

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΤΕΥΧΟΣ Ι

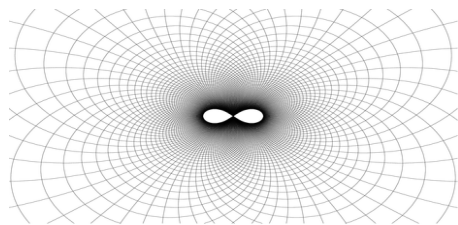
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ

*Θεωρία
Μεθοδολογία
Λυμένα παραδείγματα
Ασκήσεις*

ΔΙΑΚΟΥΜΑΚΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
Μαθηματικός



ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ:



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	ΣΕΛ. 1
<i>Τσες συναρτήσεις</i>	ΣΕΛ. 2
<i>Πεδίο Ορισμού</i>	ΣΕΛ. 2
<i>Σύνολο Τιμών</i>	ΣΕΛ. 3
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ-ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ-ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ	ΣΕΛ. 3
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.....	ΣΕΛ. 5
2. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.....	ΣΕΛ. 14
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΣΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	ΣΕΛ. 15
ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ	ΣΕΛ. 15
3. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	ΣΕΛ. 16
<i>Άρτιες – Περιττές</i>	ΣΕΛ. 16
<i>Μονοτονία Συνάρτησης</i>	ΣΕΛ. 16
<i>Ακρότατα Συνάρτησης</i>	ΣΕΛ. 18
<i>Συναρτήσεις «1-1»</i>	ΣΕΛ. 18
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	ΣΕΛ. 19
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.....	ΣΕΛ. 22
4. ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	ΣΕΛ. 28
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΗ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ.....	ΣΕΛ. 34
ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ	ΣΕΛ. 35
5. ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	ΣΕΛ. 36
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΗ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.....	ΣΕΛ. 38
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.....	ΣΕΛ. 39
6. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.....	ΣΕΛ. 42
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	ΣΕΛ. 44
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.....	ΣΕΛ. 45

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΤΟ x_0 ΚΑΙ ΣΤΟ $\pm\infty$	ΣΕΛ. 49
<i>Η Έννοια της Γειτονιάς</i>	ΣΕΛ. 51
2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ	ΣΕΛ. 52
<i>Πίνακας α.μ.</i>	ΣΕΛ. 55
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΟΡΙΩΝ	ΣΕΛ. 62
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.....	ΣΕΛ. 69
3. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	ΣΕΛ. 99

ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ	ΣΕΛ. 102
<i>Θεώρημα Bolzano</i>	ΣΕΛ. 102
<i>Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών</i>	ΣΕΛ. 103
<i>Θεώρημα Μεγίστου-Ελαχίστου</i>	ΣΕΛ. 104
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ	ΣΕΛ. 105
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.....	ΣΕΛ. 111

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΛ. 122

Περιέχει χρήσιμες προτάσεις (με τις αποδείξεις τους) που δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΚΕΦ. 1, 2..... ΣΕΛ. 129

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΕΛ. 209

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1ου ΤΕΥΧΟΥΣ..... ΣΕΛ. 210

Το σύμβολο
να κολλάμε
πράγματα που

ΜΕΜΟ

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

λειτουργεί όπως τα σημειώματα υπενθύμισης που συνηθίζουμε στο ψυγείο ή στον χώρο εργασίας μας, για να μας θυμίζουν καλό είναι να μην λησμονηθούν.

Στις ασκήσεις το Σύμβολο	Σημαίνει
✓	• άσκηση η οποία πρέπει οπωσδήποτε να διδαχθεί
➡	• άσκηση για την οποία υπάρχει υπόδειξη στο τέλος του φυλλαδίου (οι ασκήσεις αυτές είναι κατά κανόνα δυσκολότερες από τις άλλες)

*"Όσοι θυσιάζουν στοιχειώδεις ελευθερίες για λίγη ασφάλεια,
δεν αξίζουν ούτε ελευθερία ούτε ασφάλεια"*

Βενιαμίν Φραγκλίνος (Benjamin Franklin, 1706 - 1790)

1. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω A και B δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Συνάρτηση f από το A στο B (γράφουμε $f: A \rightarrow B$) ονομάζουμε μία διαδικασία (κανόνα), με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ να αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο στοιχείο $y \in B$. Το σύνολο A στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης. Πολλές φορές το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f θα το συμβολίζουμε με D_f ή $\Delta(f)$.

Το $y \in B$ στο οποίο αντιστοιχεί με την f κάποιο $x \in A$ ονομάζεται **τιμή της f** στο x ή εικόνα του x με την f και ισχύει $y = f(x)$ (δηλαδή το y ισούται με την τιμή της f στο x).

Το σύνολο B στο οποίο ανήκουν όλες οι τιμές της συνάρτησης (και πιθανώς και άλλοι αριθμοί) ονομάζεται **σύνολο αφίξεως**. Το υποσύνολο όμως του B που περιέχει όλες τις τιμές της συνάρτησης και μόνο αυτές, ονομάζεται **πεδίο ή σύνολο τιμών** της συνάρτησης f και συμβολίζεται ή με $f(A)$ (όπου A το πεδίο ορισμού) ή με R_f ή $R(f)$.

Η μεταβλητή x που ανήκει στο πεδίο ορισμού και αντιστοιχεί σε κάποιο y του πεδίου τιμών λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή ή αρχέτυπο του y** , ενώ το y εκτός από τιμή της f στο x λέγεται και **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Στο εξής θα μας απασχολήσουν συναρτήσεις $f: A \rightarrow B$ **μόνο** στην περίπτωση που $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$, οι οποίες λέγονται **πραγματικές συναρτήσεις** (γιατί $y \in \mathbb{R}$) **πραγματικής μεταβλητής** (γιατί $x \in \mathbb{R}$) και γι' αυτό το λόγο θα τις ονομάζουμε απλά συναρτήσεις.

Έτσι **πραγματική συνάρτηση f** με πεδίο ορισμού το A ονομάζουμε μία διαδικασία, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε έναν μόνο πραγματικό αριθμό y .

Το σύνολο που περιλαμβάνει τα ζεύγη $(x, \text{εικόνα του } x)$ με $x \in A$ λέγεται **γράφημα της f** και συμβολίζεται με $G(f)$. Έτσι:

$$G(f) = \{ (x, f(x)) / x \in A \}$$

Αν το γράφημα μιας συνάρτησης f παρασταθεί σε ένα σύστημα αξόνων Oxy (καρτεσιανό επίπεδο), τότε παίρνουμε την **γραφική παράσταση της συνάρτησης**, που μπορεί να είναι μία συνεχής γραμμή ή ένα σύνολο γραμμών ή ακόμα και συγκεκριμένα μεμονωμένα σημεία.

Τύπο της f ονομάζουμε τη σχέση ή τον κανόνα με τον οποίο σε κάθε x του πεδίου ορισμού αντιστοιχεί ένα y του συνόλου τιμών.

Η εξίσωση $y = f(x)$ με $(x, y) \in G(f)$ είναι η **εξίσωση της γραφικής παράστασης της f** .

- Μία συνάρτηση είναι πλήρως ορισμένη όταν γνωρίζουμε:
 1. Το πεδίο ορισμού της και
 2. Τον τύπο της.
- Η συνάρτηση είναι επίσης πλήρως ορισμένη όταν γνωρίζουμε την γραφική της παράσταση, γιατί:
 1. Γνωρίζουμε το πεδίο ορισμού της που είναι το σύνολο των προβολών των σημείων της γραφικής παράστασης στον x -άξονα.
 2. Γνωρίζουμε το σύνολο των τιμών της που είναι το σύνολο των προβολών των σημείων της γραφικής παράστασης στον y -άξονα.
 3. Μπορούμε να βρούμε για κάθε $x \in A$ την αντίστοιχη τιμή $f(x)$, δηλαδή το αντίστοιχο y αφού το (x, y) είναι σημείο της γραφικής παράστασης.

Ένα σημείο (x_0, y_0) του συστήματος συντεταγμένων ανήκει στην γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του x_0 & y_0 επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης και το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή $x_0 \in A$ και $y_0 = f(x_0)$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Όταν στο εξής συναντάμε τα σύμβολα x_0 & y_0 θα σημαίνουν συγκεκριμένες τιμές του x και του y .

Στα παρακάτω για συντομία θα γράφουμε :

Π.Ο. : πεδίο ορισμού	A ή A_f ή D_f ή $\Delta(f)$: πεδίο ορισμού της f
Σ.Τ. : σύνολο τιμών	R_f ή $R(f)$: σύνολο τιμών της f
Σ.Α. : σύνολο αφίξεως	$f(A)$: σύνολο τιμών της f αν έχουμε συμβολίσει το πεδίο ορισμού με A
Γ.Π. : γραφική παράσταση	C_f : γραφική παράσταση της f

Μία συνάρτηση εκτός από το λατινικό γράμμα f μπορεί να συμβολιστεί με τα επίσης λατινικά (πεζά ή κεφαλαία) g, h, t, F, G και άλλα ή τα ελληνικά φ, θ και άλλα.

ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Δύο **συναρτήσεις** f και g λέγονται **ίσες**, αν και μόνο αν έχουν:

1. $D_f = D_g = A$ (δηλαδή έχουν ίδια πεδία ορισμού) και
2. Ισχύει $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in A$ (δηλαδή έχουν ίδιες τιμές για τα ίδια x).

Αν δύο συναρτήσεις f και g έχουν πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα και σε κάποιο υποσύνολο Γ των A και B ισχύει ότι $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \Gamma$, λέμε ότι **είναι ίσες στο Γ** .

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Άλλο f και άλλο $f(x)$. f είναι η συνάρτηση (η αντιστοιχία, κάτι αφηρημένο), ενώ $f(x)$ είναι η τιμή της f στο x (ένας αριθμός). Πολλές φορές όμως για συντομία θα λέμε «η συνάρτηση $f(x) = \dots$ ».

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Το πεδίο ορισμού της f (αν δεν μας το δίνουν) προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{δηλαδή τα } x \text{ για τα οποία το } f(x) \text{ έχει νόημα πραγματικού αριθμού}$$

Το Π.Ο. που βρίσκουμε από την παραπάνω σχέση είναι το «**ευρύτερο**» υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση.

Αν μας δίνουν το πεδίο ορισμού (όποιο κι αν είναι) είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε αυτό που μας δίνουν.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Το σύνολο τιμών της f προσδιορίζεται συνήθως από τη σχέση:

$$R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y=f(x) \\ x \in D_f \end{matrix} \right\}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΤΑ ΠΕΔΙΑ ΟΡΙΣΜΟΥ - ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ – ΣΥΝΟΛΑ ΤΙΜΩΝ

1. ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

Αν δεν μας δίνουν το Π.Ο. της συνάρτησης, όπως ήδη είπαμε, αυτό προσδιορίζεται από τη σχέση : $D_f = \{ x \in \mathbb{R} / \text{το } f(x) \text{ να έχει νόημα πραγματικού αριθμού} \}$.

Στη συνθήκη « $f(x)$ να έχει νόημα πραγματικού αριθμού», αναγράφονται όλοι οι περιορισμοί που αφορούν το x και προκύπτουν από τον τύπο της f . Στη συνέχεια λύνουμε τους περιορισμούς ως προς x , τους συναλθεύουμε και το D_f είναι το σύνολο των επιτρεπτών τιμών του x .

Ανάλογα με τη μορφή της, οι συνηθέστεροι περιορισμοί είναι οι εξής:

- Αν στην f υπάρχει παράσταση του x ως παρονομαστής: Τότε **Παρονομαστής $\neq 0$**
- Αν στην f υπάρχει παράσταση του x ως υπόριζο: Τότε **Υπόριζο ≥ 0**
- Αν στην f έχει λογαριθμική συνάρτηση $\log h(x)$ ή $\ln h(x)$: Τότε **$h(x) > 0$**
- Αν η f περιέχει $\exp(g(x))$: Τότε **$\exp(g(x)) \neq 0$**
- Αν η f περιέχει $\sin(g(x))$: Τότε **$\sin(g(x)) \neq 0$**

Σε κάθε άλλη περίπτωση (αν ο τύπος της f δεν περιέχει κάποια από τις παραπάνω παραστάσεις) δεν υπάρχει περιορισμός για τον ορισμό της συνάρτησης.

Παράδειγμα 1**2. ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**

Για να εξετάσουμε αν δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες:

α) Βρίσκουμε τα D_f και D_g .

α₁) Αν $D_f \neq D_g$ τότε $f \neq g$ και η έρευνα τελειώνει εδώ.

α₂) Αν $D_f = D_g$ τότε συνεχίζουμε στο β)

β) Προσπαθούμε να δείξουμε ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε x που ανήκει στο κοινό πεδίο ορισμού τους. Αυτό συνήθως (αλλά όχι απαραίτητα) σημαίνει ότι έχουν τον ίδιο τύπο, οπότε μεταβάλλοντας με οποιοδήποτε τρόπο τον τύπο της μιας συνάρτησης και με διαδοχικές ισότητες προσπαθούμε να καταλήξουμε στον τύπο της άλλης.

Αν γίνει αυτό, τότε $f=g$, αλλιώς $f \neq g$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Παραπάνω λέμε «συνήθως», γιατί μπορεί δύο συναρτήσεις να έχουν διαφορετικό τύπο και όμως στο κοινό πεδίο ορισμού που τις ορίσαμε να παίρνουν ίδιες τιμές για όλα τα x . Τότε φυσικά είναι ίσες.

Τέτοιο παράδειγμα αποτελούν οι συναρτήσεις $f(x)=x^2$ και $g(x)=5x-6$ αν οριστούν στο $\{2, 3\}$. Παρ' όλο που οι τύποι τους είναι εμφανώς διαφορετικοί είναι $f(2)=g(2)=4$ και $f(3)=g(3)=9$, οπότε $f=g$ στο $\{2, 3\}$.

Παράδειγμα 2

3. ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Για τον προσδιορισμό του R_f πρέπει να βρούμε ακριβώς τις τιμές που παίρνει η εξαρτημένη μεταβλητή y , όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x διατρέχει το D_f .

Αυτό συνήθως επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της σχέσης $R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y=f(x) \\ x \in D_f \end{matrix} \right\}$ ή με κατασκευή.

- Με τη βοήθεια της σχέσης του R_f και ανάλογα με τη μορφή της συνάρτησης υπάρχουν γενικά δύο μέθοδοι:

α) Αν η σχέση $y=f(x)$ λύνεται εύκολα ως προς x , τη λύνουμε και θέτουμε την τιμή αυτή του x στη σχέση $x \in D_f$ (προσοχή στους «κρυφούς» περιορισμούς, για το y -βλέπε παραδείγματα). Από την τελευταία αυτή λύνοντάς την ως προς y (σίγουρα θα περιέχει το y), προσδιορίζουμε τις επιτρεπτές τιμές του y . Αν οι σχέσεις που αφορούν στο y είναι περισσότερες από μία, τις συναληθεύουμε.

β) Αν η $y=f(x)$ δεν λύνεται εύκολα ως προς x , τη φέρνουμε σε κατάλληλη μορφή ώστε να μπορούμε να προσδιορίσουμε τις τιμές του y για τις οποίες η μορφή αυτή έχει νόημα με την προϋπόθεση φυσικά ότι $x \in D_f$ και τέλος συναληθεύουμε τις τιμές του y που προσδιορίστηκαν.

- Με την βοήθεια κατασκευής ξεκινώντας από τη σχέση $x \in D_f$ (1) προσπαθούμε να κατασκευάσουμε, με πράξεις στα δύο μέλη της (1), τον τύπο της f καταλήγοντας σε σχέση μορφής $f(x) \in \Delta$ όπου Δ σύνολο. Έτσι βρίσκουμε σε ποιο σύνολο παίρνει τιμές το y .

Η μέθοδος της κατασκευής θέλει ιδιαίτερη προσοχή κατά την εφαρμογή της γιατί πολλές φορές κρύβει παγίδες. Έτσι αν για παράδειγμα καταλήξουμε ότι $3 \leq f(x) \leq 5$, πριν ισχυριστούμε ότι το σύνολο τιμών είναι το $[3, 5]$, θα πρέπει να αποδείξουμε (ή τουλάχιστον να είμαστε σίγουροι) ότι η f μπορεί να πάρει **οποιαδήποτε** τιμή στο $[3, 5]$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Σε κάθε περίπτωση η πρόταση $x \in D_f$ πρέπει, αν είναι δυνατόν, να μεταφράζεται με τη μορφή σχέσεων (π.χ. $x \in \mathbb{R}^*$ μεταφράζεται $x \neq 0$ και η $x \in (1, 5]$ μεταφράζεται $1 < x \leq 5$). Τέλος, καλό θα είναι, το R_f τελικά να μην το αφήνουμε με περιγραφική γραφή αλλά με τη μορφή διαστήματος, ένωσης διαστημάτων κ.τ.λ.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών όλο το $\mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $y=f(x)$ έχει, για κάθε $y \in \mathbb{R}$, μία τουλάχιστον λύση ως προς $x \in D_f$.

Η σημείωση αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, σε ασκήσεις με συναρτησιακές σχέσεις και άγνωστο τύπο f , όταν ζητάμε να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών όλο το $\mathbb{R}$.

Παραδείγματα 3, 4, 5, 6

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να προσδιορίσετε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$$\alpha) f(x) = 2x^3 - 3x + \frac{5}{2}$$

$$\beta) f(x) = |x^2 - 1|$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ \frac{2}{x} - 1, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$\delta) f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\epsilon) g(x) = \frac{3x+1}{1+|x-2|}$$

$$\zeta) g(x) = \frac{\frac{1}{x} - 2}{\frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\ln x}}$$

$$\eta) h(x) = \frac{\sqrt[3]{2 - \sqrt{1-x}}}{\sin x}$$

$$\theta) h(x) = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$$

$$\iota) t(x) = \frac{x}{\exp x}$$

$$\kappa) t(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \cdot \sqrt{e^x + 1}, \text{ με } 1 - \frac{1}{x} > 0$$

$$\alpha) f(x) = 2x^3 - 3x + \frac{5}{2},$$

$D_f = \mathbb{R}$ γιατί κάθε πολυωνυμική συνάρτηση έχει ως ευρύτερο πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, καθώς δεν υπάρχει περιορισμός για το x .

$$\beta) f(x) = |x^2 - 1|,$$

$D_f = \mathbb{R}$ (δεν υπάρχει περιορισμός για το x).

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ \frac{2}{x} - 1, & -1 < x < 0 \end{cases},$$

$$D_f = (-1, 0) \cup [0, +\infty) = (-1, +\infty).$$

Στις συναρτήσεις πολλαπλού τύπου όπως αυτή, το πεδίο ορισμού δεν είναι τίποτα άλλο παρά η ένωση των συνόλων των επιτρεπτών τιμών του x κάθε κλάδου.

$$\delta) f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-3x+2},$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x-2 \geq 0 \\ x^2-3x+2 \neq 0 \end{matrix}\} = \{x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \geq 2 \\ x \neq 1 \text{ και } x \neq 2 \end{matrix}\} = (2, +\infty).$$

$$\epsilon) g(x) = \frac{3x+1}{1+|x-2|},$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 1+|x-2| \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / |x-2| \neq -1\} = \mathbb{R}.$$

$$\zeta) g(x) = \frac{\frac{1}{x} - 2}{\sqrt{x^2-5x+6} \ln x},$$

$$\begin{aligned} D_g &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \neq 0 \\ x > 0 \\ x^2-5x+6 \geq 0 \\ \ln x \neq 0 \\ \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\ln x} \neq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x > 0 \\ x \leq 2 \text{ ή } x \geq 3 \\ x \neq e^0 \\ x^2-5x+6 \neq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x > 0 \\ x \leq 2 \text{ ή } x \geq 3 \\ x \neq 1 \\ x \neq 2 \text{ και } x \neq 3 \end{matrix} \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x > 0 \\ x \leq 2 \text{ ή } x \geq 3 \\ x \neq 1 \\ x \neq 2 \text{ και } x \neq 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x > 0 \\ x < 2 \text{ ή } x > 3 \\ x \neq 1 \end{matrix} \right\} = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty). \end{aligned}$$

* $x^2-5x+6 \geq 0$: Λύση με τη βοήθεια της θεωρίας πρόσημου τριωνύμου.

* $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq e^0 \Leftrightarrow x \neq 1$

* $\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\ln x} \neq 0$: Για να είναι το κλάσμα $\neq 0$ αρκεί ο αριθμητής να είναι $\neq 0$ δηλαδή

$$\sqrt{x^2-5x+6} \neq 0 \text{ άρα } x^2-5x+6 \neq 0.$$

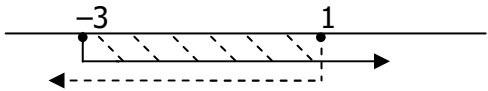
ΣΗΜΕΙΩΣΗ : Το πεδίο ορισμού πρέπει να βρεθεί πριν γίνει το σύνθετο κλάσμα απλό και πριν τις τυχόν απλοποιήσεις, γιατί αλλιώς πιθανόν να βρούμε ένα σύνολο που θα είναι

λάθος. Έτσι π.χ. αν $f(x) = \frac{x \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x-2)}$ τότε $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x-1 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{matrix} \right\} = \dots$ και δεν θα

βρούμε το ίδιο αν απλοποιήσουμε το $x-1$ πρώτα και μετά προσδιορίσουμε το D_f .

$$\eta) h(x) = \frac{\sqrt[3]{2-\sqrt{1-x}}}{\sin x}, \quad D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} 2-\sqrt{1-x} \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{array} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} \sqrt{1-x} \leq 2 \\ x \leq 1 \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} (\sqrt{1-x})^2 \leq 2^2 \\ x \leq 1 \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} 1-x \leq 4 \\ x \leq 1 \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x \geq -3 \\ x \leq 1 \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} =$$

$$= [-3, 1] - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$


ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στην ουσία ο μόνος αριθμός από τους $k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ που ανήκει στο $[-3, 1]$

είναι ο $-\frac{\pi}{2}$ (για $k=1$) αφού $\pi \approx 3,14$. Άρα το D_h θα μπορούσε να γραφτεί και ως

$$[-3, -\frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2}, 1].$$

$$\theta) h(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right),$$

$$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} 1+x \neq 0 \\ \frac{1-x}{1+x} > 0 \end{array} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x \neq -1 \\ -1 < x < 1 \end{array} \right\} = (-1, 1).$$

* Λύση της $\frac{1-x}{1+x} > 0$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
1-x	+	+	○	-
1+x	-	=	+	+
Π	-	=	+	○

$$\iota) t(x) = \frac{x}{\exp x},$$

$$D_t = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} \exp x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{array} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x \neq k\pi \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\kappa) t(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \cdot \sqrt{e^x + 1}, \quad 1 - \frac{1}{x} > 0$$

$$D_t = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x \neq 0 \\ 1 - \frac{1}{x} > 0 \end{array} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x \neq 0 \\ \frac{x-1}{x} > 0 \end{array} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x < 0 \quad \text{ή} \quad x > 1 \right\} = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

* Λύση της $\frac{x-1}{x} > 0$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x-1	-	-	○	+
x	-	=	+	+
Π	+	=	-	○

2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις f και g είναι ίσες σε κάθε περίπτωση. Αν $f \neq g$ να βρείτε το «ευρύτερο» υποσύνολο του $\mathbb{R}$ όπου είναι $f(x)=g(x)$.

α) $f(x)=x$ και $g(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}$

β) $f(x)=\ln x^2$ και $g(x)=2\ln x$.

α) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$ αφού $x^2 + 1 \neq 0$ αληθής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$g(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1} = \frac{x \cdot (x^2+1)}{x^2+1} = x = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad \text{ΑΠΑ } \mathbf{f=g}.$$

β) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$ αφού $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} = (0, +\infty).$$

'Αρα $\mathbf{f \neq g}$ αφού $D_f \neq D_g$. Όμως στο $D_f \cap D_g = \mathbb{R}^* \cap (0, +\infty) = (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x) = \ln x^2 = 2\ln x = g(x) \quad \text{ΑΠΑ } \mathbf{f(x)=g(x) \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Γενικά για $x \neq 0$ ισχύει $\ln x^2 = 2\ln|x|$ αλλά για $x \in (0, +\infty)$ είναι $\ln x^2 = 2\ln x$ αφού $x > 0$.

3. Να προσδιορίσετε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x)=3x+\frac{1}{4}$

β) $f(x)=3x+\frac{1}{4}$ αν $x \in [1, 4)$

γ) $f(x)=\frac{5x}{x-1}-4$

δ) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

ε) $g(x)=3x^2-5x+6$

ζ) $h(x)=\frac{x^2+x-1}{x^2-4x+3}$

η) $t(x)=|x+1|+2$

θ) $t(x)=-\sqrt{\frac{x-1}{3}}+3$

ι) $f(x)=e^x-2$

α) $\mathbf{f(x)=3x+\frac{1}{4}}$

Είναι $D_f = \mathbb{R}$

$$R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y=3x+\frac{1}{4} \\ x \in D_f \end{matrix} \right\} = \dots = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x=\frac{y-\frac{1}{4}}{3} \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \frac{y-\frac{1}{4}}{3} \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \text{ αφού το } \frac{y-\frac{1}{4}}{3}$$

είναι πραγματικός για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

β) $\mathbf{f(x)=3x+\frac{1}{4}}$, με $D_f = [1, 4)$

- Γράφουμε τη σχέση που δίνει το R_f
- Λύνουμε την $y=3x+\frac{1}{4}$ ως προς x και μεταφράζουμε τη σχέση $x \in D_f$
- Θέτουμε στην $x \in [1, 4)$, την τιμή του x που προσδιορίσαμε από την $y=3x+\frac{1}{4}$ και λύνουμε ως προς y .

$$\begin{aligned}
 R_f &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y=3x+\frac{1}{4} \\ x \in D_f \end{array} \right\} = \\
 &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} 3x=y-\frac{1}{4} \\ x \in [1, 4) \end{array} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x=\frac{y-\frac{1}{4}}{3} \\ x \in [1, 4) \end{array} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x=\frac{4y-1}{12} \\ 1 \leq x < 4 \end{array} \right\} = \\
 &= \{ y \in \mathbb{R} / 1 \leq \frac{4y-1}{12} < 4 \} = \{ y \in \mathbb{R} / 12 \leq 4y-1 < 48 \} = \\
 &= \{ y \in \mathbb{R} / 12+1 \leq 4y < 48+1 \} = \{ y \in \mathbb{R} / 13 \leq 4y < 49 \} = \\
 &= \{ y \in \mathbb{R} / \frac{13}{4} \leq y < \frac{49}{4} \} = \left[\frac{13}{4}, \frac{49}{4} \right).
 \end{aligned}$$

γ) $f(x) = \frac{5x}{x-1} - 4$

Είναι $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

- Γράφουμε τη σχέση που δίνει το R_f
- Λύνουμε την $y = \frac{5x}{x-1} - 4$ ως προς x και μεταφράζουμε τη σχέση $x \in D_f$
Στην προσπάθειά μας όμως να λύσουμε ως προς x , πρέπει πρώτα να διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα αν $y-1 \neq 0$ ή $y-1=0$

$$\begin{aligned}
 R_f &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y = \frac{5x}{x-1} - 4 \\ x \in D_f \end{array} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y \cdot (x-1) = -4(x-1) + 5x \\ x \in \mathbb{R} - \{1\} \end{array} \right\} = \\
 &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} yx - y = -4x + 4 + 5x \\ x \neq 1 \end{array} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} yx - x = y + 4 \\ x \neq 1 \end{array} \right\} = \\
 &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} (y-1) \cdot x = y + 4 \\ x \neq 1 \end{array} \right\} = \\
 &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y-1 \neq 0 \\ x = \frac{y+4}{y-1} \\ x \neq 1 \end{array} \right\} \cup \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y-1 = 0 \\ (y-1) \cdot x = y + 4 \\ x \neq 1 \end{array} \right\} = \\
 &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y \neq 1 \\ \frac{y+4}{y-1} \neq 1 \end{array} \right\} \cup \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y = 1 \\ 0 \cdot x = 1 + 4 \\ x \neq 1 \end{array} \right\} = \boxed{\text{αδύνατη}} \\
 &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y \neq 1 \\ y+4 \neq y-1 \end{array} \right\} \cup \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y = 1 \\ 0 = 5 \\ x \neq 1 \end{array} \right\} = \\
 &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y \neq 1 \\ 4 \neq -1 \end{array} \right\} \cup \emptyset = \{ y \in \mathbb{R} / y \neq 1 \} = \mathbb{R} - \{1\}
 \end{aligned}$$

δ) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$ Είναι $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

αληθής

ΠΡΟΣΟΧΗ: Όταν ο τύπος της ρητής συνάρτησης απλοποιείται, όπως εδώ, **επιβάλλεται** να τον απλοποιούμε πριν ξεκινήσουμε τον προσδιορισμό του R_f , **χρησιμοποιώντας όμως ως πεδίο ορισμού, το πεδίο ορισμού που προσδιορίσαμε πριν την απλοποίηση.**

$$\text{Έτσι } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x-3)}{\cancel{(x-2)} \cdot (x+2)} = \frac{x-3}{x+2}.$$

Άρα η πορεία είναι παρόμοια με αυτήν που ακολουθήσαμε στο γ) ερώτημα:

$$\begin{aligned} R_f &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y = \frac{x-3}{x+2} \\ x \in D_f \end{array} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} (x+2) \cdot y = x-3 \\ x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\} \end{array} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} xy + 2y = x-3 \\ x \neq -2 \\ x \neq 2 \end{array} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} xy - x = -2y - 3 \\ x \neq -2 \\ x \neq 2 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} (y-1)x = -2y-3 \\ x \neq -2 \\ x \neq 2 \end{array} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y-1 \neq 0 \\ x = \frac{-2y-3}{y-1} \\ x \neq -2 \\ x \neq 2 \end{array} \right\} \cup \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y-1 = 0 \\ (y-1)x = -2y-3 \\ x \neq -2 \\ x \neq 2 \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y \neq 1 \\ \frac{-2y-3}{y-1} \neq -2 \\ \frac{-2y-3}{y-1} \neq 2 \end{array} \right\} \cup \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y = 1 \\ 0 \cdot x = -2-3 \\ x \neq -2 \\ x \neq 2 \end{array} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y \neq 1 \\ -2y-3 \neq -2y+2 \\ -2y-3 \neq 2y-2 \end{array} \right\} \cup \emptyset = \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y \neq 1 \\ -3 \neq 2 \\ 4y \neq -1 \end{array} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y \neq 1 \\ y \neq -\frac{1}{4} \end{array} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4}, 1 \right\}. \end{aligned}$$

αδύνατη

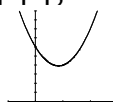
αληθής

ε) $g(x) = 3x^2 - 5x + 6$. Είναι $D_f = \mathbb{R}$

- Γράφουμε τη σχέση που δίνει το R_g , φέρνουμε την εξίσωση $y = 3x^2 - 5x + 6$ σε μορφή $3x^2 - 5x + 6 - y = 0$ και αφού το πεδίο ορισμού είναι το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η g (δηλαδή το x είναι «γενικά» πραγματικός αριθμός), θα πρέπει η δευτεροβάθμια αυτή να έχει πραγματικές ρίζες. Άρα απαιτούμε $\Delta \geq 0$
- Λύνουμε την σχέση $\Delta \geq 0$ και από αυτήν προσδιορίζουμε τις ζητούμενες τιμές του y . Η σχέση « $x \in \mathbb{R}$ » δεν χρειάζεται πλέον, αφού χρησιμοποιήθηκε όταν είπαμε « x γενικά πραγματικός άρα $\Delta \geq 0$ ».

$$\begin{aligned} R_g &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y = 3x^2 - 5x + 6 \\ x \in D_g \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} 3x^2 - 5x + 6 - y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} = \{ y \in \mathbb{R} / \Delta \geq 0 \} = \\ &= \{ y \in \mathbb{R} / (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (6-y) \geq 0 \} = \dots = \\ &= \{ y \in \mathbb{R} / 12y \geq 47 \} = \{ y \in \mathbb{R} / y \geq \frac{47}{12} \} = \\ &= \left[\frac{47}{12}, +\infty \right) \end{aligned}$$

ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΟΣ ΤΡΟΠΟΣ: Η συνάρτηση αυτή είναι τετραγωνική συνάρτηση μορφής $f(x)=ax^2+bx+c$, γνωστή μας από τις προηγούμενες τάξεις του Λυκείου, με γραφική παράσταση παραβολή.



Η συνάρτηση αυτή, αφού έχει $a>0$, παρουσιάζει ελάχιστο στο $-\frac{\beta}{2\alpha}$ με τιμή $-\frac{\Delta}{4\alpha} = \frac{47}{12}$

ενώ παίρνει κάθε τιμή μεγαλύτερη ή ίση από αυτήν. Άρα $R_f = [\frac{47}{12}, +\infty)$

$$\zeta) h(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 4x + 3}$$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4x + 3 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1, 3\}$ και είναι το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η h .

- Κατ' αρχήν ο τύπος της h δεν απλοποιείται.

Γράφουμε τη σχέση που δίνει το R_h , φέρνουμε την πρώτη σχέση σε μορφή δευτεροβάθμιας εξίσωσης ως προς x και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα αν $y-1 \neq 0$ ή $y-1=0$.

- Αν $y-1 \neq 0$ τότε είναι δευτεροβάθμια και αφού το D_h είναι το «ευρύτερο», ο x θεωρείται γενικά πραγματικός, οπότε η δευτεροβάθμια πρέπει να έχει γενικά ρίζες στο $\mathbb{R}$. Άρα $\Delta \geq 0$.

- Αν $y-1=0$ τότε δεν έχουμε δευτεροβάθμια και θέτοντας όπου y το 1 καταλήγουμε στην $x = \frac{4}{5}$ που δεν δημιουργεί αντίφαση με τις $x \neq 1$ και $x \neq 3$. Άρα η τιμή $y=1$ είναι δεκτή.

$$\begin{aligned} R_h &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 4x + 3} \\ x \in D_h \end{array} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} (x^2 - 4x + 3) \cdot y = x^2 + x - 1 \\ x \in \mathbb{R} - \{1, 3\} \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x^2 y - 4xy + 3y = x^2 + x - 1 \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x^2 y - x^2 - 4xy - x + 3y + 1 = 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} (y-1)x^2 - (4y+1)x + 3y+1 = 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y-1 \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{array} \right\} \cup \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y-1=0 \\ (y-1)x^2 - (4y+1)x + 3y+1 = 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y \neq 1 \\ [-(4y+1)]^2 - 4(y-1)(3y+1) \geq 0 \end{array} \right\} \cup \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y=1 \\ -5x+4=0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y \neq 1 \\ 4y^2 + 16y + 5 \geq 0 \end{array} \right\} \cup \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} y=1 \\ x = \frac{4}{5} \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{array} \right\} = \end{aligned}$$

δεν υπάρχει αντίφαση

• Τέλος, η ένωση των δύο συνόλων δίνει ένα νέο σύνολο, το οποίο δεν περιέχει περιορισμό για το y σε σχέση με το 1.

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y \neq 1 \\ y \leq \frac{-4-\sqrt{11}}{2} \text{ ή } y \geq \frac{-4+\sqrt{11}}{2} \end{matrix} \right\} \cup \{ y \in \mathbb{R} / y=1 \} = \\
 &= \left\{ y \in \mathbb{R} / y \leq \frac{-4-\sqrt{11}}{2} \text{ ή } y \geq \frac{-4+\sqrt{11}}{2} \right\} = \\
 &= (-\infty, \frac{-4-\sqrt{11}}{2}] \cup [\frac{-4+\sqrt{11}}{2}, +\infty).
 \end{aligned}$$

η) $t(x) = |x+1| + 2$, $D_t = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 R_t &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y = |x+1| + 2 \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y - 2 = |x+1| \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} = \{ y \in \mathbb{R} / y - 2 \geq 0 \}^* = \{ y \in \mathbb{R} / y \geq 2 \} = \\
 &= [2, +\infty).
 \end{aligned}$$

«κρυφός» περιορισμός

* Η σκέψη που μας οδηγεί στον περιορισμό $y - 2 \geq 0$ είναι η εξής: «Αφού το x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός, τότε και ο $x+1$ είναι οποιοσδήποτε πραγματικός, οπότε ο $|x+1|$ είναι οποιοσδήποτε μη αρνητικός αριθμός. Κατά συνέπεια και ο $y - 2$, που ισούται με $|x+1|$, είναι οποιοσδήποτε μη αρνητικός πραγματικός». Η σχέση $y - 2 \geq 0$ είναι ο «κρυφός» περιορισμός.

θ) $t(x) = -\sqrt{\frac{x-1}{3}} + 3$ Είναι $D_t = \{ x \in \mathbb{R} / \frac{x-1}{3} \geq 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} / x-1 \geq 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} / x \geq 1 \} = [1, +\infty)$

• Εδώ ο στόχος είναι να λύσουμε ως προς x , αλλά φτάνοντας στη σχέση $3 - y = \sqrt{\frac{x-1}{3}}$ και πριν υψώσουμε στο τετράγωνο τα δύο μέλη, επειδή το $\sqrt{\frac{x-1}{3}}$ είναι μη αρνητικό, πρέπει να θέσουμε περιορισμό $3 - y \geq 0$ («κρυφός» περιορισμός).

$$\begin{aligned}
 R_t &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y = -\sqrt{\frac{x-1}{3}} + 3 \\ x \in D_t \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} 3 - y = \sqrt{\frac{x-1}{3}} \\ x \in [1, +\infty) \end{matrix} \right\} = \\
 &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} 3 - y \geq 0 \\ (3 - y)^2 = \left(\sqrt{\frac{x-1}{3}} \right)^2 \\ x \geq 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} 3 - y \geq 0 \\ y^2 - 6y + 9 = \frac{x-1}{3} \\ x \geq 1 \end{matrix} \right\} = \\
 &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} 3 - y \geq 0 \\ 3y^2 - 18y + 27 = x - 1 \\ x \geq 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y \leq 3 \\ x = 3y^2 - 18y + 28 \\ x \geq 1 \end{matrix} \right\} = \\
 &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y \leq 3 \\ 3y^2 - 18y + 28 \geq 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y \leq 3 \\ 3y^2 - 18y + 27 \geq 0 \end{matrix} \right\} = \\
 &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y \leq 3 \\ 3(y^2 - 6y + 9) \geq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y \leq 3 \\ y^2 - 6y + 9 \geq 0 \end{matrix} \right\} =
 \end{aligned}$$

$$\left| = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y \leq 3 \\ (y-3)^2 \geq 0 \end{matrix} \right\} = \{ y \in \mathbb{R} / y \leq 3 \} = (-\infty, 3]. \right.$$

αληθής

 ι) $f(x) = e^x - 2$

 Είναι $D_f = \mathbb{R}$

- Εδώ ο στόχος είναι να λύσουμε ως προς x , αλλά φτάνοντας στη σχέση $e^x = y + 2$, πριν μετατρέψουμε την εκθετική εξίσωση σε λογαριθμική, πρέπει να θέσουμε περιορισμό $y + 2 > 0$ («κρυφός» περιορισμός), αφού το e^x είναι θετικό.

$$R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y = e^x - 2 \\ x \in D_f \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} e^x = y + 2 \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} =$$

«κρυφός» περιορισμός

$$= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y + 2 > 0 \\ x = \ln(y + 2) \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y > -2 \\ \ln(y + 2) \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} = \\ = \{ y \in \mathbb{R} / y > -2 \} = (-2, +\infty).$$

4. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + 5f(x) = 6x + 1$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

Η γενική ιδέα είναι να δ.ο. για οποιαδήποτε τιμή του $y \in \mathbb{R}$, π.χ. $y = a$, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, τέτοιο, ώστε $f(x) = a$.

ΜΕΘΟΔΟΣ-ΣΚΕΨΗ: Φέρνουμε τα $f(x)$ στη συναρτησιακή σχέση στο a' μέλος και εξισώνουμε το a' μέλος με μια παράσταση όπου κάθε $f(x)$ έχει αντικατασταθεί με a . Μεταφέρουμε τους προσθετέους στο a' μέλος και το παραγοντοποιούμε. Έτσι προκύπτει η σχέση (1).

ΛΥΣΗ: Ξεκινώντας από την $f(x) = a$, δηλαδή την $f(x) - a = 0$, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με κατάλληλη (μη μηδενική) ποσότητα ώστε να προκύψει η (1). Απομονώνουμε τα $f(x)$ στο a' μέλος και τα αντικαθιστούμε από τη συναρτησιακή σχέση και στη συνέχεια λύνουμε ως προς x .

$$\begin{aligned} \text{Έστω } f(x) = a, \text{ τότε } f^3(x) + 5f(x) &= a^3 + 5a \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f^3(x) - a^3 + 5(f(x) - a) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (f(x) - a) \cdot (f^2(x) + a \cdot f(x) + a^2) + 5(f(x) - a) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (f(x) - a) \cdot (f^2(x) + a \cdot f(x) + a^2 + 5) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

θετικό, άρα η παρένθεση είναι > 5

$$\begin{aligned} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) - a = 0 \Leftrightarrow (f(x) - a) \cdot (f^2(x) + a \cdot f(x) + a^2 + 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow f^3(x) - a^3 + 5(f(x) - a) = 0 \Leftrightarrow f^3(x) + 5f(x) &= a^3 + 5a \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6x + 1 = a^3 + 5a \Leftrightarrow x = \frac{a^3 + 5a - 1}{6} \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ($x = \frac{a^3 + 5a - 1}{6}$)

τέτοιο, ώστε $f(x) = a$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

5. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + 3f(x) = 5x - 2020$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

Σκέψη-πρόχειρο: Έστω $f(x) = a$, τότε $f^3(x) + 3f(x) = a^3 + 3a \Leftrightarrow f^3(x) - a^3 + 3(f(x) - a) = 0 \Leftrightarrow (f(x) - a) \cdot (f^2(x) + a \cdot f(x) + a^2) + 3(f(x) - a) = 0 \Leftrightarrow (f(x) - a) \cdot (f^2(x) + a \cdot f(x) + a^2 + 3) = 0$ (1)

Λύση:

Αρκεί να δ.ο. για οποιαδήποτε τιμή του $y \in \mathbb{R}$, π.χ. $y = a$, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, τέτοιο, ώστε $f(x) = a$.

θετικό, άρα η παρένθεση είναι > 3

$$\begin{aligned} f(x) = a &\Leftrightarrow f(x) - a = 0 \Leftrightarrow (f(x) - a) \cdot (f^2(x) + a \cdot f(x) + a^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow f^3(x) - a^3 + 3(f(x) - a) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f^3(x) + 3f(x) = a^3 + 3a \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 5x - 2020 = a^3 + 6a \Leftrightarrow x = \frac{a^3 + 6a + 2020}{5} \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ($x = \frac{a^3 + 6a + 2020}{5}$) τέτοιο, ώστε $f(x) = a$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

6. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$ (1), $x > 0$.

Λύση:

Έστω $f(x) = y$, $y \in \mathbb{R}$. Τότε (1) $\Leftrightarrow y = \frac{1}{x} - x + 1 \Leftrightarrow x \cdot y = 1 - x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + y \cdot x - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1) \cdot x - 1 = 0$ (2). $\Delta = (y - 1)^2 + 4 > 0$, για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και επειδή από τους τύπους Vieta το γινόμενο των ριζών είναι $P = \frac{Y}{a} = -1 < 0$, η (2) θα έχει ρίζες ετερόσημες για οποιαδήποτε τιμή του $y \in \mathbb{R}$. Άρα για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει θετική τιμή του x τέτοια ώστε να επαληθεύεται η (1). Άρα $R_f = \mathbb{R}$.

1.2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με αντίστοιχα πεδία ορισμού D_f και D_g . Μπορούμε να ορίσουμε τις παρακάτω συναρτήσεις:

• $f+g$: Συνάρτηση άθροισμα Π.Ο. $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ ΤΥΠΟΣ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	• $f-g$: Συνάρτηση διαφορά Π.Ο. $D_{f-g} = D_f \cap D_g$ ΤΥΠΟΣ $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
• $f \cdot g$: Συνάρτηση γινόμενο Π.Ο. $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$ ΤΥΠΟΣ $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	• $\frac{f}{g}$: Συνάρτηση πηλίκο Π.Ο. $D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\}$ ΤΥΠΟΣ $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Παρατηρούμε ότι όλες οι παραπάνω συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, ορίζονται στο $D_f \cap D_g$ εκτός από την $\frac{f}{g}$ για την οποία εξαιρούνται από το σύνολο αυτό οι τιμές του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Προφανώς αν $D_f \cap D_g = \emptyset$ τότε καμία από τις παραπάνω συναρτήσεις δεν ορίζεται.
2. Προσοχή χρειάζεται στο γεγονός ότι π.χ. η $f+g$ είναι **μία** νέα **συνάρτηση** που απλά λέγεται «συνάρτηση άθροισμα».

ΜΕΜΟ Όταν μια συνάρτηση προκύπτει από πράξη ή σύνθεση άλλων, τότε το πεδίο ορισμού της υπολογίζεται όπως κάθε φορά περιγράφεται και είναι ανεξάρτητο του τύπου της. Έτσι γενικά δεν είναι σωστό να βρίσκεται από τους περιορισμούς του τύπου της (π.χ στις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ και $f \circ g$ -βλέπε παρακάτω "σύνθεση συναρτήσεων").

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Απλά για να ορίσουμε μία από τις παραπάνω συναρτήσεις αρκεί να βρούμε όπως περιγράψαμε το Π.Ο. της και τον τύπο της.

Παράδειγμα 1

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-2}$ και $g(x) = \frac{x-2}{\ln x}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$ και $\frac{f}{g}$.

Προφανώς $D_f = [2, +\infty)$.

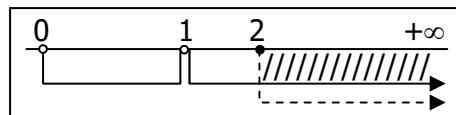
$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix} \right\} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\boxed{f+g} \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g = [2, +\infty) \cap ((0, 1) \cup (1, +\infty)) = [2, +\infty).$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x-2} + \frac{x-2}{\ln x} = \frac{\sqrt{x-2} \cdot \ln x + x - 2}{\ln x}.$$

$$\boxed{\frac{f}{g}} \quad D_{f/g} = [D_f \cap D_g] - \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\} = [2, +\infty) - \{x \in \mathbb{R} / x-2=0\} = \{2, +\infty\} - \{2\} = (2, +\infty).$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\frac{x-2}{\ln x}} = \frac{\sqrt{x-2} \cdot \ln x}{x-2} = \frac{\cancel{\sqrt{x-2}} \cdot \ln x}{(\sqrt{x-2})^2} = \frac{\ln x}{\sqrt{x-2}}.$$



1.3 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Είναι δυνατόν μία συνάρτηση f να έχει κάποια χαρακτηριστικά τα οποία να την κατατάσσουν σε κάποια κατηγορία συναρτήσεων. Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι:

1. Αν f άρτια ή περιττή
2. Αν η f είναι γνησίως μονότονη
3. Αν η f έχει ακρότατα
4. Αν η f είναι «1-1» (ένα προς ένα)

1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΑΡΤΙΕΣ-ΠΕΡΙΤΤΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Μία συνάρτηση f λέγεται **άρτια** αν για κάθε $x \in D_f$ ισχύουν:

α) το $-x \in D_f$ και

β) $f(-x)=f(x)$.

