέπει:

$$T \leq T_{\text{op}} \rightarrow T \leq \mu_{\sigma} N \rightarrow \frac{1}{3} m_1 g \eta \mu \phi \leq \mu_{\sigma} m_1 g \sigma \nu \phi \rightarrow \mu_{\sigma} \geq \frac{\epsilon \phi \phi}{3} \rightarrow$$

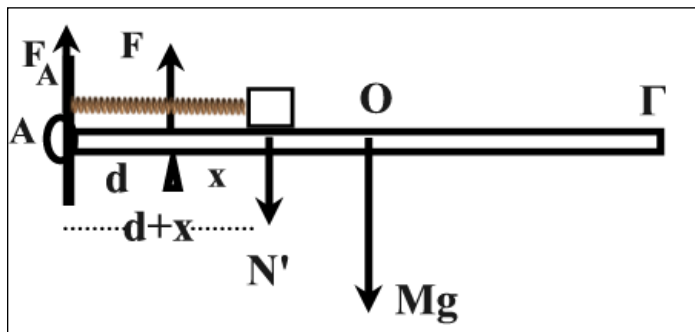
$$\mathbf{\mu_{\sigma} \geq \sqrt{3}/6}$$



Δ.23 Λεία οριζόντια σανίδα μήκους $L = 3\text{m}$ και μάζας $M = 0,4\text{ kg}$ αρθρώνεται στο άκρο της Α σε κατακόρυφο τοίχο. Σε απόσταση $d = 1\text{m}$ από τον τοίχο, η σανίδα στηρίζεται ώστε να διατηρείται οριζόντια. Ιδανικό αβαρές ελατήριο σταθεράς $k = 100\text{ N/m}$ συνδέεται με το ένα άκρο του στον τοίχο και το άλλο σε σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1\text{kg}$. Το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, ο άξονάς του είναι οριζόντιος και διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος Σ_1 .



Το κέντρο μάζας του σώματος Σ_1 βρίσκεται σε απόσταση d από τον τοίχο. Στη συνέχεια, ασκούμε στο σώμα Σ_1 σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 40\text{N}$ με κατεύθυνση προς το άλλο



άκρο Γ της σανίδας. Όταν το σώμα Σ_1 διανύσει απόσταση $\Delta x = 5\text{ cm}$, η δύναμη παύει να ασκείται στο σώμα και στη συνέχεια, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

A. Να υπολογίσετε το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ_1 .

B. Να εκφράσετε το μέτρο της δύναμης F_A που δέχεται η σανίδα από τον τοίχο σε συνάρτηση με την απομάκρυνση του σώματος Σ_1 και να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση.

Κατά μήκος της σανίδας από το άκρο Γ κινείται σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 1\text{Kg}$ με ταχύτητα $v_2 = 2\sqrt{3}\text{m/s}$. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, όταν η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 είναι x_1 , όπου $x_1 \geq 0$. Το σώμα Σ_1 μετά την κρούση ταλαντώνεται με το μέγιστο δυνατό πλάτος.

Γ. Να βρείτε την απομάκρυνση x_1 .

Δ. Να βρείτε μετά από πόσο χρονικό διάστημα από τη στιγμή της κρούσης τα δύο σώματα θα συγκρουστούν για δεύτερη φορά.

Ε. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας του Σ_1 μόλις πριν τη δεύτερη κρούση

Ζ. Αν η δεύτερη κρούση θεωρηθεί πλαστική ποιο είναι το νέο πλάτος της ΑΑΤ του συσσωματώματος;

Θεωρούμε θετική τη φορά της απομάκρυνσης προς το Γ. Τριβές στην άρθρωση και στο υποστήριγμα δεν υπάρχουν. Δίνεται: επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

A. Προσοχή η δύναμη δρα μόνο για 5cm αλλά δίνει στο σώμα και κινητική ενέργεια με αποτέλεσμα το πλάτος να είναι μεγαλύτερο από το Δx . Ολο το έργο της F μετατρέπεται σε ενέργεια της ΑΑΤ.

