

Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

I) Κλασματικές εξισώσεις

Τρόπος λύσης:

- Παραγοντοποιούμε όσους παρονομαστές γίνεται να παραγοντοποιηθούν και βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών.
- Θέτουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών $\neq 0$ και βρίσκουμε τους **περιορισμούς**.
- Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, οπότε η εξίσωση γίνεται πολυωνυμική.
- Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση, όπως στην προηγούμενη ενότητα.
- Στο τέλος, ελέγχουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Προσοχή: Με τους περιορισμούς ασχολούμαστε μόνο στην αρχή και στο τέλος και όχι στα μεσαία βήματα. Είναι δυνατό π.χ. κάποιες από τις πιθανές ακέραιες ρίζες της πολυωνυμικής εξίσωσης να απορρίπτονται λόγω των περιορισμών. Δεν τις προσπερνάμε, τις κοιτάμε κανονικά, γιατί αυτές θα μας βοηθήσουν να κάνουμε την παραγοντοποίηση. Ό,τι είναι να απορρίψουμε, θα το απορρίψουμε μόνο στο τελευταίο βήμα.

Παράδειγμα (Άσκηση της σελ. 153 του σχολικού βιβλίου)

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \frac{3x^2 - 1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - x} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$

ΕΚΠ= $x(x-1) \neq 0$, δηλ. $x \neq 0$ και $x \neq 1$.

$$x(x-1) \frac{3x^2 - 1}{x - 1} - x(x-1) \frac{2}{x(x-1)} = x(x-1) \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$
$$3x^3 - x - 2 = x^3 - 3x^2 + 2x - x^2 + 3x - 2$$

$$2x^3 + 4x^2 - 6x = 0$$

$$2x(x^2 + 2x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } \Delta = 16, \text{ οπότε } x = 1 \text{ ή } x = -3$$

απορ

απορ δεκτή

II) Εξισώσεις με ρίζες

Τρόπος λύσης:

- Κρατάμε μία ρίζα μόνη της στο ένα μέλος της εξίσωσης. Ό,τι άλλο μπορεί να υπάρχει μαζί της το μεταφέρουμε στο άλλο μέλος.
- Παίρνουμε **περιορισμούς**: Θα πρέπει ό,τι είναι κάτω από ρίζα, αλλά και ό,τι είναι ίσο με ρίζα να είναι ≥ 0 . Λύνουμε και συναληθεύουμε τις ανισώσεις για να βρούμε τον τελικό περιορισμό.
- Υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο, ή στην τρίτη, ή σε ό,τι άλλη δύναμη χρειάζεται για να φύγει η ρίζα.

- Αν χρειαστεί, επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω βήματα μέχρι να φύγουν όλες οι ρίζες.
- Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση που προκύπτει.
- Στο τέλος, ελέγχουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Παράδειγμα (από τη σελ. 151 του σχολικού βιβλίου)

3° Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{2x+7} - x = 2$.

$$\sqrt{2x+7} = x + 2$$

Περιορισμοί: $2x+7 \geq 0$ και $x+2 \geq 0$. Τελικά $x \geq -2$. Τότε:

$$2x+7 = (x+2)^2$$

$$2x+7 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -3$$

δεκτή απορ.

III) Εξισώσεις με αντικατάσταση

Παράδειγμα (Άσκηση της σελ. 153 του σχολικού βιβλίου)

2. Να λύσετε την εξίσωση: $2\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu x - 2 = 0$

$$2\eta\mu^3 x + 1 - \eta\mu^2 x + 2\eta\mu x - 2 = 0 \quad \text{Θέτουμε } \eta\mu x = \omega$$

$$2\omega^3 - \omega^2 + 2\omega - 1 = 0$$

$$\omega^2(2\omega - 1) + 2\omega - 1 = 0$$

$$(2\omega - 1)(\omega^2 + 1) = 0$$

$$\omega = 1/2 \quad \text{ή} \quad \omega^2 = -1 \text{ αδύνατη.}$$

Άρα $\eta\mu x = 1/2$, $\eta\mu x = \eta\mu(\pi/6)$, κτλ.

IV) Ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Προσοχή: Στις ανισώσεις δεν επιτρέπεται η απαλοιφή παρονομαστών! (Επιτρέπεται μόνο αν το ΕΚΠ των παρονομαστών είναι σίγουρα θετικό, π.χ. αν είναι $(x^2+1)(x^2+4)$ ή κάτι ανάλογο).