Μία συνάρτηση f λέγεται **περιττή** αν για κάθε $x \in D_f$ ισχύουν:

α) το $-x \in D_f$ και

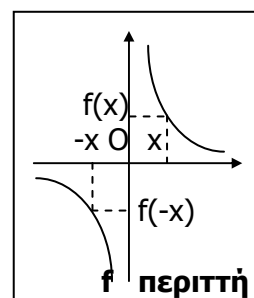
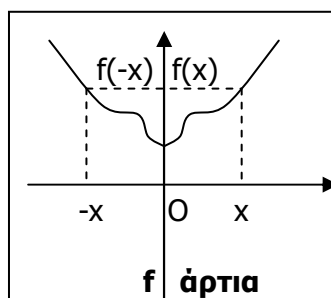
β) $f(-x)=-f(x)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Για να είναι ή f είτε άρτια είτε περιττή πρέπει αρχικά «για κάθε $x \in D_f$, το $-x \in D_f$ ». Άρα για οποιονδήποτε αριθμό του D_f , πρέπει ο αντίθετός του να ανήκει στο D_f , οπότε **το D_f πρέπει να είναι σύνολο συμμετρικό ως προς το 0**.

Τέτοια σύνολα είναι π.χ. το $\mathbb{R}$, το $\mathbb{R}^*$, το $(-2,2)$, το $[-5,-1) \cup (1,5]$ κ.λ.π. ενώ δεν είναι συμμετρικά ως προς το 0 τα $(-3,4)$, $(0,5)$, $[-3, 3)$ κ.λ.π.

2. Από τον ορισμό συμπεραίνουμε ότι μια συνάρτηση είναι άρτια αν και μόνο αν η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, ενώ μία συνάρτηση είναι περιττή αν και μόνο αν η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή O των αξόνων.



2. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Μία συνάρτηση f ονομάζεται:

- γνησίως αύξουσα** ($f \nearrow$) σε ένα σύνολο Δ όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$
- γνησίως φθίνουσα** ($f \searrow$) σε ένα σύνολο Δ όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$
- αύξουσα** ($f \uparrow$) σε ένα σύνολο Δ όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$
- φθίνουσα** ($f \downarrow$) σε ένα σύνολο Δ όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$
- σταθερή** σε ένα σύνολο Δ όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι παραπάνω ορισμοί δίνονται με συνεπαγωγές (π.χ. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$).

Όταν ισχύει μία τέτοια συνεπαγωγή τότε ισχύει και η αντίστοιχη ισοδυναμία. Έτσι αν ισχύει ότι για $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, αυτόματα ισχύει και η ισοδυναμία $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Προσοχή όμως χρειάζεται στο ότι αν για $f(x_1) < f(x_2)$ αποδείξουμε ότι $x_1 < x_2$ (δηλαδή την αντίστροφη συνεπαγωγή), τότε δεν είναι σίγουρο ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Η συνεπαγωγή $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$, εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα **μόνο** αν γνωρίζουμε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1» (βλέπε παρακάτω).

Όταν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται γενικά **γνησίως μονότονη**.

Όταν η f είναι αύξουσα, φθίνουσα ή σταθερή λέγεται γενικά **μονότονη**.

Προφανώς κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και μονότονη. **Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.**

Εποπτικά η γραμμή της γραφικής παράστασης μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης από τα αριστερά προς τα δεξιά «ανεβαίνει» ενώ μιας γνησίως φθίνουσας από τα αριστερά προς τα δεξιά «κατεβαίνει». Η γραφική παράσταση μιας σταθερής συνάρτησης είναι πάντα μία οριζόντια ευθεία.

Μπορεί μία συνάρτηση να μην είναι μονότονη σε όλο το πεδίο ορισμού της, γιατί ίσως σε κάποια διαστήματα έχει αντιφατικά είδη μονοτονίας.

Τότε λέμε ότι είναι **μονότονη κατά διαστήματα**.

Για παράδειγμα η f του παραπάνω σχήματος είναι $\searrow$ στο $(-\infty, -1]$ και $\nearrow$ στο $[-1, +\infty)$.

Είναι μονότονη στο $(-\infty, -1]$ και στο $[-1, +\infty)$ αλλά όχι στο $\mathbb{R}$ που είναι το πεδίο ορισμού της.

Αντίθετα η f του διπλανού σχήματος είναι $\nearrow$ στο $(-\infty, 1]$ και σταθερή στο $[1, +\infty)$. Άρα η f είναι αύξουσα ($\nearrow$) στο $\mathbb{R}$ και αυτό γιατί δεν έχει αντιφατικά είδη μονοτονίας στα $(-\infty, 1]$ και $[1, +\infty)$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση τέμνει τους άξονες x 's και y 'g στα σημεία $(-2, 0)$ και $(0, -1)$ αντίστοιχα, να βρείτε το είδος της μονοτονίας της.

2) Να εξηγήσετε γιατί μια συνάρτηση η οποία είναι γνησίως μονότονη έχει το πολύ μία ρίζα.

3) Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, ρίζα το 1 και είναι γνησίως φθίνουσα να προσδιορίσετε τα πρόσημά της.

3. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο D_f . Λέμε ότι:

Η f παρουσιάζει **μέγιστο στο $x_0 \in D_f$** με **μέγιστη τιμή $f(x_0)$** , όταν ισχύει

$f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in D_f$.

Η f παρουσιάζει **ελάχιστο στο $x_0 \in D_f$** με **ελάχιστη τιμή $f(x_0)$** όταν ισχύει

$f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in D_f$.

Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f (αν υπάρχουν) είναι μοναδικές.

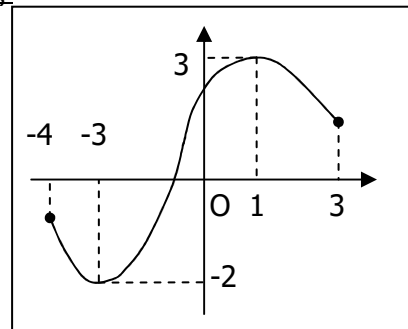
Στο σχήμα η f παρουσιάζει μέγιστο στο 1 με μέγιστη τιμή 3 και ελάχιστο στο -3 με ελάχιστη τιμή -2.

Το μέγιστο ή το ελάχιστο της f λέγονται **ακρότατα της f** .

Προφανώς αν το πεδίο τιμών της f είναι διάστημα με κλειστά άκρα π.χ. $[a, b]$ τότε το a είναι η ελάχιστη και το b η μέγιστη τιμή της f .

Παραδείγματα προσδιορισμού ακρότατων από το πεδίο τιμών.

- Αν $R_f = [-3, 5]$ τότε η f έχει ελάχιστο το -3 και μέγιστο το 5.
- Αν $R_f = [-3, 5)$ τότε η f έχει ελάχιστο το -3 αλλά δεν έχει μέγιστο.



4. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ "1-1" (ΕΝΑ ΠΡΟΣ ΕΝΑ)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f ορισμένη στο D_f είναι **συνάρτηση «ένα προς ένα»** (για συντομία «1-1») όταν:

για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$ (A) ή αλλιώς ισοδύναμα

για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει $x_1 = x_2$ (B)

Οι παραπάνω προτάσεις αναφέρουν με απλά λόγια ότι διαφορετικές τιμές του x αντιστοιχούν μέσω της f σε διαφορετικές τιμές του y , δηλαδή για κάθε σημείο y του συνόλου τιμών, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x στο πεδίο ορισμού.

Η πρόταση (B) είναι η **αντιθετοαντίστροφη** πρόταση της (A) (άρα είναι ισοδύναμες).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Οι αντίστροφες των παραπάνω προτάσεων (A) και (B) ισχύουν ούτως ή άλλως αφού η f είναι συνάρτηση. Έτσι τελικά **αν μια συνάρτηση είναι «1-1», οι παραπάνω προτάσεις ισχύουν ως ισοδυναμίες** δηλαδή:

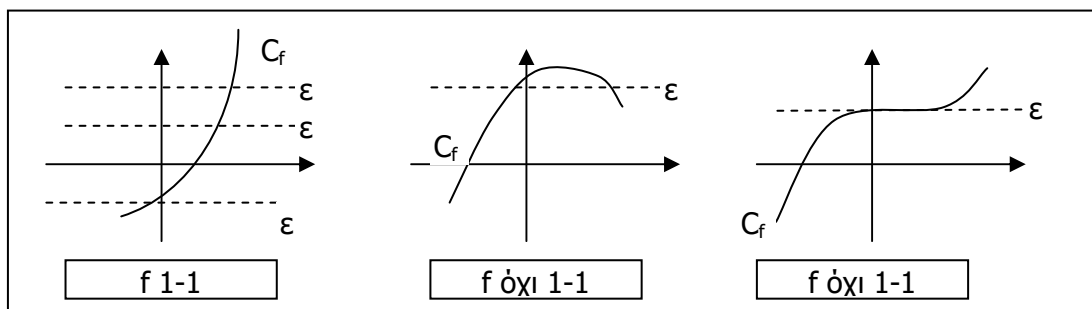
αν f «1-1» τότε για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ ισχύουν οι ισοδυναμίες

$f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Οι ισοδυναμίες αυτές μας βοηθούν κατά την λύση εξισώσεων και σχέσεων «διάφορου».

Γραφικά, μία συνάρτηση είναι 1-1 όταν κάθε οριζόντια ευθεία (ε) τέμνει την γραφική της παράσταση σε ένα το πολύ σημείο.

Έτσι αν υπάρχουν δύο τουλάχιστον διαφορετικές τιμές του x στις οποίες η f να παίρνει ίδια τιμή (ίδιο y), τότε η f δεν είναι 1-1.



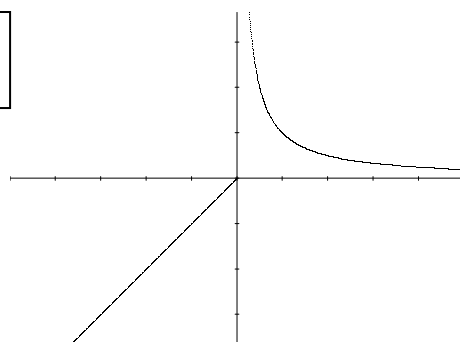
ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, τότε είναι και 1-1.

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ είναι

"1-1" στο $\mathbb{R}$, ενώ εμφανώς δεν είναι γνησίως μονότονη.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

- 1) Αν μια συνάρτηση f είναι συνάρτηση "1-1" πόσες ρίζες μπορεί να έχει;
- 2) Αν $f(x) = 3x^3 - 1$ συνάρτηση "1-1" στο $\mathbb{R}$, πώς μπορούμε να λύσουμε τις εξισώσεις $f(x) = f(2)$ και $f(x-1) = 2$;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. ΑΡΤΙΕΣ-ΠΕΡΙΤΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ο έλεγχος για να διαπιστώσουμε αν μια συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή γίνεται σε δύο βήματα:

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού D_f και ελέγχουμε αν για κάθε $x \in D_f$ το $-x \in D_f$ (δηλαδή αν το D_f είναι συμμετρικό ως προς το 0).
Αν ναι, αναφέρουμε ότι ικανοποιείται η πρώτη προϋπόθεση «για κάθε $x \in D_f$ το $-x \in D_f$ » και συνεχίζουμε στο 2^ο βήμα. Αλλιώς βρίσκουμε ένα $x \in D_f$ τέτοιο ώστε το $-x \notin D_f$ λέμε ότι η συνάρτηση δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή και σταματάμε εκεί.
2. Βρίσκουμε το $f(-x)$, θέτοντας στον τύπο της f όπου x το $-x$ και προσπαθούμε να το φέρουμε στη μορφή του $f(x)$. Αν $f(-x) = f(x)$ τότε f άρτια, αν $f(-x) = -f(x)$ τότε f περιττή ενώ αν $f(-x) \neq f(x)$ και $f(-x) \neq -f(x)$ τότε f ούτε άρτια ούτε περιττή.

Παράδειγμα 1

2. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όπως θα δούμε αργότερα, η μονοτονία μιας συνάρτησης f μπορεί να προσδιοριστεί πολύ πιο απλά με την χρήση των παραγώγων.

Προς το παρόν θα χρησιμοποιούμε δύο κυρίως μεθόδους:

A. Με την βοήθεια του ορισμού

Ξεκινάμε με την υπόθεση «Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ » και προσπαθούμε ή να κατασκευάσουμε στα δύο μέλη τα $f(x_1)$ και $f(x_2)$ οπότε η φορά της ανίσωσης που θα προκύψει θα μας δώσει την μονοτονία

ή να βρούμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x_1) - f(x_2)$.

Έτσι π.χ. αν βγει $f(x_1) - f(x_2) < 0$ δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$ αφού ως υπόθεση είχαμε ότι $x_1 < x_2$, η f θα είναι γνησίως αύξουσα.

B. Με την βοήθεια του λόγου μεταβολής λ

Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 \neq x_2$. Η παράσταση:

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\left(\text{ή } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right)$$

λέγεται λόγος μεταβολής της f μεταξύ x_1 και x_2 .

Προσδιορίζουμε το πρόσημο του λ και:

αν $\lambda > 0$ τότε f $\uparrow$,

αν $\lambda < 0$ τότε f $\downarrow$,

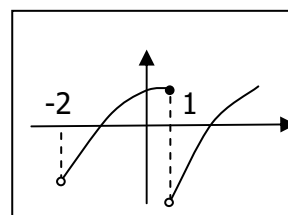
αν $\lambda \geq 0$ τότε f $\uparrow$,

αν $\lambda \leq 0$ τότε f $\downarrow$,

αν $\lambda = 0$ τότε f σταθερή.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Στην προσπάθειά μας να υπολογίσουμε το πρόσημο του λ , συνήθως παραγοντοποιούμε τον αριθμητή $f(x_2) - f(x_1)$ με στόχο να απλοποιηθεί το $x_2 - x_1$ του παρονομαστή.
- Αν σε οποιαδήποτε περίπτωση, κατά τη μελέτη της μονοτονίας, προκύψει η ανάγκη ξεχωριστής μελέτης σε υποδιαστήματα του D_f , τότε «μιλάμε» για μονοτονία κατά διαστήματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι αν μία συνάρτηση είναι για παράδειγμα γνησίως αύξουσα στο $(-2, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$, δεν είναι κατ' ανάγκη γνησίως αύξουσα και στην ένωσή τους (μπορεί στο $(-2, +\infty)$ να μην είναι μονότονη, βλέπε σχήμα).



Παράδειγμα 2, 5, 6

3. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ο προσδιορισμός των (ολικών) ακροτάτων μιας συνάρτησης f μπορεί να γίνει από το σύνολο τιμών.

Επιπλέον αν το D_f είναι κλειστό διάστημα, ίσως τα σημεία (ολικών) ακροτάτων να είναι

α) τα σημεία που αλλάζει η μονοτονία, αν η συνάρτηση ορίζεται στα σημεία αυτά και

β) τα κλειστά άκρα του πεδίου ορισμού.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στα πιθανά σημεία ακροτάτων πρέπει να συμπεριλάβουμε και τα μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού π.χ. το 2 αν $D_f = (-\infty, 0] \cup \{2\}$.

Όσον αφορά στη σύνδεση της μονοτονίας με τα ακρότατα ισχύει ότι αν $f \nearrow$ στο $[a, \beta]$ και $f \searrow$ στο $[\beta, \gamma]$ τότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο β , ενώ αν $f \searrow$ στο $[a, \beta]$ και $f \nearrow$ στο $[\beta, \gamma]$ τότε παρουσιάζει ελάχιστο στο β .

Αν το D_f περιλαμβάνει και διαστήματα με ανοικτά άκρα τότε για να έχουμε συμπέρασμα όσον αφορά στην ύπαρξη ελαχίστου ή μεγίστου θα πρέπει να βρούμε, όπως θα δούμε αργότερα, τα όρια της f στα σημεία αυτά.

Παράδειγμα 3

4. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ "ΕΝΑ ΠΡΟΣ ΕΝΑ"

Οι βασικές μέθοδοι για να διαπιστώσουμε αν μια συνάρτηση f είναι «1-1» είναι τέσσερις:

1. Με τον ορισμό (Α): Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 \neq x_2$. Προσπαθούμε με τη βοήθεια του $x_1 \neq x_2$ να κατασκευάσουμε σχέση $f(x_1) \neq f(x_2)$. Αν επιτευχθεί αυτό, τότε f «1-1».
2. Με τον ορισμό (Β): Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Αν η σχέση αυτή καταλήξει σε $x_1 = x_2$ τότε η f είναι «1-1».

Αν όμως καταλήξουμε σε μια σχέση που μπορεί να ισχύει ακόμα και όταν $x_1 \neq x_2$ τότε f όχι «1-1».

3. Με την μονοτονία, αφού αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε είναι και «1-1».
4. Μια μέθοδος που χρησιμοποιείται πιο σπάνια για να δείξουμε ότι η f είναι «1-1» είναι να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=y$ έχει για κάθε $y \in R_f$ μια ακριβώς λύση ως προς $x \in D_f$. Αυτό επιτυγχάνεται λύνοντας την $f(x)=y$ ως προς x και παρατηρώντας αν η λύση είναι μία, για κάθε $y \in R_f$.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Αν f «1-1» σε κάποια διαστήματα δεν σημαίνει ότι είναι «1-1» και στην ένωσή τους. Έτσι **αν η f έχει διπλό τύπο**, θα πρέπει να εξετάσουμε χωριστά στα υποδιαστήματα του διπλού τύπου και αν είναι εκεί «1-1» θα πρέπει ακόμα να δείξουμε ότι αν το x_1 ανήκει στο ένα υποδιάστημα και το x_2 στο άλλο, πάλι ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$. Το τελευταίο αυτό μπορεί να αποδειχθεί βρίσκοντας τα επιμέρους σύνολα τιμών κάθε κλάδου και δείχνοντας ότι δεν έχουν κοινά στοιχεία.

Παράδειγμα 4

ΜΕΜΟ

"Εφ-ίζω – Αποεφ-ίζω": Αν f συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο Δ , μπορούμε ίσως να εφ-ίσουμε ή να αποεφ-ίσουμε τα μέλη μιας σχέσης σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα (Προσοχή: ΜΟΝΟ ΑΝ $x_1, x_2 \in \Delta$):

ΕΝΕΡΓΕΙΑ	ΑΡΧΙΚΗ ΣΧΕΣΗ	ΤΕΛΙΚΗ ΣΧΕΣΗ	ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΗ
ΕΦ-ΙΖΩ	$x_1 = x_2$	$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$	Καμία (αφού f συνάρτηση)
	$x_1 \neq x_2$	$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$	Αν f "1-1" στο Δ
	$x_1 < x_2$	$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	Αν f γνησίως αύξουσα στο Δ
ΑΠΟΕΦ-ΙΖΩ	$f(x_1) = f(x_2)$	$\Rightarrow x_1 = x_2$	Αν f "1-1" στο Δ
	$f(x_1) \neq f(x_2)$	$\Rightarrow x_1 \neq x_2$	Καμία (αφού f συνάρτηση)
	$f(x_1) < f(x_2)$	$\Rightarrow x_1 < x_2$	Αν f γνησίως αύξουσα στο Δ

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές:

α) $f(x) = \log \frac{1-x^2}{1+x^2}$

β) $g(x) = |x-1| + |x+1|$

γ) $h(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$

δ) $t(x) = \sqrt{x^2-1}$, με $x \in (-\infty, -2)$

ε) $\varphi(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{αν } x < 0 \\ x^2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

α) $f(x) = \log \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} 1+x^2 \neq 0 \text{ (αληθής)} \\ \frac{1-x^2}{1+x^2} > 0 \end{array} \right\} \quad \text{Λύση της } \frac{1-x^2}{1+x^2} > 0:$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$1-x^2$	-	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	-
$1+x^2$	+		+		+
Π	-	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	-

Άρα $D_f = (-1, 1)$ που είναι συμμετρικό ως προς το 0, οπότε για κάθε $x \in (-1, 1)$, είναι $-x \in (-1, 1)$.

Επίσης $f(-x) = \log \frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \log \frac{1-x^2}{1+x^2} = f(x)$. Άρα **f άρτια**.

β) $g(x) = |x-1| + |x+1|$

Προφανώς $D_g = \mathbb{R}$ που είναι συμμετρικό ως προς το 0, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.

Επίσης $g(-x) = |-x-1| + |-x+1| = |-(x+1)| + |-(x-1)| = |x+1| + |x-1| = g(x)$. Άρα **g άρτια**.

γ) $h(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
1-x	+		+	$\ominus$ -	
1+x	$\div$	=	+		+
Π	-	=	+	$\ominus$	-

$$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} 1+x \neq 0 \\ \frac{1-x}{1+x} > 0 \end{array} \right\} \quad \text{Λύση της } \frac{1-x}{1+x} > 0 :$$

Άρα $D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x \neq -1 \\ -1 < x < 1 \end{array} \right\} = (-1, 1)$ που είναι συμμετρικό ως προς το 0, οπότε για κάθε $x \in (-1, 1)$, $-x \in (-1, 1)$.

$$\text{Επίσης } h(-x) = \log \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \log \frac{1+x}{1-x} = \log \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} = -\log \frac{1-x}{1+x} = -h(x). \text{ Άρα } h \text{ περιττή.}$$

$$\delta) t(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad \text{με } x \in (-\infty, -2)$$

Είναι προφανές ότι το πεδίο ορισμού της δεν είναι συμμετρικό ως προς το 0, καθώς για παράδειγμα το -3 ανήκει στο Δ_t αλλά όχι και ο 3 που είναι ο αντίθετός του. Άρα η t **δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή**.

$$\epsilon) \varphi(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{αν } x < 0 \\ x^2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

$$D_\varphi = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \text{ οπότε για κάθε } x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης:

- Αν $x < 0$ τότε $-x > 0$ οπότε $\varphi(x) = -x^2$ και $\varphi(-x) = (-x)^2 = x^2$ οπότε $\varphi(-x) = -\varphi(x)$
- Αν $x > 0$ τότε $-x < 0$ οπότε $\varphi(x) = x^2$ και $\varphi(-x) = (-x)^2 = x^2$ οπότε $\varphi(-x) = -\varphi(x)$
- Αν $x = 0$ τότε $\varphi(0) = 0^2 = 0$ και $\varphi(-0) = (-0)^2 = 0 = -0$ οπότε $\varphi(-0) = -\varphi(0)$.

Έτσι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ οπότε φ **περιττή**.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Παρατηρείστε ότι λόγω του τύπου της φ , το $\varphi(x)$ υπολογίζεται από τον ένα κλάδο της φ , ενώ το $\varphi(-x)$ από τον άλλο (με εξαίρεση το $\varphi(0)$ και το $\varphi(-0)$ που υπολογίζονται και τα δύο από τον δεύτερο).

2. Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = x^3 + x + 2 \quad \beta) g(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \gamma) h(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

$$\alpha) f(x) = x^3 + x + 2$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

Δύο τρόποι

1ος - Με τον ορισμό (κατασκευή)

$$\text{Έστω } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 < x_2. \text{ Τότε: } \begin{cases} x_1^3 < x_2^3 \\ \text{και} \\ x_1 < x_2 \end{cases} \text{ οπότε με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε ότι}$$

$$x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overset{\substack{\text{προσθετούμε} \\ \text{και στα δύο μέλη} \\ \text{το 2}}}{x_1^3 + x_1 + 2} < x_2^3 + x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα **f** γνησίως αύξουσα στο **R**.

2ος - Με τον λόγο μεταβολής λ

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$. Τότε:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^3 + x_1 + 2 - (x_2^3 + x_2 + 2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^3 - x_2^3 + x_1 - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2) \cdot (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \\ &= \frac{\cancel{(x_1 - x_2)} \cdot (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1)}{\cancel{x_1 - x_2}} = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1 \end{aligned}$$

Όμως η παράσταση $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1$ αν θεωρηθεί σαν τριώνυμο ως προς x_1 έχει διακρίνουσα $\Delta = x_2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x_2^2 + 1) = -3x_2^2 - 4 < 0$

Άρα το τριώνυμο $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1$ είναι πάντα ομόσημο του α του δηλαδή του 1, οπότε είναι πάντα θετικό. Άρα $\lambda > 0$ οπότε **f** γνησίως αύξουσα στο **R**.

β) $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 4 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / (2 - x) \cdot (2 + x) \geq 0\}$. Το τριώνυμο $(2 - x) \cdot (2 + x)$ έχει ρίζες 2 και -2 οπότε από τη θεωρία του προσήμου τριωνύμου βρίσκουμε ότι $D_g = [-2, 2]$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$. Τότε:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{4 - x_1^2} - \sqrt{4 - x_2^2}}{x_1 - x_2} \stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μελη}}{=} \frac{(\sqrt{4 - x_1^2} - \sqrt{4 - x_2^2}) \cdot (\sqrt{4 - x_1^2} + \sqrt{4 - x_2^2})}{\underset{\text{με τη σύζυγη παράσταση του αριθμητή}}{(x_1 - x_2) \cdot (\sqrt{4 - x_1^2} + \sqrt{4 - x_2^2})}} = \\ &= \frac{(\sqrt{4 - x_1^2})^2 - (\sqrt{4 - x_2^2})^2}{(x_1 - x_2) \cdot (\sqrt{4 - x_1^2} + \sqrt{4 - x_2^2})} = \frac{4 - x_1^2 - (4 - x_2^2)}{(x_1 - x_2) \cdot (\sqrt{4 - x_1^2} + \sqrt{4 - x_2^2})} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1 - x_2) \cdot (\sqrt{4 - x_1^2} + \sqrt{4 - x_2^2})} = \\ &= \frac{(x_2 - x_1) \cdot (x_2 + x_1)}{(x_1 - x_2) \cdot (\sqrt{4 - x_1^2} + \sqrt{4 - x_2^2})} = - \frac{\cancel{(x_1 - x_2)} \cdot (x_2 + x_1)}{\cancel{(x_1 - x_2)} \cdot (\sqrt{4 - x_1^2} + \sqrt{4 - x_2^2})} = - \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{4 - x_1^2} + \sqrt{4 - x_2^2}} \end{aligned}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

- Αν $x_1, x_2 \in [-2, 0]$ τότε $x_1 + x_2 < 0$ ενώ $\sqrt{4 - x_1^2} + \sqrt{4 - x_2^2} > 0$, οπότε $\lambda > 0$ και επομένως η **g** είναι γνησίως αύξουσα στο **[-2, 0]**.
- Αν $x_1, x_2 \in [0, 2]$ τότε $x_1 + x_2 > 0$ και $\sqrt{4 - x_1^2} + \sqrt{4 - x_2^2} > 0$, οπότε $\lambda < 0$ και επομένως η **g** είναι γνησίως φθίνουσα στο **[0, 2]**.

Συμπέρασμα: Η g είναι γνησίως μονότονη κατά διαστήματα, αλλά δεν είναι μονότονη στο **[-2, 2]** (αφού έχει αντιφατικά είδη μονοτονίας).

$$\gamma) h(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}x, & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad \text{Προφανώς } D_h = \mathbb{R}.$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

- Αν $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$ τότε $x_1^2 > x_2^2$ (αλλάζει η φορά γιατί x_1, x_2 αρνητικοί).

Άρα $x_1^2 + 1 > x_2^2 + 1$ και επομένως $h(x_1) > h(x_2)$.

Έτσι η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

- Αν $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ τότε $-\frac{1}{2}x_1 > -\frac{1}{2}x_2$ (αλλάζει η φορά γιατί πολλαπλασιάσαμε τα δύο μέλη με αρνητικό αριθμό). Άρα $-\frac{1}{2}x_1 + 1 > -\frac{1}{2}x_2 + 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}x_1 > 1 - \frac{1}{2}x_2 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2)$.

Έτσι η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

- Για να δείξουμε ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0] \cup (0, +\infty)$ δηλαδή στο $\mathbb{R}$, πρέπει επιπλέον να θεωρήσουμε $x_1 \in (-\infty, 0]$ και $x_2 \in (0, +\infty)$ (οπότε $x_1 < x_2$) και να δείξουμε ότι πάλι ισχύει $h(x_1) > h(x_2)$. Έτσι:

Αν $x_1 \in (-\infty, 0]$ και $x_2 \in (0, +\infty)$ τότε προφανώς $x_1 < x_2$ και

$$h(x_1) - h(x_2) = x_1^2 + 1 - (1 - \frac{1}{2}x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2 > 0 \text{ αφού } x_2 > 0. \text{ Άρα } h(x_1) - h(x_2) > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2)$. Επομένως και στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι για $x_1 < x_2$ είναι $h(x_1) > h(x_2)$.

Άρα τελικά η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

3. Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = x^2 - 5x + 6 \quad \beta) f(x) = \frac{1}{3 + 2\sin x}$$

α) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, προφανώς $D_f = \mathbb{R}$.

Θα βρούμε τα ακρότατα από το R_f .

$$R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y = x^2 - 5x + 6 \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x^2 - 5x + 6 - y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} = \{ y \in \mathbb{R} / \Delta \geq 0 \} =$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} / (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6 - y) \geq 0 \} = \{ y \in \mathbb{R} / 25 - 24 + 4y \geq 0 \} = \{ y \in \mathbb{R} / y \geq -\frac{1}{4} \} = \left[-\frac{1}{4}, +\infty \right).$$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο το $-\frac{1}{4}$ και δεν παρουσιάζει μέγιστο.

$$\text{Για } y = -\frac{1}{4} \text{ είναι } x^2 - 5x + 6 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $\frac{5}{2}$ με τιμή $-\frac{1}{4}$.

$$\beta) f(x) = \frac{1}{3+2\sin x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3+2\sin x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / \sin x \neq -\frac{3}{2}\} = \mathbb{R} \text{ καθώς η σχέση } \sin x \neq -\frac{3}{2} \text{ είναι αληθής}$$

αφού ισχύει $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών της με τη βοήθεια της μεθόδου της κατασκευής (βλέπε «Μεθοδολογία συνόλου τιμών»).

$$\text{Είναι: } -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \cdot \sin x \leq 2 \Leftrightarrow 3-2 \leq 3+2 \cdot \sin x \leq 3+2 \Leftrightarrow 1 \leq 3+2 \cdot \sin x \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1} \geq \frac{1}{3+2\sin x} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow 1 \geq f(x) \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq f(x) \leq 1.$$

Άρα αν η συνάρτηση παίρνει τις τιμές $\frac{1}{5}$ και 1 τότε αυτές είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της.

$$\text{Για } y = \frac{1}{5}: \text{ Είναι } \frac{1}{3+2\sin x} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 3+2\sin x = 5 \Leftrightarrow 2\sin x = 2 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \sin 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ τιμή που ανήκει στο πεδίο ορισμού } (\mathbb{R}).$$

$$\text{Για } y = 1: \text{ Είναι } \frac{1}{3+2\sin x} = 1 \Leftrightarrow 3+2\sin x = 1 \Leftrightarrow 2\sin x = -2 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = \sin(-\pi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi - \pi \text{ ή } x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ τιμές που ανήκουν επίσης στο πεδίο ορισμού.}$$

Άρα τελικά η f παρουσιάζει ελάχιστο στα $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, με ελάχιστη τιμή $\frac{1}{5}$ και μέγιστο στα $x = 2k\pi - \pi$ και $x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$, με μέγιστη τιμή 1.

4. Να εξετάσετε αν είναι «1-1» οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \frac{2x+3}{x+4}, \text{ με } D_f = (-1, 1), \quad \beta) f(x) = x^2, \quad \gamma) f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{αν } x \leq 1 \\ 5x-1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

$$\alpha) f(x) = \frac{2x+3}{x+4}, \text{ με } D_f = (-1, 1)$$

$$\text{Έστω } x_1, x_2 \in (-1, 1) \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x_1+3}{x_1+4} = \frac{2x_2+3}{x_2+4} \Leftrightarrow (2x_1+3) \cdot (x_2+4) = (2x_2+3) \cdot (x_1+4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_1x_2 + 8x_1 + 3x_2 + 12 = 2x_1x_2 + 8x_2 + 3x_1 + 12 \Leftrightarrow 8x_1 - 3x_1 = 8x_2 - 3x_2 \Leftrightarrow 5x_1 = 5x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η f είναι «1-1» στο $(-1, 1)$.

$$\beta) f(x) = x^2, \text{ είναι προφανώς } D_f = \mathbb{R}$$

$$\text{Έστω } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = \pm x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ή } x_1 = -x_2.$$

Επομένως η f δεν είναι «1-1» γιατί αν $f(x_1) = f(x_2)$ δεν ισχύει οπωσδήποτε $x_1 = x_2$, αλλά μπορεί να ισχύει $x_1 = -x_2$, χωρίς τα x_1, x_2 να είναι ίσα (π.χ. αν $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$).

ΑΛΛΙΩΣ ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΑ: Αρκεί να βρούμε δύο διαφορετικές τιμές του x , τέτοιες ώστε οι τιμές της f σε αυτές να είναι ίσες.

Έτσι παρατηρούμε ότι $f(-1)=f(1)=1$, ενώ $-1 \neq 1$. Άρα f όχι «1-1».

$$y) f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{αν } x \leq 1 \\ 5x-1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}, \text{ προφανώς } D_f = \mathbb{R}.$$

Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ με $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow x_1+3 \neq x_2+3 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Άρα η f είναι «1-1» στο $(-\infty, 1]$.

Έστω $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow 5x_1 \neq 5x_2 \Leftrightarrow 5x_1-1 \neq 5x_2-1 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Άρα η f είναι «1-1» στο $(1, +\infty)$.

Έστω $x_1 \in (-\infty, 1]$ και $x_2 \in (1, +\infty)$ (οπότε φυσικά $x_1 \neq x_2$).

$$\text{Τότε: } \left. \begin{array}{l} x_1 \leq 1 \Leftrightarrow x_1+3 \leq 4 \Leftrightarrow f(x_1) \leq 4 \\ x_2 > 1 \Leftrightarrow 5x_2 > 5 \Leftrightarrow 5x_2-1 > 5-1 \Leftrightarrow f(x_2) > 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

(Σύμφωνα με τη μεθοδολογία για τις «1-1», θα μπορούσαμε, αντί του τελευταίου αυτού βήματος, να δείξουμε ότι $R_{f_1} \cap R_{f_2} = \emptyset$, όπου f_1 και f_2 οι κλάδοι της f).

Άρα τελικά η f είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$.

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x-1)+e^{x-2}=1$ έχει μοναδική ρίζα

$$\text{Είναι } \ln(x-1)+e^{x-2}=1 \Leftrightarrow \ln(x-1)+e^{x-2}-1=0$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln(x-1)+e^{x-2}-1$, $x>1$.

Το ότι η f έχει μοναδική ρίζα, μπορεί να αποδειχτεί χωρίζοντας τη διαδικασία σε δύο φάσεις:

τη φάση της απόδειξης της ύπαρξης της ρίζας και

τη φάση της απόδειξης της μοναδικότητας της ρίζας

Υπαρξη ρίζας: Παρατηρούμε ότι $f(2)=\ln(2-1)+e^{2-2}-1=0+1-1=0$, άρα το 2 είναι προφανής ρίζα της f (προφανής ρίζα: μία ρίζα που την "υποψιαζόμαστε" εύκολα).

Μοναδικότητα ρίζας: Θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε $x_1-1 < x_2-1 \Rightarrow \ln(x_1-1) < \ln(x_2-1)$ (1)

$$\text{Επίσης } x_1-2 < x_2-2 \Rightarrow e^{x_1-2} < e^{x_2-2} \Rightarrow e^{x_1-2}-1 < e^{x_2-2}-1 \quad (2)$$

Από (1)+(2) $\Rightarrow \ln(x_1-1)+e^{x_1-2}-1 < \ln(x_2-1)+e^{x_2-2}-1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, άρα f γνησίως αύξουσα, οπότε και "1-1". Άρα η ρίζα 2 είναι μοναδική.

6. Να βρεθούν τα πρόσημα της συνάρτησης $f(x)=\ln(x-1)+e^{x-2}-1$.

Αφού δείξουμε, όπως προηγουμένως, ότι η f έχει μοναδική ρίζα το 2 και είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε από τη μονοτονία:

Για $x < 2$ είναι $f(x) < f(2)=0$ και

για $x > 2$ είναι $f(x) > f(2)=0$.

Έτσι τα πρόσημα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

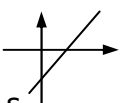
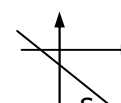
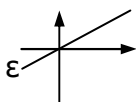
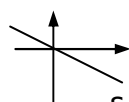
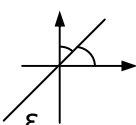
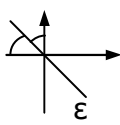
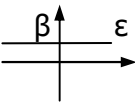
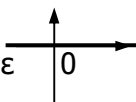
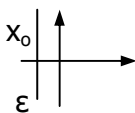
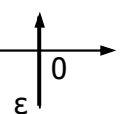
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	-	Φ	+

1.4 ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στο σημείο της ύλης που βρισκόμαστε μπορούμε να χαράξουμε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων που θεωρούνται "γνωστές".

- **ΕΥΘΕΙΕΣ** (Προσέξτε ότι η 3η περίπτωση δεν είναι συνάρτηση)

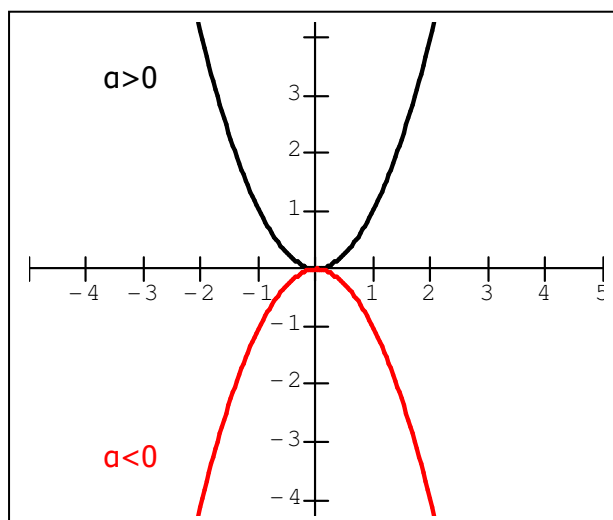
ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ: $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$ και $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΕΥΘΕΙΑΣ		ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
1. ΠΛΑΓΙΑ $y = ax + \beta$ με $a \neq 0$ και $\beta \neq 0$ <u>Ειδική μορφή</u> $y = a \cdot x$ με $a \neq 0$, (πλάγια με $\beta = 0$) <u>Ειδική μορφή</u> $y = x$ (πλάγια με $\beta = 0$ & $a = 1$) <u>Ειδική μορφή</u> $y = -x$ (πλάγια με $\beta = 0$ & $a = -1$)	 ($a > 0$)  ($a < 0$)	Αφού $\beta \neq 0$ δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων
	 ($a > 0$)  ($a < 0$)	Διέρχεται από την αρχή των αξόνων
		Διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων
		Διχοτόμος της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων
2. ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ $y = \beta$ (πλάγια με $a = 0$) <u>Ειδική μορφή</u> $y = 0$ (πλάγια με $a = 0$ & $\beta = 0$)		Διέρχεται από το $(0, \beta)$
		Ο άξονας x'x
3. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ $x = x_0$ (x_0 συγκεκριμένος αριθμός) <u>Ειδική μορφή</u> $x = 0$ (κατακόρυφη με $x_0 = 0$)		Δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης
		Δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης και είναι ο άξονας y'y

- $f(x)=ax^2$, με $a \neq 0$

Έχει κορυφή το $O(0, 0)$ και
Άξονα συμμετρίας τον $y'y$

Είναι **άρτια** συνάρτηση



Γενική περίπτωση

- $f(x)=ax^2+bx+\gamma$, με $a \neq 0$

Ονομάζεται **τετραγωνική συνάρτηση**

Πεδίο Ορισμού $\mathbb{R}$.

Γραφική παράσταση

Έχει γραφική παράσταση μια καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή** με:

κορυφή το σημείο $(-\frac{\beta}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ (όπου Δ η

διακρίνουσα του $ax^2+bx+\gamma$) και

άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία $x = -\frac{\beta}{2a}$ η

οποία διέρχεται από την κορυφή της παραβολής.

Κοινά σημεία με τον $x'x$ (αν υπάρχουν) είναι τα $(\rho_1, 0)$, $(\rho_2, 0)$ όπου ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2+bx+\gamma=0$ (αν υπάρχουν).

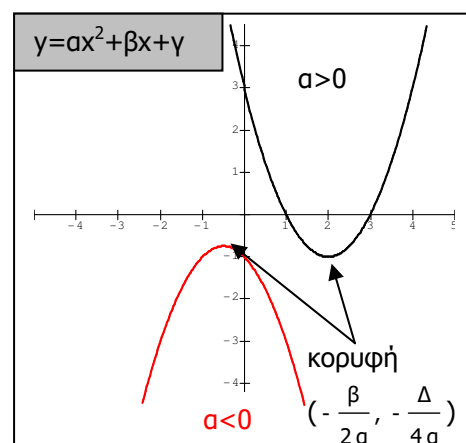
Χαρακτηριστικά της συνάρτησης

Μονοτονία: Αν $a > 0$ τότε $f \searrow$ στο $(-\infty, -\frac{\beta}{2a}]$ και $f \nearrow$ στο $[-\frac{\beta}{2a}, +\infty)$.

Αν $a < 0$ τότε $f \nearrow$ στο $(-\infty, -\frac{\beta}{2a}]$ και $f \searrow$ στο $[-\frac{\beta}{2a}, +\infty)$.

Ακρότατα: Αν $a > 0$, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $-\frac{\beta}{2a}$ με τιμή $f(-\frac{\beta}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$

Αν $a < 0$, η f παρουσιάζει μέγιστο στο $-\frac{\beta}{2a}$ με τιμή $f(-\frac{\beta}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$



- $f(x) = ax^3$ με $a \neq 0$

Πεδίο Ορισμού $\mathbb{R}$

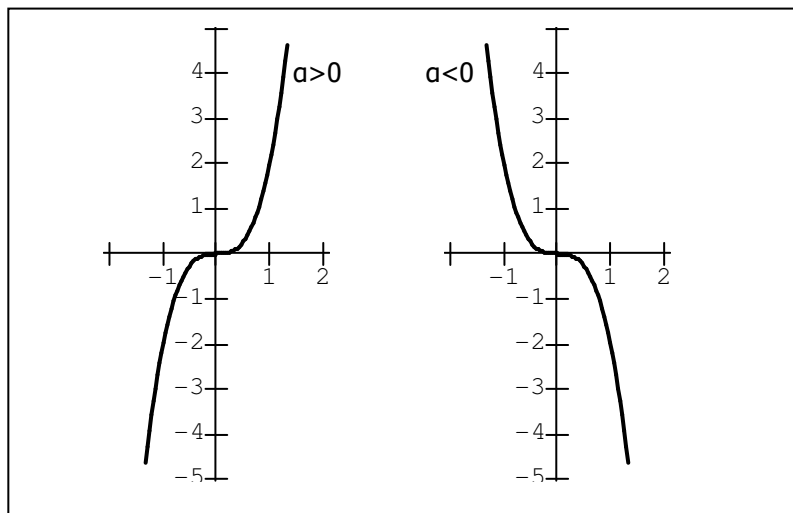
Μονοτονία

Αν $a > 0$ τότε $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$ και

αν $a < 0$ τότε $f \searrow$ στο $\mathbb{R}$.

Ακρότατα δεν έχει.

Είναι **περιττή** συνάρτηση.



- $f(x) = \frac{a}{x}$ με $a \neq 0$

Πεδίο Ορισμού $\mathbb{R}^*$.

Γραφική παράσταση

Έχει γραφική παράσταση μια καμπύλη που ονομάζεται **υπερβολή** με:

Κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$ και

Ασύμπτωτες ευθείες τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

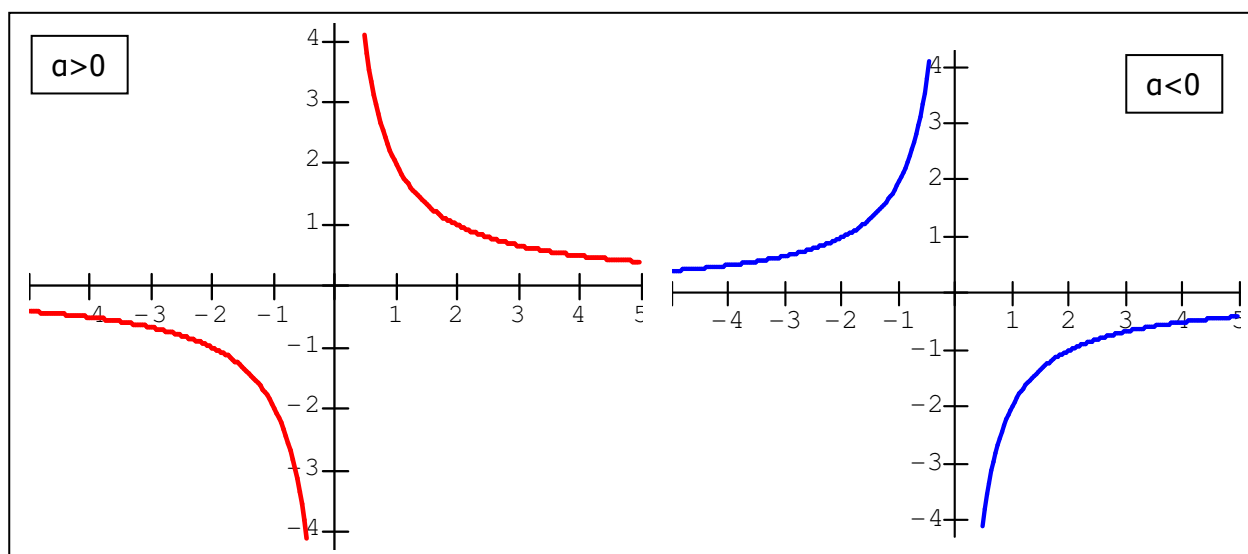
Χαρακτηριστικά της συνάρτησης

Μονοτονία: Αν $a > 0$: $f \searrow$ στο $(-\infty, 0)$ και $f \searrow$ στο $(0, +\infty)$.

Αν $a < 0$: $f \nearrow$ στο $(-\infty, 0)$ και $f \nearrow$ στο $(0, +\infty)$.

Ακρότατα δεν έχει.

Είναι **περιττή** συνάρτηση.