$$W_F = E \rightarrow F\Delta x = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow A = 0,2\text{m}$$

B. Σε τυχαία απομάκρυνση x από τη θέση του φυσικού μήκους το σώμα ασκεί στη σανίδα δύναμη $N' = N$ όπου N η αντίδραση της σανίδας στο σώμα που είναι: $N - m_1g = 0 \rightarrow N = m_1g = 10\text{N}$

Άρα $N' = 10\text{N}$. Έστω F η δύναμη του στηρίγματος. Η σανίδα ισορροπεί

$$\Sigma \tau_A = 0 \rightarrow Mg \frac{L}{2} + N'(d+x) - F \cdot d = 0 \rightarrow F = 16 + 10x \quad (\text{SI})$$

$$\Sigma F = 0 \rightarrow F_A + F - Mg - N' = 0 \rightarrow F_A = -2 - 10x \quad (\text{SI})$$

$$\text{Για } x=0 \rightarrow F_A = -2\text{N} \quad \text{για } x=0,2\text{m } F_A = -4\text{N} \quad \text{και για } x=-0,2\text{m } F_A = 0\text{N}$$

Συνεπώς η δύναμη έχει φορά προς τα κάτω.

Γ. Να βρείτε την απομάκρυνση x_1 .

Κατά την ελαστική μετωπική κρούση των δύο σωμάτων ίσης μάζας συμβαίνει ανταλλαγή ταχυτήτων. Συνεπώς μετά την κρούση το σώμα Σ_1 έχει ταχύτητα $V_1 = -2\sqrt{3}\text{m/s}$. Αρνητικό διότι κινείται προς τα αριστερά. Από την ΑΔΕτ για τη νέα ΑΑΤ θα έχουμε

$$\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}m_1V_1^2 = \frac{1}{2}kA'^2 \rightarrow A' = \sqrt{\frac{kx_1^2 + mV_1^2}{k}} \quad (1)$$

Για να είναι το νέο πλάτος A' μέγιστο πρέπει να είναι και η τιμή του x_1 μέγιστη συνεπώς $x_1 = A = 0,2\text{m}$. Τότε όμως το νέο πλάτος είναι (1) $\rightarrow A' = 0,4\text{m}$

Αν η κρούση όμως συμβαίνει στην θέση πλάτους της αρχικής ΑΑτ του Σ_1 που αυτό έχει σταματήσει στιγμιαία, τότε μετά την κρούση και την ανταλλαγή ταχυτήτων το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται.

Δ. Να βρείτε μετά από πόσο χρονικό διάστημα από τη στιγμή της κρούσης τα δύο σώματα θα συγκρουστούν για δεύτερη φορά.

άρα για $t'=0$, $x_1=0,2\text{m}$ και $V_1=-2\sqrt{3}\text{m/s}$

$$x = A'\eta\mu(\omega t + \phi_0) \rightarrow 0,2 = 0,4\eta\mu\phi_0 \rightarrow \eta\mu\phi_0 = 1/2 \rightarrow \phi_0 = \pi/6 \text{ και } \phi_0 = 5\pi/6 \text{ rad}$$

Για $v < 0$ έχουμε: $\phi_0 = 5\pi/6 \text{ rad}$

$$x = 0,4\eta\mu(10t + 5\pi/6) \quad (\text{SI})$$

Η νέα κρούση θα γίνει και πάλι στη θέση $x_1=0,2\text{m}$

$$0,2 = 0,4\eta\mu(10t + 5\pi/6) \rightarrow \eta\mu(10t + 5\pi/6) = 1/2 \rightarrow \dots\dots\dots t = 2\pi/15\text{s}$$

Ε. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας του Σ_1 μόλις πριν τη δεύτερη κρούση

Το Σ_1 θα φτάσει στη θέση $x_1=0,2\text{m}$ με ταχύτητα $V_1' = +2\sqrt{3}\text{m/s}$