Τρόπος λύσης:

- Μεταφέρουμε τα πάντα στο πρώτο μέλος, έτσι ώστε στο άλλο μέλος να μείνει το 0.
- Κάνουμε τα κλάσματα του 1^{ου} μέλους ομώνυμα, χωρίς να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών.
- Παραγοντοποιούμε ό,τι μπορούμε και η ανίσωση παίρνει τη μορφή $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ ή ≤ 0 .

- Με τους περιορισμούς $g(x) \neq 0$, η τελευταία ανίσωση είναι ισοδύναμη με την $f(x)g(x) \geq 0$ ή ≤ 0 , γιατί το πρόσημο του πηλίκου είναι ίδιο με το πρόσημο του γινομένου.
- Λύνουμε την πολυωνυμική ανίσωση που προκύπτει με πίνακα προσήμων, όπως στην προηγούμενη ενότητα.

Προσοχή: Αν γίνεται απλοποίηση στο 1^ο μέλος της ανίσωσης, τότε παίρνουμε τους περιορισμούς πριν κάνουμε την απλοποίηση!

Προσοχή: Στον πίνακα προσήμων, σημειώνουμε στη γραμμή του x όχι μόνο τις ρίζες του κάθε παράγοντα, αλλά επίσης και ό,τι απορρίπτεται από τους περιορισμούς!

Παράδειγμα (Άσκηση της σελ. 154 του σχολικού βιβλίου)

6. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + \frac{2}{2x-1} \geq \frac{1}{x(2x-1)}$

$$x^2 + \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x(2x-1)} \geq 0$$

$$\frac{x^3(2x-1) + 2x - 1}{x(2x-1)} \geq 0$$

$$\frac{(2x-1)(x^3+1)}{x(2x-1)} \geq 0$$

Περιορισμοί $x(2x-1) \neq 0$, δηλ. $x \neq 0$ και $x \neq 1/2$. Τότε:

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x} \geq 0$$

$$x(x+1)(x^2-x+1) \geq 0$$

Ρίζες

0, -1 $\Delta = -3 < 0$

x	-1	0	1/2
x	-	-	+
$x+1$	-	+	+
x^2-x+1	+	+	+
Γινόμενο	+	-	+

$$x \in (-\infty, -1] \cup (0, 1/2) \cup (1/2, +\infty).$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η ανίσωση $\frac{1}{x^2} \geq \frac{x}{x^2+4}$.

Και εδώ, μπορούμε να δουλέψουμε όπως πριν. Επειδή όμως εδώ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών είναι $EΚΠ = x^2(x^2+4) \geq 0$, εδώ επιτρέπεται να κάνουμε και απαλοιφή παρονομαστών. Κάτι τέτοιο, γενικά είναι σπάνιο. Όποτε όμως μπορεί να γίνει, μας βοηθάει να κερδίσουμε αρκετή δουλειά!

Παίρνουμε περιορισμούς: $x^2(x^2+4) \neq 0$, δηλαδή $x \neq 0$. Τότε:

$$x^2(x^2+4) \frac{1}{x^2} \geq x^2(x^2+4) \frac{x}{x^2+4}$$

$$x^2+4 \geq x^3$$

$$x^3-x^2-4 \leq 0$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Το 2 είναι ρίζα και, με σχήμα Horner,

1	-1	0	-4	2
	2	2	4	
1	1	2	0	

$$(x-2)(x^2+x+2) \leq 0$$

Ρίζες:

$$2, \Delta = -7 < 0$$

x	0	2
x-2	-	+
x^2+x+2	+	+
Γινόμενο	-	+

Άρα $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2]$.

Ασκήσεις για λύση (από το σχολικό βιβλίο, σελ. 153-154):

Α' ομάδα: 1 (ii) (σύμφωνα με το **(I)**)

3 (i), (ii), (iii), (iv), (viii) (σύμφωνα με το **(II)**)

4 (iii), 5 (i), (iii), (v) (σύμφωνα με το **(IV)**)

Β' ομάδα: 2 (i), 3(i) (σύμφωνα με το **(II)** ή και το **(III)**)

2 (ii) (σύμφωνα με το **(III)**)

5 (σύμφωνα με το **(III)**)