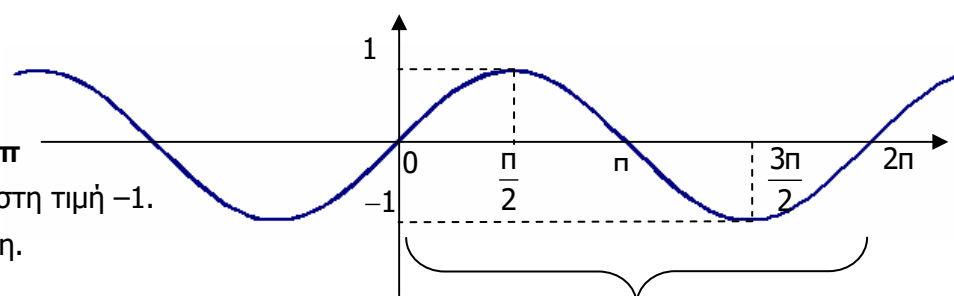
• $f(x) = \eta\mu x$

Πεδίο Ορισμού $\mathbb{R}$.

Περιοδική με **περίοδο 2π**

Μέγιστη τιμή 1 και ελάχιστη τιμή -1 .

Είναι **περιττή** συνάρτηση.



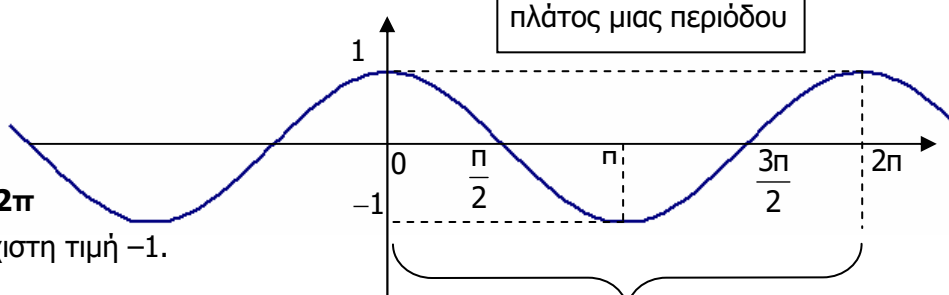
• $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

Πεδίο Ορισμού $\mathbb{R}$.

Περιοδική με **περίοδο 2π**

Μέγιστη τιμή 1 και ελάχιστη τιμή -1 .

Είναι **άρτια** συνάρτηση.



• $f(x) = \epsilon\varphi x$

Πεδίο Ορισμού $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$

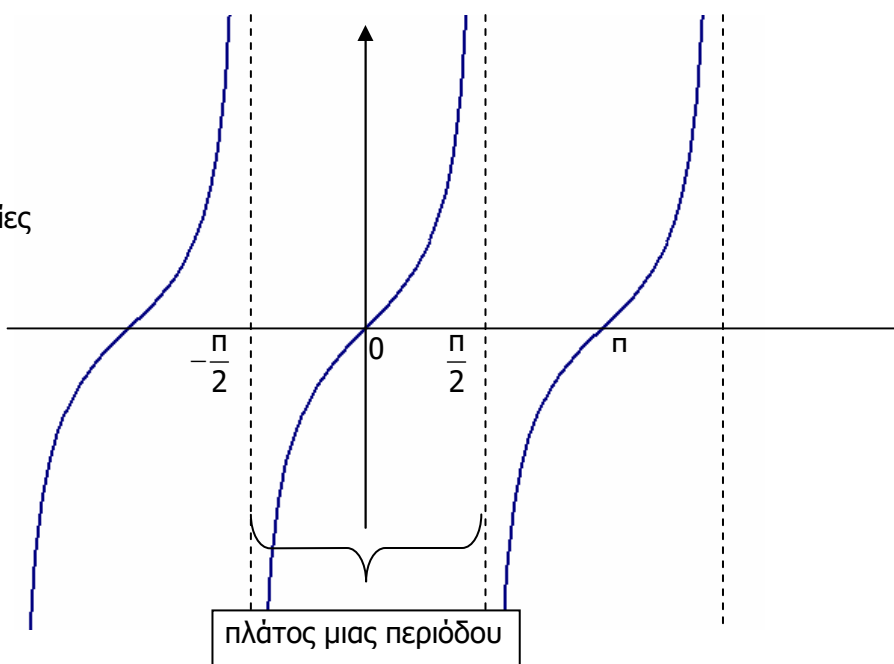
Περιοδική με **περίοδο π**

Ασύμπτωτες ευθείες είναι οι ευθείες

με εξισώσεις $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{\pi}{2}$ και

γενικά οι ευθείες μορφής $x = k\frac{\pi}{2}$

με k περιττό ακέραιο.



• $f(x) = a^x$ με $a > 0$ και $a \neq 1$

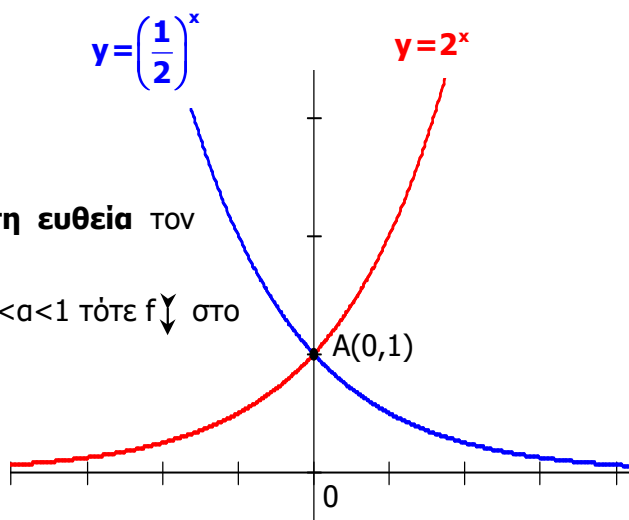
Ονομάζεται **εκθετική συνάρτηση**

Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ (δηλ. $x \in \mathbb{R}$)

Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (δηλ. $a^x > 0$).

Η γραφική της παράσταση έχει **ασύμπτωτη ευθεία** τον άξονα $x'x$.

Μονοτονία: Αν $a > 1$ τότε $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$, ενώ αν $0 < a < 1$ τότε $f \searrow$ στο $\mathbb{R}$.



Ακρότατα δεν έχει.

Σημείο της C_f είναι πάντα το $(0,1)$ γιατί $a^0=1$.

• $f(x)=\log_a x$ με $a>0$ και $a\neq 1$

Ονομάζεται **λογαριθμική συνάρτηση**

Πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ (δηλ. $x>0$)

Είναι $f(x)\in\mathbb{R}$ για κάθε $x>0$ (δηλ. **ο $\log_a x$ είναι οποιοσδήποτε αριθμός**).

Η γραφική της παράσταση έχει **ασύμπτωτη ευθεία** τον άξονα y' .

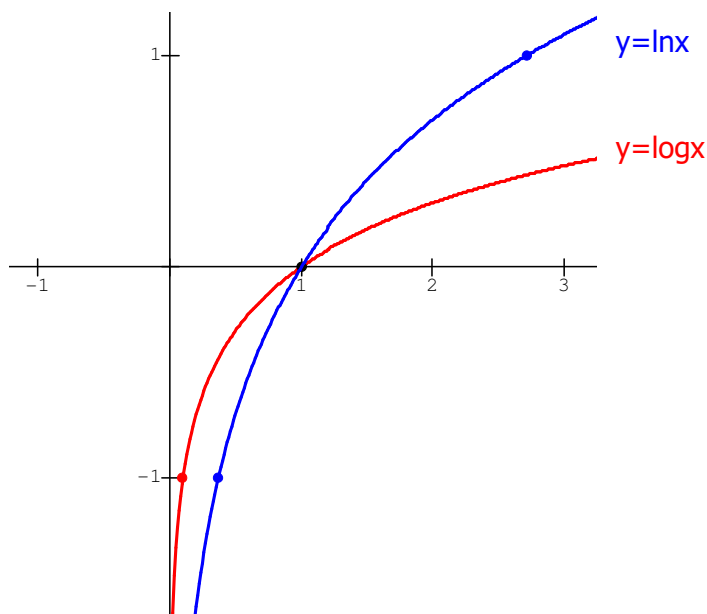
Μονοτονία: Αν $a>1$ τότε $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}_+^*$,

ενώ αν $0<a<1$ τότε $f \downarrow$ στο $\mathbb{R}_+^*$.

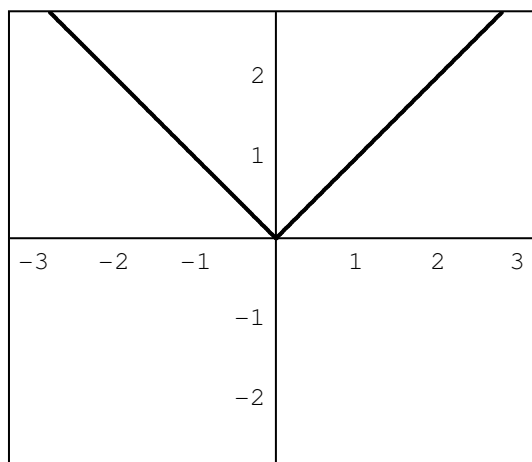
Ακρότατα δεν έχει.

Σημείο της C_f είναι πάντα το $(1,0)$ γιατί $\log_a 1=0$.

Οι ειδικές λογαριθμικές συναρτήσεις $f(x)=\log x$ (βάση 10) και $f(x)=\ln x$ (βάση $e\approx 2,718$) είναι προφανώς γνησίως αύξουσες (λόγω των βάσεων τους).

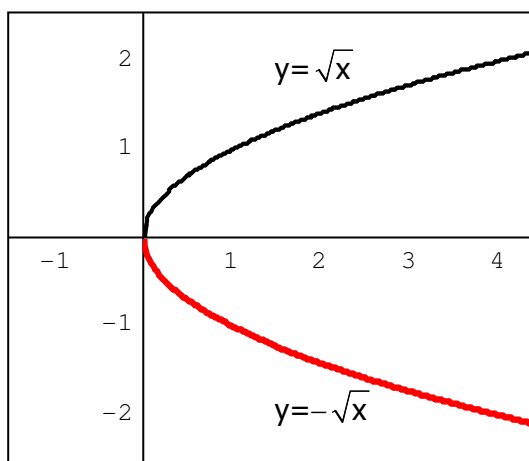


• $f(x)=|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

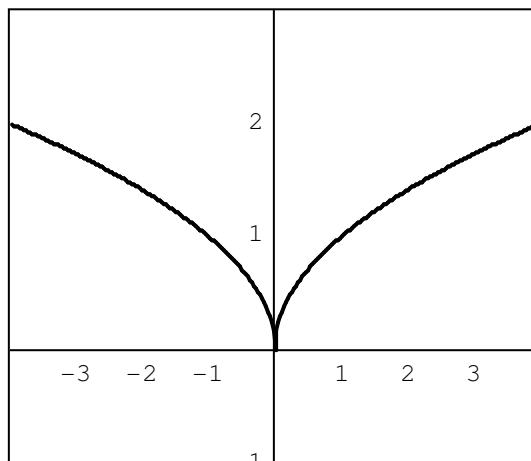


• $f(x)=\sqrt{x}$ ή $f(x)=-\sqrt{x}, x\geq 0$

είναι ο "άνω" και ο "κάτω" κλάδος της παραβολής $y^2=x$.



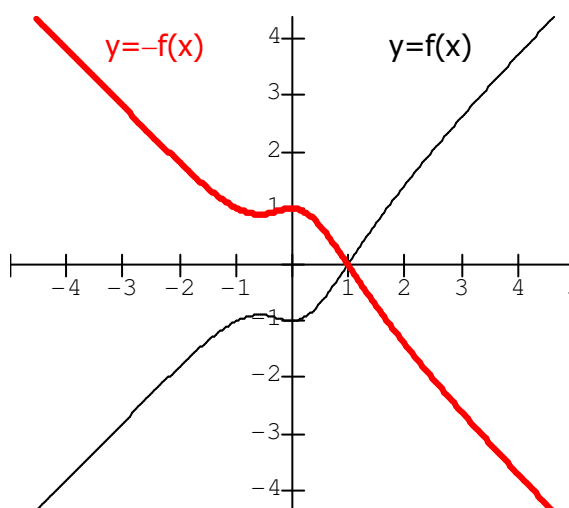
- $$f(x) = \sqrt{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$



• Αν C_f η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τότε μπορούμε να χαράξουμε απλά την γραφική παράσταση της:

α) $-f$

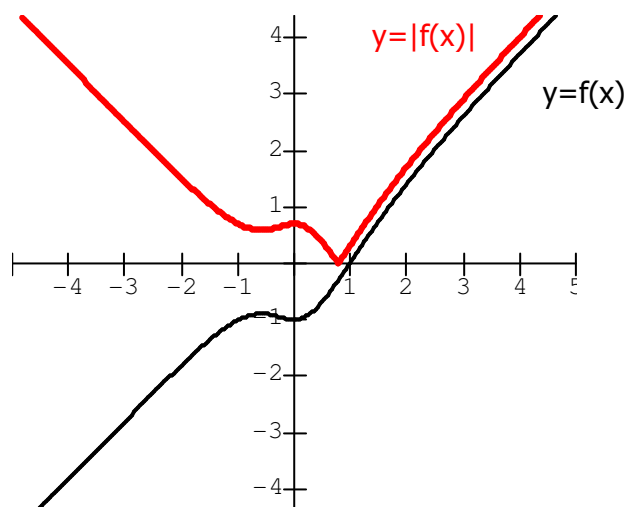
Γι' αυτό, αρκεί να θεωρήσουμε τη συμμετρική γραφική παράσταση της C_f ως προς τον άξονα $x'x$.



β) $|f|$

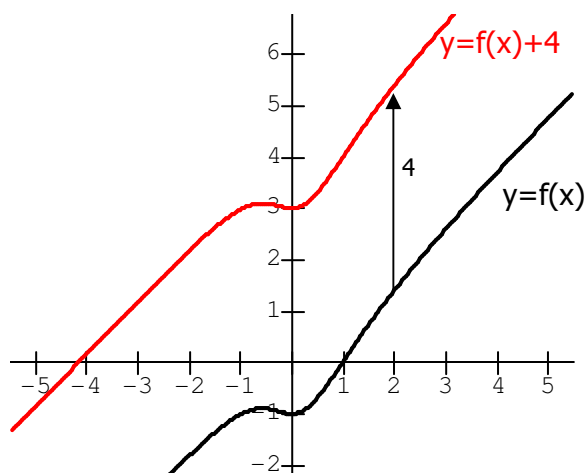
Γι' αυτό αρκεί να «κρατήσουμε» τους κλάδους της C_f που βρίσκονται πάνω από τον $x'x$ και να τους συμπληρώσουμε με τους συμμετρικούς, ως προς τον $x'x$, των κλάδων που βρίσκονται κάτω από τον $x'x$.

(Μια που $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{αν } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{αν } f(x) < 0 \end{cases}$)

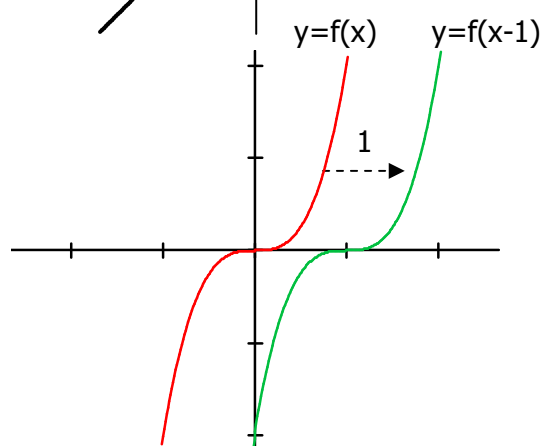


γ) $f+c$, $c \in \mathbb{R}$

Αρκεί να μετατοπίσουμε κάθε σημείο της C_f κατά c παράλληλα με τον άξονα $y'y$ προς τα **πάνω** αν $c > 0$ ή προς τα **κάτω** αν $c < 0$.

**δ) $\varphi(x)=f(x+c)$, $c \in \mathbb{R}$**

Αρκεί να μετατοπίσουμε κάθε σημείο της C_f κατά c παράλληλα με τον άξονα $x'x$ προς τα **αριστερά** αν $c > 0$ ή προς τα **δεξιά** αν $c < 0$.



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΤΗ ΧΑΡΑΞΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Στο σημείο της ύλης που βρισκόμαστε δεν μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική παράσταση οποιασδήποτε συνάρτησης, παρά μόνο συναρτήσεων που οι τύποι τους παραπέμπουν σε ευθείες ή σε κάποια από τις παραπάνω "γνωστές" συναρτήσεις.

Για να χαράξουμε μία από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Παίρνουμε πίνακα τιμών με κατάλληλα σημεία
- Θεωρούμε κατάλληλο σύστημα αξόνων και τοποθετούμε επάνω στον άξονα $x'x$ τις τιμές του x που θέσαμε στον πίνακα τιμών, με κατάλληλη κλίμακα
- Οριοθετούμε με κατακόρυφες διακεκομμένες ευθείες το πεδίο ορισμού (οι κατακόρυφες διακεκομμένες αφορούν σε μη πεπερασμένα άκρα του πεδίου ορισμού, σε σημεία που αλλάζει τύπος ή f ή σε σημεία που εξαιρούνται από το πεδίο ορισμού)
- Τοποθετούμε επάνω στον άξονα $y'y$ τις τιμές του y που βρήκαμε στον πίνακα τιμών, με κατάλληλη κλίμακα
- Προσδιορίζουμε επάνω στο επίπεδο τα ζεύγη (x, y) του πίνακα τιμών, φέρνοντας κατακόρυφες και οριζόντιες διακεκομμένες ευθείες

- Στη συνέχεια, με προσοχή, χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και αν αποτελείται από γραμμές γράφουμε πάνω σε κάθε γραμμή την εξίσωσή της.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν η δοσμένη συνάρτηση:

- έχει γραφική παράσταση που προέρχεται από μετατοπίσεις μια γνωστής, χαράσσουμε τη γνωστή, όπως περιγράψαμε και στη συνέχεια μετατοπίζουμε κατάλληλα τη γραφική της παράσταση
- έχει γραφική παράσταση που προέρχεται από απόλυτο γνωστής, χαράσσουμε τη γνωστή, όπως περιγράψαμε και στη συνέχεια βρίσκουμε τη συνάρτηση "απόλυτο" σύμφωνα με όσα αναφέραμε στη θεωρία
- είναι πολλαπλός τύπος γνωστών συναρτήσεων, χαράσσουμε τις γραφικές παραστάσεις των κλάδων της.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$, $x \neq -1$

Λύση

Αρχικά η f "φαίνεται" να μην έχει σχέση με καμία από τις συναρτήσεις που έχουν "γνωστή" γραφική παράσταση. Αν όμως ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2 \cdot (x+1) - 3}{x+1} = \frac{2 \cdot (x+1)}{x+1} - \frac{3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1} \quad (*)$$

τότε παρατηρούμε ότι η C_f προέρχεται από τη γραφική παράσταση της $g(x) = -\frac{3}{x}$

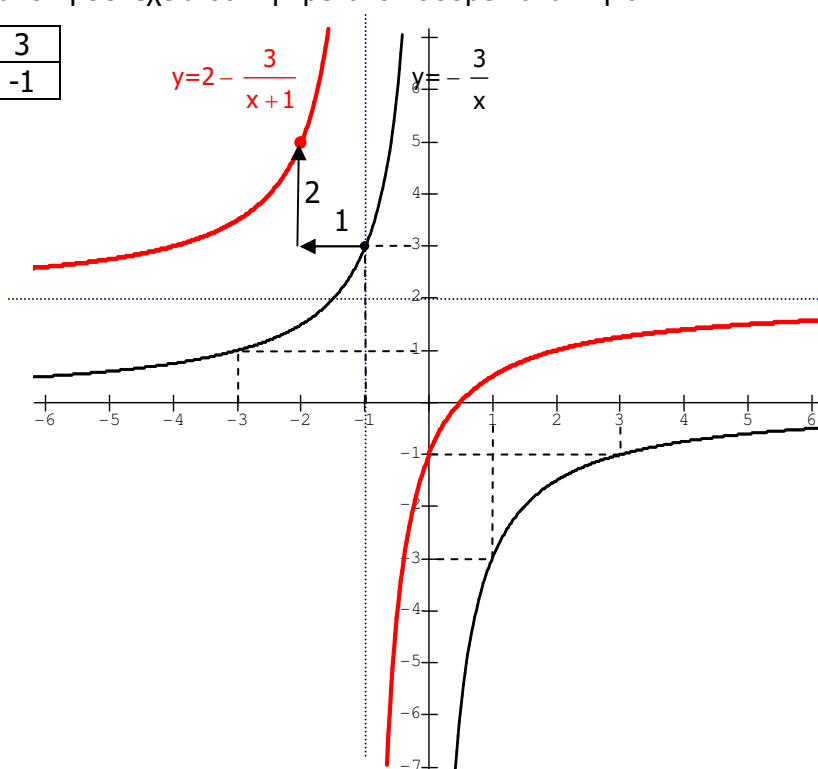
μετατοπισμένη κατά 1 μονάδα αριστερά και 2 μονάδες επάνω.

Έτσι θα σχεδιάσουμε τη C_g και στη συνέχεια θα την μετατοπίσουμε κατάλληλα.

x	-3	-1	1	3
$y=g(x)$	1	3	-3	-1

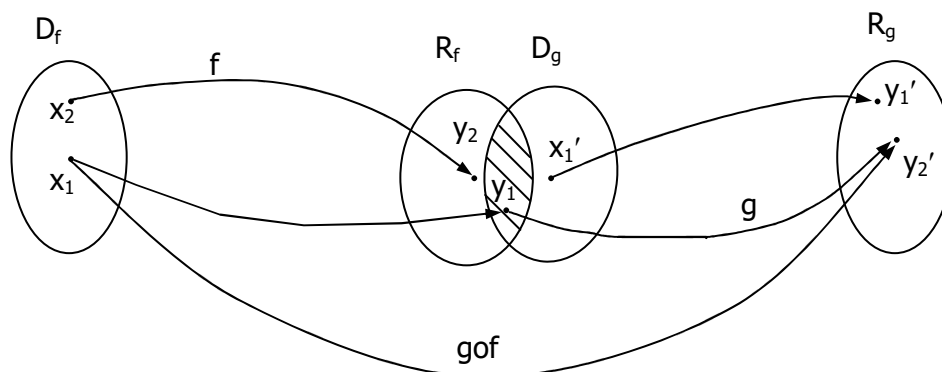
Παρατηρείστε ότι μαζί με τη γραφική παράσταση μεταφέρονται και οι ασύμπτωτες ευθείες που τώρα είναι οι $x=-1$ και $y=2$

(*) Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν κάναμε τη διαίρεση $(2x-1):(x+1)$



1.5 ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Δίνονται δύο συναρτήσεις $f: D_f \rightarrow R_f$ και $g: D_g \rightarrow R_g$. Αν $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ τότε ορίζεται μία νέα συνάρτηση **gof** που ονομάζεται **σύνθεση της f με την g** ή απλούστερα **σύνθετη συνάρτηση** και εμφανίζεται στο παρακάτω βελοδιάγραμμα.



Παρατηρούμε στο παραπάνω βελοδιάγραμμα ότι η gof ορίζεται για το x_1 ενώ δεν ορίζεται για το x_2 , αφού $y_1 \in D_g$ (με $y_1 = f(x_1)$), ενώ $y_2 \notin D_g$ (με $y_2 = f(x_2)$). Έτσι αν $y_1 = f(x_1)$ και $y_2' = g(y_1)$ τότε $y_2' = g(f(x_1))$ και $y_2' = (gof)(x_1)$.

Άρα $x_1 \in D_{gof}$ ενώ $x_2 \notin D_{gof}$ και $(gof)(x_1) = g(f(x_1))$. Δηλαδή η gof ορίζεται για εκείνα τα $x \in D_f$ τέτοια ώστε $f(x) \in D_g$ και έχει τύπο $(gof)(x) = g(f(x))$ (δηλαδή ο τύπος της g αν όπου x θέσουμε το $f(x)$).

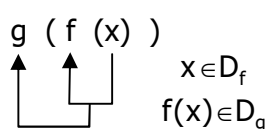
Άρα :

Π.Ο. ΣΥΝΘΕΤΗΣ gof: $D_{gof} = \left\{ x \in R_f / \begin{matrix} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{matrix} \right\}$

ΤΥΠΟΣ gof: $(gof)(x) = g(f(x))$, για κάθε $x \in D_{gof}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Προφανώς η gof δεν ορίζεται αν $R_f \cap D_g = \emptyset$ ή ισοδύναμα αν $D_{gof} = \emptyset$.

ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΓΙΑ ΤΟ D_{gof}



ΜΕΜΟ Το πεδίο ορισμού της σύνθετης, είναι πάντα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της **δευτερεύουσας**, δηλαδή για την gof ισχύει ότι το πεδίο ορισμού της είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f (βλέπε βελοδιάγραμμα παραπάνω). Επομένως $D_{gof} \subseteq D_f$.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ▼

- Αν έχουμε δύο συναρτήσεις f και g μπορούμε να αναζητήσουμε όχι μόνο τη συνάρτηση **gof**, αλλά με αντίστοιχο τρόπο και τις **fog** (προσοχή: σύνθεση της g με την f) ή **fof** ή **gog**. Οι τύποι των συναρτήσεων αυτών δεν έχουν σχέση (δηλαδή δεν

μπορούμε να μαντέψουμε τον τύπο της fog αν γνωρίζουμε μόνο τον τύπο της gof και για να υπάρξει φυσικά οποιαδήποτε από αυτές θα πρέπει το αντίστοιχο πεδίο ορισμού να μην είναι το κενό (βλέπε μεθοδολογία παρακάτω).

- Αν f, g, h τρεις συναρτήσεις για τις οποίες ορίζεται η σύνθεση $(fog)oh$, τότε ορίζεται και η $fo(goh)$ και μάλιστα ισχύει ότι **$(fog)oh = fo(goh)$** .

Η συνάρτηση $(fog)oh$ (ή η $fo(goh)$) συμβολίζεται απλά με **$fogoh$** και λέγεται **σύνθεση των h, g και f** .

- Στη σύνθετη gof μπορούμε να ονομάζουμε (έστω και αδόκιμα) την g ως **βασική συνάρτηση**, μια που από αυτήν παίρνει τον χαρακτηρισμό της η gof και την f ως **δευτερεύουσα**. Έτσι στην $h(x) = \eta\mu 2x$, η οποία χαρακτηρίζεται ως "ημίτονο", η βασική είναι η $\gamma = \eta\mu x$ και η δευτερεύουσα η $\gamma = 2x$.
- Οι συναρτήσεις «μονού» τύπου με τις οποίες ασχολούμαστε συνήθως είναι **ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΠΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ** ή **ΠΡΑΞΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ** ή **ΣΥΝΘΕΣΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ**.

Ως «βασικές απλές συναρτήσεις» θεωρούμε τις παρακάτω:

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΠΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ		
1.	Σταθερή συνάρτηση	$f(x) = c$
2.	Ταυτοτική συνάρτηση	$f(x) = x$
3.	Δύναμη	$f(x) = x^a, a \neq 0$
4.	Ρίζα	$f(x) = \sqrt[v]{x}, v \in \mathbb{N}^*$
5.	Ημίτονο	$f(x) = \eta\mu x$
6.	Συνημίτονο	$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$
7.	Εφαπτομένη	$f(x) = \epsilon\phi x$
8.	Συνεφαπτομένη	$f(x) = \sigma\phi x$
9.	Εκθετική	$f(x) = e^x$ και γενικότερα $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$
10.	Λογαριθμική	$f(x) = \ln x,$ $f(x) = \log x$ και γενικότερα $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

Η ρίζα $f(x) = \sqrt[v]{x}$ καθώς και η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ φυσικά μπορούν να ενταχθούν

στην κατηγορία των «δυνάμεων» ($x^{\frac{1}{v}}$ και x^{-1} αντίστοιχα).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΤΗ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Δίνονται δύο συναρτήσεις και ζητάμε να ορίσουμε τη σύνθεσή τους.

Έστω συναρτήσεις f και g . Για να ορίσουμε την **gof** εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τα D_f και D_g .
- Στη συνέχεια προσδιορίζουμε το D_{gof} σύμφωνα με τη σχέση που αναφέραμε, λύνοντας τις σχέσεις $x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$ ως προς x και συναληθεύοντάς τις.
Αν $D_{gof} = \emptyset$ τότε λέμε ότι δεν ορίζεται η gof .
Αν $D_{gof} \neq \emptyset$ τότε:
- Βρίσκουμε τον τύπο της, $(gof)(x)$ που είναι ο $g(f(x))$, θέτοντας στον τύπο της g όπου x το $f(x)$.

Παρατηρήσεις

1. Ποτέ δεν βρίσκουμε το D_{gof} από τον τύπο της gof ως το ευρύτερο υποσύνολο του R στο οποίο ορίζεται η gof , γιατί όπως είδαμε το D_{gof} δεν εξαρτάται μόνο από τον τύπο της gof , αλλά και από τα D_f και D_g .
2. Αν μας ενδιαφέρει και το R_{gof} το βρίσκουμε κανονικά σύμφωνα με τις μεθόδους του πεδίου τιμών αν θεωρήσουμε την gof ως συνάρτηση με πεδίο ορισμού το D_{gof} .

Παράδειγμα 1

2. Δίνεται η σύνθεση δύο συναρτήσεων και η μία από αυτές και ζητάμε τον τύπο της άλλης.

Πάντα ξεκινάμε γράφοντας τον τύπο της σύνθετης και μεταφράζοντάς τον (βλέπε παράδειγμα)

Παράδειγμα 2

3. Μας ζητάνε να αναλύσουμε μια συνάρτηση σε απλές βασικές συναρτήσεις.

Η καλύτερη λύση είναι να κατασκευάσουμε ένα «δενδροδιάγραμμα» χαρακτηρίζοντας τη συνάρτηση και αναλύοντάς την σταδιακά στις απλές από τις οποίες αποτελείται. Στη συνέχεια γράφουμε τον τρόπο με τον οποίο αυτή δημιουργείται από τις απλές συναρτήσεις.

Παράδειγμα 3

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $g(x)=\ln x$ και $h(x)=\begin{cases} x+1, & \text{αν } x \leq 0 \\ 5-x^2, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$.

Να ορίσετε (αν ορίζονται) τις συναρτήσεις α) $g \circ f$, β) $h \circ g$, γ) $(h \circ g) \circ f$ και δ) $f \circ f$.

Είναι $D_f = [-2, 2]$, $D_g = (0, +\infty)$ και $D_h = \mathbb{R}$.

α) $g \circ f$

Πεδίο Ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \in [-2, 2] \\ \sqrt{4-x^2} \in (0, +\infty) \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{4-x^2} > 0 \end{matrix} \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ 4-x^2 \neq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ (2-x) \cdot (2+x) \neq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 2 \text{ και } x \neq -2 \end{matrix} \right\} = (-2, 2) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Τύπος:

Για κάθε $x \in (-2, 2)$ είναι $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln f(x) = \ln \sqrt{4-x^2}$.

β) $h \circ g$

Αν $h_1(x)=x+1$, $x \leq 0$ και $h_2(x)=5-x^2$, $x > 0$, θα πρέπει να εργαστούμε χωριστά για τον προσδιορισμό των $h_1 \circ g$ και $h_2 \circ g$.

$h_1 \circ g$

Πεδίο Ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{h_1 \circ g} &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \in D_g \\ g(x) \in D_{h_1} \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x > 0 \\ \ln x \leq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x > 0 \\ x \leq e^0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x > 0 \\ x \leq 1 \end{matrix} \right\} = \\ &= (0, 1] \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Τύπος:

Για κάθε $x \in (0, 1]$ είναι $(h_1 \circ g)(x) = h_1(g(x)) = g(x) + 1 = \ln x + 1$.

$h_2 \circ g$

Πεδίο Ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{h_2 \circ g} &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \in D_g \\ g(x) \in D_{h_2} \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x > 0 \\ x > e^0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x > 0 \\ x > 1 \end{matrix} \right\} = \\ &= (1, +\infty) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Τύπος:

Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $(h_2 \circ g)(x) = h_2(g(x)) = 5 - g^2(x) = 5 - \ln^2 x$.

Άρα τελικά $(\text{hog})(x) = \begin{cases} \ln x + 1, & \text{αν } x \in (0, 1] \\ 5 - \ln^2 x, & \text{αν } x \in (1, +\infty) \end{cases}$ με $D_{\text{hog}} = (0, +\infty)$.

$\gamma)$ (hog)of

Ονομάζοντας φ την hog που προσδιορίστηκε προηγουμένως, έχουμε $(\text{hog})\text{of} = \varphi\text{of}$ με $\varphi_1(x) = \ln x + 1$, $x \in (0, 1]$ και $\varphi_2(x) = 5 - \ln^2 x$, $x \in (1, +\infty)$. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τις $\varphi_1\text{of}$ και $\varphi_2\text{of}$. Έτσι:

$\varphi_1\text{of}$

Πεδίο Ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{\varphi_1\text{of}} &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \in D_f \\ f(x) \in D_{\varphi_1} \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ 0 < \sqrt{4-x^2} \leq 1 \end{matrix} \right\} \overset{\substack{\text{υψώνουμε στο} \\ \text{τετράγωνο τα θετικά} \\ \text{μέλη της δεύτερης}}} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ 0 < 4-x^2 \leq 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ 4-x^2 > 0 \\ 4-x^2 \leq 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ (2-x) \cdot (2+x) > 0 \\ 3-x^2 \leq 0 \end{matrix} \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ -2 < x < 2 \\ (\sqrt{3}-x) \cdot (\sqrt{3}+x) \leq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ -2 < x < 2 \\ x \leq -\sqrt{3} \text{ ή } x \geq \sqrt{3} \end{matrix} \right\} \overset{\substack{\text{συναληθεύοντας}}} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq -\sqrt{3} \text{ ή } \sqrt{3} \leq x \leq 2 \right\} = (-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Τύπος:

$$(\varphi_1\text{of})(x) = \varphi_1(f(x)) = \ln f(x) + 1 = \ln \sqrt{4-x^2} + 1 = \ln(4-x^2)^{\frac{1}{2}} + 1 = \frac{1}{2} \ln(4-x^2) + 1.$$

$\varphi_2\text{of}$

Πεδίο Ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{\varphi_2\text{of}} &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \in D_f \\ f(x) \in D_{\varphi_2} \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{4-x^2} > 1 \end{matrix} \right\} \overset{\substack{\text{υψώνουμε στο} \\ \text{τετράγωνο τα θετικά} \\ \text{μέλη της δεύτερης}}} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ 4-x^2 > 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ 3-x^2 > 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ (\sqrt{3}-x) \cdot (\sqrt{3}+x) > 0 \end{matrix} \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{matrix} \right\} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Τύπος:

$$(\varphi_2\text{of})(x) = \varphi_2(f(x)) = 5 - \ln^2 f(x) = 5 - \ln^2 \sqrt{4-x^2} = 5 - \left(\ln(4-x^2)^{\frac{1}{2}} \right)^2 =$$

$$= 5 - \left(\frac{1}{2} \cdot \ln(4 - x^2) \right)^2 = 5 - \frac{1}{4} \cdot \ln^2(4 - x^2).$$

$$\text{Άρα τελικά } [(hog)of](x) = (φοf)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(4 - x^2) + 1, & \text{αν } x \in (-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2) \\ 5 - \frac{1}{4} \cdot \ln^2(4 - x^2), & \text{αν } x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \end{cases}.$$

δ) fof

Πεδίο Ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{fof} &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \in D_f \\ f(x) \in D_f \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq \sqrt{4-x^2} \leq 2 \\ \text{αληθής} \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{4-x^2} \leq 2 \end{matrix} \right\} \quad \begin{matrix} \text{υψώνουμε στο} \\ \text{τετράγωνο τα} \\ \text{μέλη της δεύτερης} \\ \text{=} \end{matrix} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ 4 - x^2 \leq 4 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ -x^2 \leq 0 \\ \text{αληθής} \end{matrix} \right\} = [-2, 2] \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Τύπος:

$$\begin{aligned} \text{Για κάθε } x \in [-2, 2] \text{ είναι } (fof)(x) &= f(f(x)) = \sqrt{4 - f^2(x)} = \sqrt{4 - (\sqrt{4 - x^2})^2} = \sqrt{4 - (4 - x^2)} = \\ &= \sqrt{x^2} = |x|. \end{aligned}$$

2. Να βρεθεί ο τύπος της f σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $(fog)(x) = (x+1)^2 - 2x$ και $g(x) = 2x+3$

β) $(gof)(x) = (x+1)^2 - 2x$ και $g(x) = 2x+3$

α) Είναι: $(fog)(x) = (x+1)^2 - 2x \Leftrightarrow f(g(x)) = (x+1)^2 - 2x \Leftrightarrow f(2x+3) = (x+1)^2 - 2x \quad (1).$

Θέτουμε $2x+3 = \omega \Leftrightarrow 2x = \omega - 3 \Leftrightarrow x = \frac{\omega - 3}{2}.$

Τότε $(1) \Leftrightarrow f(\omega) = \left(\frac{\omega - 3}{2} + 1 \right)^2 - 2 \cdot \frac{\omega - 3}{2} = \left(\frac{\omega - 3 + 2}{2} \right)^2 - (\omega - 3) = \frac{(\omega - 1)^2}{4} - \omega + 3 =$

$$= \frac{\omega^2 - 2\omega + 1}{4} - \omega + 3 = \frac{\omega^2 - 2\omega + 1 - 4\omega + 12}{4} = \frac{\omega^2 - 6\omega + 13}{4}.$$

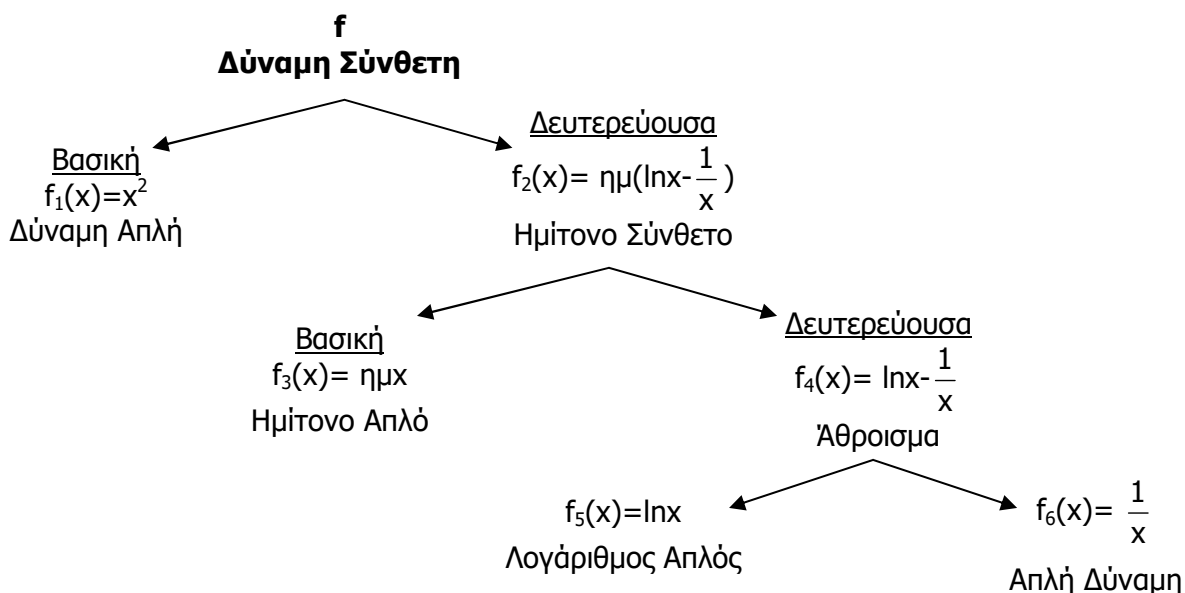
Άρα $f(\omega) = \frac{\omega^2 - 6\omega + 13}{4}$ που σημαίνει ότι $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{4}.$

β) $(gof)(x) = (x+1)^2 - 2x \Leftrightarrow g(f(x)) = (x+1)^2 - 2x \Leftrightarrow 2f(x) + 3 = (x+1)^2 - 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2f(x) = (x+1)^2 - 2x - 3 \Leftrightarrow f(x) = \frac{(x+1)^2 - 2x - 3}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2 - 2}{2}.$$

3. Να εκφράσετε τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2(\ln x - \frac{1}{x})$ ως πράξεις ή συνθέσεις των βασικών απλών συναρτήσεων από τις οποίες αποτελείται

Κατά σκευάζουμε το παρακάτω δεδνροδιάγραμμα, χαρακτηρίζοντας κάθε φορά τη συνάρτηση με την οποία ασχολούμαστε



Άρα $f = f_1 \circ f_2 = f_1 \circ f_3 \circ f_4$ και τελικά $f = f_1 \circ f_3 \circ (f_5 - f_6)$

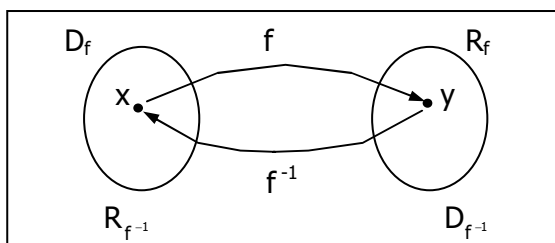
1.6 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός: Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow R$. **Αν η f είναι «1-1»** τότε ορίζεται η συνάρτηση $g: f(A) \rightarrow R$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται σε μοναδικό $x \in A$, για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. **Η αντίστροφη συνάρτηση** από το $f(A)$ στο A συμβολίζεται με f^{-1} .

Έτσι : $f^{-1}: D_{f^{-1}} \rightarrow R_{f^{-1}}$ με $D_{f^{-1}} = R_f = f(A)$ και $R_{f^{-1}} = D_f = A$

Η f^{-1} είναι και αυτή «1-1» στο $D_{f^{-1}}$.

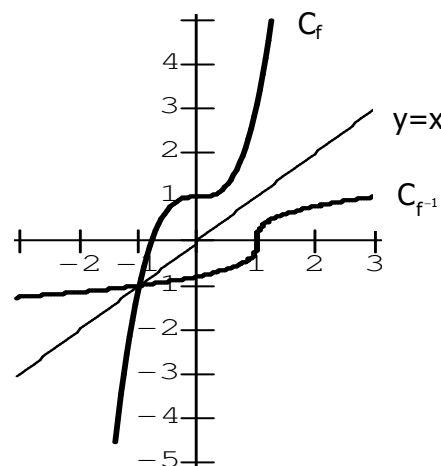
Βέβαια ισχύει ότι $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$
(βλέπε βελοδιάγραμμα)



Φυσικά αν η f δεν είναι «1-1» τότε δεν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

Ας μη λησμονούμε ότι το x του συμβόλου $f^{-1}(x)$ είναι κάποιο y της f , (δηλαδή οι τιμές της f είναι αρχέτυπα της f^{-1}).

Γραφική παράσταση: Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ των αξόνων, δηλαδή την ευθεία με εξίσωση $y=x$. Άρα οποιοδήποτε κοινό σημείο των C_f και της διχοτόμου $y=x$ ανήκει και στην $C_{f^{-1}}$ και αν γνωρίζουμε τη C_f μπορούμε, εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία, να χαράξουμε τη $C_{f^{-1}}$.



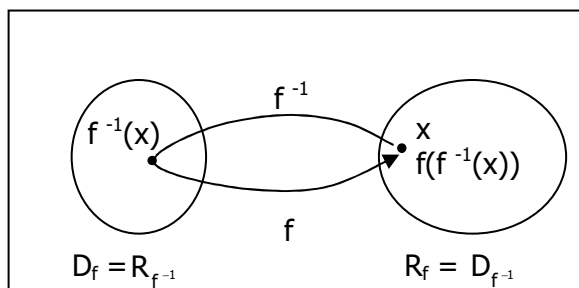
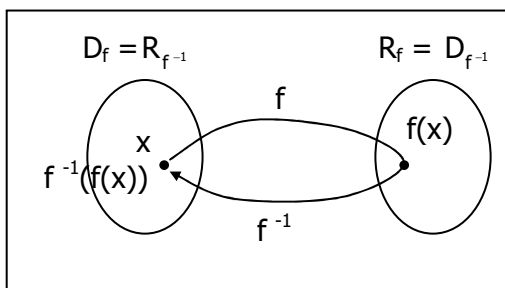
Μονοτονία: Αν f γνησίως μονότονη (οπότε και «1-1») υπάρχει η f^{-1} , η οποία μάλιστα έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f (με απόδειξη, βλέπε στο παράρτημα, στο τέλος της θεωρίας του φυλλαδίου).

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ▼

Ισχύουν οι σχέσεις (βλέπε βελοδιαγράμματα)

ΜΕΜΟ Η $f^{-1} \circ f$ είναι ταυτοτική στο D_f και η $f \circ f^{-1}$ είναι ταυτοτική στο $D_{f^{-1}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(f(x)) = x \text{ με } x \in D_f \\ f(f^{-1}(x)) = x \text{ με } x \in D_{f^{-1}} \end{array} \right. \text{ και}$$



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- Εξετάζουμε αρχικά αν η f είναι «1-1».
Αν όχι δεν υπάρχει η αντίστροφη και σταματάμε εδώ.
Αν ναι, τότε ορίζεται η f^{-1} την οποία θα προσδιορίσουμε παρακάτω.
- Βρίσκουμε το R_f που είναι και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης (το $D_{f^{-1}}$).
- Βρίσκουμε τον τύπο της f^{-1} ως εξής:
Παίρνουμε την σχέση $y=f(x)$ και την λύνουμε ως προς x (κάτι που μπορεί ήδη να έχει γίνει κατά τον προσδιορισμό του R_f). **Αν δεν μας δίνουν την f , αλλά μια σχέση όπως π.χ. $f^3(x)+f(x)-x=0$, για κάθε $x \in R$, τότε τη γράφουμε στη μορφή $y^3+y-x=0$ και λύνουμε αυτήν ως προς x ($x=y^3+y$).**
Αντικαθιστούμε στην τελική σχέση όπου x το $f^{-1}(x)$ και όπου y το x και έχουμε τον τύπο της f^{-1} (δηλαδή $f^{-1}(x)=x^3+x$).
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Τις περισσότερες φορές είναι συμφέρον μας να βρίσκουμε πρώτα το R_f και μετά τον τύπο της f^{-1} .