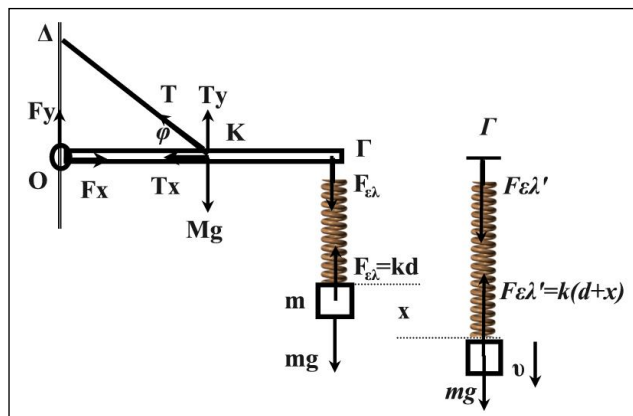
$$\Delta K / \Delta t = \Sigma F \cdot V_1' = -kx_1V_1' = -100 \cdot 0,2 \cdot 2\sqrt{3} = -40\sqrt{3}\text{J/s}$$

Ζ. Αν η δεύτερη κρούση θεωρηθεί πλαστική ποιο είναι το νέο πλάτος της ΑΑΤ του συσσωματώματος;

$$\text{ΑΔΟ } m_1V_1' + 0 = (m_1 + m_2)V \rightarrow V = \sqrt{3}\text{m/s}$$

$$\text{ΑΔΕΤ } \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 \rightarrow A_1 = \sqrt{0,1}\text{m/s}$$

Α.24 Ομογενής ράβδος ΟΓ μήκους $L=3\text{m}$ και μάζας $M=2\text{kg}$ ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια νήματος που είναι δεμένο στο κέντρο της Κ. Το νήμα σχηματίζει με τη ράβδο γωνία $\varphi=30^\circ$ ενώ το άκρο Ο συνδέεται στον τοίχο μέσω άρθρωσης. Στο άκρο Γ είναι δεμένο αβαρές ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$ που στο άλλο του άκρο έχει δεθεί σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ και ισορροπεί. Δίνουμε στο σώμα m στη θέση ισορροπίας της αρχική ταχύτητα $v_0=2\text{m/s}$ με φορά προς τα κάτω οπότε το σύστημα της μάζας και του ελατηρίου αρχίζει να κάνει ΑΑΤ. Το όριο θραύσης του νήματος είναι $T_0=120\text{N}$. Να υπολογιστούν:



- Α. Το μέτρο της τάσης του νήματος T , όταν το σύστημα μάζα – ελατήριο ισορροπεί.
 Β. Η εξίσωση απομάκρυνσης των ταλαντώσεων της μάζας m , σε σχέση με το χρόνο, αν θεωρηθεί ως $t_0=0$ η χρονική στιγμή που ξεκίνησε η μάζα m με ταχύτητα $v_0=2\text{m/s}$ και θετική η φορά προς τα κάτω.
 Γ. Η χρονική στιγμή t που θα κοπεί το νήμα.
 Δ. Η ταχύτητα της μάζας m τη στιγμή που κόβεται το νήμα.
 Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

Α. Το σώμα m ισορροπεί: $\Sigma F_m=0 \rightarrow F_{ελ}-mg=0 \rightarrow F_{ελ}=mg=10\text{N}$.

Η ράβδος ισορροπεί: $\Sigma \tau_{(O)}=0 \rightarrow T_y \frac{L}{2} - Mg \frac{L}{2} - F_{ελ}L=0 \rightarrow T_y=40\text{N} \rightarrow T \eta \mu \varphi=40\text{N} \rightarrow \mathbf{T=80\text{N}}$.

Β. Το m κάνει ΑΑΤ με $\omega=\sqrt{k/m}=10\text{rad/s}$ και πλάτος, A : $v_0=A\omega \rightarrow A=0,2\text{m}$.

