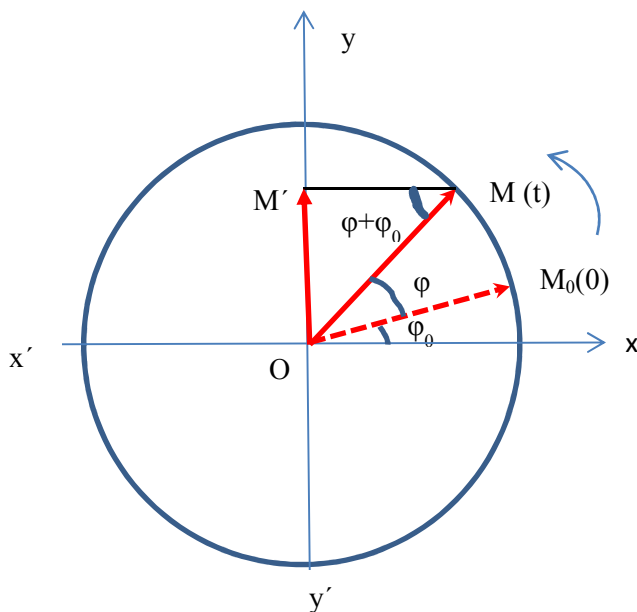


Η Μέθοδος του Στρεφόμενου Διανύσματος (ή του κύκλου αναφοράς)

στις Μηχανικές Ταλαντώσεις



Α. Απομάκρυνση: Έστω κύκλος κέντρου O και ακτίνας A ο οποίος φέρει σύστημα ορθογωνίων αξόνων xOy , όπως στο σχήμα. Διάνυσμα $\vec{OM}$ μέτρου A περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από το O . Τη χρονική στιγμή $t=0$ το διάνυσμα σχηματίζει γωνία φ_0 με τον άξονα Ox .

Επειδή $\omega = \frac{\varphi}{t} \Leftrightarrow \varphi = \omega t$, η γωνία $xOM = \varphi + \varphi_0 = \varphi + \omega t$.

Η προβολή MM' του M στον άξονα Oy απέχει από το O απόσταση

$OM' = OM \sin(\varphi + \varphi_0) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, δηλαδή το MM' εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση πλάτους A και γωνιακής συχνότητας ω στον άξονα Oy .

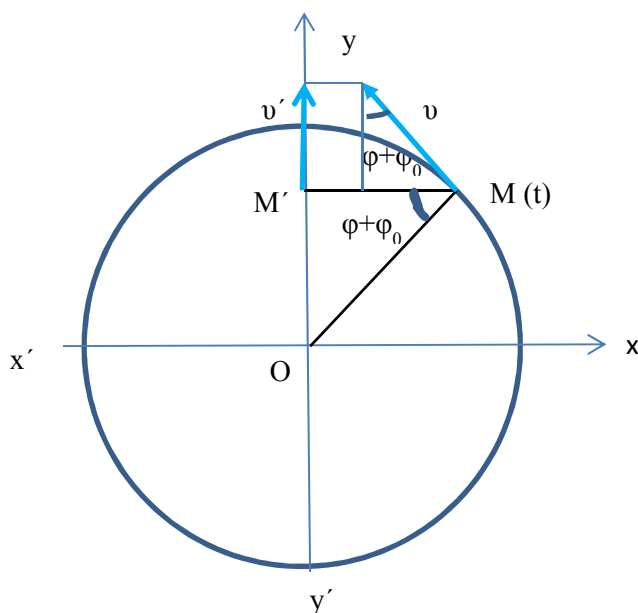
Β. Ταχύτητα: Αφού το MM' είναι η προβολή του M στον άξονα Oy , η ταχύτητά του $\vec{v}$ (δηλαδή η

ταχύτητα της γραμμικής αρμονικής ταλάντωσης) θα είναι η προβολή της ταχύτητας $\vec{v}$ του M , η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου. Επειδή η γωνία του μικρού τριγώνου είναι ίση με $\varphi + \varphi_0$, (έχει πλευρές κάθετες με τις πλευρές της γωνίας OMM') έχουμε:

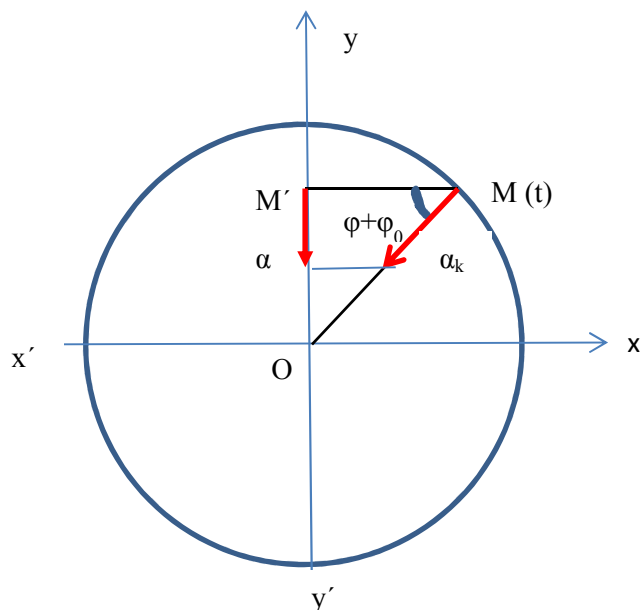
$$v' = v \sin(\varphi + \varphi_0)$$

με $v = \omega R = \omega A$ και τελικά

$$v' = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$



Γ. Επιτάχυνση: Το Μ έχει κεντρομόλο επιτάχυνση $\alpha_k = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{A}$ άρα η επιτάχυνση του Μ είναι η προβολή της α_k , άρα:



$$\alpha = -\alpha_k \eta\mu(\varphi + \varphi_0) \Leftrightarrow$$

$$\alpha = -\frac{v^2}{A} \eta\mu(\varphi + \varphi_0) \Leftrightarrow$$

$$\alpha = -\frac{(\omega A)^2}{A} \eta\mu(\varphi + \varphi_0)$$

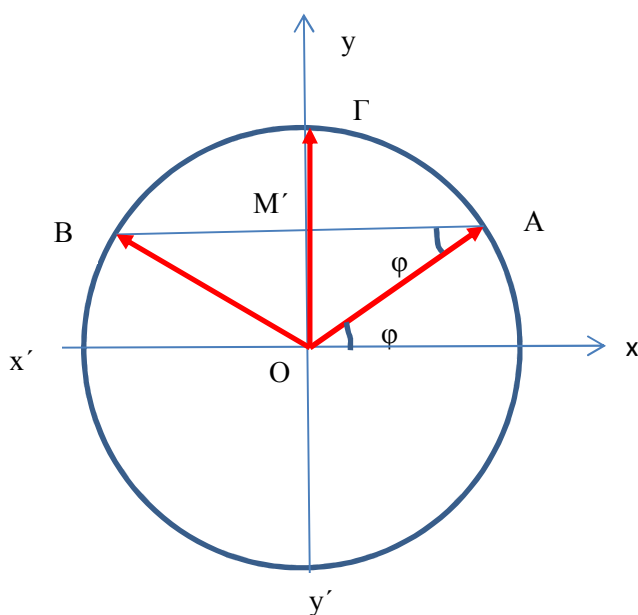
και τελικά:

$$\alpha = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο γεγονός ότι η αλγεβρική τιμή του $\alpha < 0$, αφού έχει φορά προς τα αρνητικά του άξονα Oy.

Παρατήρηση: Τα ίδια συμπεράσματα προκύπτουν αν αντί στρεφόμενου διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα υλικό σημείο Μ το οποίο εκτελεί κυκλική ομαλή κίνηση.

Παράδειγμα: Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους 2 cm. Κάποια χρονική στιγμή έχει απομάκρυνση x=1 cm. Ο ελάχιστος χρόνος που απαιτείται για να γίνει η απομάκρυνσή του 2 cm είναι 0,02 s. Να υπολογιστεί η συχνότητα της ταλάντωσης.



Λύση: Θεωρούμε στρεφόμενο διάνυσμα μέτρου Α το οποίο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, όπως στο σχήμα. Η προβολή του άκρου του Μ στον άξονα Oy εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση γωνιακής συχνότητας ω .

Όταν το Μ έχει απομάκρυνση x=1 cm, το διάνυσμα βρίσκεται στις θέσεις OA ή OB με $OM = x = 1 \text{ cm}$. Συνεπώς $\eta\mu\varphi = \frac{OM}{OA} = \frac{1 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$.

Όταν το Μ έχει απομάκρυνση x=2 cm, το διάνυσμα βρίσκεται στη θέση OΓ. Άρα έχει διαγραφεί το τόξο ΑΓ και όχι το ΒΑΓ, διότι

ο χρόνος που πέρασε είναι ελάχιστος, κατά την εκφώνηση. Επειδή το τόξο ΑΓ είναι $\frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ με βάση τον τύπο της ομαλής κυκλικής κίνησης $\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{\pi/3}{0,02} = \frac{50\pi}{3} \text{ rad/s}$ και η ζητούμενη συχνότητα $f = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50\pi/3} = \frac{3\pi}{25} \text{ Hz}$.