Παραδείγματα 1, 2, 3

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ C_f και $C_{f^{-1}}$

- Τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ δεν βρίσκονται πάντα στην $y=x$.
- Αν ένα σημείο ανήκει στη C_f και στην $y=x$ τότε ανήκει και στην $C_{f^{-1}}$.
- Η $y=x$ δεν είναι ο μοναδικός άξονας συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$.
- Αν μας ζητηθεί **να προσδιορίσουμε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$** τότε:

1ος τρόπος: Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases}$ (συνήθως είναι δύσκολο), με

$$x \in D_f \cap D_{f^{-1}} \quad \text{ή}$$

2ος τρόπος: Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases}$, με $x \in D_f$ ή

3ος τρόπος: **Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε** ισχύει ότι τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι τα κοινά σημεία της C_f (ή της $C_{f^{-1}}$) με τη διχοτόμο $y=x$ της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων (προσοχή, με απόδειξη, καθώς δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο).

Άρα τότε αρκεί να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$, με $x \in D_f$ ή το $\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ y = x \end{cases}$, $x \in C_{f^{-1}}$.

ΒΛΕΠΕ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ, ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ, ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΑΛΛΕΣ ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΩΝ C_f και $C_{f^{-1}}$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να εξετάσετε αν είναι «1-1» οι παρακάτω συναρτήσεις και σε κάθε περίπτωση που αυτό συμβαίνει να προσδιορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση:

$$\alpha) f(x) = \frac{2x+3}{x+4}, \text{ με } D_f = (-1, 1) \quad \beta) f(x) = x^2 \quad \gamma) f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{αν } x \leq 1 \\ 5x-1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

α) $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$, με $D_f = (-1, 1)$

Εξετάζουμε αν η f είναι «1-1»

Έστω $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1+3}{x_1+4} = \frac{2x_2+3}{x_2+4} \Leftrightarrow (2x_1+3) \cdot (x_2+4) = (2x_2+3) \cdot (x_1+4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_1x_2 + 8x_1 + 3x_2 + 12 = 2x_1x_2 + 8x_2 + 3x_1 + 12 \Leftrightarrow 8x_1 - 3x_1 = 8x_2 - 3x_2 \Leftrightarrow 5x_1 = 5x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η f είναι «1-1» στο $(-1, 1)$ οπότε ορίζεται η $f^{-1}: R_f \rightarrow D_f$.

Προσδιορίζουμε το R_f

$$R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y = \frac{2x+3}{x+4} \\ -1 < x < 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} yx + 4y = 2x + 3 \\ -1 < x < 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} (y-2)x = 3-4y \\ -1 < x < 1 \end{matrix} \right\} =$$

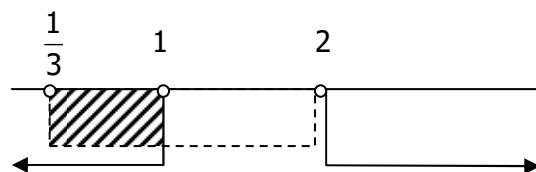
$$\left\{ y \in \mathbb{R} / x = \frac{3-4y}{y-2} (*) \right\} \cup \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y-2=0 \\ -1 < x < 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y \neq 2 \\ -1 < \frac{3-4y}{y-2} < 1 \end{matrix} \right\} \cup \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y=2 \\ -1 < x < 1 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y \neq 2 \\ -1 < \frac{3-4y}{y-2} \\ \frac{3-4y}{y-2} < 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y \neq 2 \\ \frac{3-4y}{y-2} + 1 > 0 \\ \frac{3-4y}{y-2} - 1 < 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y \neq 2 \\ \frac{3-4y+y-2}{y-2} > 0 \\ \frac{3-4y-(y-2)}{y-2} < 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y \neq 2 \\ \frac{1-3y}{y-2} > 0 \\ \frac{5-5y}{y-2} < 0 \end{matrix} \right\} =$$

Λύνουμε τις δύο παραπάνω ανισώσεις με πίνακα προσήμων και καταλήγουμε ότι:

$$R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y \neq 2 \\ \frac{1}{3} < y < 2 \\ y < 1 \text{ ή } y > 2 \end{matrix} \right\} \quad \begin{matrix} \text{βλέπε συναλήθευση δίπλα} \\ = \end{matrix}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} / \frac{1}{3} < y < 1 \} = \left(\frac{1}{3}, 1 \right).$$



Προσδιορίζουμε τον τύπο της f^{-1}

Κατά τον προσδιορισμό του R_f βρήκαμε ότι $x = \frac{3-4y}{y-2}$ (βλέπε (*) προηγουμένως).

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \frac{3-4x}{x-2}.$$

$$\text{Έτσι τελικά } f^{-1}: \left(\frac{1}{3}, 1\right) \rightarrow (-1, 1) \text{ με } f^{-1}(x) = \frac{3-4x}{x-2}.$$

β) $f(x) = x^2$, είναι προφανώς $D_f = \mathbb{R}$

Εξετάζουμε αν η f είναι «1-1»

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = \pm x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ ή $x_1 = -x_2$.

Επομένως η f δεν είναι «1-1» γιατί αν $f(x_1) = f(x_2)$ δεν ισχύει οπωσδήποτε $x_1 = x_2$, αλλά μπορεί να ισχύει $x_1 = -x_2$, χωρίς τα x_1, x_2 να είναι ίσα (π.χ. αν $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$). Άρα δεν ορίζεται η f^{-1} .

ΑΛΛΙΩΣ ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΑ: Αρκεί να βρούμε δύο διαφορετικές τιμές του x , τέτοιες ώστε οι τιμές της f σε αυτές να είναι ίσες.

Έτσι παρατηρούμε ότι $f(-1) = f(1) = 1$, ενώ $-1 \neq 1$. Άρα f όχι «1-1».

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν μας έδιναν ως πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}_+$ τότε η f θα ήταν «1-1», καθώς η σχέση $x_1 = -x_2$ δεν θα μπορούσε να ισχύει παρά μόνο αν $x_1 = x_2 = 0$ (οπότε πάλι καταλήγει σε $x_1 = x_2$). Τότε θα είχαμε $y = x^2 \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{y} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Σε παρόμοια αποτελέσματα θα καταλήγαμε αν μας έδιναν ως πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}_-$.

$$\textbf{γ) } f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{αν } x \leq 1 \\ 5x-1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}, \text{ προφανώς } D_f = \mathbb{R}.$$

Εξετάζουμε αν η f είναι «1-1»

Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ με $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow x_1 + 3 \neq x_2 + 3 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Άρα η f είναι «1-1» στο $(-\infty, 1]$.

Έστω $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow 5x_1 - 1 \neq 5x_2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Άρα η f είναι «1-1» στο $(1, +\infty)$.

Έστω $x_1 \in (-\infty, 1]$ και $x_2 \in (1, +\infty)$ (οπότε φυσικά $x_1 \neq x_2$).

$$\text{Τότε: } \left. \begin{aligned} x_1 \leq 1 &\Leftrightarrow x_1 + 3 \leq 4 \Leftrightarrow f(x_1) \leq 4 \\ x_2 > 1 &\Leftrightarrow 5x_2 > 5 \Leftrightarrow 5x_2 - 1 > 5 - 1 \Leftrightarrow f(x_2) > 4 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

(Σύμφωνα με τη μεθοδολογία για τις «1-1», θα μπορούσαμε, αντί του τελευταίου αυτού βήματος, να δείξουμε ότι $R_{f_1} \cap R_{f_2} = \emptyset$, όπου f_1 και f_2 οι κλάδοι της f (βλέπε παρακάτω)).

Άρα τελικά η f είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$ οπότε ορίζεται η $f^{-1}: R_f \rightarrow D_f$

Προσδιορίζουμε το R_f

Από την κατασκευή που κάναμε στην προσπάθειά μας να ελέγξουμε αν η f είναι «1-1» είναι προφανές ότι για $x \leq 1$ οπότε $f(x)=f_1(x)=x+3$, είναι $R_{f_1}=(-\infty, 4]$ και για $x > 1$ οπότε $f(x)=f_2(x)=5x-1$, είναι $R_{f_2}=(4, +\infty)$.

Έτσι $R_f = R_{f_1} \cup R_{f_2} = \mathbb{R}$.

Προσδιορίζουμε τον τύπο της f^{-1}

Για $x \in (-\infty, 1]$ είναι διαδοχικά $y=x+3 \Leftrightarrow x=y-3 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=x-3$ με $x \in R_{f_1}$ δηλαδή

$x \in (-\infty, 4]$.

Για $x \in (1, +\infty)$ είναι διαδοχικά $y=5x-1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x=\frac{y+1}{5} \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{5}$ με $x \in R_{f_2}$ δηλαδή $x \in (4, +\infty)$.

$$\text{Άρα τελικά } f^{-1}(x) = \begin{cases} x-3, & \text{αν } x \leq 4 \\ \frac{x+1}{5}, & \text{αν } x > 4 \end{cases}.$$

2. Να βρεθούν οι αντίστροφες (αν υπάρχουν) των συναρτήσεων:

α) $f(x)=3+(x-1)^2, x \geq 1$

β) $g(x)=x^3-3x(x-1)+2$

α) $D_f=[1, +\infty)$

Εξετάζουμε αν η f είναι «1-1»

Έστω $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow 3+(x_1-1)^2=3+(x_2-1)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x_1-1)^2 = (x_2-1)^2 \xrightarrow[x_2-1 \geq 0]{x_1-1 \geq 0} x_1-1=x_2-1 \Leftrightarrow x_1=x_2, \text{ άρα η } f \text{ είναι "1-1".}$$

Προσδιορίζουμε το R_f

$$R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y=3+(x-1)^2 \\ x \geq 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y-3=(x-1)^2 \\ x-1 \geq 0 \end{matrix} \right\} = \{ y \in \mathbb{R} / y-3 \geq 0 \} = \{ y \in \mathbb{R} / y \geq 3 \}.$$

Επομένως $R_f=[3, +\infty)$.

Προσδιορίζουμε τον τύπο της f^{-1}

Έχουμε $(x-1)^2=y-3$ με $y-3 \geq 0$ και $x-1 \geq 0$. Άρα $x-1=\sqrt{y-3} \Leftrightarrow x=1+\sqrt{y-3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-3}.$$

Έτσι τελικά $f^{-1}: [3, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ με $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-3}$.

β) $D_f=\mathbb{R}$. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι $g(x)=x^3-3x^2+3x+2 = x^3-3x^2+3x-1+3 = (x-1)^3+3$

Εξετάζουμε αν η g είναι «1-1»

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(x_1)=g(x_2) \Leftrightarrow (x_1-1)^3+3=(x_2-1)^3+3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x_1-1)^3 = (x_2-1)^3 \Leftrightarrow x_1-1=x_2-1 \Leftrightarrow x_1=x_2, \text{ άρα η } g \text{ είναι "1-1".}$$

Προσδιορίζουμε το R_g

$$R_g = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y = (x-1)^3 + 3 \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y-3 = (x-1)^3 \\ x-1 \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \begin{matrix} y-3 = (x-1)^3 \\ (x-1)^3 \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} = \\ = \{ y \in \mathbb{R} / y-3 \in \mathbb{R} \} = \{ y \in \mathbb{R} / y \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}$$

Προσδιορίζουμε τον τύπο της g^{-1}

$$\text{Έχουμε } (x-1)^3 = y-3 \Leftrightarrow x-1 = \begin{cases} \sqrt[3]{y-3}, & \text{αν } y-3 \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-(y-3)}, & \text{αν } y-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{y-3}, & \text{αν } y \geq 3 \\ 1 - \sqrt[3]{-(y-3)}, & \text{αν } y < 3 \end{cases}$$

$$\text{Έτσι τελικά } g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g^{-1}(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x-3}, & \text{αν } x \geq 3 \\ 1 - \sqrt[3]{3-x}, & \text{αν } x < 3 \end{cases}.$$

3. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(x)) = 3x-1$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) δείξτε η f αντιστρέφεται και ότι το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$

β) αν $f(0) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

i) να βρείτε το $f^{-1}(-1)$ και

ii) να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f^{-1} με τον άξονα $x'x$

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Leftrightarrow 3x_1-1 = 3x_2-1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Άρα f "1-1", οπότε αντιστρέφεται.

Θα δ.ο. για οποιαδήποτε τιμή του $y \in \mathbb{R}$, π.χ. $y=a$, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, τέτοιο, ώστε $f(x)=a$.

$$f(x)=a \Leftrightarrow f(f(x))=f(a) \Leftrightarrow 3x-1=f(a) \Leftrightarrow x = \frac{f(a)+1}{3}.$$

Άρα για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ($x = \frac{f(a)+1}{3}$) τέτοιο, ώστε $f(x)=a$. Άρα το σύνολο

τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

β) i) Για $x=0$ η (1) δίνει $f(f(0))=3 \cdot 0-1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{3}}{2} = f^{-1}(-1)$

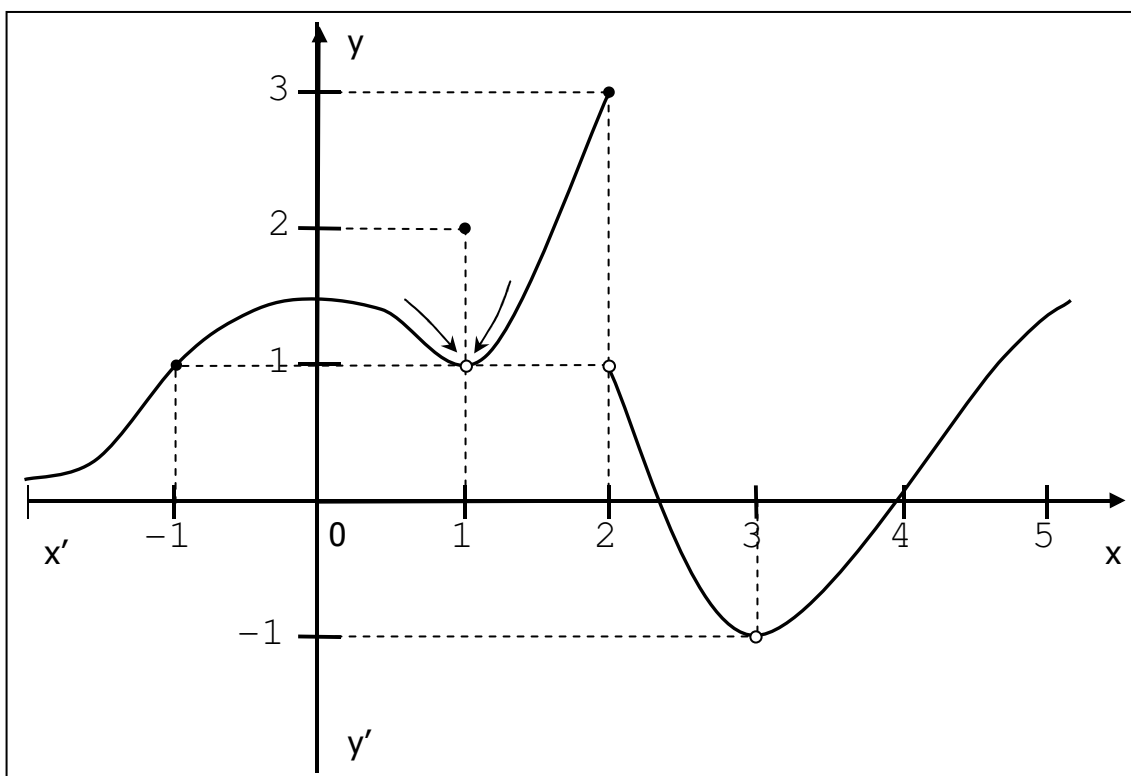
ii) Ισχύει η ισοδυναμία $f(0) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 0 = f^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, οπότε το κοινό σημείο

της γραφικής παράστασης της f^{-1} με τον άξονα $x'x$ είναι το $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

2. ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΤΟ x_0 ΚΑΙ ΣΤΟ $\pm\infty$

Έστω συνάρτηση f με $D_f = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ η οποία έχει την παρακάτω γραφική παράσταση C_f .



Παρατηρούμε ότι καθώς το x πλησιάζει απεριόριστα «κοντά» στο -1 , με $x \neq -1$, κινούμενο πάνω στον άξονα x' , το $f(x)$ (αλλιώς οι τιμές της συνάρτησης, το y) πλησιάζει απεριόριστα «κοντά» στον αριθμό 1. Μάλιστα οι τιμές του $f(x)$ μπορούν να προσεγγίσουν το 1 όσο κοντά θέλουμε, αρκεί να εκλέξουμε τιμές του x αρκετά «κοντά» στο -1 .

Τότε λέμε ότι: «Το όριο της $f(x)$ είναι 1, όταν το x τείνει στο -1 » ή

«Το όριο της $f(x)$ στο -1 είναι 1» ή

« Το $f(x)$ τείνει στο 1, όταν το x τείνει στο -1 » και γράφουμε

συμβολικά:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

Αντίστοιχα παρατηρούμε ότι:

- Καθώς η τετμημένη (x) ενός σημείου πλησιάζει προς το 1, από αριστερά ή από δεξιά και ευρισκόμενη κοντά στο 1, το αντίστοιχο σημείο κινείται πάνω στη γραφική

παράσταση ακολουθώντας τα «βέλη» (βλέπε σχήμα), οπότε η τεταγμένη του πλησιάζει απεριορίστα κοντά στην τιμή 1 (στο 1 του άξονα y/y). Άρα μπορούμε να πούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

παρόλο που η τιμή στο 1 είναι 2 (δηλαδή $f(1)=2$).

- Όμοια (βλέπε σχήμα)

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$$

παρόλο που δεν ορίζεται η τιμή στο 3 (δεν υπάρχει το $f(3)$ αφού $3 \notin D_f$).

- Ορίζουμε το σύμβολο $x \rightarrow 2^-$ που σημαίνει ότι $x \rightarrow 2$ αλλά με $x < 2$ και διαβάζεται «**x τείνει στο 2 από αριστερά**».

Ανάλογα το σύμβολο $x \rightarrow 2^+$ σημαίνει ότι $x \rightarrow 2$ αλλά με $x > 2$ και διαβάζεται «**x τείνει στο 2 από δεξιά**».

Από τη γραφική παράσταση τώρα παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

Τα παραπάνω όρια λέγονται **πλευρικά όρια** της f στο 2 (όριο της f στο 2 από αριστερά και όριο της f στο 2 από δεξιά αντίστοιχα) και όπως θα δούμε παρακάτω, όταν είναι διαφορετικά, όπως εδώ, δεν υπάρχει το όριο της f στο 2.

- Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε επίσης ότι ο δεξιότερος κλάδος της (ο οποίος εννοείται πως συνεχίζεται με τη μορφή που έχει στο τελείωμα του σχήματος) «ανεβαίνει» απεριορίστα εξετάζοντάς τον από τα αριστερά προς τα δεξιά. Έτσι καθώς οι τιμές του x αυξάνονται, τα αντίστοιχα σημεία της C_f έχουν ολοένα και μεγαλύτερο y , αποκτώντας όσο μεγάλη τιμή επιθυμούμε. Τότε λέμε ότι «το όριο της $f(x)$ είναι το $+\infty$ όταν το x τείνει στο $+\infty$ » και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Ανάλογα όταν οι τιμές του x μικραίνουν απεριορίστα ($x \rightarrow -\infty$, ο αριστερότερος κλάδος της γραφικής παράστασης) παρατηρούμε ότι τα αντίστοιχα σημεία της πλησιάζουν ολοένα και περισσότερο τον άξονα x/x , δηλαδή οι αντίστοιχες τεταγμένες τους τείνουν να γίνουν μηδέν. Έτσι γράφουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι υπάρχουν όρια στο x_0 , όπου x_0 πεπερασμένος αριθμός, όπως τα όρια στο -1 ($x \rightarrow -1$), στο 3 ($x \rightarrow 3$) κ.τ.λ. και όρια στα $-\infty$ και $+\infty$. Το αποτέλεσμα δε ενός ορίου (όταν αυτό υπάρχει), μπορεί να είναι πεπερασμένος πραγματικός αριθμός ℓ , $-\infty$ ή $+\infty$.

Έτσι στα επόμενα γράφοντας:

- $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \rho$** θα εννοούμε ότι το ξ μπορεί να είναι κάποιος πραγματικός αριθμός x_0 , $-\infty$ ή $+\infty$ και το ρ είναι κάποιος πραγματικός αριθμός ℓ , $-\infty$ ή $+\infty$. Αν ορίσουμε ως $\bar{\mathbf{R}}$ ένα σύνολο «κατευθύνσεων» (ονομάζεται «αρ συμπαγές») που περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς, αλλά και τα $-\infty$ και $+\infty$ (δηλαδή $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), μπορούμε να λέμε ότι $\xi, \rho \in \bar{\mathbf{R}}$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \rho$** θα εννοούμε ότι το x τείνει σε πεπερασμένο αριθμό (όχι $-\infty$ ή $+\infty$) και
- $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \ell$** θα εννοούμε ότι το αποτέλεσμα του ορίου είναι πεπερασμένος αριθμός (όχι $-\infty$ ή $+\infty$).

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΓΕΙΤΟΝΙΑΣ

Όταν ζητάμε το όριο της f στο x_0 ή στο $-\infty$ ή στο $+\infty$, μπορούμε να περιορίσουμε τη μελέτη της συνάρτησης σε μια «γειτονιά» (ή αλλιώς «περιοχή») του x_0 ή του $-\infty$ ή του $+\infty$ αντίστοιχα. Δηλαδή αντί να θεωρούμε ότι $x \in D_f$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το x ανήκει σε ένα κατάλληλα επιλεγμένο υποσύνολο του D_f , το οποίο ορίζεται ως εξής:

Σαν **γειτονιά του x_0** ονομάζουμε κάθε ανοικτό (τουλάχιστον) διάστημα μορφής

$(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $\alpha < x_0 < \beta$, που περιέχεται στο D_f . Ως γειτονιές του x_0 θεωρούμε επίσης και τα διαστήματα:

(α, x_0) (γειτονιά του x_0 από αριστερά) αν η f δεν ορίζεται σε διάστημα μορφής (x_0, β) και

(x_0, β) (γειτονιά του x_0 από δεξιά) αν η f δεν ορίζεται σε διάστημα μορφής (α, x_0) .

Η γειτονιά του x_0 μπορεί να περιέχει ή όχι το x_0 .

Όταν αναζητάμε τα πλευρικά όρια της f με $x \rightarrow x_0^-$ και $x \rightarrow x_0^+$, τότε αρκεί να περιορίσουμε τη μελέτη της f σε διαστήματα μορφών (α, x_0) και (x_0, β) αντίστοιχα.

Σαν **γειτονιά του $-\infty$** ονομάζουμε κάθε υποσύνολο του D_f μορφής **$(-\infty, \beta)$ ή $(-\infty, \beta]$** και σαν **γειτονιά του $+\infty$** ονομάζουμε κάθε υποσύνολο του D_f μορφής **$(\alpha, +\infty)$ ή $[\alpha, +\infty)$** .

Αν το D_f δεν περιέχει κατάλληλη γειτονιά του ξ (όπου ξ το x_0 , το $-\infty$ ή το $+\infty$), τότε η αναζήτηση ορίου στο ξ δεν έχει νόημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν f συνάρτηση με $D_f = (-\infty, 2] \cup \{3\} \cup (4, 5) \cup (5, 7]$ έχει νόημα η αναζήτηση των ορίων της f στα: $-\infty$, -1 , 0 , 2 (που είναι 2^-), 4 (που είναι 4^+), 5 , 7 (που είναι 7^-).

Δεν έχει νόημα η αναζήτηση των ορίων στα 2^+ , 3 , 4^- , 7^+ , 10 , $+\infty$, καθώς δεν υπάρχουν εντός του D_f κατάλληλες γειτονιές.

Παρατηρείστε ότι το 3 αν και ανήκει στο D_f , είναι μεμονωμένο σημείο του, οπότε δεν υπάρχει γειτονιά του 3 . Αντίθετα σε σημεία που δεν περιέχονται στο D_f (όπως τα 4 και 5) μπορεί να έχει νόημα η αναζήτηση ορίου, καθώς το D_f περιέχει γειτονιά τους. Έτσι

είναι λάθος να ταυτίζουμε το αν το όριο της f στο ξ έχει ή όχι νόημα με το αν το ξ ανήκει ή όχι στο D_f .

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ▼

1. Σε πολλά συγγράμματα συναντάμε τη φράση «η f έχει την ιδιότητα I **κοντά στο x_0** » (όπου I κάποια ιδιότητα). Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f έχει μια ιδιότητα I , όταν το x ανήκει σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της μορφής:

$(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή

(a, x_0) ενώ ταυτόχρονα η f δεν ορίζεται σε σύνολο μορφής (x_0, β) ή

(x_0, β) ενώ ταυτόχρονα η f δεν ορίζεται σε σύνολο μορφής (a, x_0) .

2. Αν το πεδίο ορισμού της f περιέχει διάστημα μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \rho \text{ με } \rho \in \bar{\mathbb{R}}, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \rho \text{ και αντίστροφα,}$$

δηλαδή το όριο της f στο x_0 υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια της f στο x_0 και είναι ίσα μεταξύ τους.

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, τότε το όριο της f στο x_0 δεν υπάρχει.

Να διευκρινίσουμε εδώ ότι είναι διαφορετικό να μην έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου της f σε κάποιο ξ , που σημαίνει ότι το D_f δεν περιέχει κατάλληλη γειτονιά του ξ , από το να μην υπάρχει το όριο της f στο ξ , που σημαίνει ότι είχε νόημα η αναζήτηση του ορίου αλλά μετά την αναζήτηση καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι το όριο αυτό δεν υπάρχει (όπως π.χ. όταν τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά).

3. Όταν μεταξύ δύο πλευρικών ορίων της f στο x_0 έχει νόημα μόνο το ένα, τότε ορίζουμε αυτό ως όριο της f στο x_0 (π.χ. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ όταν το $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ δεν

έχει νόημα).

4. Στα $\pm\infty$ η αναζήτηση πλευρικών ορίων δεν έχει νόημα.

5. Λέγοντας όριο της f με $x \rightarrow \xi$ εννοούμε ότι το x τείνει στο ξ και δεν είναι ίσο με ξ . Γι αυτό όταν $x \rightarrow \xi$ μπορούμε να θεωρούμε ότι $x \neq \xi$.

6. Το όριο μιας συνάρτησης f με $x \rightarrow \xi$, αν υπάρχει, **είναι μοναδικό** και είναι πάντα στοιχείο του $\bar{\mathbb{R}}$, δηλαδή πεπερασμένος αριθμός ή $\pm\infty$.

2.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ

Για τα επόμενα υπενθυμίζουμε ότι γράφοντας $x \rightarrow x_0$ εννοούμε **οποιοδήποτε** $x_0 \in \mathbb{R}$ (εκτός αν αναφέρεται κάτι άλλο), ενώ $x \rightarrow \xi$ εννοούμε ότι $\xi \in \bar{\mathbb{R}}$.

Επίσης γράφοντας ότι το όριο της f είναι ℓ ή ℓ_1 ή ℓ_2 θα εννοούμε ότι είναι πεπερασμένος πραγματικός αριθμός, ενώ γράφοντας ότι το όριο της f είναι ρ θα εννοείται ότι $\rho \in \bar{\mathbb{R}}$.

Επίσης όλες οι παρακάτω ιδιότητες ισχύουν με την προϋπόθεση ότι τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων στις οποίες αναφέρονται περιέχουν κατάλληλη γειτονιά του ξ , την οποία θα συμβολίζουμε με Δ_ξ (ή Δ_{x_0} ή $\Delta_{-\infty}$ ή $\Delta_{+\infty}$ αντίστοιχα).

ΤΟΤΕ:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell,$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) - \ell) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \ell$$

2. ΟΡΙΑ ΣΥΓΓΕΚΡΙΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

α) Σταθερή $f(x)=c, c \in \mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow \xi} c = c$	
β) Ταυτοτική $f(x)=x$	$\lim_{x \rightarrow \xi} x = \xi$	
γ) Δύναμη $f(x)=x^v, v \in \mathbb{N}^*$ (δηλ. εκθέτης μη μηδενικός φυσικός)	$\lim_{x \rightarrow x_0} x^v = x_0^v$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases}$	ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ $(+\infty)^v = +\infty$ $(-\infty)^{2k} = +\infty$ $(-\infty)^{2k+1} = -\infty$ με $k \in \mathbb{N}^*$
δ) $f(x) = \frac{1}{x^v}, v \in \mathbb{N}^*$	- Ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x^v} = \frac{1}{x_0^v}$, για $x_0 \neq 0$ - Για το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^v}$ ισχύουν: <u>Αν v άρτιος</u> τότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^v} = +\infty$ <u>Αν v περιττός</u> τότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^v} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^v} = +\infty$ και επομένως αν v περιττός δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^v}$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^v} = 0$	ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ $\frac{1}{0^+} = +\infty$ $\frac{1}{0^-} = -\infty$ $\frac{1}{0^+} = +\infty$ $\frac{1}{\pm\infty} = 0$

ε) Ημίτονο $f(x)=\eta\mu x$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$, ενώ το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta\mu x$ δεν υπάρχει
ζ) Συνημίτονο $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$, ενώ το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$ δεν υπάρχει
η) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$	

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ▼

Στα προηγούμενα όρια της η) περίπτωσης το x εκφράζεται σε rad. Δεν ισχύουν τα ίδια αν το x εκφράζεται σε μοίρες.

θ) Εκθετική $f(x)=a^x$, με $a>0$ και $a \neq 1$	ΟΡΙΟ ΣΕ x_0 ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ Π.Ο.	ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ
	$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$	
	ΟΡΙΑ ΣΤΑ ΑΚΡΑ ΤΟΥ Π.Ο.	
	Αν $a > 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$	$D_f \quad R_f$ $(-\infty, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$
	Αν $0 < a < 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$	$(-\infty, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η εκθετική $f(x)=e^x$ ανήκει

προφανώς στην πρώτη κατηγορία (με

βάση μεγαλύτερη του 1), οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

ι) Λογαριθμική $f(x)=\log_a x$ με $x>0$ και $a>0$, $a \neq 1$	ΟΡΙΟ ΣΕ x_0 ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ Π.Ο.	ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ
	Για $x_0>0$ είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$	
	ΟΡΙΑ ΣΤΑ ΑΚΡΑ ΤΟΥ Π.Ο.	
	Αν $a > 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$	$D_f \quad R_f$ $(0, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$
	Αν $0 < a < 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$	$(0, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Οι λογαριθμικές $f(x)=\log x$ και

$f(x)=\ln x$ ανήκουν προφανώς στην πρώτη

κατηγορία (με βάση μεγαλύτερη του 1),

οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

κ) Πολυωνυμική $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ με $a_v \neq 0$ και $v \in \mathbb{N}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_v x^v)$ δηλαδή το όριο του $P(x)$ στο $-\infty$ ή το $+\infty$ ισούται με το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου του
λ) Ρητή $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x)$ και $Q(x)$ πολυώνυμα με $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_v \neq 0$ $Q(x) = \beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$, $\beta_k \neq 0$ και $v, k \in \mathbb{N}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, & \text{αν } Q(x_0) \neq 0 \\ \mathbf{a.μ. (*)}, & \text{αν } Q(x_0) = 0 \end{cases}$ (βλέπε μεθοδολογία) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(a_v x^v)}{(\beta_k x^k)}$ δηλαδή το όριο στο $\pm\infty$ ισούται με το όριο του πηλίκου των μεγιστοβάθμιων όρων της

(*) Στα επόμενα όταν συναντάμε **α.μ.** θα σημαίνει «**απροσδιόριστη μορφή**», δηλαδή το αποτέλεσμα του συγκεκριμένου ορίου δεν μπορούμε να το προσδιορίσουμε μέσα από τις ιδιότητες των ορίων, αλλά χρειάζεται κάποια ιδιαίτερα τεχνάσματα (βλέπε μεθοδολογία). ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν σημαίνει ότι το όριο δεν υπάρχει, αλλά απλά δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την τιμή του μέσα από τις ιδιότητες.

Απροσδιόριστη μορφή μπορεί να προκύψει κατά την πρόσθεση, πολ/σμό, διαίρεση ορίων αλλά και στην προσπάθειά μας να βρούμε το όριο κάποιας εκθετικής παράστασης, αν η συγκεκριμένη πράξη των ορίων καταλήξει σε ένα από τα παρακάτω αποτελέσματα:

ΠΙΝΑΚΑΣ Α.Μ.			
ΠΡΟΣΘΕΣΗ	ΠΟΛ/ΣΜΟΣ	ΔΙΑΙΡΕΣΗ	ΕΚΘΕΤΙΚΗ
$(+\infty) + (-\infty)$	$0 \cdot (+\infty)$	$\frac{0}{0}$	0^0
$(-\infty) + (+\infty)$	$0 \cdot (-\infty)$	$\frac{a}{0}$	$(+\infty)^0$
$(+\infty) - (+\infty)$	$(+\infty) \cdot 0$	$\frac{0}{0}$	$1^{\pm\infty}$
$(-\infty) - (-\infty)$	$(-\infty) \cdot 0$	$\frac{\pm\infty}{0}$	
		$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	
		$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	(Στα παραπάνω εμφανίζεται το <u>όριο</u> του εκθέτη και το <u>όριο</u> της βάσης)

3. ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$ πεπερασμένα ή άπειρα και ζητάμε να βρούμε τα όρια στο ξ των συναρτήσεων $f+g$, $\kappa \cdot f$, $f \cdot g$, $\frac{1}{f}$ και $\frac{f}{g}$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}^*$. Τότε:

$f+g$ Γενικά ισχύει ότι **$\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) + \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$** με την προϋπόθεση ότι τα όρια των f και g στο ξ υπάρχουν και η πρόσθεσή τους δεν καταλήγει σε α.μ. (βλέπε πίνακα α.μ. στην πρόσθεση, παραπάνω).
Σε κάθε περίπτωση ισχύει ο παρακάτω πίνακας (στην πρώτη γραμμή και στην πρώτη στήλη καθορίζονται τα όρια των f και g και εντός του πίνακα το όριο της $f+g$):

$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ \ $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	α.μ.
$-\infty$	$-\infty$	α.μ.	$-\infty$

$\kappa \cdot f$ με $\kappa \in \mathbb{R}^*$ Γενικά ισχύει ότι **$\lim_{x \rightarrow \xi} (\kappa \cdot f(x)) = \kappa \cdot \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$** με την προϋπόθεση ότι το όριο της f στο ξ υπάρχει.
Σε κάθε περίπτωση ισχύει ο παρακάτω πίνακας:

κ \ $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\kappa > 0$	$\kappa \cdot \ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\kappa < 0$	$\kappa \cdot \ell$	$-\infty$	$+\infty$

$f \cdot g$ Γενικά ισχύει ότι **$\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$** με την προϋπόθεση ότι τα όρια των f και g στο ξ υπάρχουν και ο πολ/σμός τους δεν καταλήγει σε α.μ. (βλέπε πίνακα α.μ. στον πολλαπλασιασμό, παραπάνω).
Σε κάθε περίπτωση ισχύει ο παρακάτω πίνακας (στην πρώτη γραμμή και στην πρώτη στήλη καθορίζονται τα όρια των f και g και εντός του πίνακα το όριο της $f \cdot g$):

$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \backslash \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1 \cdot \ell_2$	$\ell_1 \cdot \ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\ell_1 \cdot \ell_2$	$\ell_1 \cdot \ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	α.μ.	α.μ.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	α.μ.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	α.μ.	$-\infty$	$+\infty$

$\frac{1}{f}$ Γενικά ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)}$ με την προϋπόθεση ότι το όριο της f στο ξ υπάρχει και η πράξη $\frac{1}{\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)}$ δεν δίνει α.μ.
Σε κάθε περίπτωση ισχύει ο παρακάτω πίνακας:

$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$	$\ell \neq 0$	0	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	α.μ.	$+\infty$	$-\infty$	0	0

$\frac{f}{g}$ Γενικά ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \xi} g(x)}$ με την προϋπόθεση ότι τα όρια των f και g στο ξ υπάρχουν και η διαίρεσή τους δεν καταλήγει σε α.μ. (βλέπε πίνακα α.μ. στη διαίρεση, παραπάνω).
Σε κάθε περίπτωση ισχύει ο παρακάτω πίνακας (στην πρώτη γραμμή και στην πρώτη στήλη καθορίζονται τα όρια των f και g και εντός του πίνακα το όριο της $\frac{f}{g}$):

$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \backslash \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.
$+\infty$	0	0	0	α.μ.	α.μ.
$-\infty$	0	0	0	α.μ.	α.μ.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ▼

A. Χρειάζεται ΠΡΟΣΟΧΗ στα παρακάτω:

- **Αν το $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x))$ υπάρχει, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι υπάρχουν και τα $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$.**

Για παράδειγμα αν $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = -\eta\mu x$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\eta\mu x + (-\eta\mu x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$, ενώ δεν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\eta\mu x)$.

Η ίδια παρατήρηση ισχύει και για τις υπόλοιπες πράξεις των ορίων.

- **Αν τα $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x))$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ υπάρχουν, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$.**

Για παράδειγμα αν $f(x) = x$ και $g(x) = \eta\mu x$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \eta\mu x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(1 + \frac{\eta\mu x}{x}\right) = +\infty \cdot (1 + 0) = +\infty, \text{ υπάρχει, καθώς με τη βοήθεια του}$$

κριτηρίου παρεμβολής (βλέπε παρακάτω), μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, υπάρχει. Όμως το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x$ δεν υπάρχει.

Η ίδια παρατήρηση ισχύει και για τις υπόλοιπες πράξεις των ορίων.

Αν όμως η υπόθεση αναφέρει ότι το όριο της μιας και το όριο της πράξης τους υπάρχει **στο $\mathbf{R}$** (δηλαδή είναι πεπερασμένο), τότε, ανάλογα την υπόθεση, ίσως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει και το όριο της άλλης και μάλιστα ότι είναι πραγματικός αριθμός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) = \ell_1 \in \mathbf{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \ell_2 \in \mathbf{R}$, τότε είναι κατά σειρά:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} [(f(x) + g(x)) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) - \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \ell_1 - \ell_2 \in \mathbf{R}. \text{ Άρα το όριο}$$

της g υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

B. Μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύουν οι συνεπαγωγές:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ και } f(x) > 0 \text{ σε γειτονιά του } \xi \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty \text{ και } \left. \begin{array}{l} \text{Αν } \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ και } f(x) < 0 \text{ σε γειτονιά του } \xi \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty$$

ΒΛΕΠΕ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ, ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

Οι παραπάνω συνεπαγωγές μπορούν να χρησιμοποιηθούν όταν ζητάμε να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$. Τότε αρκεί τελικά να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = 0$ με $f(x) > 0$ ή < 0 αντίστοιχα σε γειτονιά του ξ .

4. ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

Ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα:

	ΥΠΟΘΕΣΗ		ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
α)	Αν $f(x) \geq g(x)$ σε μια γειτονιά του ξ και υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$	ΤΟΤΕ	$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Δεν ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος
- Αν η σχέση της υπόθεσης γίνει $f(x) > g(x)$, τότε το συμπέρασμα παραμένει $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$ (και **δεν** γίνεται $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) > \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$).
- Αν θεωρήσουμε ως $g(x)$ (ή ως $f(x)$) το 0, τότε το παραπάνω θεώρημα δίνει την εξής **σημαντική ιδιότητα**:

Αν $f(x) \geq 0$ (ή ≤ 0) σε μια γειτονιά του ξ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$	ΤΟΤΕ	$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \geq 0$ (ή ≤ 0)
--	-------------	--

β)	Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) > 0$ (ή < 0)	ΤΟΤΕ	$f(x) > 0$ (ή < 0 αντίστοιχα) σε κάποια γειτονιά του ξ . δηλαδή η συνάρτηση σε κάποια γειτονιά του ξ παίρνει το πρόσημο του ορίου της.
-----------	---	-------------	---

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Δεν ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος
- Δεν ισχύει το παραπάνω θεώρημα αν στη θέση του $>$ (ή $<$) θέσουμε $\geq$ (ή $\leq$).

γ)	<u>Κριτήριο παρεμβολής (*)</u> Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ σε μια γειτονιά του ξ και $\lim_{x \rightarrow \xi} h(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$	ΤΟΤΕ	$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \ell$
δ)	<u>Μια σημαντική εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος (**):</u> Αν $ f(x) \leq g(x)$ σε μια γειτονιά του ξ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0$	ΤΟΤΕ	$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$

(*) Το κριτήριο παρεμβολής στην περίπτωση απείρων ορίων εκφράζεται με τις παρακάτω προτάσεις:

α)	Αν $f(x) \leq g(x)$ σε γειτονιά του ξ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = -\infty$	} τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty$
β)	Αν $f(x) \geq g(x)$ σε γειτονιά του ξ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = +\infty$	

Οι προτάσεις αυτές, αν και δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο, μπορούν να χρησιμοποιούνται χωρίς απόδειξη. Παρ' όλα αυτά στο παράρτημα δίνουμε και την απόδειξή τους.

ΒΛΕΠΕ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ, ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

(**) Η παραπάνω πρόταση δ) είναι εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής καθώς η σχέση $|f(x)| \leq g(x)$ δίνει $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$, οπότε η h του κριτηρίου παρεμβολής είναι η $-g$.

Σε ασκήσεις όταν ισχύουν οι υποθέσεις της ιδιότητας δ), χρησιμοποιούμε πάντα το κριτήριο παρεμβολής για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα, καθώς η ιδιότητα δ) δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο. Μια συνάρτηση που έχει όριο μηδέν συνήθως αναφέρεται ως "**μηδενική**".

Χρήσιμες πολλές φορές, κυρίως για την εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής, είναι οι ιδιότητες: $|\eta\mu x| \leq |x|$ (η ισότητα ισχύει μόνο αν $x=0$), $|\eta\mu x| \leq 1$ και $|\sigma\upsilon\nu x| \leq 1$.

5. Για τις συναρτήσεις $|f|$, f^ν , $\sqrt[\nu]{f}$ ισχύουν τα εξής:

A. **Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = a \in \bar{\mathbb{R}}$ τότε:**

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)| = |a|.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow \xi} (f(x))^\nu = \left(\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \right)^\nu = a^\nu.$$

Αν για παράδειγμα είναι $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x))^2 = +\infty$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow \xi} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)} = \sqrt[\nu]{a} \text{ με } a \geq 0 \text{ και } f(x) \geq 0$$

B. **Τα αντίστροφα των παραπάνω συνεπαγωγών δεν ισχύουν πάντα,**
δηλαδή:

α) αν $\lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)| = a \in \bar{\mathbb{R}}$, $a > 0$ ή $a = +\infty$, **δεν** σημαίνει απαραίτητα ότι

$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = a$ ή $-a$, καθώς το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ μπορεί να μην υπάρχει καν.

Αν πάντως υπάρχει τότε θα είναι a ή $-a$.

β) αν $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x))^\nu = a^\nu$, $a \neq 0$, **δεν** σημαίνει απαραίτητα ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = a$ ή $-a$,

ανάλογα το ν , καθώς το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ μπορεί να μην υπάρχει καν.

γ) αν $\lim_{x \rightarrow \xi} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{a}$, $a \geq 0$, **δεν** σημαίνει απαραίτητα ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = a$.

Γ. **Αν όμως $a=0$** , οι συνεπαγωγές που αναφέρονται στο **A.** ισχύουν ως ισοδυναμίες (με απόδειξη, καθώς δεν αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο), δηλαδή:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow \xi} (f(x))^\nu = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow \xi} \sqrt[\nu]{f(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$$

ΒΛΕΠΕ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ α) ΚΑΙ β) ΣΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ, ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

6. ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Πολλές φορές πρέπει να υπολογίσουμε όρια σύνθετων συναρτήσεων δηλαδή όρια μορφής $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$. Θέτοντας $g(x)=u$ ισχύει το εξής θεώρημα:

• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$ • $g(x) \neq u_0$ σε μια γειτονιά του x_0 και • $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = \ell$	ΤΟΤΕ	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = \ell$
---	-------------	---

Συμφωνούμε όλες οι σύνθετες των οποίων θα αναζητήσουμε τα όρια θα είναι τέτοιες ώστε να ισχύει η δεύτερη προϋπόθεση ($g(x) \neq u_0$ σε μια γειτονιά του x_0), οπότε δεν χρειάζεται να ελέγχουμε την προϋπόθεση αυτή.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2 - 3)]$

Λύση: $D_f = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ και επομένως το όριο έχει νόημα, αφού το D_f περιέχει γειτονιά του $+\infty$. Το όριο αυτό, είναι όριο σύνθετης συνάρτησης και υπολογίζεται με αλλαγή μεταβλητής. Θέτουμε $u=x^2-3$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2 - 3)] = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty.$$

Τελειώνοντας τη θεωρία περί ορίων και πριν περάσουμε στη μεθοδολογία, ας δούμε τις **πράξεις των ορίων με τη μορφή μνημονικών κανόνων:**

ΑΘΡΟΙΣΜΑ	ΓΙΝΟΜΕΝΟ	ΠΗΛΙΚΟ	ΔΥΝΑΜΗ
$0 + (+\infty) = +\infty$ $0 + (-\infty) = -\infty$ $\ell + (+\infty) = +\infty$ $\ell + (-\infty) = -\infty$ $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ $(+\infty) + (-\infty) = \text{α.μ.}$ $(-\infty) + (+\infty) = \text{α.μ.}$ $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$0 \cdot (+\infty) = \text{α.μ.}$ $0 \cdot (-\infty) = \text{α.μ.}$ $\ell \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ αν } \ell > 0$ $\ell \cdot (+\infty) = -\infty, \text{ αν } \ell < 0$ $\ell \cdot (-\infty) = -\infty, \text{ αν } \ell > 0$ $\ell \cdot (-\infty) = +\infty, \text{ αν } \ell < 0$ $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$ $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$	$\frac{0}{\pm\infty} = 0$ και $\frac{\ell}{\pm\infty} = 0$ $\frac{0}{0} = \text{α.μ.}$ $\frac{a}{0} = \text{α.μ.}$ $\frac{+\infty}{\ell} = +\infty, \text{ αν } \ell > 0$ $\frac{+\infty}{\ell} = -\infty, \text{ αν } \ell < 0$ $\frac{-\infty}{\ell} = -\infty, \text{ αν } \ell > 0$ $\frac{-\infty}{\ell} = +\infty, \text{ αν } \ell < 0$ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = \text{α.μ.}$	$(+\infty)^v = +\infty, v > 0$ $(-\infty)^v = +\infty, \text{ αν } v \text{ άρτιος φυσικός}$ $(-\infty)^v = -\infty, \text{ αν } v \text{ περιττός φυσικός}$ $0^0 = \text{α.μ.}$ $(+\infty)^0 = \text{α.μ.}$ $1^{\pm\infty} = \text{α.μ.}$ Επίσης $(0^+)^{+\infty} = 0$ $(0^+)^{-\infty} = +\infty$ Στα δύο τελευταία όρια, η βάση τείνει στο 0^+ και ο εκθέτης στο $+\infty$ ή $-\infty$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΟΡΙΩΝ

1	Αν η f είναι πολυωνυμική με $f(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_v \neq 0$ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$ Όπως ήδη είπαμε στις ιδιότητες ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ Παράδειγμα 1 ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$ Όπως ήδη είπαμε στις ιδιότητες ισχύει $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (a_v \cdot x^v)$ το αποτέλεσμα του οποίου θα είναι σίγουρα $-\infty$ ή $+\infty$. Παράδειγμα 9
2	Αν η f είναι ρητή με $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ με $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_v \neq 0$ και $Q(x) = \beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$, $\beta_k \neq 0$, $v, k \in \mathbb{N}$ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$ Εξετάζουμε το όριο του παρονομαστή $Q(x)$: α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) \neq 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = 0$ τότε εξετάζουμε και το όριο του αριθμητή $P(x)$ και: β1) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) \neq 0$ (α.μ. $\frac{a}{0}$) τότε «σπάμε» το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ σε γινόμενο ορίων μορφής $\lim_{x \rightarrow x_0} A(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{B(x)}$, όπου $B(x)$ ο παράγοντας εκείνος του παρονομαστή που ευθύνεται για το μηδενισμό του ορίου του παρονομαστή. Προσδιορίζουμε τα πρόσημα του $B(x)$ σε μια γειτονιά του x_0 (ίσως κατασκευάζοντας πίνακα προσημών του $B(x)$) και: β1α) Αν $B(x) > 0$ σε μια γειτονιά του x_0, οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} B(x) = 0^+$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} A(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{B(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} A(x) \cdot (+\infty) = \dots$ β1β) Αν $B(x) < 0$ σε μια γειτονιά του x_0, οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} B(x) = 0^-$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} A(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{B(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} A(x) \cdot (-\infty) = \dots$

β1γ) Αν το $B(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο σε μια γειτονιά του x_0 , δηλαδή έχει διαφορετικά πρόσημα γύρω από το x_0 , τότε στο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{B(x)}$ προκύπτει α.μ. $\frac{1}{0}$, παίρνουμε πλευρικά όρια στο x_0 (x_0^- και x_0^+) καταλήγοντας σίγουρα στο συμπέρασμα ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ δεν υπάρχει (καθώς τα πλευρικά όρια θα είναι διαφορετικά).