Για $t_0=0$, $x=0$ και $v=v_0>0$. Άρα $\varphi_0=0$ και η εξίσωση είναι: $\mathbf{x=0,2\eta\mu(10t)\text{ SI}}$.

Γ. Το νήμα κόβεται τη στιγμή που η τάση θα πάρει την τιμή θραύσης, $T_0=120\text{N}$.

Όταν το σώμα m ισορροπεί το ελατήριο έχει επιμήκυνση, d : $kd-mg=0 \rightarrow d=0,1\text{m}$.

Όταν το σώμα ταλαντώνεται, το νήμα σπάει σε μια πρόσθετη επιμήκυνση, x , στην οποία η δύναμη του ελατηρίου έχει γίνει $F_{ελ}'=k(d+x)$ και η τάση του νήματος, $T=T_0=120\text{N}$.

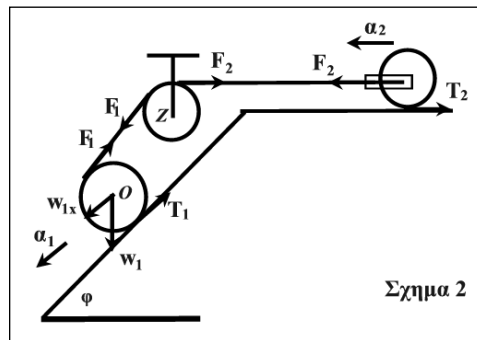
$\Sigma \tau_{(O)}=0 \rightarrow T_{0y} \frac{L}{2} - Mg \frac{L}{2} - F_{ελ}'L=0 \rightarrow F_{ελ}'=20\text{N}$.

$F_{ελ}'=k(d+x) \rightarrow 20=100(0,1+x) \rightarrow \mathbf{x=0,1\text{m}}$.

Από $x=0,2\eta\mu(10t) \xrightarrow{x=0,1\text{m}} 0,1=0,2\eta\mu 10t \rightarrow \eta\mu(10t_1)=\eta\mu(\pi/6) \rightarrow \mathbf{t_1=\pi/60\text{s}}$.

Δ. Από την εξίσωση της ταχύτητας: $v=v_0\sigma\upsilon\nu(10t) \rightarrow 2\sigma\upsilon\nu(10\pi/60) \rightarrow \mathbf{v=\sqrt{3}\text{m/s}}$.

Δ.25 Στη διάταξη του διπλανού σχήματος βλέπουμε 3 κυλινδρικά στερεά. Το Σ_1 έχει μάζα $m_1=2\text{kg}$ και ακτίνα $R_1=0,2\text{m}$, το Σ_2 , $m_2=1\text{kg}$ και $R_2=0,1\text{m}$ και το Σ_3 με $m_3=0,5\text{kg}$ και $R_3=0,1\text{m}$. Όλα τα στερεά έχουν ροπή αδράνειας της μορφής $I=\frac{1}{2}mR^2$. Η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\varphi=30^\circ$ και αρχικά το σύστημα ισορροπεί. Μεταξύ των νήματος που τα συνδέει και των στερεών δεν υπάρχουν τριβές. Το νήμα είναι τυλιγμένο σε αυλάκι γύρω από το στερεό Σ_1 .



Α. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί (Σχήμα 1). Να υπολογίσετε την τάση του νήματος F που συνδέει το στερεό Σ_2 με την ακλόνητη κολώνα.