β2) Αν και $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = 0$ (α.μ. $\frac{0}{0}$) τότε **παραγοντοποιούμε αριθμητή και**

παρονομαστή με στόχο να απλοποιηθεί ο κοινός παράγοντας που σίγουρα υπάρχει και στους δύο και ευθύνεται για τον μηδενισμό του ορίου τους (και ο οποίος ίσως είναι ο $x - x_0$).

Μετά την απλοποίηση του κοινού παράγοντα ελέγχουμε πάλι το όριο του παρονομαστή και θα έχουμε:

ή όριο παρονομαστή διάφορο του μηδενός, οπότε ενεργούμε όπως στην περίπτωση α)

ή όριο παρονομαστή μηδέν αλλά αριθμητή όχι, οπότε ενεργούμε όπως στην περίπτωση β₁).

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ▼

Γενικά σε κάθε περίπτωση που καταλήγουμε σε α.μ. $\frac{a}{0}$ παίρνουμε **γινόμενο ορίων**.

Παράδειγμα 2

ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$

Όπως ήδη είπαμε στις ιδιότητες ισχύει $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a_v \cdot x^v}{\beta_k \cdot x^k}$, το οποίο μετά την απλοποίηση των δυνάμεων του x , θα δώσει αποτέλεσμα που θα είναι

$$\begin{cases} 0, & \text{αν } \text{βαθμ } P(x) < \text{βαθμ } Q(x) \\ \frac{a_v}{\beta_k}, & \text{αν } \text{βαθμ } P(x) = \text{βαθμ } Q(x) \\ \pm \infty, & \text{αν } \text{βαθμ } P(x) > \text{βαθμ } Q(x) \end{cases}$$

Παράδειγμα 10

3

Αν η f είναι άρρητη και περιέχει ρίζες 2ης τάξης αγνώστων παραστάσεων

ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

- Προσπαθούμε να υπολογίσουμε το όριο **απ' ευθείας** με εφαρμογή των ιδιοτήτων. Αν υπολογίζεται έτσι έχει καλώς.
- Αν κατά την εφαρμογή του πρώτου βήματος καταλήξουμε σε α.μ. $\frac{a}{0}$, παίρνουμε **γινόμενο ορίων** (βλέπε μεθοδολογία 2-β1) και αν χρειάζεται πλευρικά όρια στο x_0 .

- Αν κατά την εφαρμογή του πρώτου βήματος καταλήξουμε σε α.μ. $\frac{0}{0}$, τότε πολλαπλασιάζουμε και αριθμητή και παρονομαστή με τις **συζυγείς παραστάσεις** των **άρρητων παραγόντων**, αριθμητή και παρονομαστή, που ευθύνονται για την α.μ. Με τη φράση «άρρητων παραγόντων» εννοούμε παράγοντες μορφής $\sqrt{a} \pm \beta$ ή $\sqrt{a} \pm \sqrt{\beta}$. Στη συνέχεια και μετά τις απλοποιήσεις (θα προκύψει κάποιος κοινός παράγοντας αριθμητή και παρονομαστή μορφής $x-x_0$ ή $\sqrt{x} - \sqrt{x_0}$ ή $\sqrt{x-x_0}$) μπορούμε να βρούμε το όριο αφού δεν θα έχουμε πλέον α.μ. $\frac{0}{0}$

Παράδειγμα 3**ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$**

- Προσπαθούμε να υπολογίσουμε το όριο **απ' ευθείας** με εφαρμογή των ιδιοτήτων. Αν υπολογίζεται έτσι έχει καλώς.
- Αν κατά την παραπάνω προσπάθεια καταλήξουμε σε α.μ., τότε βγάζουμε **κοινό παράγοντα** από αριθμητή και παρονομαστή (αν υπάρχει) το x στον μεγαλύτερο εκθέτη που υπάρχει σε κάθε όρο. Μετά τις απλοποιήσεις δοκιμάζουμε πάλι να υπολογίσουμε το όριο. Αν υπολογίζεται έτσι έχει καλώς.
- Αν καταλήγουμε πάλι σε α.μ., τότε πολλαπλασιάζουμε και αριθμητή και παρονομαστή της αρχικής συνάρτησης με τις **συζυγείς παραστάσεις** των **άρρητων παραγόντων**, αριθμητή και παρονομαστή, που ευθύνονται για την α.μ. Μετά τις απλοποιήσεις δοκιμάζουμε πάλι να υπολογίσουμε το όριο. Αν υπολογίζεται έτσι έχει καλώς.
- Αν και πάλι καταλήγουμε σε α.μ., τότε από την τελική μορφή στην οποία φέραμε προηγουμένως την $f(x)$, βγάζουμε **κοινό παράγοντα** από αριθμητή και παρονομαστή (αν υπάρχει) το x στον μεγαλύτερο εκθέτη που υπάρχει σε κάθε όρο. Μετά τις απλοποιήσεις υπολογίζουμε το όριο.

Παρατήρηση 1: Σίγουρα θα υπολογιστεί το όριο κατά την εφαρμογή κάποιου από τα παραπάνω βήματα.

Παρατήρηση 2: Είναι πιθανό σε κάποιο από τα παραπάνω στάδια να χρειαστεί να εκλέξουμε κάποια γειτονιά του $-\infty$ ή του $+\infty$, υποσύνολο του D_f , στην οποία μας εξυπηρετεί να ανήκει το x (ίσως για να μπορέσουμε να «διώξουμε» κάποια απόλυτη τιμή, εάν προκύψει).

Παράδειγμα 11

4**Αν η f είναι άρρητη και περιέχει ρίζες 3ης τάξης αγνώστων παραστάσεων****ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$**

- Προσπαθούμε να υπολογίσουμε το όριο **απ' ευθείας** με εφαρμογή των ιδιοτήτων. Αν υπολογίζεται έτσι έχει καλώς.
- Αν κατά την εφαρμογή του πρώτου βήματος καταλήξουμε σε α.μ. $\frac{a}{0}$, παίρνουμε **γινόμενο ορίων** (βλέπε μεθοδολογία 2-β1) και αν χρειάζεται πλευρικά όρια στο x_0 .
- Αν κατά την εφαρμογή του πρώτου βήματος καταλήξουμε σε α.μ. $\frac{0}{0}$ και ευθύνεται γι αυτό ο άρρητος παράγοντας που περιέχει την κυβική ρίζα, τότε μετατρέπουμε τον άρρητο αυτό παράγοντα με τη βοήθεια μιας των **ταυτοτήτων**:

$$a - \beta = \frac{a^3 - \beta^3}{a^2 + a \cdot \beta + \beta^2} \quad \text{ή} \quad a + \beta = \frac{a^3 + \beta^3}{a^2 - a \cdot \beta + \beta^2},$$

όπου $a - \beta$ ή $a + \beta$ ο άρρητος αυτός παράγοντας.

Οι ταυτότητες αυτές δεν είναι τίποτα άλλο παρά οι γνωστές μας «διαφορά κύβων» και «άθροισμα κύβων», λυμένες ως προς $a - \beta$ και $a + \beta$ αντίστοιχα.

Μετά τις απλοποιήσεις υπολογίζουμε το όριο.

Παράδειγμα 4**ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$**

- Προσπαθούμε να υπολογίσουμε το όριο **απ' ευθείας** με εφαρμογή των ιδιοτήτων. Αν υπολογίζεται έτσι έχει καλώς.
- Αν καταλήξουμε σε α.μ. βγάζουμε **κοινό παράγοντα** από αριθμητή και παρονομαστή (αν υπάρχει) το x στον μεγαλύτερο εκθέτη που υπάρχει σε κάθε όρο.
Αν μετά τις απλοποιήσεις το όριο υπολογίζεται έχει καλώς.
- Αν κατά την παραπάνω προσπάθεια καταλήξουμε πάλι σε α.μ. και ευθύνεται γι αυτό ο άρρητος παράγοντας που περιέχει την κυβική ρίζα, τότε μετατρέπουμε τον άρρητο αυτό παράγοντα με τη βοήθεια μιας των **ταυτοτήτων**:

$$a - \beta = \frac{a^3 - \beta^3}{a^2 + a \cdot \beta + \beta^2} \quad \text{ή} \quad a + \beta = \frac{a^3 + \beta^3}{a^2 - a \cdot \beta + \beta^2},$$

όπου $a - \beta$ ή $a + \beta$ ο άρρητος αυτός παράγοντας.

Μετά τις απλοποιήσεις προσπαθούμε να υπολογίσουμε το όριο.

Αν υπολογίζεται έχει καλώς.

- Αν και πάλι καταλήγουμε σε α.μ., τότε από την τελική μορφή στην οποία φέραμε προηγουμένως την $f(x)$, βγάζουμε **κοινό παράγοντα** από αριθμητή και παρονομαστή (αν υπάρχει) το x στον μεγαλύτερο εκθέτη που υπάρχει σε κάθε όρο.
Μετά τις απλοποιήσεις υπολογίζουμε το όριο.

Παρατήρηση: Είναι πιθανό σε κάποιο από τα παραπάνω στάδια να χρειαστεί να εκλέξουμε κάποια γειτονιά του $-\infty$ ή του $+\infty$, υποσύνολο του D_f , στην οποία μας εξυπηρετεί να ανήκει το x (ίσως για να μπορέσουμε να «διώξουμε» κάποια απόλυτη τιμή, εάν προκύψει).

Παράδειγμα 12**5****Αν η f έχει πολλαπλό τύπο****ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$**

α) Αν η f δεν αλλάζει τύπο σε μια γειτονιά του x_0 , αριστερά και δεξιά του x_0 , τότε βρίσκουμε το όριο του αντίστοιχου κλάδου της f που αφορά στη γειτονιά αυτή και αυτό είναι το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

β) Αν η f αλλάζει τύπο σε μια γειτονιά του x_0 , αριστερά και δεξιά του x_0 , τότε παίρνουμε τα **πλευρικά όρια** της f στο x_0 . Φυσικά καθένα από τα πλευρικά όρια της f αφορά στον κλάδο εκείνο που ορίζεται σε κατάλληλη γειτονιά του x_0 .

Παράδειγμα 5**ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$**

Αρκεί να βρούμε το όριο εκείνου του κλάδου της f που ορίζεται σε κατάλληλη γειτονιά του $-\infty$ ή $+\infty$ (δηλαδή που ορίζεται σε διάστημα μορφής $(-\infty, \beta)$ ή $(a, +\infty)$). Αυτό είναι και το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ή το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 13**6****Αν η f περιέχει απόλυτες τιμές****ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$**

- Προσπαθούμε να προσδιορίσουμε το όριο **απ' ευθείας** με εφαρμογή των ιδιοτήτων. Αν υπολογίζεται έχει καλώς.
- Αν καταλήξουμε σε α.μ. για την οποία ευθύνεται κάποια απόλυτη τιμή, τότε κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων της παράστασης που βρίσκεται εντός αυτής της απόλυτης τιμής και αν αλλάζει πρόσημο σε μια γειτονιά του x_0 , αριστερά και δεξιά του x_0 , παίρνουμε πλευρικά όρια, «βγάζοντας» κάθε φορά το απόλυτο.

Παράδειγμα 6**ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$**

- Προσπαθούμε να προσδιορίσουμε το όριο **απ' ευθείας** με εφαρμογή των ιδιοτήτων. Αν υπολογίζεται έχει καλώς.
- Αν η ύπαρξη κάποιας απόλυτης τιμής δημιουργεί πρόβλημα, κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων της παράστασης που βρίσκεται εντός αυτής της απόλυτης τιμής, εκλέγουμε μια κατάλληλη γειτονιά του $-\infty$ ή του $+\infty$ (ανάλογα με το που τείνει το x) ώστε να «βγάλουμε» το απόλυτο και στη συνέχεια προσδιορίζουμε το ζητούμενο όριο.

Παράδειγμα 14

7**Αν η f περιέχει τριγωνομετρικές συναρτήσεις αγνώστου****ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$**

Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0,$$

το όριο της σύνθετης συνάρτησης ή την εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής (δηλαδή το

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } |f(x)| \leq g(x) \text{ σε μια γειτονιά του } x_0 \\ \text{και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \end{array} \right\} \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω θεώρημα ίσως χρειαστούν οι ιδιότητες

$$|\eta\mu x| \leq |x|, \quad |\eta\mu x| \leq 1, \quad |\sigma\upsilon\nu x| \leq 1, \text{ καθώς και οι ιδιότητες}$$

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \text{και} \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ των απολύτων τιμών.}$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ▼

Μπορούμε **να δείξουμε** (όπως στο παράδ.7γ)) ότι με $a \neq 0$ και $\beta \neq 0$ ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu ax}{ax} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu ax}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi ax}{ax} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu ax}{\eta\mu \beta x} = \frac{a}{\beta}$$

Παράδειγμα 7**ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$**

Χρησιμοποιούμε κυρίως την εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής με τη μορφή

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } |f(x)| \leq g(x) \text{ σε μια γειτονιά του } \pm \infty \\ \text{και } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} g(x) = 0 \end{array} \right\} \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0.$$

Στην προσπάθειά μας να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα ίσως χρειαστούν οι

$$\text{ιδιότητες} \quad |\eta\mu x| \leq |x|, \quad |\eta\mu x| \leq 1, \quad |\sigma\upsilon\nu x| \leq 1, \text{ καθώς και οι ιδιότητες}$$

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \text{και} \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ των απολύτων τιμών.}$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ▼

Μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

Παράδειγμα 15**8****Αν η f περιέχει εκθετικές ή λογαριθμικές συναρτήσεις αγνώστου**

Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες για τα όρια τέτοιων συναρτήσεων, τις οποίες έχουμε ήδη αναφέρει στη θεωρία, καθώς και το όριο της σύνθετης συνάρτησης, αν χρειαστεί.

Ειδικά στην περίπτωση που ο τύπος της συνάρτησης είναι άθροισμα ή πηλίκο, όπου περιέχονται εκθετικές παραστάσεις και το όριο δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί με ιδιότητες, ίσως χρειαστεί να διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με μια κατάλληλη εκθετική από αυτές, ώστε να δημιουργηθούν νέες εκθετικές **με όριο 0** (βλέπε Παράδ. 16).

Παραδείγματα 8, 16

9**Λοιπές ασκήσεις ορίων**

Τέλος υπάρχουν:

- ασκήσεις που ζητούν το όριο συνάρτησης αγνώστου τύπου όταν αυτή ή το όριό της επαληθεύουν κάποια σχέση (σε αυτή την κατηγορία ανήκουν και τα **όρια αλληλοεξαρτώμενων συναρτήσεων**, δηλαδή συναρτήσεων που εξαρτάται η μία από την άλλη)
- ασκήσεις που ζητούν το όριο παραμετρικής συνάρτησης για όλες τις τιμές της παραμέτρου
- ασκήσεις που ζητούν την τιμή της παραμέτρου ώστε μια παραμετρική συνάρτηση να έχει συγκεκριμένο όριο κ.τ.λ.

Τέτοιες ασκήσεις αντιμετωπίζονται κατά περίπτωση.

Παραδείγματα 17 έως 24

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**1. Τα πρόσημα των παραστάσεων $\eta\mu x + x$ και $\eta\mu x - x$**

Η σχέση $|\eta\mu x| \leq |x|$ (1) που αναφέρθηκε παραπάνω με την παρατήρηση ότι **ισχύει ως ισότητα, μόνο για $x=0$** , είναι μια χρήσιμη και «πονηρή» σχέση.

Έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε τα πρόσημα των παραστάσεων $\eta\mu x + x$ και $\eta\mu x - x$, ως εξής:

Για κάθε $x \neq 0$ είναι $|\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow -|x| < \eta\mu x < |x|$ (2).

Έτσι για $x > 0$ (2) $\Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x \Leftrightarrow x + \eta\mu x > 0$ και $x - \eta\mu x > 0$

για $x < 0$ (2) $\Leftrightarrow x < \eta\mu x < -x \Leftrightarrow x + \eta\mu x < 0$ και $x - \eta\mu x < 0$

Άρα τελικά $\left\{ \begin{array}{l} x + \eta\mu x > 0, \text{ αν } x > 0 \\ x + \eta\mu x < 0, \text{ αν } x < 0 \\ x + \eta\mu x = 0, \text{ αν } x = 0 \end{array} \right.$ και $\left\{ \begin{array}{l} x - \eta\mu x > 0, \text{ αν } x > 0 \\ x - \eta\mu x < 0, \text{ αν } x < 0 \\ x - \eta\mu x = 0, \text{ αν } x = 0 \end{array} \right.$

Τα πρόσημα των παραστάσεων αυτών μπορεί να φανούν χρήσιμα σε πεδία ορισμού, στα όρια (κριτήριο παρεμβολής), αλλά και αργότερα στις παραγώγους (μονοτονία συνάρτησης).

2. Μηδενική επί φραγμένη

Φραγμένη ονομάζουμε κάθε συνάρτηση g για την οποία υπάρχει $M \geq 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $|g(x)| \leq M$, για κάθε $x \in D_g$, ενώ **μηδενική**, όπως ήδη έχουμε πει, κάθε συνάρτηση που έχει όριο 0.

Ισχύει ότι **αν μια συνάρτηση είναι γινόμενο μηδενικής επί φραγμένη, τότε είναι μηδενική** (δηλαδή έχει όριο μηδέν).

ΒΛΕΠΕ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ, ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Στα παρακάτω παραδείγματα ότι δίνεται με *πλάγια γραφή* αποτελεί τη σκέψη μας και δεν είναι απαραίτητο να γράφεται στη λύση της άσκησης.

1. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -1} (-2x^4 + x^3 - 3x + 1), \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^4, \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{2} \cdot x^2 - a)$$

α) Έστω $f(x) = -2x^4 + x^3 - 3x + 1$. Τότε $D_f = \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = (-2 \cdot (-1)^4 + (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 1) = -2 - 1 + 3 + 1 = 1.$$

β) Έστω $f(x) = (x-1)^4$. Τότε $D_f = \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = [\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)]^4 = (2-1)^4 = 1.$$

γ) Έστω $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^2 - a$. Τότε $D_f = \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt{2} \cdot 0^2 - a = -a.$$

2. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5x^2 + 2x - 3)^2 - (x^2 - 2x - 3)^2}{x^2 - 1}, \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{(x-3)^2},$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 5x + 6},$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x^2 + 2x - 3)^2 - (x^2 - 2x - 3)^2}{x^2 - 1},$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2},$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ με } f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^3} - \frac{x+3}{(x^2-1) \cdot (x-1)^2}$$

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5x^2 + 2x - 3)^2 - (x^2 - 2x - 3)^2}{x^2 - 1}$$

$$\text{Έστω } f(x) = \frac{(5x^2 + 2x - 3)^2 - (x^2 - 2x - 3)^2}{x^2 - 1}. \text{ Τότε } D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$$

Όριο παρονομαστή: $-1 \neq 0$. Άρα για να βρούμε το όριο θέτουμε όπου x το 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{(5 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 3)^2 - (0^2 - 2 \cdot 0 - 3)^2}{0^2 - 1} = \dots = 0.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{(x-3)^2}$$

$$\text{Έστω } f(x) = \frac{x+2}{(x-3)^2}. \text{ Τότε } D_f = \mathbb{R} - \{3\}.$$

Όριο παρονομαστή 0 και όριο αριθμητή $5 \neq 0$. Άρα παίρνουμε γινόμενο ορίων. Δεν χρειάζεται να κατασκευάσουμε πίνακα προσήμων του $(x-3)^2$ γιατί αυτό είναι πάντα θετικό σε μια γειτονιά του 3.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x+2) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = (3+2) \cdot (+\infty) = +\infty,$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0$ με $(x-3)^2 > 0$ για $x \neq 3$.

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

Έστω $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 5x + 6}$. Τότε $D_f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$.

Όριο παρονομαστή 0 και όριο αριθμητή $4 \neq 0$. Άρα παίρνουμε γινόμενο ορίων αφού πρώτα αναζητήσουμε τα πρόσημα του $x^2 - 5x + 6$ σε μια γειτονιά του 2.

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων του $x^2 - 5x + 6$:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	-	+	

Οι «διπλές γραμμές» στον πίνακα δηλώνουν ότι το x δεν μπορεί να πάρει τις τιμές 2 και 3.

Παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε πλευρικά όρια στο 2

αφού το $x^2 - 5x + 6$ αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά του 2. Έτσι:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - x + 2) \cdot \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = (2^2 - 2 + 2) \cdot (+\infty) = 4 \cdot (+\infty) = +\infty$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 5x + 6) = 0$ με $x^2 - 5x + 6 > 0$ για $x < 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - x + 2) \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = (2^2 - 2 + 2) \cdot (-\infty) = 4 \cdot (-\infty) = -\infty$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 5x + 6) = 0$ με $x^2 - 5x + 6 < 0$ για $2 < x < 3$.

Αφού $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x^2 + 2x - 3)^2 - (x^2 - 2x - 3)^2}{x^2 - 1}$$

Έστω $f(x) = \frac{(5x^2 + 2x - 3)^2 - (x^2 - 2x - 3)^2}{x^2 - 1}$. Τότε $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Όριο παρονομαστή 0 και όριο αριθμητή 0. Άρα α.μ. $\frac{0}{0}$. Παραγοντοποιούμε αριθμητή

και παρονομαστή με στόχο να προκύψει κοινός παράγοντας το $x-1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(5x^2 + 2x - 3) + (x^2 - 2x - 3)] \cdot [(5x^2 + 2x - 3) - (x^2 - 2x - 3)]}{(x-1) \cdot (x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(6x^2 - 6) \cdot (4x^2 + 4x)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6 \cdot (x^2 - 1) \cdot 4x \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{24x \cdot \cancel{(x-1)} \cdot \cancel{(x+1)} \cdot (x+1)}{\cancel{(x-1)} \cdot \cancel{(x+1)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} [24x \cdot (x+1)] = 24 \cdot 1 \cdot (1+1) = 48. \end{aligned}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2}$$

Έστω $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2}$. Τότε $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Όριο παρονομαστή 0 και όριο αριθμητή 0. Άρα α.μ. $\frac{0}{0}$. Παραγοντοποιούμε αριθμητή

και παρονομαστή με στόχο να προκύψει κοινός παράγοντας το $x-1$. Οι ρίζες του αριθμητή είναι οι 1 και 2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x-1}.$$

Όριο παρονομαστή 0 και όριο αριθμητή $-1 \neq 0$. Άρα παίρνουμε γινόμενο ορίων αφού πρώτα αναζητήσουμε τα πρόσημα του $x-1$ σε μια γειτονιά του 1.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
x-1	-		+

Παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε πλευρικά όρια στο 1 αφού το $x-1$ αλλάζει πρόσημα αριστερά και δεξιά του 1. Έτσι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-2) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = (1-2) \cdot (-\infty) = -1 \cdot (-\infty) = +\infty$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$ με $x-1 < 0$ για $x < 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = (1-2) \cdot (+\infty) = -1 \cdot (+\infty) = -\infty$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$ με $x-1 > 0$ για $x > 1$.

Αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ με } f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^3} - \frac{x+3}{(x^2-1) \cdot (x-1)^2}.$$

$$\text{Είναι } f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^3} - \frac{x+3}{(x+1) \cdot (x-1)^3} = \frac{(x+1)^2 - (x+3)}{(x+1) \cdot (x-1)^3}. \text{ Είναι } D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$$

Όριο παρονομαστή 0 και όριο αριθμητή 0. Άρα α.μ. $\frac{0}{0}$. Παραγοντοποιούμε αριθμητή

και παρονομαστή με στόχο να προκύψει κοινός παράγοντας το $x-1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 1 - x - 3}{(x+1) \cdot (x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x+1) \cdot (x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+2)}{(x+1) \cdot (x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{(x+1) \cdot (x-1)^2}$$

Όριο παρονομαστή 0 και όριο αριθμητή $2 \neq 0$. Παίρνουμε γινόμενο ορίων. Δεν χρειάζεται να κατασκευάσουμε πίνακα προσημών του $(x-1)^2$ γιατί αυτό είναι πάντα θετικό σε μια γειτονιά του 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1+2}{1+1} \cdot (+\infty) = \frac{3}{2} \cdot (+\infty) = +\infty.$$

3. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+3},$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2},$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x+1},$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}+2}{x-1},$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{2\sqrt{x}-\sqrt{5x-1}},$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x+2}+x-4}$$

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+3}$

Έστω $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+3}$. Τότε $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x+2 \geq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \geq -2 \\ x \neq -3 \end{matrix} \right\} = [-2, +\infty).$

Όριο παρονομαστή $\neq 0$. Άρα παίρνουμε το όριο απ' ευθείας (πηλίκο ορίων)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+2}-1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x+3)} = \frac{\sqrt{1+2}-1}{1+3} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

Έστω $f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

Τότε $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ \sqrt{x}-2 \neq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \geq 0 \\ x > 2 \end{matrix} \right\} = (2, +\infty).$

Επειδή το πεδίο ορισμού περιέχει γειτονιά του 2 μόνο από δεξιά, καταλαβαίνουμε ότι όταν λέμε εδώ όριο στο 2, εννοούμε στην ουσία το πλευρικό όριο στο 2^+ .

Όριο παρονομαστή 0 και όριο αριθμητή $2-\sqrt{2} \neq 0$. Άρα παίρνουμε γινόμενο ορίων.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x-\sqrt{x}) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x}-2} = (2-\sqrt{2}) \cdot (+\infty) = +\infty$$

γιατί $2-\sqrt{2} > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x}-2 = 0$ με $\sqrt{x}-2 > 0$ για $x > 2$.

γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x+1}$

Έστω $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x+1}$. Τότε $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x^2-x-2 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{matrix} \right\}$ Το τριώνυμο x^2-x-2 έχει ρίζες

-1 και 2 και γίνεται ομόσημο του α του ή μηδέν αν το x βρίσκεται εκτός του διαστήματος των ριζών ή πάνω στις ρίζες. Έτσι:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \leq -1 \text{ ή } x \geq 2 \\ x \neq -1 \end{matrix} \right\} = (-\infty, -1) \cup [2, +\infty).$$

Λόγω του πεδίου ορισμού το όριο στο -1 είναι στην ουσία όριο στο -1^- .

Όριο παρονομαστή 0 και όριο αριθμητή 0 . Άρα α.μ. $\frac{0}{0}$. Θα πολλαπλασιάσουμε και αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt{x^2 - x - 2}$ αφού θεωρώντας το $\sqrt{x^2 - x - 2}$ ως $\sqrt{x^2 - x - 2} + 0$ η συζυγής παράστασή της είναι η $\sqrt{x^2 - x - 2} - 0$, δηλαδή ο εαυτός της.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2} \cdot \sqrt{x^2 - x - 2}}{(x+1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2})^2}{(x+1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{(x+1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)} \cdot (x-2)}{\cancel{(x+1)} \cdot \sqrt{x^2 - x - 2}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - x - 2}}.\end{aligned}$$

Όριο παρονομαστή 0 και όριο αριθμητή $-3 \neq 0$. Άρα παίρνουμε γινόμενο ορίων.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x-2) \cdot \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = (-1-2) \cdot (+\infty) = -3 \cdot (+\infty) = -\infty$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2 - x - 2} = 0$ με $\sqrt{x^2 - x - 2} > 0$ για $x < -1$.

δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}+2}{x-1}$

Έστω $f(x) = \frac{\sqrt{5-x}+2}{x-1}$. Τότε $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} 5-x \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \leq 5 \\ x \neq 1 \end{matrix} \right\} = (-\infty, 1) \cup (1, 5]$.

Όριο παρονομαστή 0 και όριο αριθμητή $4 \neq 0$. Άρα παίρνουμε γινόμενο ορίων αφού πρώτα αναζητήσουμε τα πρόσημα του $x-1$ σε μια γειτονιά του 1 .

x	$-\infty$	1	5
$x-1$	$-$		$+$

Παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε πλευρικά όρια στο 1 αφού το $x-1$ αλλάζει πρόσημα αριστερά και δεξιά του 1 . Έτσι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\sqrt{5-x}+2) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = (\sqrt{5-1}+2) \cdot (-\infty) = 4 \cdot (-\infty) = -\infty$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$ με $x-1 < 0$ για $x < 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{5-x}+2) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = (\sqrt{5-1}+2) \cdot (+\infty) = 4 \cdot (+\infty) = +\infty$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$ με $x-1 > 0$ για $1 < x < 5$.

Αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

ε) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{2\sqrt{x}-\sqrt{5x-1}}$

Έστω $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{2\sqrt{x}-\sqrt{5x-1}}$. Τότε

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x+3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 5x-1 \geq 0 \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{5x-1} \neq 0 \end{array} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x \geq -3 \\ x \geq 0 \\ x \geq \frac{1}{5} \\ 2\sqrt{x} \neq \sqrt{5x-1} \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x \geq \frac{1}{5} \\ (2\sqrt{x})^2 \neq (\sqrt{5x-1})^2 \end{array} \right\} = \dots = \left[\frac{1}{5}, 1 \right) \cup (1, +\infty).$$

Όριο παρονομαστή 0 και όριο αριθμητή 0. Άρα α.μ. $\frac{0}{0}$. Πολλαπλασιάζουμε και αριθμητή και παρονομαστή με τις συζυγείς παραστάσεις και των δύο (αφού και οι δύο ευθύνονται για την α.μ.)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2) \cdot (\sqrt{x+3}+2) \cdot (2\sqrt{x} + \sqrt{5x-1})}{(2\sqrt{x} - \sqrt{5x-1}) \cdot (\sqrt{x+3}+2) \cdot (2\sqrt{x} + \sqrt{5x-1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(\sqrt{x+3})^2 - 2^2] \cdot (2\sqrt{x} + \sqrt{5x-1})}{[(2\sqrt{x})^2 - (\sqrt{5x-1})^2] \cdot (\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3-4) \cdot (2\sqrt{x} + \sqrt{5x-1})}{(4x-5x+1) \cdot (\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (2\sqrt{x} + \sqrt{5x-1})}{(-x+1) \cdot (\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[-\frac{(x-1) \cdot (2\sqrt{x} + \sqrt{5x-1})}{(x-1) \cdot (\sqrt{x+3}+2)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[-\frac{2\sqrt{x} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+3}+2} \right].$$

Επειδή το όριο του παρονομαστή είναι $\neq 0$, παίρνουμε πηλίκο ορίων.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{\lim_{x \rightarrow 1} (2\sqrt{x} + \sqrt{5x-1})}{\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3}+2)} = \frac{2\sqrt{1} + \sqrt{5 \cdot 1 - 1}}{\sqrt{1+3}+2} = \frac{4}{4} = 1.$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{\sqrt{x+2} + x - 4}$$

$$\text{Έστω } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{\sqrt{x+2} + x - 4}. \text{ Τότε } D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \quad (1) \\ x+2 \geq 0 \quad (2) \\ \sqrt{x+2} + x - 4 \neq 0 \quad (3) \end{array} \right\}$$

(1): Επειδή το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει ρίζες 1 και 2 και θέλουμε να είναι ομόσημο του α του ή μηδέν, πρέπει $x \leq 1$ ή $x \geq 2$ **(1')**.

(2) $\Leftrightarrow x \geq -2$ **(2')**.

(3): Αντί για το διάφορο ($\neq$) θα λύσουμε την αντίστοιχη εξίσωση. Έτσι:

$$\sqrt{x+2} + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 4 - x \quad (4)$$

$$\text{Περιορισμός: } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2, 4]$$

$$\text{Τότε } (4) \Leftrightarrow (\sqrt{x+2})^2 = (4-x)^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 7.$$

Από αυτές η $x=7$ απορρίπτεται λόγω του περιορισμού. Άρα $(4) \Leftrightarrow x=2$.

Έτσι $(3) \Leftrightarrow x \neq 2$ **(3')**.

Από (1'), (2'), (3') έχουμε $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \leq 1 \text{ ή } x \geq 2 \\ x \geq -2 \\ x \neq 2 \end{matrix} \right\}$. Συναληθεύοντας έχουμε

$$D_f = [-2, 1] \cup (2, +\infty).$$

Λόγω του πεδίου ορισμού το όριο στο 2 είναι στην ουσία όριο στο 2^+ .

Όριο παρονομαστή 0 και όριο αριθμητή 0. Άρα α.μ. $\frac{0}{0}$. Θα πολλαπλασιάσουμε και

αριθμητή και παρονομαστή με $(\sqrt{x^2 - 3x + 2}) \cdot [\sqrt{x + 2} - (x - 4)]$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 2}) \cdot (\sqrt{x^2 - 3x + 2}) \cdot [\sqrt{x + 2} - (x - 4)]}{(\sqrt{x + 2} + x - 4) \cdot (\sqrt{x^2 - 3x + 2}) \cdot [\sqrt{x + 2} - (x - 4)]} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 2})^2 \cdot [\sqrt{x + 2} - (x - 4)]}{[\sqrt{x + 2}^2 - (x - 4)^2] \cdot (\sqrt{x^2 - 3x + 2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3x + 2) \cdot [\sqrt{x + 2} - (x - 4)]}{(x + 2 - x^2 + 8x - 16) \cdot (\sqrt{x^2 - 3x + 2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot [\sqrt{x + 2} - (x - 4)]}{(-x^2 + 9x - 14) \cdot (\sqrt{x^2 - 3x + 2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1) \cdot \cancel{(x - 2)} \cdot [\sqrt{x + 2} - (x - 4)]}{-\cancel{(x - 2)} \cdot (x - 7) \cdot (\sqrt{x^2 - 3x + 2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[-\frac{(x - 1) \cdot [\sqrt{x + 2} - (x - 4)]}{(x - 7) \cdot (\sqrt{x^2 - 3x + 2})} \right] \end{aligned}$$

Είναι όριο παρονομαστή 0 και όριο αριθμητή $-4 \neq 0$, οπότε παίρνουμε γινόμενο ορίων.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1) \cdot [\sqrt{x + 2} - (x - 4)]}{x - 7} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} = -\frac{(2 - 1) \cdot [\sqrt{2 + 2} - (2 - 4)]}{2 - 7} \cdot (+\infty) = \\ &= \frac{4}{5} \cdot (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0$ με $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 0$ για $x \in (2, 7)$.

4. Να υπολογιστούν τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$,

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

Έστω $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$, τότε $D_f = [0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Όριο παρονομαστή $1 \neq 0$. Άρα παίρνουμε πηλίκο ορίων.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt[3]{x} - 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x} - \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 1} = \frac{\sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 2} x} - 1}{2 - 1} = \sqrt[3]{2} - 1.$$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

Έστω $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$, τότε $D_f = [0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Όριο παρονομαστή 0 και όριο αριθμητή 0. Άρα εφαρμόζουμε την ταυτότητα

$$a - \beta = \frac{a^3 - \beta^3}{a^2 + a \cdot \beta + \beta^2} \text{ με } a = \sqrt[3]{x} \text{ και } \beta = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 1^3}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \cdot 1 + 1^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1}) \cdot ((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{(\sqrt[3]{1})^2 + \sqrt[3]{1} + 1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

5. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{x-1}, & \text{αν } x < 1 \\ 3x, & \text{αν } x > 8 \end{cases},$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ με } f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } |x| < 2 \\ 5, & \text{αν } |x| \geq 2 \end{cases},$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}, & \text{αν } x \in (0, 1) \\ 2, & \text{αν } x = 1 \\ -\frac{x^3 - 3x + 2}{(x^3 - 1)^3}, & \text{αν } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{x-1}, & \text{αν } x < 1 \\ 3x, & \text{αν } x > 8 \end{cases}$$

$$D_f = (-\infty, 1) \cup (8, +\infty)$$

Παρατηρούμε ότι το όριο στο 1 της f ορίζεται μόνο από αριστερά στο 1, όπου η f έχει

έναν τύπο, τον $\frac{3x+1}{x-1}$. Άρα:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x+1}{x-1} \overset{\substack{\text{όριο αριθμ. } 4 \neq 0 \\ \text{όριο παρον. } 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x+1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = (3 \cdot 1 + 1) \cdot (-\infty) = \\ &= 4 \cdot (-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$ με $x-1 < 0$ (βλέπε πίνακα προσήμων).

x	$-\infty$	1
x-1		-

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ με } f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } |x| < 2 \\ 5, & \text{αν } |x| \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 2x, & \text{αν } -2 < x < 2 \\ 5, & \text{αν } x \leq -2 \text{ ή } x \geq 2 \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R}.$$

Αφού ζητάμε το όριο στο 1 αρκεί να περιορίσουμε τη μελέτη μας σε μια κατάλληλη γειτονιά του 1, την $(-2, 2)$, όπου η συνάρτηση έχει ένα μόνο τύπο (τον $2x$). Έτσι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2 \cdot 1 = 2.$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}, & \text{αν } x \in (0, 1) \\ 2, & \text{αν } x = 1 \\ -\frac{x^3 - 3x + 2}{(x^3 - 1)^3}, & \text{αν } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

$$D_f = (0, 1) \cup \{1\} \cup (1, +\infty) = (0, +\infty).$$

Αφού η f αλλάζει τύπο σε μια γειτονιά του 1, αριστερά και δεξιά του 1, χρειαζόμαστε πλευρικά όρια στο 1. Η τιμή της f στο 1 (που είναι 2) δεν παίζει κανένα ρόλο κατά την αναζήτηση του ορίου. Έτσι:

Όριο στο 1^-

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} \overset{\substack{\text{όριο αριθμ. } 2 \neq 0 \\ \text{όριο παρυν. } 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2x + 3) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x - 1} = (1^2 - 2 \cdot 1 + 3) \cdot (-\infty) = 2 \cdot (-\infty) = -\infty$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0$ με $x - 1 < 0$ (βλέπε πίνακα προσήμων).

x	$-\infty$	1
x-1		-

Όριο στο 1^+

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 3x + 2}{(x^3 - 1)^3}$$

Παρατηρούμε ότι όριο παρνομαστή είναι 0 και όριο αριθμητή επίσης 0.

Παραγοντοποιούμε τους όρους αυτούς με στόχο να προκύψει κοινός παράγοντας $(x-1)$.

- $x^3 - 3x + 2$: ακέραια ρίζα το 1. Θα το παραγοντοποιήσουμε με σχήμα Horner:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα } x^3 - 3x + 2 = (x-1) \cdot (x^2 + x - 2)$$

Παραγοντοποιώντας το $x^2 + x - 2$ έχουμε: $x^2 + x - 2 = (x-1) \cdot (x+2)$

$$\text{Άρα } x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 \cdot (x+2).$$

$$\bullet \quad (x^3 - 1)^3 = [(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)]^3 = (x-1)^3 \cdot (x^2 + x + 1)^3$$

$$\begin{aligned} \text{Έτσι: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}^2 \cdot (x+2)}{(x-1)^3 \cdot (x^2 + x + 1)^3} = - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)}{(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)^3} \overset{\substack{\text{όριο αριθμ. } 3 \neq 0 \\ \text{όριο παρυν. } 0}}{=} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)}{(x^2 + x + 1)^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)} = - \frac{1+2}{(1^2 + 1 + 1)^3} \cdot (+\infty) = - \frac{3}{27} \cdot (+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0$ με $x - 1 > 0$ (βλέπε πίνακα προσήμων).

x	1	$+\infty$
x-1		+

Αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.

6. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \cdot |x| + |x-1|}{\sqrt{x}}, \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-3}, \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \left[3x + \frac{\sqrt{(x-1)^2 \cdot (x^2 + 3)}}{x-1} \right]$$

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \cdot |x| + |x-1|}{\sqrt{x}}$$

Έστω $f(x) = \frac{3 \cdot |x| + |x-1|}{\sqrt{x}}$. Τότε $D_f = (0, +\infty)$.

Όριο παρονομαστή $1 \neq 0$, οπότε παίρνουμε πηλίκο ορίων.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3 \cdot |x| + |x-1|)}{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3 \cdot |x|) + \lim_{x \rightarrow 1} |x-1|}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} x}} = \frac{3 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)}{\sqrt{1}} = \\ &= 3 \cdot |1| + |1-1| = 3. \end{aligned}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 3} \left| \frac{x+2}{x-3} \right|$$

Έστω $f(x) = \left| \frac{x+2}{x-3} \right| = \frac{|x+2|}{|x-3|}$. Τότε $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$.

Όριο παρονομαστή 0 και όριο αριθμητή $5 \neq 0$. Παίρνουμε γινόμενο ορίων παρατηρώντας ότι $|x-3| > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} |x+2| \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x-3|} = |3+2| \cdot (+\infty) = 5 \cdot (+\infty) = +\infty$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow 3} |x-3| = 0$ με $|x-3| > 0$ για $x \neq 3$.

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \left[3x + \frac{\sqrt{(x-1)^2 \cdot (x^2+3)}}{x-1} \right]$$

$$\text{Έστω } f(x) = 3x + \frac{\sqrt{(x-1)^2 \cdot (x^2+3)}}{x-1} = 3x + \frac{\sqrt{(x-1)^2} \cdot \sqrt{x^2+3}}{x-1} = 3x + \frac{|x-1| \cdot \sqrt{x^2+3}}{x-1}.$$

Τότε $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Επειδή το κλάσμα $\frac{|x-1| \cdot \sqrt{x^2+3}}{x-1}$ έχει όριο παρονομαστή και αριθμητή ίσο με 0, θα

πρέπει να απλοποιηθεί από αριθμητή και παρονομαστή ο παράγοντας $x-1$, πράγμα που θα γίνει μόνο αν "βγει" η απόλυτη τιμή. Έτσι κατασκευάζουμε, εντός του πεδίου ορισμού, τον πίνακα προσήμων του $x-1$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
x-1	-		+

Παρατηρούμε ότι το $x-1$ αλλάζει πρόσημο σε μια γειτονιά του 1, αριστερά και δεξιά του 1. Άρα για να «βγει» το απόλυτο χρειαζόμαστε πλευρικά όρια στο 1. Έτσι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[3x + \frac{|x-1| \cdot \sqrt{x^2+3}}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[3x + \frac{-(x-1) \cdot \sqrt{x^2+3}}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x - \sqrt{x^2+3}) = \\ &= 3 \cdot 1 - \sqrt{1^2+3} = 1 \end{aligned}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[3x + \frac{|x-1| \cdot \sqrt{x^2+3}}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[3x + \frac{(x-1) \cdot \sqrt{x^2+3}}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + \sqrt{x^2+3}) =$$

$$= 3 \cdot 1 + \sqrt{1^2+3} = 5$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

7. Να υπολογιστούν τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (x \cdot \eta\mu x),$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x},$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 4x}{x^2},$

δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2},$

ε) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x},$

ζ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(x-3)}{(x-3)^3}$

α) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (x \cdot \eta\mu x)$

Έστω $f(x) = x \cdot \eta\mu x$. Τότε $D_f = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} x \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \eta\mu x = \frac{\pi}{3} \cdot \eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x}$

Έστω $f(x) = \frac{x}{\eta\mu x}$. Τότε $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} / \eta\mu x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.

Το όριο στο 0 έχει νόημα γιατί υπάρχει γειτονιά του 0 μέσα στο πεδίο ορισμού π.χ. η $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Επειδή τα όρια παρονομαστική και αριθμητική είναι 0 θα

προσπαθήσουμε να αλλάξουμε τη μορφή της συνάρτησης (τέχνασμα). Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{1}{1} = 1 \quad (\text{Θυμηθείτε ότι από ιδιότητα είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1).$$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 4x}{x^2}$

Έστω $f(x) = \frac{\eta\mu^2 4x}{x^2}$. Τότε $D_f = \mathbb{R}^*$.

Επειδή τα όρια παρονομαστική και αριθμητική είναι 0 θα προσπαθήσουμε να αλλάξουμε τη μορφή της συνάρτησης (τέχνασμα). Θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε

παράσταση μορφής $\frac{\eta\mu(ax)}{ax}$ και συγκεκριμένα εδώ την $\frac{\eta\mu 4x}{4x}$ η οποία (θα δείξουμε ότι)

έχει στο 0 όριο 1 (όπως αναφέραμε στη μεθοδολογία). Έτσι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu 4x}{x} \right)^2 \overset{\substack{\text{πολ/ζούμε} \\ \text{τους όρους} \\ \text{του κλάσματος} \\ \text{με 4}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 \cdot \eta\mu 4x}{4 \cdot x} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[16 \cdot \left(\frac{\eta\mu 4x}{4 \cdot x} \right)^2 \right] = 16 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu 4x}{4 \cdot x} \right)^2 =$$

$$= 16 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{4 \cdot x} \right)^2 \quad (1).$$

Για τον προσδιορισμό του $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{4 \cdot x}$ εφαρμόζουμε τη θεωρία της σύνθετης

συνάρτησης. Έτσι θέτοντας $u=4x$ έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} (4x) = 4 \cdot 0 = 0$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{4 \cdot x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1 \quad (2).$$

Άρα από (1) και (2) έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 16 \cdot 1^2 = 16.$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$$

Έστω $f(x) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$. Τότε $D_f = \mathbb{R}^*$.

Επειδή τα όρια παρονομαστή και αριθμητή είναι 0 θα προσπαθήσουμε να αλλάξουμε τη μορφή της συνάρτησης (τέχνασμα).

Από τύπο της τριγωνομετρίας γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu x = 1 - 2\eta\mu^2 \frac{x}{2}$. Έτσι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2\eta\mu^2 \frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu \frac{x}{2}}{x} \right)^2 \overset{\substack{\text{δαιρούμε} \\ \text{τους όρους} \\ \text{του κλάσματος} \\ \text{με } 2}}{=} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\eta\mu \frac{x}{2}}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 =$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}} \right)^2 = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\eta\mu \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \left(\frac{\eta\mu \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \quad (1).$$

Για το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$ θέτουμε όπου $\frac{x}{2} = u$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1 \quad (2).$$

Από (1) και (2) έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$.

$$\varepsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x}$$

Έστω $f(x) = \frac{x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x}$. Τότε $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \neq 0 \\ \eta\mu x \neq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \neq 0 \\ x \neq k\pi \end{matrix} \right\} = \mathbb{R}^* - \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}.$

$$\text{1ος τρόπος: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \eta\mu \frac{1}{x})}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{0}{1} = 0, \text{ καθώς}$$

και το όριο του αριθμητή και το όριο του παρονομαστή είναι βασικά όρια.

2ος τρόπος: Θα εργαστούμε με την εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής, ελπίζοντας η συνάρτηση να έχει όριο 0 (να είναι όπως λέμε «μηδενική συνάρτηση»). Έτσι:

$$|f(x)| = \left| \frac{x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x} \right| = \frac{|x^2| \cdot |\eta\mu \frac{1}{x}|}{|\eta\mu x|} \leq \frac{|x^2|}{|\eta\mu x|} = \left| \frac{x^2}{\eta\mu x} \right| \quad (1), \text{ γιατί } |\eta\mu \frac{1}{x}| \leq 1.$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^2}{\eta\mu x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x}{\eta\mu x} \right| \cdot \lim_{x \rightarrow 0} |x| = \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x} \right| \cdot \lim_{x \rightarrow 0} |x| = |1| \cdot |0| = 0 \quad (2), \text{ γιατί στο } \beta)$$

ερώτημα δείξαμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x} = 1.$

Από (1) έχουμε $|f(x)| \leq \left| \frac{x^2}{\eta\mu x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{x^2}{\eta\mu x} \right| \leq f(x) \leq \left| \frac{x^2}{\eta\mu x} \right|$ και αφού από (2) είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^2}{\eta\mu x} \right| = 0, \text{ από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(x-3)}{(x-3)^3}$$

Έστω $f(x) = \frac{\eta\mu(x-3)}{(x-3)^3}$. Τότε $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$.

Θέτοντας $u = x-3$ είναι $\lim_{x \rightarrow 3} u = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 3-3 = 0$ οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u^3} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u^2} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ γιατί } \lim_{u \rightarrow 0} u^2 = 0 \text{ με } u^2 > 0 \text{ για } u \neq 0.$$

8. Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \ln x}{\eta\mu x}$$

Έστω $f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{\eta\mu x}$. Τότε

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x > 0 \\ \eta\mu x \neq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x > 0 \\ x \neq k\pi \end{matrix} \right\} = (0, +\infty) - \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα λόγω του πεδίου ορισμού το όριο στο 0 είναι στην ουσία όριο στο 0^+ .

Όριο παρονομαστή 0 και όριο αριθμητή $0 \cdot (-\infty)$ δηλαδή α.μ. Άρα το όριο θα προκύψει με κάποιο τέχνασμα.

Έχουμε ήδη αποδείξει, βλέπε παράδειγμα 7β) ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta \mu x} = 1$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta \mu x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = 1 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

9. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x^2 - 1), \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - a^{11} + 2x)^{20}, a \in \mathbb{R},$$

$$\gamma) \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - a^{11} + 2x)^{20}, x \in \mathbb{R}$$

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x^2 - 1)$

Έστω $f(x) = -2x^3 + x^2 - 1$. Τότε $D_f = \mathbb{R}$.

Παίρνουμε όριο μεγιστοβάθμιου όρου.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -2 \cdot (-\infty) = +\infty.$$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - a^{11} + 2x)^{20}$

Έστω $f(x) = (1 - a^{11} + 2x)^{20}$. Τότε $D_f = \mathbb{R}$.

Αν αναπτύξουμε την ταυτότητα $(1 - a^{11} + 2x)^{20}$ που περιέχεται στον τύπο της f , τότε θα προκύψει ένα πολυώνυμο ως προς x με μεγιστοβάθμιο όρο τον $(2x)^{20} = 2^{20} \cdot x^{20}$ (μια που το a^{11} δεν επηρεάζει τον βαθμό του πολυωνύμου, αφού το a θεωρείται σταθερό).

Έτσι: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2^{20} \cdot x^{20}) = 2^{20} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{20} = 2^{20} \cdot (+\infty) = +\infty.$

γ) $\lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - a^{11} + 2x)^{20}$

Τώρα η συνάρτηση θεωρείται ως συνάρτηση με μεταβλητή το a (αφού $a \rightarrow -\infty$) και το x θεωρείται σταθερό. Έτσι:

Έστω $f(a) = (1 - a^{11} + 2x)^{20}$. Τότε $D_f = \mathbb{R}$.

Αναπτύσσοντας την ταυτότητα $(1 - a^{11} + 2x)^{20}$, ο μεγιστοβάθμιος όρος θα είναι ο $(-a^{11})^{20}$, δηλαδή ο a^{220} . Έτσι:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} f(a) = \lim_{a \rightarrow -\infty} a^{220} = +\infty.$$

10. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8},$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 3},$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - \frac{x^3}{x + 1} \right),$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^4 + (x+2)^4 + \dots + (x+10)^4}{x^4 + 10^4}$$

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$$

Έστω $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$. Τότε $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^3 + 8 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x^3 \neq -8\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -\sqrt[3]{8}\} =$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq -2\} = \mathbb{R} - \{-2\}.$$

Παίρνουμε όριο πηλίκου μεγιστοβάθμιων όρων.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 3}$$

Έστω $f(x) = \frac{-x^4 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 3}$. Τότε $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x + 3 \neq 0\} = \mathbb{R}$, καθώς το τριώνυμο

$x^2 - 2x + 3$ έχει αρνητική διακρίνουσα.

Παίρνουμε όριο πηλίκου μεγιστοβάθμιων όρων.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^4}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -(+\infty) = -\infty.$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - \frac{x^3}{x + 1} \right)$$

Έστω $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} - \frac{x^3}{x + 1}$. Τότε $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

Αν πάρουμε διαφορά ορίων τότε βγαίνει α.μ. $(+\infty) - (+\infty)$. Γενικά είναι πιο ασφαλές, πριν πάρουμε το όριο, για να αποφύγουμε πιθανές απροσδιοριστίες (όπως εδώ), να κάνουμε ομώνυμα, οπότε θα έχουμε το όριο μιας ρητής συνάρτησης, που υπολογίζεται απλά παίρνοντας το όριο του πηλίκου των μεγιστοβάθμιων όρων αριθμητή και παρονομαστή.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} - \frac{x^3}{x + 1} = \frac{(x^2 - 1) \cdot (x + 1) - x^4}{x \cdot (x + 1)} = \dots = \frac{-x^4 + x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 + x}.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^4 + x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 + x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4}{x^2} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = -(+\infty) = -\infty.$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^4 + (x+2)^4 + \dots + (x+10)^4}{x^4 + 10^4}$$

Έστω $f(x) = \frac{(x+1)^4 + (x+2)^4 + \dots + (x+10)^4}{x^4 + 10^4}$. Τότε $D_f = \mathbb{R}$.

Το ανάπτυγμα κάθε ταυτότητας του αριθμητή έχει μεγιστοβάθμιο όρο x^4 . Άρα ο μεγιστοβάθμιος όρος του αριθμητή είναι $x^4 + x^4 + \dots + x^4 = 10 \cdot x^4$ (αφού έχουμε 10 ταυτότητες). Έτσι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^4}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 10 = 10.$$

11. Να υπολογιστούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 4} + 2x - 1)$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x-3}},$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}+1},$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-\sqrt{x^2+1}},$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-\sqrt{x^2+1}},$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}},$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+5x+2} - 2x)$$

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 4} + 2x - 1)$ Έστω $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4} + 2x - 1$. Τότε $D_f = \mathbb{R}$.

Δοκιμάζουμε να υπολογίσουμε το όριο με ιδιότητες.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 4} + \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 4)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} x} = +\infty + (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x-3}}$$

Έστω $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x-3}}$. Τότε $D_f = (3, +\infty)$.

Όριο παρονομαστή $+\infty$ και αριθμητή $+\infty$. Άρα έχουμε α.μ. $\frac{+\infty}{+\infty}$. Εδώ ο απλούστερος

τρόπος για να «άρουμε» την απροσδιοριστία είναι να πολλαπλασιάσουμε και αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή, που είναι ο εαυτός του (γιατί θεωρούμε το $\sqrt{x-3}$ ως $\sqrt{x-3} + 0$ με συζυγή $\sqrt{x-3} - 0$). Έτσι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-3) \cdot \sqrt{x-3}}{(\sqrt{x-3})^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{(x-3)} \cdot \sqrt{x-3}}{\cancel{x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-3} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3)} = \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} x} = +\infty. \end{aligned}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

Έστω $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$. Τότε $D_f = \mathbb{R}$ γιατί $x^2+1 > 0$ και $\sqrt{x^2+1}+1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δοκιμάζοντας να υπολογίσουμε το όριο απ' ευθείας με εφαρμογή ιδιοτήτων,

καταλήγουμε σε α.μ. $\frac{\infty}{\infty}$. Στη συνέχεια δοκιμάζουμε τη μέθοδο του κοινού παράγοντα

(τη μεγαλύτερη δύναμη του x από αριθμητή και παρονομαστή):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &\stackrel{\text{εκλεγουμε } x \in (-\infty, 0)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{|x| \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} \stackrel{(*)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{-x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{-\cancel{x} \cdot (\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot (1-\frac{1}{x^2})}{-(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot (1-\frac{1}{x^2})}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}} = (-\infty) \cdot \frac{1-0}{-\sqrt{1+0}+0} = (-\infty) \cdot (-1) = +\infty,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

(*) ΔΙΕΥΚΡΙΝΙΣΕΙΣ

Αρχικά βγάλαμε κοινό παράγοντα από το x^2-1 , το x^2 (θα μπορούσαμε να βγάλουμε

όποια παράσταση επιθυμούσαμε). Επειδή όμως προκύπτει $x^2 \cdot (1 - \frac{1}{x^2})$ που έχει

παρονομαστή x^2 , για να έχει νόημα το κλάσμα, επιλέγουμε το x να ανήκει σε κάποια γειτονιά του $-\infty$ που δεν περιέχει το 0, την $(-\infty, 0)$ (περιορίζουμε, όπως έχουμε δικαίωμα, τη μελέτη μας σε μια κατάλληλη γειτονιά του $-\infty$).

Η ίδια γειτονιά μας χρειάζεται στη συνέχεια για να μπορέσουμε να «βγάλουμε» την απόλυτη τιμή του $|x|$.

Αν και μπορούμε να μη γράφουμε τα διαστήματα στα οποία επιλέγουμε να ανήκει το x (μια που αυτά εννοούνται αφού έχουμε $x \rightarrow -\infty$), καλό είναι να τα αναφέρουμε προς αποφυγή παρεξηγήσεων.

Προσοχή χρειάζεται στο ότι το $|x|$ μεταφράζεται σε x όταν $x \rightarrow +\infty$, ενώ σε $-x$ όταν $x \rightarrow -\infty$.

Στη συνέχεια δεν θα δοθούν ξανά διευκρινίσεις για το ίδιο θέμα.

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{'Εστω } f(x) = \frac{x}{x - \sqrt{x^2 + 1}}. \text{ Τότε } D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x^2 + 1 \geq 0 \quad (1) \\ x - \sqrt{x^2 + 1} \neq 0 \quad (2) \end{array} \right\}$$

Η (1) είναι αληθής.

$$\text{Αντί της (2) θα λύσουμε την εξίσωση } x - \sqrt{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = x \quad (3)$$

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ: $x \geq 0$

$$\text{Τότε } (3) \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 1})^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = x^2 \Leftrightarrow 1 = 0, \text{ αδύνατη. Άρα η (3) δεν αληθεύει}$$

για καμία τιμή του x , οπότε η (2) είναι αληθής. Έτσι $D_f = \mathbb{R}$.

Αν πάρουμε πηλίκο ορίων (ιδιότητες), καταλήγουμε σε α.μ. Δοκιμάζουμε με κοινό παράγοντα.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) & \stackrel{\text{εκλέγουμε } x \in (-\infty, 0)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x - \sqrt{x^2 \cdot (1 + \frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x - |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x + x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot (1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

Έστω $f(x) = \frac{x}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$. Επειδή η συνάρτηση είναι ίδια με αυτήν του προηγούμενου

ερωτήματος είναι $D_f = \mathbb{R}$.

Ακολουθώντας την ίδια πορεία με αυτήν του προηγούμενου ερωτήματος, βγάζοντας κοινό παράγοντα έχουμε ως διαφορά ότι εκλέγουμε $x \in (0, +\infty)$ οπότε $|x| = x$. Τότε όμως καταλήγουμε σε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x - |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x - x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot (1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{1 - \sqrt{1 + 0}} = \frac{1}{0} \text{ που είναι α.μ.} \end{aligned}$$

Έτσι δεν γράφουμε τίποτα από αυτά στη λύση και ξεκινάμε από την αρχική μορφή της f με συζυγή παράσταση.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})}{(x - \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})}{x^2 - (\sqrt{x^2 + 1})^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})}{x^2 - (x^2 + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})}{-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 - x \cdot \sqrt{x^2 + 1}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) - \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) - \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2} = -\infty - (+\infty) \cdot (+\infty) = \\ &= -\infty - (+\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$$

Έστω $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$. Τότε

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x^2 + 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \neq 0 \end{array} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x \geq -1 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x+1} \neq \sqrt{x} \quad (1) \end{array} \right\}.$$

Αντί της (1) λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση: $\sqrt{x+1} = \sqrt{x} \quad (2)$

$$\text{ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$$

Τότε $(2) \Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^2 = (\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow x+1 = x \Leftrightarrow 1 = 0$, αδύνατη. Άρα η (1) είναι αληθής.

$$\text{Έτσι: } D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} = [0, +\infty).$$

Είναι προφανές ότι το όριο δεν «βγαίνει» απ' ευθείας με εφαρμογή ιδιοτήτων.

Δοκιμάζουμε τον κοινό παράγοντα:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) & \stackrel{\substack{\text{εκλέγουμε} \\ x \in (0, +\infty)}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \cdot (1 + \frac{1}{x^2})}}{\sqrt{x \cdot (1 + \frac{1}{x})} - \sqrt{x}} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1)} = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\cancel{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι όριο παρονομαστή είναι 0 ενώ αριθμητή $+\infty \neq 0$. Άρα παίρνουμε γινόμενο ορίων, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1}.$$

Όμως για $x > 0$ είναι $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} > 1$ οπότε $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 > 0$. Έτσι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1} = +\infty$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1) = \sqrt{1 + 0} - 1 = 0 \text{ με } \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 > 0.$$

Άρα τελικά $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot \sqrt{1 + 0} \cdot (+\infty) = +\infty$

(*) Ισχύει ότι $\sqrt{x \cdot (1 + \frac{1}{x})} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ γιατί για $x > 0$ είναι $\sqrt{x} > 0$ και $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} > 0$.

η) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 5x + 2} - 2x)$

Έστω $f(x) = \sqrt{4x^2 + 5x + 2} - 2x$. Τότε $D_f = \mathbb{R}$ γιατί το τριώνυμο $4x^2 + 5x + 2$ έχει αρνητική διακρίνουσα, οπότε είναι ομόσημο του α του, δηλαδή θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δοκιμάζουμε το όριο απ' ευθείας και έχουμε τελικά:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = (+\infty) - (+\infty) = \text{α.μ.}$$

Δοκιμάζουμε με κοινό παράγοντα και έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) & = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 (4 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2})} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (|x| \cdot \sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2x) = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (\sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2) = (+\infty) \cdot (\sqrt{4 + 0 + 0} - 2) = \\ & = (+\infty) \cdot 0 = \text{α.μ.} \end{aligned}$$

Έτσι πολλαπλασιάζουμε και αριθμητή και παρονομαστή της αρχικής μορφής της f με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 5x + 2} - 2x) \cdot (\sqrt{4x^2 + 5x + 2} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + 5x + 2} + 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 5x + 2})^2 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2 + 5x + 2} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 5x + 2 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 5x + 2} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 2}{\sqrt{4x^2 + 5x + 2} + 2x} =$$

(επειδή το πηλίκο ορίων δίνει α.μ. $\frac{+\infty}{+\infty}$, βγάζουμε τώρα κοινό παράγοντα από αριθμητή και παρονομαστή την μεγαλύτερη δύναμη του x σε κάθε όρο)

$$\stackrel{\text{εκλέγουμε } x \in (0, +\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (5 + \frac{2}{x})}{\sqrt{x^2 \cdot (4 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2})} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (5 + \frac{2}{x})}{|x| \cdot \sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (5 + \frac{2}{x})}{x \cdot \sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \cdot (5 + \frac{2}{\cancel{x}})}{\cancel{x} \cdot (\sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2)} = \frac{5 + 0}{\sqrt{4 + 0 + 0} + 2} = \frac{5}{4}$$

12. Να υπολογιστούν τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^2 - 2} - x)$,

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^2 - 2} - x)$

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^2 - 2} - x)$

Έστω $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2} - x$. Τότε $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - \sqrt{2}^2 \geq 0\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} / (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \geq 0\} = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$.

Δοκιμάζουμε το όριο απ' ευθείας με ιδιότητες:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2 - 2} - \lim_{x \rightarrow -\infty} x = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2)} - \lim_{x \rightarrow -\infty} x = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2} - \lim_{x \rightarrow -\infty} x =$$

$$= (+\infty) - (-\infty) = +\infty.$$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^2 - 2} - x)$

Έστω $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2} - x$. Τότε (όπως και προηγουμένως) $D_f = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$.

Δοκιμάζοντας να προσδιορίσουμε το όριο απ' ευθείας καταλήγουμε σε α.μ. $(+\infty) - (+\infty)$.

Δοκιμάζουμε με κοινό παράγοντα:

$$\stackrel{\text{εκλέγουμε } x \in (\sqrt{2}, +\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 \cdot (\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3})} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}} - x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x \cdot (\sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}} - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}} - 1) = (+\infty) \cdot (\sqrt[3]{0 - 0} - 1) = (+\infty) \cdot (-1) = -\infty.$$

(*) Βγάλαμε ως κοινό παράγοντα μέσα στη ρίζα το x^3 και όχι το x^2 , γιατί η μεγαλύτερη δύναμη του αριθμητή είναι το x , δηλαδή το $\sqrt[3]{x^3}$.

13. Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ με } f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{αν } |x| < 1 \\ 0, & \text{αν } x = \pm 1 \\ 2x + 5, & \text{αν } |x| > 1 \end{cases}$$

Ο τύπος της f γράφεται $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{αν } x = \pm 1 \\ 2x+5, & \text{αν } x < -1 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$. Είναι $D_f = \mathbb{R}$.

Για το όριο της f στο $-\infty$, μας ενδιαφέρει μόνο ο κλάδος $2x+5$ που ορίζεται σε μια γειτονιά του $-\infty$. Έτσι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = 2 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

14. Να υπολογιστούν τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x^2 - 1|}$, β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1| - |x+1|}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$,
 γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1| + |2-x|}{\sqrt{1-x}}$

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x^2 - 1|}$

Έστω $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{|x^2 - 1|}$. Τότε $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Επειδή προσπαθώντας να προσδιορίσουμε το όριο απ' ευθείας με ιδιότητες καταλήγουμε σε α.μ. $\frac{\infty}{\infty}$, κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων του x^2-1 , για να «βγάλουμε» την απόλυτη τιμή:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x^2-1	+	-	+	+

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \stackrel{\text{εκλέγουμε } x \in (-\infty, -1)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^2}{(x-1) \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1.$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1| - |x+1|}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$.

Για το όριο στο $+\infty$ προφανώς μας ενδιαφέρει ο πρώτος κλάδος της f , το όριο όμως του οποίου, αν εφαρμόσουμε ιδιότητες, καταλήγει σε α.μ. $\frac{\infty}{\infty}$. Έτσι κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων των $x-1$ και $x+1$, για να «βγάλουμε» τις απόλυτες τιμές:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	+	+
$x+1$	-	+	+	+

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \stackrel{\text{εκλέγουμε } x \in (1, +\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1) - (x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = -2 \cdot 0 = 0.$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1| + |2-x|}{\sqrt{1-x}}$

Έστω $f(x) = \frac{|x-1| + |2-x|}{\sqrt{1-x}}$. Τότε $D_f = (-\infty, 1)$.

Επειδή προσπαθώντας να προσδιορίσουμε το όριο απ' ευθείας με ιδιότητες καταλήγουμε σε α.μ. $\frac{\infty}{\infty}$, κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων των $x-1$ και $2-x$, εντός (πάντα) του πεδίου ορισμού, για να «βγάλουμε» τις απόλυτες τιμές:

x	$-\infty$	1
$x-1$		$-$
$2-x$		$+$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(x-1) + (2-x)}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{\sqrt{1-x}}.$$

Δοκιμάζοντας να προσδιορίσουμε το όριο απ' ευθείας, καταλήγουμε σε α.μ. $\frac{\infty}{\infty}$. Έτσι

δοκιμάζουμε με κοινό παράγοντα:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \left(\frac{3}{x} - 2\right)}{\sqrt{-x \cdot \left(-\frac{1}{x} + 1\right)}} \stackrel{\substack{\text{εκλέγουμε} \\ x \in (-\infty, 0)}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \left(\frac{3}{x} - 2\right)}{\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-\frac{1}{x} + 1}} = \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(\sqrt{-x})^2 \cdot \left(\frac{3}{x} - 2\right)}{\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-\frac{1}{x} + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{-x} \cdot \left(\frac{3}{x} - 2\right)}{\sqrt{-\frac{1}{x} + 1}} = \frac{-(+\infty) \cdot (0-2)}{\sqrt{0+1}} = (-\infty) \cdot (-2) = +\infty. \end{aligned}$$

(*) Βγάζουμε μέσα στη ρίζα το $-x$ και όχι το x κοινό παράγοντα γιατί μόνο έτσι μπορούμε να «σπάσουμε» τη ρίζα σε δύο ρίζες, καθώς με $x \rightarrow -\infty$, θεωρούμε ότι $x < 0$.

Για τον ίδιο λόγο στη συνέχεια γράφουμε το x ως $-(\sqrt{-x})^2$ και όχι ως $\sqrt{x}^2$, καθώς η τελευταία δεν έχει νόημα για $x < 0$.

15. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \eta\mu 3x}{2x^2 + 1}, \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu 3x}{x^2 - 1}$$

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \eta\mu 3x}{2x^2 + 1}$

Έστω $f(x) = \frac{x \cdot \eta\mu 3x}{2x^2 + 1}$. Τότε $D_f = \mathbb{R}$.

Δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε το όριο απ' ευθείας με εφαρμογή ιδιοτήτων, γιατί κατ' αρχάς το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \eta\mu 3x$ δεν υπάρχει. Επειδή «φαίνεται» η συνάρτηση να είναι

«μηδενική» (αυτό το υποψιαζόμαστε καθώς θέτοντας όλο και μικρότερες τιμές στο x (π.χ. $-1, -5, -100, \dots, x \rightarrow -\infty$), ο παρονομαστής μεγαλώνει πιο γρήγορα από ότι ο αριθμητής), προσπαθούμε να εφαρμόσουμε την εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής:

Εκλέγοντας $x \in (-\infty, 0)$ είναι κατά σειρά:

$$|f(x)| = \frac{|x| \cdot |\eta\mu 3x|}{|2x^2 + 1|} \stackrel{\text{γιατί } |\eta\mu 3x| \leq 1}{\leq} \frac{|x| \cdot 1}{|2x^2 + 1|} = \frac{|x|}{|2x^2 + 1|} = \frac{-x}{2x^2 + 1}.$$

Άρα δείξαμε ότι $|f(x)| \leq \frac{-x}{2x^2+1} \Leftrightarrow -\frac{-x}{2x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{-x}{2x^2+1}$ σε μια γειτονιά του $-\infty$.

Όμως $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x^2} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0$ και όμοια $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\frac{-x}{2x^2+1}) = 0$, οπότε από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu 3x}{x^2 - 1}$$

Έστω $f(x) = \frac{x + \eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu 3x}{x^2 - 1}$. Τότε $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Σκεφτόμενοι ανάλογα με το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε:

Εκλέγουμε $x \in (1, +\infty)$:

$$|f(x)| = \frac{|x + \eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu 3x|}{|x^2 - 1|} \stackrel{\text{ιδιότητα απολύτων}}{\leq} \frac{|x| + |\eta\mu x| + |2\sigma\upsilon\nu 3x|}{|x^2 - 1|} \stackrel{\text{γιατί εκλέξαμε } x > 1}{=} \frac{x + |\eta\mu x| + 2 \cdot |\sigma\upsilon\nu 3x|}{x^2 - 1} \leq$$

$$\stackrel{\text{γιατί } |\eta\mu x| \leq 1 \text{ και } |\sigma\upsilon\nu 3x| \leq 1}{\leq} \frac{x + 1 + 2 \cdot 1}{x^2 - 1} = \frac{x + 3}{x^2 - 1}.$$

Άρα δείξαμε ότι $|f(x)| \leq \frac{x+3}{x^2-1} \Leftrightarrow -\frac{x+3}{x^2-1} \leq f(x) \leq \frac{x+3}{x^2-1}$ σε μια γειτονιά του $+\infty$.

Όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ και όμοια $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{x+3}{x^2-1}) = 0$, οπότε από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

16. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \ln x^2), \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} - e^{-x}}{e^x + e^{-x-1}}, \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - |z|^x}{2^{x+1} + 3 \cdot |z|^x}, z \in \mathbb{R}$$

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \ln x^2)$$

Έστω $f(x) = x \cdot \ln x^2 = x \cdot 2 \cdot \ln |x| = 2x \cdot \ln |x|$. Τότε $D_f = \mathbb{R}^*$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x \cdot \ln |x|) \stackrel{\text{εκλέγουμε } x \in (0, +\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} - e^{-x}}{e^x + e^{-x-1}}$$

Έστω $f(x) = \frac{e^{x+1} - e^{-x}}{e^x + e^{-x-1}}$. Τότε $D_f = \mathbb{R}$ γιατί $e^x > 0$ και $e^{-x-1} > 0$.

Δοκιμάζοντας απ' ευθείας με ιδιότητες (όριο αριθμητή, όριο παρονομαστή) καταλήγουμε σε α.μ. Προσπαθούμε να «αλλάξουμε» τον τύπο της f (τέχνασμα) αναλύοντας τους εκθέτες ή (και) τις βάσεις των εκθετικών και στη συνέχεια διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με κατάλληλη δύναμη του e , ώστε να προκύψουν νέες εκθετικές με όριο 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \cdot e - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^{x+1}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \cdot e - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x \cdot e}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \cdot e \cdot e^x - 1}{e^x \cdot e^x \cdot e + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x} \cdot e \cdot (e^x \cdot e \cdot e^x - 1)}{\cancel{e^x} \cdot (e^x \cdot e^x \cdot e + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} \cdot e^2 - e}{e^{2x} \cdot e + 1}$$

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το e^{2x} , ώστε να προκύψουν νέες εκθετικές με βάση μικρότερη του 1, οπότε το όριο τους στο $+\infty$ θα είναι μηδέν. Έτσι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{2x} \cdot e^2}{e^{2x}} - \frac{e}{e^{2x}}}{\frac{e^{2x} \cdot e}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^2 - e \cdot \frac{1}{e^{2x}}}{e + \frac{1}{e^{2x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^2 - e \cdot \left(\frac{1}{e^2}\right)^x}{e + \left(\frac{1}{e^2}\right)^x}$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} e = e$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^2 = e^2$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^x = 0$ γιατί $0 < \frac{1}{e^2} < 1$ (βλέπε όρια

εκθετικών συναρτήσεων). Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} e \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^x}{\lim_{x \rightarrow +\infty} e + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^x} = \frac{e^2 - e \cdot 0}{e + 0} = e$.

Υ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - |z|^x}{2^{x+1} + 3 \cdot |z|^x}$, $z \in \mathbf{R}$ Έστω $f(x) = \frac{2^x - |z|^x}{2^{x+1} + 3 \cdot |z|^x}$, $D_f = \mathbf{R}$. Τότε $f(x) = \frac{2^x - |z|^x}{2 \cdot 2^x + 3 \cdot |z|^x}$.

Όπου χρειάζεται θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε νέες εκθετικές με βάση > 1 , οπότε στο $-\infty$ να έχουν όριο 0, διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με μια κατάλληλη από τις υπάρχουσες εκθετικές.

i) **Av** $|z| > 2$, τότε διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με το 2^x έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2^x}{2^x} - \frac{|z|^x}{2^x}}{2 \cdot \frac{2^x}{2^x} + 3 \cdot \frac{|z|^x}{2^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \left(\frac{|z|}{2}\right)^x}{2 + 3 \cdot \left(\frac{|z|}{2}\right)^x} = \frac{1 - 0}{2 + 3 \cdot 0} = \frac{1}{2}, \text{ καθώς}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{|z|}{2}\right)^x = 0, \text{ αφού } \frac{|z|}{2} > 1.$$

ii) **Av** $0 < |z| < 2$, τότε διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με το $|z|^x$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2^x}{|z|^x} - \frac{|z|^x}{|z|^x}}{2 \cdot \frac{2^x}{|z|^x} + 3 \cdot \frac{|z|^x}{|z|^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{2}{|z|}\right)^x - 1}{2 \cdot \left(\frac{2}{|z|}\right)^x + 3} = \frac{0 - 1}{2 \cdot 0 + 3} = -\frac{1}{3}, \text{ καθώς}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{|z|}\right)^x = 0, \text{ αφού } \frac{2}{|z|} > 1.$$

iii) **Av** $|z| = 2$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 2^x}{2 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0}{5 \cdot 2^x} = 0$

iv) **Av** $|z| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{2^x}}{2 \cdot \cancel{2^x}} = \frac{1}{2}$

17. α) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x)}{(x-1)^2}$

β) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x)}{(x-1)^2} = 2$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

α) Έστω **βοηθητική συνάρτηση** $g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{(x-1)^2}$ με $D_g = D_f - \{1\}$.

Μας δίνουν το όριο της "μέσα" συνάρτησης (f) και ζητάμε της "έξω" (g).

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} (x \cdot f(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = 1 \cdot 2 \cdot (+\infty) = +\infty,$$

καθώς $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$ με $(x-1)^2 > 0$ για $x \neq 1$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Η άσκηση θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί και χωρίς να ορίσουμε τη συνάρτηση g, ξεκινώντας μετά το σημείο με το (*).

β) Έστω **βοηθητική συνάρτηση** $g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{(x-1)^2}$ (1) με $D_g = D_f - \{1\}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$.

Τώρα συμβαίνει το αντίστροφο.

Μας δίνουν το όριο της "έξω" συνάρτησης (g) και ζητάμε της "μέσα" (f).

Θα ανάγουμε το πρόβλημα στην προηγούμενη περίπτωση, λύνοντας την (1) ως προς f.

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \overset{\text{εκλέγουμε } x \neq 0}{f(x)} = \frac{g(x) \cdot (x-1)^2}{x} \quad \text{οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) \cdot (x-1)^2}{x} = \frac{2 \cdot 0}{1} = 0.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Είναι προτιμότερο η άσκηση να αντιμετωπιστεί χωρίς να ορίσουμε τη **βοηθητική**

συνάρτηση συνάρτηση g, ως εξής: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x)}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{2 \cdot 0}{1} = 0$ (2).

Έτσι η λύση είναι απλούστερη, αφού δεν χρειάζεται να προσδιορίσουμε το D_g , αλλά ούτε και να λύσουμε την (1) ως προς f(x).

Η δυσκολία που εμφανίζεται και αφορά στο να εκφράσουμε την f(x) με τη βοήθεια του

$$\frac{x \cdot f(x)}{(x-1)^2} \text{ ξεπερνιέται, αν αναλογιστούμε πώς από το } f(x) \text{ κατασκευάζουμε το } \frac{x \cdot f(x)}{(x-1)^2}$$

και ακολουθήσουμε την αντίστροφη πορεία κάνοντας τις αντίθετες πράξεις. Έτσι εδώ η

πορεία της κατασκευής του $\frac{x \cdot f(x)}{(x-1)^2}$ από το f(x) σε βήματα είναι:

$$f(x) \rightarrow \cdot x \rightarrow : (x-1)^2 \rightarrow \frac{x \cdot f(x)}{(x-1)^2}.$$

Άρα για να εκφράσουμε την $f(x)$ με τη βοήθεια του $\frac{x \cdot f(x)}{(x-1)^2}$ πρέπει να ακολουθήσουμε

την πορεία:

$$\frac{x \cdot f(x)}{(x-1)^2} \rightarrow \cdot (x-1)^2 \rightarrow :x \rightarrow f(x), \text{ όπως παρουσιάζεται στη σχέση (2).}$$

18. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $|f(x)-g(x)| \leq x^2 \cdot |g(x)|$ (1) για κάθε $x \in \Delta_0$, όπου Δ_0 γειτονιά του 0 και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell$.

$$(1) \Leftrightarrow -x^2 \cdot |g(x)| \leq f(x)-g(x) \leq x^2 \cdot |g(x)| \quad (2) \Leftrightarrow g(x) - x^2 \cdot |g(x)| \leq f(x) \leq g(x) + x^2 \cdot |g(x)| \quad (3)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0} [g(x) - x^2 \cdot |g(x)|] = \ell - 0 \cdot |\ell| = \ell \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} [g(x) + x^2 \cdot |g(x)|] = \ell + 0 \cdot |\ell| = \ell.$$

Έτσι από (3) και το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ενώ μπορούμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x))$ με κριτήριο

παρεμβολής από τη (2) (που «βγαίνει» 0), δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο της f ισχυριζόμενοι ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \ell = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell, \text{ καθόσον ο ισχυρισμός } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \text{ προϋποθέτει}$$

ότι το όριο της f υπάρχει, κάτι που δεν το γνωρίζουμε. Έτσι άσχετα αν βρίσκαμε το ίδιο αποτέλεσμα, ο τρόπος αυτός είναι λάθος.

19. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$ και $g(x) \neq 0$ σε μια γειτονιά Δ_{x_0} του x_0 . Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

Αφού $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$ (είτε είναι θετικό είτε αρνητικό), θα υπάρχει γειτονιά Γ_{x_0} του x_0 όπου

$f(x) \neq 0$ ($f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ αντίστοιχα, βλ. επεξεύρωση ορίων).

Άρα στη γειτονιά E_{x_0} όπου $E_{x_0} = \Delta_{x_0} \cap \Gamma_{x_0}$ θα είναι $g(x) \neq 0$ και $f(x) \neq 0$.

Στη γειτονιά E_{x_0} ορίζουμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ με $h(x) \neq 0$ αφού $f(x) \neq 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = +\infty.$$

$$\text{Τότε } g(x) = \frac{f(x)}{h(x)} \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{h(x)} = a \cdot 0 = 0.$$

ΑΛΛΙΩΣ ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΑ

Αφού αποδείξουμε ότι υπάρχει γειτονιά E_{x_0} όπου είναι $g(x) \neq 0$ και $f(x) \neq 0$, μπορούμε να μην ορίσουμε συνάρτηση $h(x)$, αλλά να γράψουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}} = a \cdot 0 = 0.$$

ΜΕΘΟΔΟΣ: Γενικά όταν μας δίνουν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και το όριο μιας πράξης των f και g , μπορούμε ίσως να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, γράφοντας τη g ως πράξη της f και της πράξης τους, ως εξής:

Δίνεται	και	τότε σε κατάλληλη γειτονιά του x_0 είναι	Άρα
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$	$g(x) = [f(x) + g(x)] - f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \{[f(x) + g(x)] - f(x)\}$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$	$g(x) = -[f(x) - g(x)] + f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = - \lim_{x \rightarrow x_0} \{[f(x) - g(x)] - f(x)\}$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) (\neq 0)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$	$g(x) = \frac{f(x) \cdot g(x)}{f(x)}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x)}{f(x)}$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} (\neq 0)$	$g(x) = \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}$ (βλέπε προηγούμενο παράδειγμα)	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}$

20. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot g(x)] = m \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)] = \ell \cdot m$.

Θεωρούμε γειτονιά του 0 όπου $x \cdot \eta\mu x \neq 0$ και πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε την παράσταση $f(x) \cdot g(x)$ με $x \cdot \eta\mu x$. Έτσι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot g(x) \cdot x \cdot \eta\mu x}{x \cdot \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} [g(x) \cdot x] \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = \ell \cdot m \cdot 1 = \ell \cdot m.$$

21. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^2 - \mu x + 1}{(\mu+2)x - 1}$, για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$

$$\text{Έστω } f(x) = \frac{(\mu-1)x^2 - \mu x + 1}{(\mu+2)x - 1}.$$

Επειδή δεν γνωρίζουμε την τιμή της παραμέτρου μ , μπορούμε να ξεπεράσουμε το σκόπελο του πεδίου ορισμού ως εξής:

$D_f = \mathbb{R} - \{\rho\}$ όπου ρ η ρίζα του παρονομαστή, αν υπάρχει.

Επειδή η f είναι ρητή, το όριό της θα υπολογιστεί ως το όριο του πηλίκου των μεγιστοβάθμιων όρων αριθμητή και παρονομαστή. Άρα πρέπει να γίνει μια έρευνα όσον αφορά στο ποιοι είναι αυτοί η μεγιστοβάθμιοι όροι για κάθε τιμή του μ και αυτό φυσικά θα εξαρτάται από το αν οι παραστάσεις $\mu-1$ και $\mu+2$ είναι ή όχι μηδέν:

α) Αν $\mu-1 \neq 0$ και $\mu+2 \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq 1$ και $\mu \neq -2$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^2}{(\mu+2)x} = \frac{\mu-1}{\mu+2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \frac{\mu-1}{\mu+2} \cdot (+\infty)$$

α1) Αν $\frac{\mu-1}{\mu+2} > 0 \Leftrightarrow (\mu-1) \cdot (\mu+2) > 0 \Leftrightarrow \mu < -2 \text{ ή } \mu > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

α2) Αν $\frac{\mu-1}{\mu+2} < 0 \Leftrightarrow (\mu-1) \cdot (\mu+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < \mu < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

β) Αν $\mu = 1$ τότε $f(x) = \frac{-x+1}{3x-1}$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$.

γ) Αν $\mu = -2$ τότε $f(x) = \frac{-3x^2+2x+1}{-1} = 3x^2-2x-1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = +\infty$.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στο συμπέρασμα: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \mu \leq -2 \text{ ή } \mu > 1 \\ -\infty, & \text{αν } -2 < \mu < 1 \\ -\frac{1}{3}, & \text{αν } \mu = 1 \end{cases}$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x+a}-1}$ (1). Να υπολογιστεί ο $a \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \in \mathbb{R}^*.$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} \sqrt{x+a}-1 \neq 0 \\ x+a \geq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} \sqrt{x+a} \neq 1 \\ x \geq -a \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} (\sqrt{x+a})^2 \neq 1^2 \\ x \geq -a \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x+a \neq 1 \\ x \geq -a \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \neq 1-a \\ x \geq -a \end{matrix} \right\}. \text{ Όμως το } 1-a \text{ είναι μεγαλύτερο του } -a \text{ γιατί}$$

$$1-a = -a+1 > -a, \text{ οπότε } D_f = [-a, 1-a) \cup (1-a, +\infty).$$

Για να έχει νόημα το όριο στο -3 πρέπει το πεδίο ορισμού να περιέχει γειτονιά του -3 δηλαδή: $-3 \geq -a \Leftrightarrow a \geq 3$ δηλαδή $a \in [3, +\infty)$.

Έστω ότι $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$ (αυθαίρετη υπόθεση)

Ο στόχος είναι να μετασχηματίσουμε την (1) σε μια κατάλληλη σχέση, ώστε αν πάρουμε τα όρια των μελών της για $x \rightarrow -3$, να μπορούμε να βρούμε το a .

Από (1) έχουμε: $(\sqrt{x+a}-1) \cdot f(x) = x+3$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -3} [(\sqrt{x+a}-1) \cdot f(x)] = \lim_{x \rightarrow -3} (x+3) \Leftrightarrow (\sqrt{a-3}-1) \cdot \ell = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a-3}-1 = 0 \Leftrightarrow a = 4$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Απλά προσδιορίσαμε την πιθανή τιμή του a , καθώς ξεκινήσαμε με αφετηρία ότι είναι δυνατόν το $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ να ανήκει στο $\mathbb{R}^*$ (αυθαίρετη υπόθεση). Έτσι η συνθήκη

$a=4$ είναι αναγκαία, ώστε το όριο να ανήκει στο $\mathbb{R}^*$, αλλά όχι σίγουρα και ικανή, οπότε στη συνέχεια πρέπει να ελέγξουμε αν πράγματι για $a=4$ το όριο της f ανήκει στο $\mathbb{R}^*$.

Για $a=4$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1} \stackrel{\text{α.μ. } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3) \cdot (\sqrt{x+4}+1)}{(\sqrt{x+4}-1) \cdot (\sqrt{x+4}+1)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3) \cdot (\sqrt{x+4}+1)}{x+4-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\cancel{(x+3)} \cdot (\sqrt{x+4}+1)}{\cancel{x+3}} = \lim_{x \rightarrow -3} (\sqrt{x+4}+1) = \sqrt{-3+4}+1 = 2 \in \mathbb{R}^*. \text{ Άρα πράγματι } a=4.$$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{(x+\kappa) \cdot (x+\lambda)} - x$ (1). Να υπολογιστούν οι τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}_+^*$, ώστε να είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / (x+\kappa) \cdot (x+\lambda) \geq 0\}$. Αν ονομάσουμε με m τον μικρότερο των $-\kappa$ και $-\lambda$ και με M τον μεγαλύτερο από αυτούς, τότε $D_f = (-\infty, m] \cup [M, +\infty)$.

1ος τρόπος (ο καλύτερος): Έστω ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Αφού το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ είναι θετικό, η f παίρνει θετικές τιμές σε μια γειτονιά του $+\infty$. Επίσης μπορούμε να εκλέξουμε και $x > 0$.

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε ως στόχο στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε κατά σειρά:

$$(1) \Leftrightarrow f(x)+x = \sqrt{(x+\kappa) \cdot (x+\lambda)} \stackrel{\substack{f(x)+x > 0 \\ \text{σε μια γειτονιά του } +\infty}}{\Leftrightarrow} (f(x)+x)^2 = (\sqrt{(x+\kappa) \cdot (x+\lambda)})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) + 2x \cdot f(x) + x^2 = (x+\kappa) \cdot (x+\lambda) \Leftrightarrow f^2(x) + 2x \cdot f(x) + x^2 = x^2 + (\kappa+\lambda) \cdot x + \kappa\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f^2(x) + 2x \cdot f(x)}{x} = \frac{(\kappa+\lambda) \cdot x + \kappa\lambda}{x} \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{x} + 2f(x) = \kappa + \lambda + \frac{\kappa\lambda}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa + \lambda = \frac{f^2(x)}{x} + 2f(x) - \frac{\kappa\lambda}{x}.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\kappa + \lambda) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f^2(x)}{x} + 2f(x) - \frac{\kappa\lambda}{x} \right) \Leftrightarrow \kappa + \lambda = 0 + 2 \cdot 1 - 0 \Leftrightarrow \kappa + \lambda = 2 \text{ και αφού}$$

οι κ και λ είναι θετικοί ακέραιοι συμπεραίνουμε ότι $\kappa = \lambda = 1$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Απλά προσδιορίσαμε τις πιθανές τιμές των κ, λ , καθώς ξεκινήσαμε με αφετηρία ότι είναι δυνατόν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Έτσι η συνθήκη $\kappa = \lambda = 1$ είναι αναγκαία, ώστε το όριο να είναι 1, αλλά όχι σίγουρα και ικανή, οπότε στη συνέχεια πρέπει να ελέγξουμε αν πράγματι για $\kappa = \lambda = 1$ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Για $\kappa = \lambda = 1$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+1)^2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (|x+1| - x) \stackrel{\text{εκλέγουμε } x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

Άρα $\kappa = \lambda = 1$.

2ος τρόπος:

Δοκιμάζοντας το όριο απ' ευθείας με ιδιότητες, καταλήγουμε σε α.μ. $(+\infty) - (+\infty)$.

Δοκιμάζοντας με κοινό παράγοντα και επιλέγοντας γειτονιά του $+\infty$ με θετικούς αριθμούς καταλήγουμε σε $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\kappa + \lambda}{x} + \frac{\kappa\lambda}{x^2}} - 1 \right)$ που δίνει α.μ. $(+\infty) \cdot 0$.

Έτσι παίρνουμε συζυγή παράσταση και έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{(x+\kappa) \cdot (x+\lambda)} - x) \cdot (\sqrt{(x+\kappa) \cdot (x+\lambda)} + x)}{\sqrt{(x+\kappa) \cdot (x+\lambda)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{(x+\kappa) \cdot (x+\lambda)})^2 - x^2}{\sqrt{(x+\kappa) \cdot (x+\lambda)} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+\kappa) \cdot (x+\lambda) - x^2}{\sqrt{(x+\kappa) \cdot (x+\lambda)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + (\kappa + \lambda)x + \kappa\lambda - x^2}{\sqrt{(x+\kappa) \cdot (x+\lambda)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\kappa + \lambda)x + \kappa\lambda}{\sqrt{(x+\kappa) \cdot (x+\lambda)} + x} = \end{aligned}$$

(Επειδή το όριο αυτό με τη μορφή που δίνεται καταλήγει σε α.μ. $\frac{\infty}{\infty}$ συνεχίζουμε

βγάζοντας κοινό παράγοντα)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left[(\kappa + \lambda) + \frac{\kappa\lambda}{x} \right]}{\sqrt{x^2 + (\kappa + \lambda)x + \kappa\lambda} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left[(\kappa + \lambda) + \frac{\kappa\lambda}{x} \right]}{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{\kappa + \lambda}{x} + \frac{\kappa\lambda}{x^2} \right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left[(\kappa + \lambda) + \frac{\kappa\lambda}{x} \right]}{|x| \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{\kappa + \lambda}{x} + \frac{\kappa\lambda}{x^2} \right)} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left[(\kappa + \lambda) + \frac{\kappa\lambda}{x} \right]}{x \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{\kappa + \lambda}{x} + \frac{\kappa\lambda}{x^2} \right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \cdot \left[(\kappa + \lambda) + \frac{\kappa\lambda}{x} \right]}{\cancel{x} \cdot \left(\sqrt{\left(1 + \frac{\kappa + \lambda}{x} + \frac{\kappa\lambda}{x^2} \right)} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\kappa + \lambda) + \frac{\kappa\lambda}{x}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\kappa + \lambda}{x} + \frac{\kappa\lambda}{x^2} \right)} + 1} = \\ &= \frac{(\kappa + \lambda) + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{\kappa + \lambda}{2}. \end{aligned}$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{\kappa + \lambda}{2} = 1 \Leftrightarrow \kappa + \lambda = 2$ και αφού οι κ και λ είναι θετικοί ακέραιοι συμπεραίνουμε ότι $\kappa = \lambda = 1$.