Β. Κόβουμε το νήμα που συνδέει το Σ_2 με την κολώνα και τα στερεά Σ_1 και Σ_2 κυλινδρούν χωρίς να ολισθαίνουν, (Σχήμα 2). Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας των στερεών Σ_1 και Σ_2

Γ. Πόσες περιστροφές κάνει το στερεό Σ_3 σε χρόνο $\Delta t=2\text{s}$;

Δ. Πόση είναι η μετατόπιση του κέντρου μάζας των στερεών Σ_1 και Σ_2 σε χρόνο $\Delta t=2\text{s}$;

Ε. Ποιο ποσοστό της δυναμικής ενέργειας που χάνει το στερεό Σ_1 σε χρόνο $\Delta t=2\text{s}$ γίνεται κινητική ενέργεια του στερεού Σ_2 ;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

Α. Στην ισορροπία οι δυνάμεις είναι αυτές που φαίνονται στο σχήμα. Στο στερεό Σ_2 η στατική τριβή δεν ενεργοποιείται αφού δεν υπάρχει ροπή να κινηθεί τον κύλινδρο. Στο στερεό όμως Σ_1 επειδή υπάρχει η ροπή της F_1 η στατική τριβή T_1 ενεργοποιείται για να μην περιστρέφεται το σώμα. Γράφω συνθήκες ισορροπίας

$$\Sigma_1: \Sigma F_x=0 \rightarrow m_1 g \sin \varphi - F_1 - T_1 = 0 \quad (1)$$

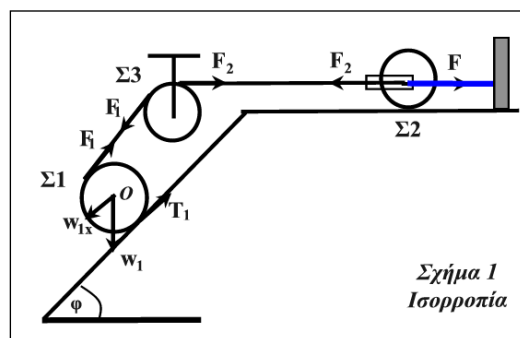
$$\Sigma \tau_1=0 \rightarrow T_1 R_1 - F_1 R_1 = 0 \rightarrow T_1 - F_1 = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma_2: \Sigma F_x=0 \rightarrow F_2 - F = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma_3: \Sigma \tau=0 \rightarrow F_1 R_3 - F_2 R_3 = 0 \rightarrow F_1 - F_2 = 0 \quad (4)$$

$$(1)(2) \rightarrow F_1 = \frac{1}{2} m_1 g \sin \varphi$$

$$(3)(4) \rightarrow F_1 = F_2 = F = \frac{1}{2} m_1 g \sin \varphi$$



Β. Γράφω τον δεύτερο νόμο του Newton για μεταφορά και περιστροφή σε κάθε στερεό

$$\Sigma F_x = m \cdot a_1 \rightarrow m_1 g \sin \varphi - F_1 - T_1 = m \cdot a_1 \quad (5)$$

$$\Sigma \tau_1 = I_1 \alpha_{\gamma 1} \rightarrow T_1 R_1 - F_1 R_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \cdot \frac{a_1}{R_1} \rightarrow T_1 - F_1 = \frac{1}{2} m_1 a_1 \quad (6)$$

Η επιτάχυνση a_2 που είναι κοινή για όλα τα σημεία του νήματος είναι διπλάσια από την επιτάχυνση a_1 του CM του Σ_1 . Άρα $a_2 = 2a_1$ (7)

$$\Sigma \tau_3 = I_3 \alpha_{\gamma 3} \rightarrow F_1 R_3 - F_2 R_3 = \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \cdot \frac{a_2}{R_3} \rightarrow F_1 - F_2 = \frac{1}{2} m_3 a_2 \rightarrow F_1 - F_2 = m_3 a_1 \quad (8)$$

$$\Sigma F_x = m_2 \cdot a_2 \rightarrow F_2 - T_2 = m_2 \cdot a_2 \rightarrow F_2 - T_2 = 2m_2 \cdot a_1 \quad (9)$$

$$\Sigma \tau_2 = I_2 \cdot \alpha_{\gamma 2} \rightarrow T_2 R_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \cdot \frac{a_2}{R_2} \rightarrow T_2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot a_2 \rightarrow T_2 = m_2 \cdot a_1 \quad (10)$$

Για την εύκολη επίλυση του συστήματος διπλασιάζω τις (8)(9)(10) και προσθέτω κατά μέλη:

Δ Θέματα Στερεού με λύσεις

$$m_1 g \eta \mu \varphi - F_1 - T_1 = m_1 \cdot a_1$$

$$T_1 - F_1 = \frac{1}{2} m_1 a_1$$

$$2F_1 - 2F_2 = 2m_3 a_1$$

$$2F_2 - 2T_2 = 4m_2 \cdot a_1$$

$$2T_2 = 2m_2 \cdot a_1$$

$$\dots\dots\dots + \dots$$

$$\rightarrow m_1 g \cdot \eta \mu \varphi = \left(\frac{3}{2} m_1 + 2m_3 + 6m_2 \right) \cdot a_1 \rightarrow \mathbf{a_1 = 1m/s^2}$$

Γ. Η επιτάχυνση των περιφερειακών σημείων της τροχαλίας είναι η επιτάχυνση των σημείων του νήματος δηλαδή a_2 . Άρα

$$\alpha_{\gamma\upsilon} = \frac{a_2}{R_3} = 20 \text{ rad/s} \cdot \text{Άρα } \Delta\theta_3 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\upsilon} \cdot \Delta t^2 = 40 \text{ rad} \quad \text{και } N_3 = \frac{\Delta\theta_3}{2\pi} \rightarrow \mathbf{N_3 = 20/\pi \text{ στρ.}}$$

Δ. Οι μετατοπίσει του cm: $\Delta x_1 = \frac{1}{2} a_1 \Delta t^2 \rightarrow \mathbf{\Delta x_1 = 2m}$ και $\Delta x_2 = \frac{1}{2} a_2 \Delta t^2 \rightarrow \mathbf{\Delta x_2 = 4m}$

Ε. Η κινητική ενέργεια του Σ_2 που κάνει κύλιση είναι:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{3}{4} \cdot m_2 v_2^2 \rightarrow \mathbf{K_2 = 12J}$$

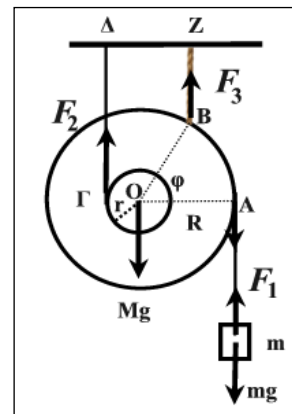
Λόγω πτώσης το Σ_1 χάνει δυναμική ενέργεια:

$$|\Delta U| = W_{\beta \alpha \rho \varsigma} = m_1 g \eta \mu \varphi \cdot \Delta x_1 = 20J$$

Άρα το ποσοστό της δυναμικής που έγινε κινητική του Σ_2 είναι

$$\pi \% = \frac{12}{20} 100\% \rightarrow \mathbf{\pi \% = 60\%}$$

Λ.26 Η διπλή τροχαλία του σχήματος έχει μάζα $M=6\text{kg}$ μπορεί να κινείται ελεύθερα σε κατακόρυφο επίπεδο. Γύρω από την περιφέρεια ακτίνας $r=0,1\text{m}$ είναι τυλιγμένο λεπτό νήμα το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στην οροφή (σημείο, Δ). Γύρω από την περιφέρεια ακτίνας $R=2r$ είναι τυλιγμένο πολλές φορές άλλο λεπτό αβαρές νήμα στο άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σώμα μάζας $m=3\text{kg}$. Το σύστημα αρχικά είναι ακίνητο με τη βοήθεια νήματος BZ που είναι συνδεδεμένο στο σημείο, B του τροχού. Δίνεται ότι η γωνία $\text{BOA}=\varphi=60^\circ$.



A. Να υπολογιστεί η τάση του νήματος BZ.

Κόβουμε το νήμα BZ τη χρονική στιγμή $t=0$ και ο τροχός αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από το O ενώ ταυτόχρονα το σώμα m πέφτει. Όλα τα νήματα είναι τεντωμένα. Να υπολογιστούν:

B. Οι επιταχύνσεις του κέντρου μάζας O, της τροχαλίας και η επιτάχυνση a του σώματος, m .

Γ. Οι τάσεις των δύο νημάτων ΑΣ και ΓΔ.

Δ. Η κινητική ενέργεια της τροχαλίας και ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή $t=3\text{s}$.

Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας της τροχαλίας $I= \frac{1}{2}MR^2$.

Λύση:

A. $\Sigma F_1=0 \rightarrow F_1=mg=30\text{N}$

$\Sigma F_M=0 \rightarrow F_1+Mg-F_2-F_3=0 \rightarrow F_2+F_3=90\text{N}$

$\Sigma \tau_O=0 \rightarrow F_1R+F_2r-F_3R\sin\varphi=0 \rightarrow F_3-F_2=60\text{N}$ Άρα: **$F_3=75\text{N}$**

B. Το σώμα m πέφτει με επιτάχυνση a , η τροχαλία πέφτει με a_{cm} και περιστρέφεται με $\alpha_{\gamma\psi}$.

Το σημείο Γ όπως και το Δ παραμένει ακίνητο συνεπώς:

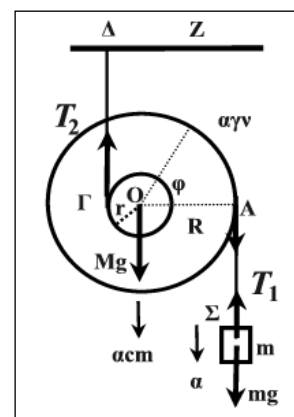
$\alpha_\Gamma=0 \rightarrow \alpha_{\text{cm}}-\alpha_{\gamma\psi}r=0 \rightarrow \alpha_{\text{cm}}=\alpha_{\gamma\psi}$ (1)

Το σημείο Α: $\alpha_A=\alpha_{\text{cm}}+\alpha_{\gamma\psi}R \rightarrow \alpha=3\alpha_{\gamma\psi}r \rightarrow \alpha=3\alpha_{\text{cm}}$ (2)

$\Sigma F_m=ma \rightarrow mg-T_1=ma \rightarrow 3mg-3T_1=3ma$ (3)

$T_1 \cdot 2r + T_2r = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\psi} \rightarrow 2T_1+T_2=\frac{2Ma}{3}$ (4)

$\Sigma F_M=0 \rightarrow Mg+T_1-T_2=M\alpha_{\text{cm}} \rightarrow Mg+T_1-T_2=\frac{1}{3}M\alpha$ (5)



Τριπλασιάζω την (3) και προσθέτω κατά μέλη (3)+(4)+(5) $\rightarrow \alpha=10\text{m/s}^2$ και $\alpha_{\text{cm}}=10/3 \text{ m/s}^2$

Γ. Από (3) $\rightarrow T_1=mg-ma \rightarrow T_1=0$ και (4) $\rightarrow T_2=40\text{N}$

Δ. Για τη γωνιακή ταχύτητα: $\alpha=3\alpha_{\gamma\psi}r \rightarrow \alpha_{\gamma\psi}=\frac{\alpha}{3r} \rightarrow \alpha_{\gamma\psi}=100/3 \text{ rad/s}$. Άρα: $\omega=\alpha_{\gamma\psi}t \rightarrow \omega=100\text{rad/s}$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της τροχαλίας: $v_{\text{cm}}=\alpha_{\text{cm}} \cdot t \rightarrow v_{\text{cm}}=10\text{m/s}$

Άρα η κινητική ενέργεια είναι: $K=\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 \rightarrow K=900\text{J}$

Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας

$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta K_{\mu}}{\Delta t} + \frac{\Delta K_{\pi}}{\Delta t} = M\alpha_{\text{cm}} \cdot v_{\text{cm}} + I \cdot \alpha_{\gamma\psi} \cdot \omega = 200\text{J/s} + 400\text{J/s} \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = 600\text{J/s}$