24. Αν $f(x) = \frac{x^4 + 3a + \beta}{3x^2 + a^2 + 1}$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(e^x - \beta) + \eta\mu^2(e^x - \beta) + \sigma\upsilon\nu x]$

Είναι $\eta\mu^2(e^x - \beta) \geq 0$ και $\sigma\upsilon\nu x \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(e^x - \beta) + \eta\mu^2(e^x - \beta) + \sigma\upsilon\nu x \geq f(e^x - \beta) + 0 - 1 = f(e^x - \beta) - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Όμως θέτοντας $e^x - \beta = u$ έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \beta) = +\infty$ και επομένως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(e^x - \beta) - 1] = \lim_{u \rightarrow +\infty} [f(u) - 1] = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{u^4 + 3a + \beta}{3u^2 + a^2 + 1} - 1 \right] = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^4}{3u^2} - \lim_{u \rightarrow +\infty} 1 = +\infty.$$

Έτσι αφού $f(e^x - \beta) + \eta\mu^2(e^x - \beta) + \sigma\upsilon\nu x \geq f(e^x - \beta) - 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(e^x - \beta) - 1] = +\infty$,

από την ιδιότητα που αναφέραμε στην παράγραφο «όρια και διάταξη» είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(e^x - \beta) + \eta\mu^2(e^x - \beta) + \sigma\upsilon\nu x] = +\infty$$

2.3 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού σύνολο A .

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η συνάρτηση f λέγεται **συνεχής σε ένα σημείο x_0** του A , όταν ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

δηλαδή όταν το όριο της f στο x_0 υπάρχει και είναι ίσο με την τιμή της στο x_0 .

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η συνέχεια μιας συνάρτησης έχει νόημα μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της.

Έτσι για παράδειγμα δεν έχει νόημα η μελέτη της συνέχειας της $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ στο 0, καθώς

το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της που είναι το $(0, +\infty)$.

Επίσης δεν έχει νόημα η συνέχεια συνάρτησης σε **μεμονωμένα σημεία** του πεδίου ορισμού της. Έτσι αν η f έχει ως D_f το $(0, 3] \cup \{5\}$, δεν έχει νόημα η συνέχεια στο 5 καθώς είναι μεμονωμένο σημείο (δεν έχει νόημα το $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$, αφού δεν υπάρχει στο

πεδίο ορισμού γειτονιά του 5).

Μια συνάρτηση λέγεται **ασυνεχής στο x_0** , όταν το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της και αυτή δεν είναι συνεχής στο x_0 . Αυτό συμβαίνει σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $x_0 \in D_f$ και δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

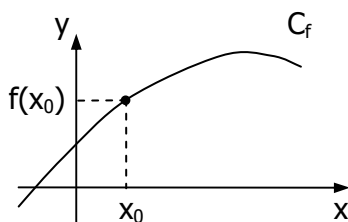
β) $x_0 \in D_f$ και το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ δεν είναι πεπερασμένο (δηλαδή είναι $+\infty$ ή $-\infty$)

γ) $x_0 \in D_f$ και το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι πεπερασμένο, αλλά όχι ίσο με το $f(x_0)$.

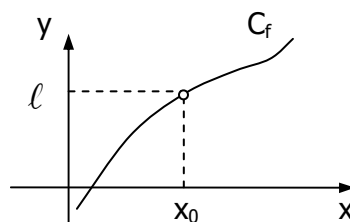
Σε καθεμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις, το x_0 λέγεται **σημείο ασυνέχειας** της f .

Γραφικά, το ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 , δηλώνει ότι η γραφική της παράσταση δεν διακόπτεται στο x_0 .

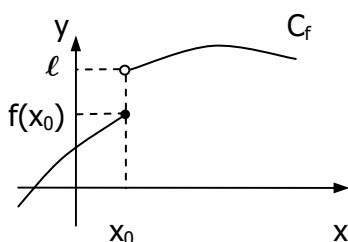
Παρακάτω παραθέτουμε κάποιες γραφικές παραστάσεις ενδεικτικές για τη συνέχεια μιας συνάρτησης:



f συνεχής στο x_0
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$



Δεν έχει νόημα η μελέτη της συνέχειας της f στο x_0 , καθώς δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της

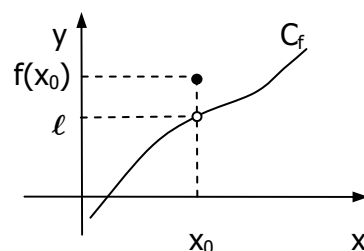


f ασυνεχής στο x_0 γιατί $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$,

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \neq f(x_0)$, οπότε δεν υπάρχει

το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Παρ' όλα αυτά η f είναι **συνεχής**

από αριστερά στο x_0



$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$, άρα

η f είναι ασυνεχής στο x_0

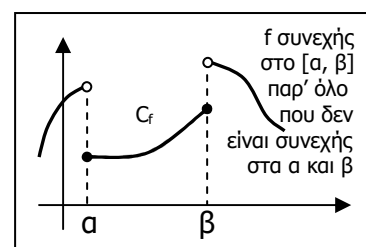
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Μπορεί η μελέτη της συνέχειας μιας συνάρτησης f σε σημείο x_0 να μην έχει νόημα, γιατί η f δεν ορίζεται στο x_0 , ενώ υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και είναι ίσο με l .

Τότε μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση f_1 , επέκταση της f , έτσι ώστε $f_1(x) = f(x)$ για κάθε $x \neq x_0$ και $f_1(x_0) = l$, δηλαδή $f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{για κάθε } x \in D_f \\ l, & \text{αν } x = x_0 \end{cases}$.

Προφανώς η συνάρτηση f_1 όπως ορίστηκε διατηρεί τα χαρακτηριστικά της f και επιπλέον είναι συνεχής στο x_0 .

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Μια συνάρτηση f λέγεται **συνεχής στο D_f ή σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β)** (υποσύνολο του D_f), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του D_f ή του (a, β) αντίστοιχα.
- Μια συνάρτηση f λέγεται **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, γνήσιο υποσύνολο του D_f** , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$.



Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ τότε η γραφική παράσταση της f «δεν διακόπτεται» εντός του Δ .

Μια συνάρτηση που είναι συνεχής σε όλο το D_f , λέγεται απλά συνεχής.

Θεωρητικά, για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής σε σύνολο Δ , αν το Δ είναι ανοικτό διάστημα ή είναι το πεδίο ορισμού, αρκεί να δείξουμε ότι

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, για κάθε $x_0 \in \Delta$, δηλαδή ότι είναι συνεχής στο τυχαίο σημείο x_0 του Δ .

Στην πράξη θεωρούμε ως δεδομένη (γιατί αποδεικνύεται) τη συνέχεια των παρακάτω βασικών συναρτήσεων στα σύνολα που αναφέρονται κάθε φορά:

	ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΠΛΕΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	ΣΥΝΟΛΟ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ A	ΔΗΛΑΔΗ ΙΣΧΥΕΙ για κάθε $x_0 \in A$
1.	Σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$	$\mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$
2.	Ταυτοτική συνάρτηση $f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$
3.	Δύναμη $f(x)=x^v, v \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} x^v = x_0^v$
4.	Ρίζα $f(x)=\sqrt[v]{x}, v \in \mathbb{N}^*$	$[0, +\infty)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[v]{x} = \sqrt[v]{x_0}$
5.	Πολυωνυμική $P(x)=a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0, v \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$
6.	Ρητή $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα	D_f	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$
7.	$f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$\mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$
8.	Εκθετική $f(x)=a^x, a>0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$
9.	Λογαριθμική $f(x)=\log_a x, a>0, a \neq 1$	$(0, +\infty)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$

Από τον παραπάνω πίνακα αντιλαμβανόμαστε ότι **όλες οι απλές βασικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.**

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

Αν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο x_0 και c πραγματική σταθερά, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι παρακάτω πράξεις αυτών:

$$f+g, \quad c \cdot f, \quad f-g, \quad \frac{f}{g}, \quad |f| \quad \text{και} \quad \sqrt[n]{f}$$

Φυσικά αν οι f και g είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους, τότε όλες οι παραπάνω συναρτήσεις είναι και αυτές συνεχείς στα δικά τους πεδία ορισμού.

Έτσι οι συναρτήσεις **$f(x)=\epsilon\phi x$ και $g(x)=\sigma\phi x$ είναι συνεχείς** στα πεδία ορισμού τους ως ηλίκα συνεχών συναρτήσεων (ημιτόνου και συνημιτόνου).

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗ

Αν η f είναι συνάρτηση συνεχής σε $x_0 \in D_f$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow f(x_0)} g(x) = g(f(x_0)) \end{array} \right\} \text{ ΤΟΤΕ } \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$$

Φυσικά **αν η f είναι συνεχής στο D_f και η g είναι συνεχής στο D_g , τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο $D_{g \circ f}$** (το δικαιολογούμε ως «σύνθεση συνεχών»).

Αντίστοιχα συμπεράσματα ισχύουν και για την $f \circ g$.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f(x)=\eta\mu x$ (συνεχής στο $\mathbb{R}$) και $g(x)=\sqrt{x}$ (συνεχής στο $[0, +\infty)$).

Σε μια συνάρτηση πολλαπλού τύπου όπως η $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & \text{αν } x \in (a, \beta] \\ f_2(x), & \text{αν } x \in (\beta, \gamma) \cup (\gamma, \delta] \\ \kappa, & \text{αν } x = \gamma \\ f_3(x), & \text{αν } x \in [\varepsilon, \zeta] \end{cases}$ με

$\kappa \in \mathbb{R}$, όπου $f_1(x)$, $f_2(x)$ και $f_3(x)$ είναι τύποι συνεχών συναρτήσεων, τα σημεία β και γ χαρακτηρίζονται ως πιθανά σημεία ασυνέχειας.

Γενικά με τη φράση «**πιθανά σημεία ασυνέχειας**» εννοούμε:

- τα σημεία που σε μια γειτονιά τους, αριστερά και δεξιά από αυτά, η f έχει διαφορετικό τύπο (βλέπε το σημείο β στην παραπάνω συνάρτηση) και
- τα σημεία που, ενώ σε μια γειτονιά τους η f διατηρεί ένα τύπο, η τιμή σε αυτά δίνεται με διαφορετικό τύπο (όπως το σημείο γ).

ΕΤΣΙ ΤΕΛΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ, ΕΧΟΥΜΕ ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ

Συναρτήσεις μονού τύπου	Απόλυτα συναρτήσεις μονού τύπου	Συναρτήσεις πολλαπλού τύπου
Είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.	Είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους ως απόλυτα συνεχών.	Είναι συνεχείς στα υποδιαστήματα που έχουν έναν τύπο, εκτός από τα πιθανά σημεία ασυνέχειας, όπου χρειάζεται μελέτη με τη βοήθεια του ορίου.

ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

ΠΡΟΣΟΧΗ: Τα παρακάτω τρία θεωρήματα λέγονται και «**θεωρήματα συνέχειας σε κλειστό διάστημα**», γιατί ισχύουν μόνο αν η f είναι συνεχής σε διάστημα (και όχι ένωση διαστημάτων) και μάλιστα κλειστό.

1. ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

Έστω f ορισμένη σε **κλειστό** $[a, \beta]$. Αν

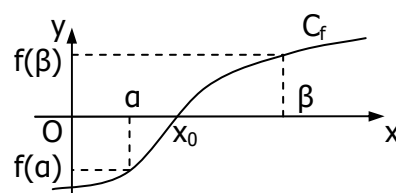
- f συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \cdot f(\beta) < 0$

TOTE

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ Θ. BOLZANO

Αφού η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και σύμφωνα με τις προϋποθέσεις του θεωρήματος τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η C_f θα έχει



ένα τουλάχιστο κοινό σημείο με τον άξονα x εντός του διαστήματος (a, β) .

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ▼

1. Η σχέση $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ σημαίνει ότι η f παίρνει ετερόσημες τιμές στα a και β .
2. Το θεώρημα Bolzano δίνει με άλλα λόγια το συμπέρασμα ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (a, β) (εξασφαλίζει την ύπαρξη ρίζας).

3. ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΠΡΟΣΗΜΟΥ (Σημαντικό)

Προφανώς με βάση το θεώρημα Bolzano ισχύουν και οι παρακάτω προτάσεις:

α) Αν f συνεχής σε διάστημα Δ , με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε από Θ. Bolzano η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .

Η απόδειξη μπορεί να γίνει με απαγωγή σε άτοπο καθώς αν η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ θα υπάρχουν $a, \beta \in \Delta$ τέτοια ώστε $f(a) \cdot f(\beta) < 0$. Τότε όμως θα υπήρχε $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, άτοπο από υπόθεση.

β) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαδοχικά διαστήματα στα οποία χωρίζουν το D_f οι διαδοχικές της ρίζες.

Η απόδειξη στηρίζεται στο συλλογισμό ότι αν ρ_k, ρ_{k+1} δύο διαδοχικές ρίζες της f , δεν μπορεί η f να αλλάξει πρόσημο ανάμεσά τους, καθώς τότε από Θ. Bolzano θα υπήρχε και άλλη ρίζα ανάμεσά τους. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού οι ρ_k, ρ_{k+1} είναι διαδοχικές ρίζες της f .

Τις παραπάνω δύο προτάσεις τις χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη.

4. Το Θ. Bolzano εφαρμόζεται μόνο σε κλειστό διάστημα και το συμπέρασμά του αφορά στο ανοικτό αντίστοιχο.
5. **Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει πάντα.** Μπορεί μια συνάρτηση να έχει ρίζα σε διάστημα (a, β) χωρίς να είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ή χωρίς να αλλάζει πρόσημο σ' αυτό (π.χ. η $f(x)=x^2$ έχει ρίζα στο $(-1, 1)$ το 0 και όμως $f(-1)=f(1)>0$).

2. ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ (Θ. Ε. Τ. ή θεώρημα του Darboux)

Έστω f ορισμένη σε **κλειστό** $[a, \beta]$. Αν

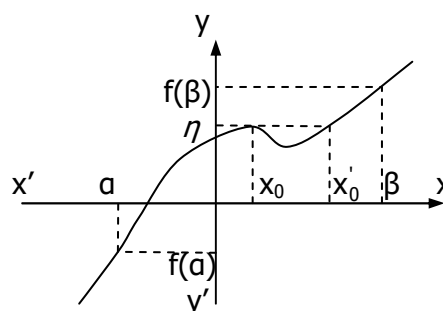
- f συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

ΤΟΤΕ

για οποιονδήποτε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=\eta$

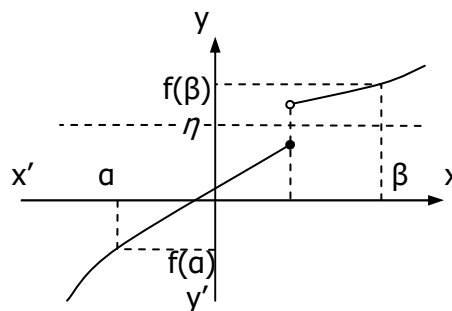
Αυτό σημαίνει ότι η f στο (a, β) παίρνει όλες τις τιμές ανάμεσα στις $f(a)$ και $f(\beta)$.

Έτσι για παράδειγμα στο διπλανό σχήμα που ισχύει το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, παρατηρείστε ότι υπάρχουν δύο τιμές του x τέτοιες ώστε $f(x)=\eta$, οι x_0 και x'_0 .



Αντίθετα αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις τιμές μεταξύ $f(a)$ και $f(\beta)$.

Έτσι στο διπλανό σχήμα δεν υπάρχει τιμή του x στο (a, β) όπου η συνάρτηση να παίρνει την τιμή η , παρ' όλο που η η βρίσκεται μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$.



ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ▼

Αν $f(a) \neq f(\beta)$, κάθε τιμή μορφής $\frac{\kappa \cdot f(a) + \lambda \cdot f(\beta)}{\kappa + \lambda}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, βρίσκεται ανάμεσα στα $f(a)$ και $f(\beta)$ (με απόδειξη), οπότε με βάση το προηγούμενο θεώρημα, αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{\kappa \cdot f(a) + \lambda \cdot f(\beta)}{\kappa + \lambda}$.

Με τη βοήθεια του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών αποδεικνύεται το παρακάτω πόρισμα:

ΠΟΡΙΣΜΑ

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι επίσης διάστημα.

Δηλαδή δεν μπορεί π.χ. να είναι ένωση διαστημάτων.

3. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΥ – ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ (max-min)

Αν

- f συνεχής σε **κλειστό** διάστημα $[a, \beta]$

ΤΟΤΕ

η f παίρνει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή μέσα στο $[a, \beta]$

δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, \beta]$, τέτοια ώστε $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

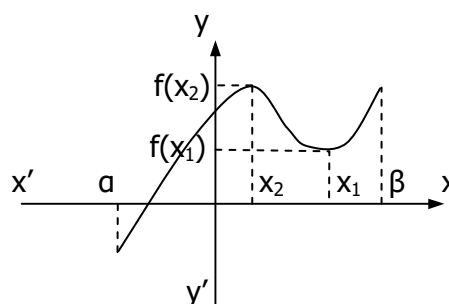
ΣΧΟΛΙΑ

1. Από τα θεωρήματα 2. και 3. συμπεραίνουμε ότι το **σύνολο τιμών μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης, που έχει πεδίο ορισμού κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$** , όπου

m και M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της (που σίγουρα υπάρχουν). Ειδικότερα:

αν f $\nearrow$ στο $[a, \beta]$, τότε $R_f = [f(a), f(\beta)]$, αφού θα είναι $m=f(a)$ και $M=f(\beta)$, λόγω της μονοτονίας, ενώ

αν f $\searrow$ στο $[a, \beta]$, τότε $R_f = [f(\beta), f(a)]$, αφού θα είναι $m=f(\beta)$ και $M=f(a)$, λόγω της μονοτονίας.



2. Αποδεικνύεται επίσης ότι παρόμοια συμπεράσματα ισχύουν για μια συνεχή και γνησίως μονότονη συνάρτηση, ακόμα και αν το πεδίο ορισμού της **δεν είναι κλειστό διάστημα**. Η διαφορά είναι ότι στο ανοικτό άκρο αντί να πάρουμε την τιμή της f παίρνουμε το όριό της. Έτσι:

Αν f συνεχής και $\uparrow$ στο $[a, \beta)$, τότε $R_f = [f(a), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x))$,

αν f συνεχής και $\downarrow$ στο $[a, \beta)$, τότε $R_f = (\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), f(a)]$,

αν f συνεχής και $\uparrow$ στο (a, β) , τότε $R_f = (\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x))$,

αν f συνεχής και $\downarrow$ στο (a, β) , τότε $R_f = (\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x))$ κ.τ.λ.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ανοικτό διάστημα (ξ_1, ξ_2) με $\xi_1, \xi_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ και ισχύουν ότι $\lim_{x \rightarrow \xi_1} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \xi_2} f(x) = +\infty$ ή αντίθετα, τότε $R_f = \mathbb{R}$

Οι πρόταση αυτή, αν και δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο, μπορεί να χρησιμοποιείται χωρίς απόδειξη. Παρ' όλα αυτά στο παράρτημα δίνουμε και την απόδειξή της.

ΒΛΕΠΕ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ, ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Τα παραπάνω θεωρήματα συνέχειας, αν συνδυαστούν με άλλα θεωρήματα που θα συναντήσουμε αργότερα, μπορούν να μας δώσουν ακόμα περισσότερα χρήσιμα συμπεράσματα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ $x_0 \in D_f$

α) Αν το x_0 είναι πιθανό σημείο ασυνέχειας (βλέπε συνέχεια συνάρτησης)

Τότε:

- Βρίσκουμε το $f(x_0)$
- Βρίσκουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, είναι πεπερασμένο και ίσο με το $f(x_0)$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0 . Αλλιώς η f είναι ασυνεχής στο x_0 .

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν η f έχει πολλαπλό τύπο και αλλάζει τύπο στο x_0 , τότε για τον προσδιορισμό του $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ θα χρειαστούμε πλευρικά όρια.

β) Αλλιώς η f θα έχει τύπο συνεχούς συνάρτησης σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0

Τότε μπορούμε να εξηγήσουμε με λόγια ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό (βλέπε παρακάτω μεθοδολογία 2α)), οπότε και στο x_0 .

γ) Αν δεν γνωρίζουμε τον τύπο της f , αλλά κάποια σχέση που ικανοποιεί αυτή, προσπαθούμε να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (1) ή $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$ ή θέτοντας στην (1) όπου x το $x_0 + h$, να δείξουμε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ ή κάτι παρόμοιο.

Παράδειγμα 1, 17

2. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΗΣ f ΣΕ ΣΥΝΟΛΟ A

α) Αν η f διατηρεί έναν τύπο σε όλο το A , τότε εξετάζουμε αν ο τύπος της, είναι τύπος συνεχούς συνάρτησης (βλέπε παραπάνω «βασικές απλές συνεχείς συναρτήσεις», «συνέχεια και πράξεις» και «συνέχεια και σύνθεση») και απλά δικαιολογούμε με λόγια γιατί η f είναι συνεχής στο A .

Για να γίνει αυτό εύκολα πρέπει να χαρακτηρίσουμε τη συνάρτηση με έναν από τους παρακάτω χαρακτηρισμούς:

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Κάθε συνάρτηση που ο τύπος της δεν αναλύεται σε πολλαπλό θα είναι:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1. Σταθερή | ή |
| 2. Άθροισμα (ή διαφορά) συναρτήσεων | ή |
| 3. Γινόμενο αριθμού επί συνάρτηση | ή |
| 4. Γινόμενο συναρτήσεων | ή |
| 5. Πηλίκο συναρτήσεων | ή |
| 6. Δύναμη ή ρίζα | ή |
| 7. Ημίτονο | ή |
| 8. Συνημίτονο | ή |
| 9. Εφαπτομένη | ή |
| 10. Συνεφαπτομένη | ή |
| 11. Εκθετική | ή |
| 12. Λογαριθμική | ή |

Απλή ή σύνθετη (*)

Τέλος μπορεί μια συνάρτηση να χαρακτηρίζεται ως πολυωνυμική ή ρητή

Π.χ. η $f(x) = x^2 - 3x + 1$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, η $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ είναι

συνεχής στο $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών, η $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ είναι συνεχής στο

$\mathbb{R} - \{-2\}$ ως ρητή κ.τ.λ.

(*) Η $f(x) = \eta\mu(x^2 - 1)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών, κ.τ.λ.

β) Αν η f αλλάζει τύπο εντός του A (συνάρτηση πολλαπλού τύπου)

- Εντοπίζουμε τα **πιθανά σημεία ασυνέχειας**.

- **Δικαιολογούμε** (με λόγια) **τη συνέχειά της στα υποδιαστήματα που ορίζεται κάθε κλάδος της f , με εξαίρεση τα πιθανά σημεία ασυνέχειας**, στηριζόμενοι στις βασικές απλές συνεχείς συναρτήσεις κ.τ.λ.
- **Εξετάζουμε τη συνέχεια σε κάθε πιθανό σημείο ασυνέχειας χωριστά**, με βάση τον ορισμό (όρια κ.τ.λ.).

$$\text{Έτσι αν π.χ. } f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{αν } x \in (a, \beta] \\ f_2(x), & \text{αν } x \in (\beta, \gamma) \cup (\gamma, \delta] \\ \kappa, & \text{αν } x = \gamma \\ f_3(x), & \text{αν } x \in [\epsilon, \zeta] \end{cases} \quad \text{με } \kappa \in \mathbb{R}, \text{ τότε:}$$

Προσοχή στο «ανοικτό», καθώς το β είναι πιθανό σημείο ασυνέχειας

Πιθανά σημεία ασυνέχειας είναι τα β και γ .

Εξετάζουμε τη συνέχεια στα διαστήματα (a, β) , $(\beta, \gamma) \cup (\gamma, \delta]$ και $[\epsilon, \zeta]$, γράφοντας με λόγια κάθε φορά γιατί η f είναι συνεχής (π.χ. «η f είναι συνεχής στο (a, β) ως»).

Εξετάζουμε τη συνέχεια στα πιθανά σημεία ασυνέχειας β και γ , προσδιορίζοντας τα $f(\beta)$, $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x)$, $f(\gamma)$ και $\lim_{x \rightarrow \gamma} f(x)$

Η απάντησή μας δεν θα αφορά στο αν η f είναι ή όχι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, αλλά στο «πού» είναι συνεχής. Έτσι ανάλογα με τα ευρήματα θα απαντήσουμε: «Η f είναι συνεχής στο (τάδε σύνολο)».

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η φράση «μελετήστε την f ως προς τη συνέχεια», σημαίνει να εντοπίσουμε το «ευρύτερο» υποσύνολο του D_f , στο οποίο είναι συνεχής.

γ) Αν δεν γνωρίζουμε τον τύπο της f , αλλά κάποια σχέση που ικανοποιεί αυτή, προσπαθούμε να δείξουμε ότι για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (1) ή

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \quad \text{ή θέτοντας στην (1) όπου } x \text{ το } x_0 + h, \text{ να δείξουμε ότι}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \quad \text{ή κάτι παρόμοιο.}$$

Ιδιαίτερη αναφορά στη μέθοδο απόδειξης συνέχειας σε ασκήσεις με συναρτησιακές σχέσεις και άγνωστο τύπο f , γίνεται στο παράδειγμα 18

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στην περίπτωση που ζητάμε να δείξουμε ότι η f είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, γνήσιο υποσύνολο του D_f** (π.χ. η f να ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και να ζητάμε να δείξουμε ότι είναι συνεχής στο $[0, 4]$), τότε πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ για κάθε } x_0 \in A \text{ και επιπλέον } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

(βλέπε θεωρία «ορισμό συνέχειας σε κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, γνήσιο υποσύνολο του D_f »)

Παραδείγματα 2, 3, 4, 18, 19

3. ΟΤΑΝ ΖΗΤΑΜΕ ΝΑ ΔΕΙΞΟΥΜΕ ΟΤΙ ΜΙΑ ΕΞΙΣΩΣΗ $A(x)=B(x)$ (1) ΕΧΕΙ ΛΥΣΗ (ΡΙΖΑ) ΣΕ ΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Ένας τρόπος (θα δούμε και άλλους σε επόμενα κεφάλαια) είναι να εφαρμόσουμε το Θ. Bolzano σε κατάλληλη συνάρτηση και σε κατάλληλο διάστημα. Αλλιώς μπορούμε να προσδιορίσουμε το Σύνολο Τιμών κατάλληλης συνάρτησης και να ελέγξουμε αν το 0 ανήκει σε αυτό. Ειδικότερα:

α) Αν ζητάμε να δείξουμε ότι η (1) έχει τουλάχιστον μια λύση στο (α, β)

- Φέρνουμε (αν δεν είναι ήδη) την εξίσωση στη μορφή $A(x)-B(x)=0$
- Ορίζουμε συνάρτηση $f(x)=A(x)-B(x)$ στο $[\alpha, \beta]$.
- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ότι $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, οπότε από Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$, οπότε και η ισοδύναμή της (1), έχει τουλάχιστον μια ρίζα (λύση) στο (α, β) .

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν σε κάποια άσκηση δεν γνωρίζετε το πρόσημο του $f(\alpha)$ ούτε του $f(\beta)$, μην απογοητεύεστε. Πολλαπλασιάστε τα. Ίσως να γνωρίζετε το πρόσημο του γινομένου τους $f(\alpha) \cdot f(\beta)$.

β) Αν ζητάμε να δείξουμε ότι η (1) έχει τουλάχιστον μια λύση στο $[\alpha, \beta]$

Εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση α) είναι δυνατόν να βρούμε ότι $f(\alpha) \cdot f(\beta) \leq 0$. Τότε διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, η εξίσωση $f(x)=0$, οπότε και η ισοδύναμή της (1), έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α, β) (από Θ. Bolzano).
- Αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) = 0$, τότε $f(\alpha)=0$ ή $f(\beta)=0$, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$, άρα και η ισοδύναμή της (1), έχει ως ρίζα το α ή το β .

Άρα σε κάθε περίπτωση η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

γ) Αν ζητάμε να δείξουμε ότι η (1) έχει τουλάχιστον μια λύση στο $\mathbb{R}$ (ή σε ένα διάστημα (α, β) με την (1) να μην ορίζεται στα α και β)

Ένας τρόπος είναι να βρούμε, με δοκιμές, κατάλληλο διάστημα $[\kappa, \lambda] \subseteq \mathbb{R}$ (ή $[\kappa, \lambda] \subseteq (\alpha, \beta)$) όπου $f(\kappa) \cdot f(\lambda) < 0$ (και φυσικά f συνεχής σ' αυτό). Τότε η $f(x)=0$ θα έχει μια τουλάχιστον λύση στο (κ, λ) , άρα και στο $\mathbb{R}$ (ή στο (α, β)).

Ένας άλλος τρόπος είναι να πάρουμε τα όρια της f στο $-\infty$ και το $+\infty$ (ή στα α και β αντίστοιχα), με την ελπίδα αυτά να έχουν ετερόσημες τιμές. Αν π.χ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5 > 0$, τότε σύμφωνα με τη θεωρία ορίων, η συνάρτηση σε μια γειτονιά του $-\infty$ παίρνει το πρόσημο του ορίου της. Άρα υπάρχει αριθμός κ σε μια γειτονιά του $-\infty$ όπου $f(\kappa) > 0$.

Αν επιπλέον $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, τότε υπάρχει αριθμός λ σε μια γειτονιά του $+\infty$ όπου $f(\lambda) < 0$. Στο $[\kappa, \lambda]$ (χωρίς να το προσδιορίσουμε) εφαρμόζουμε Θ. Bolzano.

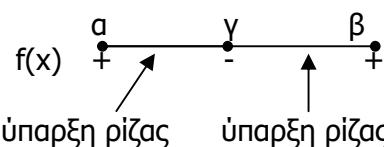
ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ

Ένας άλλος τρόπος είναι να προσδιορίσουμε το R_f (βλέπε προσδιορισμό R_f - Μεθοδολογία 4 παρακάτω) θεωρώντας κατάλληλο D_f , (ανάλογα την περίπτωση) και να δείξουμε ότι περιέχει το 0.

δ) Αν ζητάμε να δείξουμε ότι η (1) έχει τουλάχιστον δύο (ή περισσότερες)**λύσεις στο (α, β)**

Αρκεί να εφαρμόσουμε περισσότερα του ενός θεωρήματα Bolzano σε υποδιαστήματα του $[\alpha, \beta]$, που ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία.

Έτσι αν θέλουμε να δείξουμε την ύπαρξη δύο τουλάχιστον ριζών στο (α, β) και είναι $f(\alpha) > 0$ και $f(\beta) > 0$, αρκεί να βρούμε $\gamma \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(\gamma) < 0$ και να εφαρμόσουμε Θ. Bolzano στα $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$.

**ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ▼**

1. Άλλοι εναλλακτικοί τρόποι να μας ζητήσουν να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση στο (α, β) , είναι οι παρακάτω:

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον μια ρίζα ... κ.τ.λ. (δηλαδή να μη μας μιλάνε για εξίσωση, αλλά για συνάρτηση).

β) Να δείξετε ότι η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον άξονα x' στο (α, β) (ή στο $[\alpha, \beta]$) (ή τουλάχιστον δύο κοινά σημεία κ.τ.λ.).

2. Άλλοι εναλλακτικοί τρόποι να μας ζητήσουν να δείξουμε ότι η εξίσωση $A(x)=B(x)$ έχει λύση στο (α, β) , είναι οι παρακάτω:

α) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $A(x_0)=B(x_0)$.

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $A(x)$ και $B(x)$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο (x_0, y_0) , με $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

3. Υπάρχει περίπτωση το διάστημα (α, β) στο οποίο ζητάμε να έχει ρίζα η f , να μην είναι συγκεκριμένο, αλλά να πρέπει να το προσδιορίσουμε εμείς. Τότε παίρνουμε τις τιμές τις f σε διαδοχικούς ακέραιους, έως ότου βρούμε ακέραιους στους οποίους η f να παίρνει ετερόσημες τιμές. Έτσι αν για παράδειγμα θέλουμε να δείξουμε ότι η f έχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα, βρίσκουμε το $f(0)$ και στη συνέχεια τα $f(1), f(2), f(3)$ κ.τ.λ. έως ότου βρούμε $n \in \mathbb{N}$ όπου $f(n)$ ετερόσημο του $f(0)$. Τότε το κατάλληλο διάστημα για να εφαρμόσουμε Θ. Bolzano είναι το $[0, n]$.

4. Αν ζητάμε να δείξουμε ότι **υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $A(x_0)=\eta$** , όπου $A(x)$ παράσταση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και η ένας αριθμός, τότε μπορούμε να δοκιμάσουμε να αντιμετωπίσουμε την άσκηση με δύο τρόπους:

α) Με θεώρημα Bolzano (σκεφτόμενοι ότι το x_0 είναι ρίζα της συνάρτησης $f(x)=A(x)-\eta$).

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x)=A(x)-\eta$ στο $[a, \beta]$ και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano κατά τα γνωστά.

β) Με θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (σκεφτόμενοι ότι αρκεί να δείξουμε πως το η είναι τιμή της συνάρτησης $f(x)=A(x)$, $x \in (a, \beta)$).

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x)=A(x)$ στο $[a, \beta]$, δείχνουμε ότι $f(a) \neq f(\beta)$ και ότι η τιμή η βρίσκεται ανάμεσά τους, οπότε το ζητούμενο προκύπτει αμέσως από το συμπέρασμα του Θ. ενδιάμεσων τιμών (βλέπε παραδείγματα 8 και 10).

Παραδείγματα 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

4. **ΟΤΑΝ ΖΗΤΑΜΕ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**

Βασικές προϋποθέσεις για τον προσδιορισμό του συνόλου τιμών είναι:

- η συνάρτηση να είναι **συνεχής** στο πεδίο ορισμού της και
- να έχει **γνωστή μονοτονία**.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) Αν η f έχει σταθερή μονοτονία σε όλο το D_f

Τότε βρίσκουμε το σύνολο τιμών όπως περιγράψαμε στα σχόλια (στο τέλος των θεωρημάτων συνέχειας).

β) Αν η f αλλάζει μονοτονία μέσα στο D_f

Ο καλύτερος τρόπος είναι να βρούμε την εικόνα κάθε διαστήματος του πεδίου ορισμού, στο οποίο η f διατηρεί σταθερή μονοτονία και το τελικό σύνολο τιμών είναι η ένωση των εικόνων αυτών.

Αν το D_f είναι διάστημα $([a, \beta], (a, \beta], (a, \beta)$ κ.τ.λ.), η f είναι **συνεχής στο D_f** και **αλλάζει μονοτονία** μέσα σ' αυτό, μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών της με πιο σύντομο (αλλά λιγότερο εκμεταλλεύσιμο) τρόπο, ως εξής:

- Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ τα σημεία στα οποία η f αλλάζει μονοτονία.
- Έστω $f(a)$ ή $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, η τιμή της ή το όριο της στο κάτω άκρο του D_f , ανάλογα

αν το a είναι «κλειστό» ή «ανοικτό» και

- Έστω $f(\beta)$ ή $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$, η τιμή της ή το όριο της στο άνω άκρο του D_f , ανάλογα

αν το β είναι «κλειστό» ή «ανοικτό»

Τότε το σύνολο τιμών θα είναι ένα **διάστημα** με άκρα τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή από τις: $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a)$ ή $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ και $f(\beta)$ ή $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.

Όποιο άκρο του R_f προκύπτει από τιμή της f θα είναι «κλειστό», ενώ όποιο προκύπτει από όριο θα είναι «ανοικτό».

Παράδειγμα 12

5. ΠΡΟΣΗΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f ΣΤΟ D_f - ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΠΡΟΣΗΜΟΥ

Αν είναι δύσκολο να βρεθούν τα πρόσημα της f με τους κλασσικούς τρόπους και η f είναι **συνεχής** στο D_f , μπορούμε να αξιοποιήσουμε την παρατήρηση 3. της διατήρησης προσήμου, που αναφέραμε μετά το Θ. Bolzano. Συγκεκριμένα:

- Βρίσκουμε όλες τις ρίζες της f
- Σε καθένα από τα υποδιαστήματα του D_f που ορίζουν οι διαδοχικές της ρίζες, επιλέγουμε μια τιμή x_0 του x και βρίσκουμε το $f(x_0)$.
- Επειδή σύμφωνα με την παρατήρηση που αναφέραμε, σε καθένα από τα υποδιαστήματα αυτά η f διατηρεί σταθερό πρόσημο, το πρόσημο του $f(x_0)$, είναι και το πρόσημο της στο διάστημα αυτό. Άρα προσδιορίσαμε τα πρόσημα της f .

Παράδειγμα 13, 14

6. Άλλες Ασκήσεις

Τέλος υπάρχουν ασκήσεις με παραμετρικές συναρτήσεις που ζητούν την τιμή της παραμέτρου ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής ή άλλες ασκήσεις που αφορούν στα θεωρήματα συνέχειας και αντιμετωπίζονται κατά περίπτωση.

Παράδειγματα 15, 16

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Στα παρακάτω παραδείγματα ότι δίνεται με *πλάγια γραφή* αποτελεί τη σκέψη μας και δεν είναι απαραίτητο να γράφεται στη λύση της άσκησης.

1. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1| - |x-1|}{x}, & \text{αν } x \in [-5, 0) \cup (0, +\infty) \\ 2, & \text{αν } x = 0 \end{cases} \quad \text{Να}$$
 μελετήσετε τη συνέχειά της στα σημεία $-5, 1, 0$.

$$D_f = [-5, +\infty)$$

Στο -5 : Η συνάρτηση είναι συνεχής στο -5 ως ημίγειτονικό συνεχών καθώς σε μια γειτονιά του -5 που περιέχει το -5 (μόνο από δεξιά καθώς από αριστερά στο -5 δεν ορίζεται) ορίζεται με τον πρώτο κλάδο της.

Στο 1 : Όμοια με βάση τον πρώτο κλάδο της είναι συνεχής και στο 1 .

Στο 0 : Το 0 είναι πιθανό σημείο ασυνέχειας οπότε προσδιορίζουμε το $f(0)$ και το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\text{Είναι } f(0) = 2.$$

Επειδή το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν προσπαθήσουμε να το προσδιορίσουμε απ' ευθείας με ιδιότητες καταλήγουμε σε α.μ. $\frac{0}{0}$, κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων των απολύτων, ώστε να μπορέσουμε να «βγάλουμε» τα απόλυτα σε μια γειτονιά του 0 (βλέπε μεθοδολογία ορίων).

Σύμφωνα με τον διπλανό πίνακα, εκλέγοντας

$x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ είναι:

x	-5	-1	0	1	$+\infty$
x+1	-	$\oplus$	+	+	+
x-1	-	-	-	$\oplus$	+

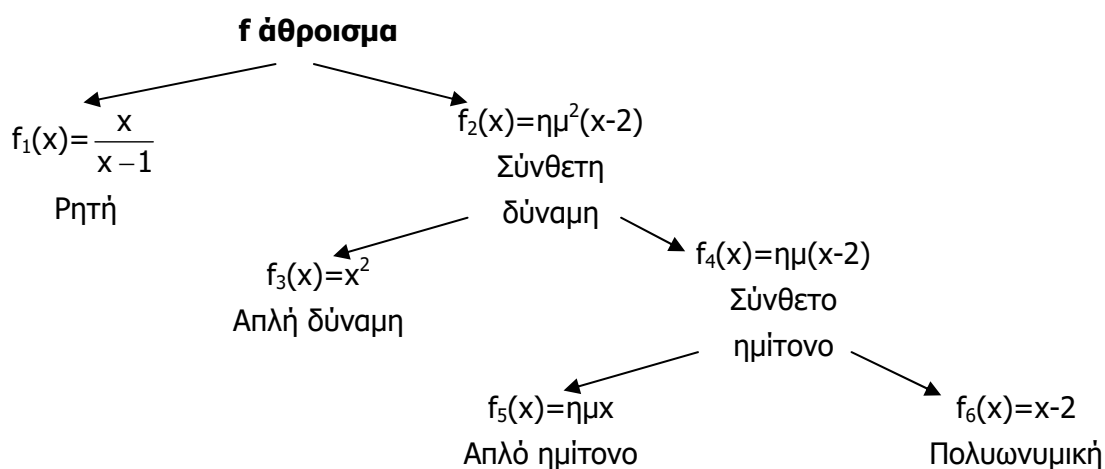
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) - (-x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, οπότε f συνεχής στο 0.

2. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x}{x-1} + \eta\mu^2(x-2)$

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Μπορούμε να κάνουμε μια διεξοδική δικαιολόγηση της συνέχειας της f, κατασκευάζοντας ένα δένδροδιάγραμμα, το οποίο αναλύει την f στις απλές βασικές συνεχείς συναρτήσεις από τις οποίες αποτελείται. Έτσι:



Ξεκινώντας από κάτω προς τα πάνω δικαιολογούμε τη συνέχεια ως εξής:

- Η f_5 είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως ημίτονο
- Η f_6 είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική
- Άρα η f_4 είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών ($f_5 \circ f_6$)
- Η f_3 είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως δύναμη
- Άρα η f_2 είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών ($f_3 \circ f_4$)
- Η f_1 είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$ ως ρητή
- Επομένως **η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$ ως άθροισμα συνεχών ($f_1 + f_2$).**

ΑΛΛΟΣ ΤΡΟΠΟΣ: Θα μπορούσαμε πιο σύντομα (είτε είχαμε κατασκευάσει το δένδροδιάγραμμα είτε όχι) να δικαιολογήσουμε τη συνέχεια ως εξής:

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{1\}$ ως άθροισμα της συνάρτησης $f_1(x)=\frac{x}{x-1}$ που είναι

συνεχής ως ρητή και της $f_2(x)=\eta\mu^2(x-2)$ που είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f_3(x)=x^2$ και $f_4(x)=\eta\mu(x-2)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Επειδή η παραπάνω παρουσίαση είναι χρονοβόρα, ιδιαίτερα σε ασκήσεις που δεν ενδιαφέρονται αποκλειστικά για τη συνέχεια, αλλά η συνέχεια αποτελεί απλά ένα βήμα για τη λύση της άσκησης, δικαιολογούμε συντομότερα τη συνέχεια ως εξής:

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{1\}$ ως άθροισμα συνεχών.

3. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} e^{\sigma\upsilon\nu x} & , \quad x \leq 0 \\ \frac{1-\sigma\upsilon\nu x + e \cdot \eta\mu x}{\eta\mu x} & , x > 0 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$. Πιθανό σημείο ασυνέχειας το 0.

- **Συνέχεια στο $(-\infty, 0)$:** Η f είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.
- **Συνέχεια στο $(0, +\infty)$:** Η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών.
- **Συνέχεια στο 0:** $f(0) = e^{\sigma\upsilon\nu 0} = e^1 = e$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x + e \cdot \eta\mu x}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} + e \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}} + e = \frac{0}{1} + e = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\sigma\upsilon\nu x} = e^{\sigma\upsilon\nu 0} = e^1 = e$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = e$ η f είναι συνεχής στο 0.

Άρα τελικά f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

4. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{4x^2}, & \text{αν } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{\eta\mu x}{2x}, & \text{αν } x \in (0, +\infty) - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$. Πιθανά σημεία ασυνέχειας τα 0 και $\frac{\pi}{2}$.

- **Συνέχεια στο $(-\infty, 0)$:** Η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών.

- **Συνέχεια στο $(0, +\infty) - \{\frac{\pi}{2}\}$:** Η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών.

- **Συνέχεια στο 0:** $f(0) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sin 2x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - (1 - 2\eta\mu^2 x)}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\eta\mu^2 x}{4x^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$, οπότε f συνεχής στο 0.

- **Συνέχεια στο $\frac{\pi}{2}$:** $f(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{2x} = \frac{\eta\mu \frac{\pi}{2}}{2 \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \neq f(\frac{\pi}{2})$, οπότε f ασυνεχής στο $\frac{\pi}{2}$.

Άρα τελικά f συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$.

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^{2005} + 1}{x + 2} + \frac{x^{2004} - 2}{x - 1} = 0$ (1) έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-2, 1)$.

Για $x \neq -2$ και $x \neq 1$, με απαλοιφή παρονομαστών, είναι κατά σειρά:

$$\frac{x^{2005} + 1}{x + 2} + \frac{x^{2004} - 2}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow \cancel{(x + 2)} \cdot (x - 1) \cdot \frac{x^{2005} + 1}{\cancel{x + 2}} + (x + 2) \cdot \cancel{(x - 1)} \cdot \frac{x^{2004} - 2}{\cancel{x - 1}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x^{2005} + 1) + (x + 2) \cdot (x^{2004} - 2) = 0 \quad (2).$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ΤΕΧΝΑΣΜΑ: Επειδή δεν μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση

$f(x) = \frac{x^{2005} + 1}{x + 2} + \frac{x^{2004} - 2}{x - 1}$ στο $[-2, 1]$ και να εφαρμόσουμε θ. Bolzano, αφού στα -2 και

1 δεν ορίζεται, θα ορίσουμε ως συνάρτηση το πρώτο μέλος της (2). Αν δείξουμε ότι η (2) έχει ρίζα x_0 στο $(-2, 1)$, τότε η x_0 θα είναι και ρίζα της (1) (καθώς το x_0 δεν θα είναι ούτε -2 ούτε 1).

Έτσι ορίζουμε την $f(x) = (x - 1) \cdot (x^{2005} + 1) + (x + 2) \cdot (x^{2004} - 2)$ στο $[-2, 1]$.

- f συνεχής στο $[-2, 1]$ ως πολυωνυμική.

- $f(-2)=\dots=-3\cdot(-2^{2005}+1)>0$, $f(1)=\dots=-3<0$, οπότε $f(-2)\cdot f(1)<0$.

Άρα από θ. Bolzano η (2) έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-2, 1)$ και επειδή η ρίζα δεν είναι το -2 ούτε το 1 , το ίδιο θα συμβαίνει και για την αρχική (1).

6. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού το $[0, 3]$, με $f([0, 3])=[0, 3]$ και $g([0, 3])=[0, 3]$ (δηλαδή έχουν κοινό σύνολο τιμών το $[0, 3]$). Αν $f(0)=0$ και $f(3)=3$, να δείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ δηλαδή η $f(x)-g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $[0, 3]$.

Ορίζουμε συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-g(x)$ στο $[0, 3]$. Είναι:

- φ συνεχής στο $[0, 3]$ ως διαφορά συνεχών.
- $\varphi(0)=f(0)-g(0)=0-g(0)=-g(0)$. Όμως από το σύνολο τιμών της g είναι $0\leq g(0)\leq 3\Leftrightarrow 0\geq -g(0)\geq -3$. Άρα $\varphi(0)\leq 0$ (1).

Επίσης $\varphi(3)=f(3)-g(3)=3-g(3)$. Όμως $0\leq g(3)\leq 3\Leftrightarrow 0\geq -g(3)\geq -3\Leftrightarrow 3\geq 3-g(3)\geq 3-3\Leftrightarrow 3\geq 3-g(3)\geq 0$. Άρα $\varphi(3)\geq 0$ (2).

Από (1) και (2) είναι $\varphi(0)\cdot\varphi(3)\leq 0$. Τότε:

- Αν $\varphi(0)\cdot\varphi(3)<0$, τότε από θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια λύση της $\varphi(x)=0$ στο $(0, 3)$.
- Αν $\varphi(0)\cdot\varphi(3)=0$, τότε $\varphi(0)=0$ ή $\varphi(3)=0$, οπότε η εξίσωση $\varphi(x)=0$, έχει ως λύση το 0 ή το 3 .

Άρα σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια λύση x_0 στο $[0, 3]$, οπότε $f(x_0)=g(x_0)$ και επομένως οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο (x_0, y_0) με $x_0\in[0, 3]$.

7. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^7+2x+\kappa$, με $\kappa\in\mathbb{R}$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο $\mathbb{R}$.

$D_f=\mathbb{R}$.

Προσπαθούμε σύμφωνα με τη μεθοδολογία να προσδιορίσουμε διάστημα $[a, \beta]$, στα άκρα του οποίου η f να παίρνει ετερόσημες τιμές. Είναι:

$\lim_{x\rightarrow-\infty} f(x)=\lim_{x\rightarrow-\infty} x^7=-\infty$. Άρα σε κάποια γειτονιά του $-\infty$ η f παίρνει αρνητικές τιμές,

δηλαδή υπάρχει αρνητικός αριθμός a με $f(a)<0$.

$\lim_{x\rightarrow+\infty} f(x)=\lim_{x\rightarrow+\infty} x^7=+\infty$. Άρα σε κάποια γειτονιά του $+\infty$ η f παίρνει θετικές τιμές,

δηλαδή υπάρχει θετικός αριθμός β με $f(\beta)>0$.

Στο $[a, \beta]$ εφαρμόζουμε θ. Bolzano καθώς f συνεχής ως πολυωνυμική και $f(a)\cdot f(\beta)<0$.

Άρα η f έχει τουλάχιστον μια λύση στο (a, β) , οπότε και στο $\mathbb{R}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

Η απόδειξη γίνεται όπως στο παραπάνω παράδειγμα.

8. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$ και $\kappa, \lambda, \mu \in (0, +\infty)$ να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{\kappa}{x-\alpha} + \frac{\lambda}{x-\beta} + \frac{\mu}{x-\gamma} = 0 \quad (1),$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες στο (α, γ) .

Για $x \neq \alpha, x \neq \beta$ και $x \neq \gamma$, με απαλοιφή παρονομαστών έχουμε ότι:

$$(1) \Leftrightarrow (x-\beta) \cdot (x-\gamma) \cdot \kappa + (x-\alpha) \cdot (x-\gamma) \cdot \lambda + (x-\alpha) \cdot (x-\beta) \cdot \mu = 0.$$

Υποψιαζόμαστε ότι θα εφαρμόσουμε *θ. Bolzano* στα διαστήματα $[a, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$ που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία.

Ορίζουμε $f(x) = (x-\beta) \cdot (x-\gamma) \cdot \kappa + (x-\alpha) \cdot (x-\gamma) \cdot \lambda + (x-\alpha) \cdot (x-\beta) \cdot \mu$ που είναι συνεχής ως πολυωνυμική στα $[a, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$.

$$f(\alpha) = (\alpha-\beta) \cdot (\alpha-\gamma) \cdot \kappa + 0 + 0 = (\alpha-\beta) \cdot (\alpha-\gamma) \cdot \kappa > 0 \quad (\text{με βάση την υπόθεση})$$

$$f(\beta) = 0 + (\beta-\alpha) \cdot (\beta-\gamma) \cdot \lambda + 0 = (\beta-\alpha) \cdot (\beta-\gamma) \cdot \lambda < 0 \quad \text{και}$$

$$f(\gamma) = 0 + 0 + (\gamma-\alpha) \cdot (\gamma-\beta) \cdot \mu = (\gamma-\alpha) \cdot (\gamma-\beta) \cdot \mu > 0$$

Άρα με εφαρμογή του *θ. Bolzano* στα $[a, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$ η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β) και τουλάχιστον μία ρίζα στο (β, γ) .

Όμως η εξίσωση αυτή είναι πολυωνυμική δευτέρου βαθμού, οπότε έχει το πολύ δύο ρίζες.

Άρα τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο (α, γ) και αφού οι ρίζες είναι διαφορετικές των α, β και γ , η (1) έχει ακριβώς δύο ρίζες στο (α, γ) .

9. Δείξτε ότι για κάποιο θετικό αριθμό ξ μικρότερο του 4 ισχύει $3\sin\xi + 1 = \xi$

Σημαντική ερώτηση: Τι κάνει το ξ ;

1η απάντηση: Επαληθεύει την εξίσωση $3\sin x + 1 = x$, οπότε μηδενίζει τη συνάρτηση $f(x) = 3\sin x + 1 - x \rightarrow 1\text{ος τρόπος} \rightarrow \text{Με } \theta. \text{ Bolzano για την } f$

2η απάντηση: Δίνει στην παράσταση $3\sin x - x$ την τιμή -1 (καθώς από τη δοσμένη σχέση έχουμε $3\sin\xi - \xi = -1$) $\rightarrow 2\text{ος τρόπος} \rightarrow \theta. \text{ ενδιάμεσων τιμών για την } g(x) = 3\sin x - x$

1ος τρόπος (Θ. Bolzano): Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $3\sin x + 1 = x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 4)$.

$$3\sin x + 1 = x \Leftrightarrow 3\sin x + 1 - x = 0.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = 3\sin x + 1 - x$ στο $[0, 4]$. Είναι:

- f συνεχής στο $[0, 4]$ ως άθροισμα συνεχών.
- $f(0) = 3\sin 0 + 1 - 0 = 3 + 1 - 0 = 4 > 0$ και $f(4) = 3\sin 4 + 1 - 4 = 3\sin 4 - 3 = 3 \cdot (\sin 4 - 1) < 0$ γιατί $\sin 4 < 1$ (4 σημαίνει 4 rad, γωνία που βρίσκεται στο $(\pi, \frac{3\pi}{2})$).

$$\text{Έτσι } f(0) \cdot f(4) < 0.$$

Άρα από *θ. Bolzano* υπάρχει $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\sin\xi + 1 - \xi = 0 \Leftrightarrow 3\sin\xi + 1 = \xi$.

2ος τρόπος (Θ. Ε. Τ.): Ορίζουμε συνάρτηση $g(x) = 3\sin x - x$ στο $[0, 4]$ η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών.

Είναι $g(0)=3\sin 0-0=3$ και $g(4)=3\sin 4-4<-4$ καθώς $\sin 4=\sin(4\text{rad})<0$.

Άρα $g(0)\neq g(4)$ και το -1 είναι μεταξύ των $g(0)$ και $g(4)$. Άρα σύμφωνα με το Θ. ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $\xi\in(0, 4)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=-1\Leftrightarrow 3\sin \xi-\xi=-1\Leftrightarrow 3\sin \xi+1=\xi$.

10. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f:[0, 1]\rightarrow\mathbb{R}$ και $g:[0, 1]\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(0)=g(1)$, $f(1)=g(0)$ και $g(0)\neq g(1)$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0\in(0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$, δηλαδή η $f(x)-g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$.

Ορίζουμε συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ στο $[0, 1]$ και έχουμε:

- h συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών.
- $h(0)=f(0)-g(0)=g(1)-g(0)$, $h(1)=f(1)-g(1)=g(0)-g(1)$, οπότε
 $h(0)\cdot h(1)=[g(1)-g(0)]\cdot[g(0)-g(1)]=-[g(0)-g(1)]^2<0$ καθώς $g(0)\neq g(1)$.

Άρα από θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0, 1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$.

11. Αν f συνάρτηση συνεχής στο $[a, \beta]$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[a, \beta]$:

$$f(x_0)=\frac{2f(a)+3f(\beta)}{5} \quad (1).$$

Μπορούμε να αποδείξουμε το ζητούμενο ορίζοντας τη συνάρτηση $5f(x)-2f(a)-3f(\beta)$ και εφαρμόζοντας γι' αυτήν το Θ. Bolzano.

Εδώ θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε το ζητούμενο με τη βοήθεια του Θ. ενδιαμέσων τιμών, παίρνοντας περιπτώσεις αν $f(a)=f(\beta)$ ή $f(a)\neq f(\beta)$, καθώς όπως αναφέραμε σε παρατήρηση στη θεωρία, κάθε τιμή μορφής $\frac{\kappa\cdot f(a)+\lambda\cdot f(\beta)}{\kappa+\lambda}$, με $f(a)\neq f(\beta)$, βρίσκεται ανάμεσα στα $f(a)$ και $f(\beta)$.

i) Αν $f(a)=f(\beta)$, τότε $(1) \Leftrightarrow f(x_0)=\frac{2f(a)+3f(a)}{5}=\frac{5f(a)}{5}=f(a)=f(\beta)$. Προφανώς

υπάρχει τέτοιο x_0 και μάλιστα δύο τουλάχιστον, τα a και β .

ii) Αν $f(a)\neq f(\beta)$, υποθέτουμε ότι $f(a)<f(\beta)$. Ισχύουν κατά σειρά:

$$f(a)=f(a)<f(\beta) \Leftrightarrow 2f(a)=2f(a)<2f(\beta)$$

$$f(a)<f(\beta)=f(\beta) \Leftrightarrow 3f(a)<3f(\beta)=3f(\beta)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε: $5f(a)<2f(a)+3f(\beta)<5f(\beta)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5f(a)}{5}<\frac{2f(a)+3f(\beta)}{5}<\frac{5f(\beta)}{5} \Leftrightarrow f(a)<\frac{2f(a)+3f(\beta)}{5}<f(\beta).$$

Αφού η τιμή $\frac{2f(a)+3f(\beta)}{5}$ βρίσκεται ανάμεσα στα $f(a)$ και $f(\beta)$ και η f είναι συνεχής

στο $[a, \beta]$, από Θ. ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_0\in(a, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_0)=\frac{2f(a)+3f(\beta)}{5}.$$

Όμοια αν $f(a)>f(\beta)$.

Από i) και ii) προκύπτει ότι σε κάθε περίπτωση υπάρχει $x_0 \in [a, b]$:

$$f(x_0) = \frac{2f(a) + 3f(b)}{5}.$$

12. Αν g συνάρτηση συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(1, e]$ με $g(e) = \frac{1}{e-1}$, $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, e]$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$, να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \ln g(x) - 1$.

Αφού $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, e]$, η f θα έχει πεδίο ορισμού το $(1, e]$.

f συνεχής στο $(1, e]$ ως σύνθεση συνεχών.

Προσδιορίζουμε τη μονοτονία της f : Για κάθε $x_1, x_2 \in (1, e]$ με $x_1 < x_2$ είναι $g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow \ln g(x_1) > \ln g(x_2) \Leftrightarrow \ln g(x_1) - 1 > \ln g(x_2) - 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, e]$. Σύμφωνα με τη μεθοδολογία είναι $R(f) = [f(e), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x))$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln g(x) - 1)$, οπότε θέτοντας $u = g(x)$ είναι $\lim_{x \rightarrow 1^+} u = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$.

Έτσι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (\ln u - 1) = +\infty$.

Άρα $R_f = [\ln g(e) - 1, +\infty) = [\ln \frac{1}{e-1}, +\infty) = [\ln(e-1)^{-1}, +\infty) = [-\ln(e-1), +\infty)$.

13. Αν f συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο $[0, \pi]$ με $f^2(x) - 2x \cdot f(x) = \eta \mu^2 x - x^2$, για κάθε $x \in [0, \pi]$, να βρεθεί η f .

$$\begin{aligned} f^2(x) - 2x \cdot f(x) &= \eta \mu^2 x - x^2 \Leftrightarrow f^2(x) - 2x \cdot f(x) + x^2 = \eta \mu^2 x \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = \eta \mu^2 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(f(x) - x)^2} = \sqrt{\eta \mu^2 x} \Leftrightarrow |f(x) - x| = |\eta \mu x| \stackrel{\eta \mu x \geq 0}{\Leftrightarrow \text{στο } [0, \pi]} |f(x) - x| = \eta \mu x \Leftrightarrow |g(x)| = \eta \mu x \quad (1), \end{aligned}$$

θέτοντας ως $g(x) = f(x) - x$, $x \in [0, \pi]$.

Αν υπάρχει $x_0 \in [0, \pi]$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$, από (1) θα είναι $\eta \mu x_0 = 0 \stackrel{x_0 \in [0, \pi]}{\Leftrightarrow} x_0 = 0$ ή $x_0 = \pi$.

Επειδή η g είναι συνεχής, ως διαφορά συνεχών, θα διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα που δημιουργούν στο πεδίο ορισμού της οι διαδοχικές ρίζες της, δηλαδή στο $(0, \pi)$.

Έτσι αν $g(x) > 0$ στο $(0, \pi)$, τότε (1) $\Leftrightarrow g(x) = \eta \mu x$, τύπος που ισχύει και για $x=0$ ή $x=\pi$ (αφού δίνει πράγματι $g(0)=0$ και $g(\pi)=0$). Άρα $g(x) = \eta \mu x$, για κάθε $x \in [0, \pi]$, οπότε $f(x) - x = \eta \mu x \Leftrightarrow f(x) = x + \eta \mu x$, για κάθε $x \in [0, \pi]$.

Αν $g(x) < 0$ στο $(0, \pi)$, τότε (1) $\Leftrightarrow -g(x) = \eta \mu x \Leftrightarrow g(x) = -\eta \mu x$, τύπος που ισχύει και για $x=0$ ή $x=\pi$ (αφού δίνει πράγματι $g(0)=0$ και $g(\pi)=0$). Άρα $g(x) = -\eta \mu x$, για κάθε $x \in [0, \pi]$, οπότε $f(x) - x = -\eta \mu x \Leftrightarrow f(x) = x - \eta \mu x$, για κάθε $x \in [0, \pi]$.

Άρα τελικά $f(x) = x + \eta \mu x$ ή $f(x) = x - \eta \mu x$.

14. Να βρεθούν τα πρόσημα της συνάρτησης $f(x) = \eta \mu(x + \frac{\pi}{4})$ στο $[-\frac{\pi}{4}, \pi]$.

Προσδιορίζουμε τις ρίζες της συνάρτησης στο $[-\frac{\pi}{4}, \pi]$.

$$\text{Έστω } f(x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu(x+\frac{\pi}{4})=0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi \Leftrightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1).$$

Όμως $x \in [-\frac{\pi}{4}, \pi] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq k\pi - \frac{\pi}{4} \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq k\pi \leq \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{5}{4}$. Όμως $k \in \mathbb{Z}$, οπότε $k=0$ ή 1 .

Για $k=0$ από (1) έχουμε $x=-\frac{\pi}{4}$ ενώ για $k=1$ έχουμε $x=\frac{3\pi}{4}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-\frac{\pi}{4}, \pi]$ ως σύνθεση συνεχών, σύμφωνα με τη διατήρηση προσήμου, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα υποδιαστήματα του D_f που ορίζουν οι διαδοχικές της ρίζες.

Στο διάστημα $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ επιλέγουμε $x_0=0$ και βρίσκουμε ότι $f(0)=\eta\mu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$.

Στο διάστημα $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$ επιλέγουμε το $x_0=\frac{4\pi}{5}$ (είναι $\frac{3\pi}{4}<\frac{4\pi}{5}<\pi$ όπως μπορούμε να δείξουμε) και βρίσκουμε $f(\frac{4\pi}{5})=\eta\mu(\frac{4\pi}{5}+\frac{\pi}{4})=\eta\mu\frac{21\pi}{20}<0$ καθώς το $\frac{21\pi}{20}$ καταλήγει στο 3ο τεταρτημόριο. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
x_0	0	$\frac{4\pi}{5}$	
$f(x_0)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}>0$	$\eta\mu\frac{21\pi}{20}<0$	
$f(x)$	$\oplus$	$\oplus$	$-$

Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ και

$f(x)<0$ για κάθε $x \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$.

15. Να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \frac{3a}{x^3}+1, & \text{αν } 0 < x \leq 2 \\ \frac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4}, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$ να είναι συνεχής.

Παραλλαγή θέματος Γενικών εξετάσεων 1989

$D_f=(0, +\infty)$.

Η f είναι, για κάθε τιμή του $a \in \mathbb{R}$, συνεχής στο $(0, 2)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και στο $(2, +\infty)$ ως ηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Για να είναι συνεχής (δηλαδή στο D_f) πρέπει και αρκεί να είναι συνεχής και στο 2,

$$\text{δηλαδή } \begin{cases} f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \text{ και} \\ f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \end{cases} \text{ . Είναι:}$$

$$f(2) = \frac{3a}{2^3} + 1 = \frac{3a}{8} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{3a}{x^3} + 1 \right) = \frac{3a}{8} + 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4} \stackrel{\text{α.μ. } 0}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(1 - \sqrt{x-1}) \cdot (1 + \sqrt{x-1})}{(x-2) \cdot (x+2) \cdot (1 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - (\sqrt{x-1})^2}{(x-2) \cdot (x+2) \cdot (1 + \sqrt{x-1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - x}{(x-2) \cdot (x+2) \cdot (1 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)}{(x-2) \cdot (x+2) \cdot (1 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{(x+2) \cdot (1 + \sqrt{x-1})} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα πρέπει και αρκεί } \frac{3a}{8} + 1 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow 3a + 8 = -1 \Leftrightarrow 3a = -9 \Leftrightarrow a = -3.$$

16. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{4} - \eta\mu\pi x + 3$, $x \in (-2, 2)$ μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{7}{3}$.

Η f είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$\text{Επίσης: } f(-2) = -\frac{8}{4} - \eta\mu(-2\pi) + 3 = -2 - 0 + 3 = 1$$

$$f(2) = \frac{8}{4} - \eta\mu 2\pi + 3 = 2 - 0 + 3 = 5$$

Επειδή $f(-2) \neq f(2)$, η f όταν $x \in (-2, 2)$ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ $f(-2)$ και $f(2)$, δηλαδή μεταξύ 1 και 5, άρα και την τιμή $\frac{7}{3}$.

Δραστηριότητα

Αν υποψιαζόμασταν ότι η f μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{7}{3}$ ή μας έλεγαν «δείξτε ότι μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{7}{3}$ », η απόδειξη θα μπορούσε να γίνει και με θ. Bolzano.
Πώς;

17. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2)=1$ και $|f(x)-1| \leq |x-2|$ (1), για κάθε $x \in (1, 3)$.
Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 2.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

Για κάθε $x \in (1, 3)$ είναι: $(1) \Leftrightarrow |f(x)-f(2)| \leq |x-2| \Leftrightarrow -|x-2| \leq f(x)-f(2) \leq |x-2|$.

Όμως $\lim_{x \rightarrow 2} |x-2| = \lim_{x \rightarrow 2} (-|x-2|) = 0$. Άρα από κριτήριο παρεμβολής είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - f(2)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overset{\text{ιδιοτητα οριων}}{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)} . \text{ Άρα } f \text{ συνεχής στο } 2.$$

18. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο 0, για την οποία ισχύει ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (1), για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $x = x_0 + h$, (για να αξιοποιήσουμε την (1)), οπότε $h = x - x_0$ και επομένως $\lim_{x \rightarrow x_0} h = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = x_0 - x_0 = 0$.

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) \stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h) \stackrel{\substack{f(x_0) \text{ ανεξάρτητο του } h \\ f \text{ συνεχής στο } 0}}{=} f(x_0) + f(0) \quad (2)$$

Όμως από την (1) για $x=y=0$ έχουμε $f(0)=f(0)+f(0) \Leftrightarrow f(0)=0$.

Άρα η (2) δίνει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

19. Αν $f^3(x)+5f(x)=6x+1$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι η f είναι συνεχής το $\mathbb{R}$.

Σκέψη

Η γενική ιδέα είναι να θέσουμε στη συναρτησιακή σχέση όπου x το x_0 δηλαδή να προκύψει η σχέση $f^3(x_0)+5f(x_0)=6x_0+1$ (2), μετά να αφαιρέσουμε (1)-(2), να λύσουμε τη σχέση που προκύπτει ως προς $f(x)-f(x_0)$ και στη συνέχεια να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0))$ με το κριτήριο παρεμβολής. Έτσι:

Λύση

Η (1) για $x=x_0$ δίνει $f^3(x_0)+5f(x_0)=6x_0+1$ (2)

$$(1)-(2) \Leftrightarrow f^3(x)+5f(x)-f^3(x_0)-5f(x_0)=6x+1-6x_0-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^3(x) - f^3(x_0) + 5f(x) - 5f(x_0) = 6x - 6x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x)-f(x_0)) \cdot (f^2(x)+f(x) \cdot f(x_0)+f^2(x_0)) + 5 \cdot (f(x)-f(x_0)) = 6 \cdot (x-x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x)-f(x_0)) \cdot (f^2(x)+f(x) \cdot f(x_0)+f^2(x_0)+5) = 6 \cdot (x-x_0) \Leftrightarrow$$

θετικό, άρα η παρένθεση είναι μεγαλύτερη του 5

$$\Leftrightarrow f(x)-f(x_0) = \frac{6 \cdot (x-x_0)}{f^2(x)+f(x) \cdot f(x_0)+f^2(x_0)+5}.$$

$$\text{Άρα } |f(x)-f(x_0)| = \left| \frac{6 \cdot (x-x_0)}{f^2(x)+f(x) \cdot f(x_0)+f^2(x_0)+5} \right| = \frac{6 \cdot |x-x_0|}{|f^2(x)+f(x) \cdot f(x_0)+f^2(x_0)+5|} \leq$$

$$\leq 6 \cdot |x-x_0|$$

$$\text{Έτσι } -6 \cdot |x-x_0| \leq f(x)-f(x_0) \leq 6 \cdot |x-x_0|.$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow x_0} (-6 \cdot |x-x_0|) = \lim_{x \rightarrow x_0} (6 \cdot |x-x_0|) = 0$, οπότε από κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \text{ για κάθε } x_0 \in \mathbb{R}. \text{ Άρα } f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Εδώ θα βρούμε χρήσιμες προτάσεις (με τις αποδείξεις τους) που **δεν υπάρχουν** στο σχολικό βιβλίο. Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια από αυτές κατά τη λύση μιας άσκησης, **θα πρέπει πρώτα να την αποδείξουμε.**

1. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε και η αντίστροφή της είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α) Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow R$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Ως γνωστόν η f είναι και "1-1" οπότε υπάρχει η αντίστροφή της $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$.

Έστω $y_1, y_2 \in f(A)$ τέτοια ώστε $y_1 < y_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ αφού f γν.αύξουσα $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, αφού $x = f^{-1}(y)$.

Επομένως η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η απόδειξη γίνεται με όμοιο τρόπο αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

2. Προσδιορισμός κοινών σημείων C_f και $C_{f^{-1}}$ όταν f γνησίως αύξουσα

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε ισχύει ότι τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι τα κοινά σημεία της C_f (ή της $C_{f^{-1}}$) με τη διχοτόμο $y=x$ της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

Άρα αν γνωρίζουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, για να βρούμε τα κοινά σημεία των

C_f και $C_{f^{-1}}$, αρκεί να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}, x \in D_f$ ή το $\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ y = x \end{cases}, x \in D_{f^{-1}}$

(αφού όμως πρώτα αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση).

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το 1ο σύστημα δίνει τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Όμοια γίνεται η απόδειξη και για το 2ο σύστημα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 1

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι και "1-1", οπότε θα αντιστρέφεται.

Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$.

($\Leftarrow$) Έστω x_0 για το οποίο ισχύει $f(x_0) = x_0$. Τότε $x_0 = f^{-1}(x_0)$.

Άρα ισχύει $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$.

($\Rightarrow$) Έστω x_0 για το οποίο ισχύει $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$ (1). Θα δείξουμε (με απαγωγή σε άτοπο) ότι $f(x_0) = x_0$.

Έστω ότι για το x_0 ισχύει ότι $f(x_0) \neq x_0$ και συγκεκριμένα έστω ότι $f(x_0) > x_0$ (2).

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι γνησίως αύξουσα και η f^{-1} (όπως έχουμε ήδη αποδείξει) οπότε:

$$(2) \Leftrightarrow f^{-1}(f(x_0)) > f^{-1}(x_0) \Leftrightarrow x_0 > f^{-1}(x_0) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x_0 > f(x_0) \text{ \textbf{άτοπο} λόγω της (2).}$$

Όμοια αν $f(x_0) < x_0$.

Αργότερα, στις παραγώγους, στο Παράρτημα του ΤΕΥΧΟΥΣ II θα δούμε απλούστερες αποδείξεις για την παραπάνω πρόταση με τη βοήθεια των παραγώγων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 2 (καλύτερη)

(Η απόδειξη αυτή δεν είναι ανάγκη να γίνει θεωρητικά, αλλά μπορεί να γίνει για οποιαδήποτε συγκεκριμένη άσκηση, κατά τη λύση της)

Γνωρίζουμε ότι τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ προσδιορίζονται από τις λύσεις του

$$\text{συστήματος } \begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \text{ ή ισοδύναμα } \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = x \end{cases} \quad (\Sigma_1).$$

$$\text{Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι } (\Sigma_1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y + f(y) = x + f(x) \end{cases} \quad (\Sigma_2).$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $h(u) = u + f(u)$. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, αποδεικνύουμε εύκολα (με κατασκευή) ότι και η h είναι γνησίως αύξουσα οπότε και "1-1".

$$\text{Τότε } (2) \Leftrightarrow h(y) = h(x) \Leftrightarrow y = x. \text{ Έτσι το σύστημα } (\Sigma_2) \text{ είναι ισοδύναμο με το } \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases},$$

δηλαδή τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, όταν η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y=x$.

3. Αν οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, τότε αυτό βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο $y=x$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν κοινό σημείο $M(a, \beta)$ εκτός της $y=x$, δηλαδή $a \neq \beta$. Τότε το

$$(a, \beta) \text{ θα επαλήθευε το σύστημα } \begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \text{ δηλαδή θα ίσχυαν κατά σειρά οι σχέσεις}$$

$$\begin{cases} \beta = f(a) \\ \beta = f^{-1}(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(\beta) = a \\ f(\beta) = a \end{cases} \text{ οπότε οι } C_f \text{ και } C_{f^{-1}} \text{ θα είχαν και άλλο κοινό σημείο, το}$$

$N(\beta, a)$, άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. Άρα το μοναδικό κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο $y=x$.

4. Αν f συνεχής σε διάστημα Δ και η C_f δεν τέμνει τη διχοτόμο $y=x$ στο Δ , τότε οι C_f και $C_{f^{-1}}$ δεν έχουν κοινό σημείο στο Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι η C_f δεν τέμνει την $y=x$ στο Δ , αλλά οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν κοινό σημείο το (a, β) με $a < \beta$ ($a \in \Delta$). Τότε είναι $f(a) = \beta$ (1) και $f^{-1}(\beta) = a \Leftrightarrow f(\beta) = a$ (2).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[a, \beta]$. Ισχύουν:

$g(a) = f(a) - a \stackrel{(1)}{=} \beta - a > 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \beta \stackrel{(2)}{=} a - \beta < 0$. Άρα $g(a) \cdot g(\beta) < 0$ και επομένως από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$. Άρα η C_f τέμνει την $y=x$ στο x_0 , άτοπο.

Όμοια αν $a > \beta$.

5. Αν f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και είναι συναρτήσεις "1-1", τότε ορίζεται και η συνάρτηση $g \circ f$ η οποία είναι "1-1" και ισχύει ότι $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Είναι $D_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ f(x) \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} = \mathbb{R}$, άρα ορίζεται η $g \circ f$ στο $\mathbb{R}$.
- Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Leftrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Leftrightarrow$
 $\stackrel{g \text{ "1-1" }}{\Leftrightarrow} f(x_1) = f(x_2) \stackrel{f \text{ "1-1" }}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$. Άρα η $g \circ f$ είναι "1-1", οπότε αντιστρέφεται.
- Ισχύουν κατά σειρά οι ισοδυναμίες: $(g \circ f)^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow y = g(f(x)) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow g^{-1}(y) = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(g^{-1}(y)) = x \Leftrightarrow (f^{-1} \circ g^{-1})(y) = x$
 Άρα $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

6. Δοο προτάσεις που εξασφαλίζουν ότι το όριο μιας συνάρτησης είναι άπειρο

- α)** $\left. \begin{matrix} \text{Αν } \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ και} \\ f(x) > 0 \text{ σε γειτονιά του } \xi \end{matrix} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty \quad \text{ΚΑΙ}$
- β)** $\left. \begin{matrix} \text{Αν } \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ και} \\ f(x) < 0 \text{ σε γειτονιά του } \xi \end{matrix} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty$

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

α) Η απόδειξη γίνεται ως εξής:

$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = +\infty$ καθώς $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = 0$ με $\frac{1}{f(x)} > 0$ σε γειτονιά του ξ .

β) Όμοια.

7. Δυο ισοδυναμίες στα όρια που χρήζουν προσοχής

Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0 \quad \text{και στην περίπτωση αυτή το } \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$$

υπάρχει σίγουρα είτε ισχύει η μία ισότητα είτε η άλλη.

$$\beta) \lim_{x \rightarrow \xi} (f(x))^{\nu} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0 \quad \text{και στην περίπτωση αυτή το } \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$$

υπάρχει σίγουρα είτε ισχύει η μία ισότητα είτε η άλλη.

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

α) Θα δείξουμε το ευθύ, δηλαδή ότι αν $\lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$ (καθώς το

αντίστροφο στην παραπάνω ισοδυναμία είναι προφανές).

Έστω ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)| = 0$.

Είναι $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ με $\lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow \xi} (-|f(x)|) = 0$, οπότε από κριτήριο

παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$.

β) Θα δείξουμε το ευθύ, δηλαδή ότι αν $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x))^{\nu} = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$ (καθώς το

αντίστροφο στην παραπάνω ισοδυναμία είναι προφανές).

Έστω ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x))^{\nu} = 0$.

Είναι $-\sqrt[\nu]{|f(x)|^{\nu}} = -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| = \sqrt[\nu]{|f(x)|^{\nu}}$ με

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \left(-\sqrt[\nu]{|f(x)|^{\nu}} \right) = -\sqrt[\nu]{\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x))^{\nu}} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \xi} \sqrt[\nu]{|f(x)|^{\nu}} = \sqrt[\nu]{\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x))^{\nu}} = 0, \text{ οπότε από}$$

κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$.

8. Το κριτήριο παρεμβολής στην περίπτωση μη πεπερασμένων ορίων

Το κριτήριο παρεμβολής στην περίπτωση απείρων ορίων διατυπώνεται ως εξής::

$$\alpha) \left. \begin{array}{l} \text{Αν } f(x) \leq g(x) \text{ σε γειτονιά του } \xi \\ \text{και } \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty$$

$$\beta) \left. \begin{array}{l} \text{Αν } f(x) \leq g(x) \text{ σε γειτονιά του } \xi \\ \text{και } \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = +\infty$$

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

α) Αφού $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = -\infty$, θα είναι $g(x) < 0$ σε κάποια γειτονιά του ξ . Άρα θα υπάρχει

γειτονιά του ξ όπου $f(x) < 0$ (καθώς $f(x) \leq g(x)$ «κοντά στο ξ »). Τότε η δοσμένη ανίσωση

γίνεται ισοδύναμα $\frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{g(x)}$ και τελικά $0 > \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{g(x)}$ (1) με $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{g(x)} = 0$. Άρα από

τη σχέση (1) με κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Στη συνέχεια, αφού $f(x) < 0$ σε γειτονιά του ξ , σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση,

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = -\infty.$$

β) Όμοια.

9. Αν f συνεχής σε διάστημα Δ και συνάρτηση «1-1», τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

("1-1" $\nRightarrow$ γνησίως μονότονη, όμως "1-1" και συνεχής $\Rightarrow$ γνησίως μονότονη)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω f συνάρτηση συνεχής και «1-1» σε διάστημα Δ .

Έστω επίσης $x_1, x_2, x_3 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 < x_3$. Θα δείξουμε ότι πάντα ισχύει μία από τις διατάξεις $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ ή $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$.

Αφού η f είναι «1-1» θα είναι τα $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ διαφορετικά ανά δύο. Άρα θα είναι:

α. $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ ή

β. $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ ή

γ. $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$ ή

δ. $f(x_2) < f(x_3) < f(x_1)$ ή

ε. $f(x_3) < f(x_1) < f(x_2)$ ή

ζ. $f(x_3) < f(x_2) < f(x_1)$

Αν αποκλείσουμε τις περιπτώσεις β. γ. δ. ε. τότε θα ισχύουν οι α. ή ζ. οπότε η f θα είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα αντίστοιχα.

-Έστω ότι ισχύει η β. Τότε στο $[x_1, x_2]$ η f είναι συνεχής και $f(x_1) \neq f(x_2)$. Αφού $f(x_3) \in (f(x_1), f(x_2))$, από Θ.Ε.Τ. θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f(x_3)$. Τότε όμως ενώ $\xi \neq x_3$ (καθώς $x_3 \notin (x_1, x_2)$) είναι $f(\xi) = f(x_3)$, άτοπο αφού η f είναι «1-1».

Όμοια αποκλείονται και οι περιπτώσεις γ. δ. ε.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Άρα σε κάθε περίπτωση η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

10. Η αντίστροφη μιας συνεχούς και «1-1» συνάρτησης είναι συνεχής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $x, x_0 \in D_f$.

Ισχύει ότι $f^{-1}(f(x)) = x$, άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{-1}(f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 = f^{-1}(y_0)$ (1), όπου $y = f(x)$.

Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} y = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} f(x_0) = y_0$, οπότε η (1) δίνει ότι $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$, για κάθε $y_0 \in D_{f^{-1}}$, άρα η f^{-1} είναι συνεχής στο $D_{f^{-1}}$.

11. Δύο παρατηρήσεις που χρήζουν προσοχής

Τι συμπεράσματα έχουμε αν γνωρίζουμε ότι ισχύει:

- α) η σχέση $|f(x)| = |g(x)|$, για κάθε x σε διάστημα Δ ή
 β) η σχέση $f(x) \cdot g(x) = 0$, για κάθε x σε διάστημα Δ ;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- **Αν $|f(x)| = |g(x)|$, για κάθε x σε διάστημα Δ** , (π.χ. $|f(x)| = |x|$), τότε ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ $f(x) = \pm g(x)$, για κάθε $x \in \Delta$, όπως θα νόμιζε κανείς, αλλά μπορεί το $f(x)$ να είναι ίσο με $g(x)$ για κάποιες τιμές του x και με $-g(x)$ για τις υπόλοιπες τιμές του x .

$$\text{Έτσι } f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{για κάθε } x \in A \\ -g(x), & \text{για κάθε } x \in \Delta - A \end{cases} \quad \text{όπου } A \text{ κάποιο σύνολο (όχι}$$

απαραίτητα γνωστό).

Σε περίπτωση που επιπλέον η f είναι συνεχής και μη μηδενική, σύμφωνα με τη διατήρηση προσήμου, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ , το οποίο μπορούμε να προσδιορίσουμε αν γνωρίζουμε μια τιμή ή ένα όριο της f . Ίσως μετά μπορούμε να αποδείξουμε ότι από τον παραπάνω διπλό τύπο της f , η f παίρνει τις τιμές του ενός κλάδου για κάθε $x \in \Delta$.

Παρόμοιες παρατηρήσεις ισχύουν για σχέσεις όπως:

$$f^2(x) = g(x) \text{ με } g(x) \geq 0, \quad \text{ή} \quad f^2(x) = g^2(x)$$

οι οποίες ουσιαστικά καταλήγουν σε σχέσεις όπως η $|f(x)| = |g(x)|$.

- **Αν $f(x) \cdot g(x) = 0$, για κάθε x σε διάστημα Δ** , τότε ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ $f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$, για κάθε $x \in \Delta$, όπως θα νόμιζε κανείς, αλλά μπορεί το $f(x)$ να είναι ίσο με 0 για κάποιες τιμές του x και το $g(x)$ να είναι ίσο με 0 για τις υπόλοιπες τιμές του x στο Δ .

$$\text{Έτσι } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{για κάθε } x \in A \\ f_1(x), & \text{για κάθε } x \in \Delta - A \end{cases} \quad \text{και}$$

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{για κάθε } x \in A \\ 0, & \text{για κάθε } x \in \Delta - A \end{cases}$$

Παράδειγμα: Οι συναρτήσεις $f(x) = |x| + x$ και $g(x) = |x| - x$ δεν είναι μηδενικές στο $\mathbb{R}$ και όμως ισχύει ότι $f(x) \cdot g(x) = (|x| + x) \cdot (|x| - x) = |x|^2 - x^2 = x^2 - x^2 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

12. Κάθε συνάρτηση που εκφράζεται ως μηδενική επί φραγμένη, είναι μηδενική

Η παραπάνω πρόταση λέει ότι

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αν} \quad \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0 \quad \text{και} \\ \text{υπάρχει } M \geq 0, \text{ τέτοιο ώστε } |g(x)| \leq M, \text{ για κάθε } x \in D_g \end{array} \right\} \text{ΤΟΤΕ } \lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) \cdot g(x)) = 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι κατά σειρά $|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \cdot M$, οπότε από ιδιότητα απολύτων είναι $-|f(x)| \cdot M \leq f(x) \cdot g(x) \leq |f(x)| \cdot M$.

Όμως $\lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)| \cdot M = \lim_{x \rightarrow \xi} (-|f(x)| \cdot M) = 0$, οπότε από κριτήριο παρεμβολής είναι και

$$\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

13. Αν συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ανοικτό διάστημα (ξ_1, ξ_2) με $\xi_1, \xi_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ και ισχύουν ότι $\lim_{x \rightarrow \xi_1} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \xi_2} f(x) = +\infty$ ή αντίθετα, τότε $R_f = \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του $y \in \mathbb{R}$, π.χ. $y = a$, υπάρχει $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$, τέτοιο, ώστε $f(x_0) = a$ (δηλαδή ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - a$ έχει ρίζα $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$).

Είναι $\lim_{x \rightarrow \xi_1} g(x) = \lim_{x \rightarrow \xi_1} (f(x) - a) = -\infty$, οπότε υπάρχει κ κοντά στο ξ_1 , τέτοιο ώστε

$$g(\kappa) < 0.$$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow \xi_2} g(x) = \lim_{x \rightarrow \xi_2} (f(x) - a) = +\infty$, οπότε υπάρχει λ κοντά στο ξ_2 , τέτοιο ώστε

$$g(\lambda) > 0.$$

$$\text{Έτσι } g(\kappa) \cdot g(\lambda) < 0.$$

Η g είναι συνεχής στο $[\kappa, \lambda]$ ως διαφορά συνεχών.

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\kappa, \lambda) \subseteq (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - a = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = a$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

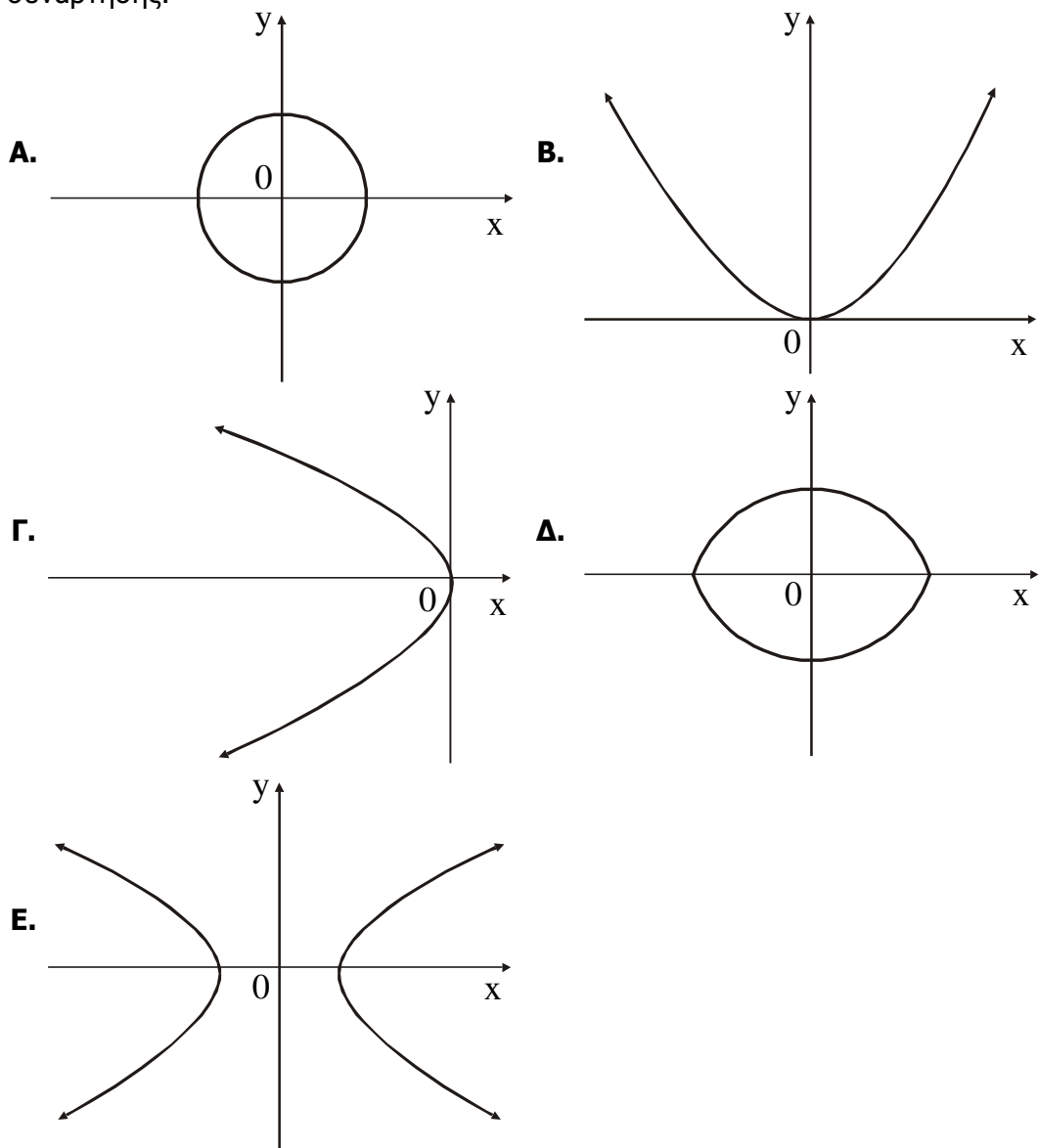


Leibnitz
Gottfried

- | | | |
|---|---|---|
| 1. Για τη συνάρτηση $f(x)=\ln x$, $x>0$, ισχύει $f(x \cdot y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x, y>0$. | Σ | Λ |
| 2. Για τη συνάρτηση $f(x)=e^x$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x+y)=f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. | Σ | Λ |
| 3. Αν f τυχαία συνάρτηση, η γραφική παράσταση της $ f $ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. | Σ | Λ |
| 4. Δίνεται συνάρτηση f . Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με τον άξονα $x'x$ μπορούν να βρεθούν, αν θέσουμε όπου $y=0$ και λύσουμε ως προς x την εξίσωση $y=f(x)$. | Σ | Λ |
| 5. Δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες, αν υπάρχουν κάποια $x \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f(x)=g(x)$. | Σ | Λ |
| 6. Για να ορίζονται το άθροισμα και το γινόμενο δύο συναρτήσεων f και g θα πρέπει τα πεδία ορισμού τους να έχουν κοινά στοιχεία. | Σ | Λ |
| 7. Η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $x \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}^*$ είναι:
α) άρτια, αν ο v είναι άρτιος
β) περιττή, αν ο v είναι περιττός. | Σ | Λ |
| 8. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{x}$, $x \neq 0$, είναι σταθερή. | Σ | Λ |
| 9. Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Τότε η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. | Σ | Λ |
| 10. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ . Αν ο λόγος $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ είναι θετικός για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 \neq x_2$, τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Δ . | Σ | Λ |
| 11. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ . | Σ | Λ |
| 12. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. | Σ | Λ |

- | | | | |
|------------|---|----------------------|----------------------|
| 13. | Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ με $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση f^2 είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ . | Σ | Λ |
| 14. | Αν το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα (α, β) , τότε η f δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο. | Σ | Λ |
| 15. | Αν μια περιττή συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο x_0 , τότε θα παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $-x_0$. | Σ | Λ |
| 16. | Αν μια άρτια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0 , τότε παρουσιάζει το ίδιο είδος ακροτάτου στο σημείο $-x_0$. | Σ | Λ |
| 17. | Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια, τότε είναι 1-1. | Σ | Λ |
| 18. | Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1, τότε είναι πάντοτε περιττή. | Σ | Λ |
| 19. | Αν η συνάρτηση f είναι 1-1, οι συναρτήσεις g, h έχουν πεδίο ορισμού το R και ισχύει $f(g(x)) = f(h(x))$ για κάθε $x \in R$, τότε οι συναρτήσεις g και h είναι ίσες. | Σ | Λ |
| 20. | Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το R τότε πάντα ισχύει ότι:
α) $f \circ g = f \cdot g$
β) $f \circ g = g \circ f$ | Σ
Σ | Λ
Λ |
| 21. | Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα Δ και μια συνάρτηση I , για την οποία ισχύει $I(x) = x$, για κάθε $x \in \Delta$. Τότε ισχύει $(I \circ f)(x) = (f \circ I)(x)$, για κάθε $x \in \Delta$ | Σ | Λ |
| 22. | Αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως μονότονες στο R , τότε η συνάρτηση $g \circ f$ είναι:
α) γνησίως αύξουσα, αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας
β) γνησίως φθίνουσα, αν οι f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας. | Σ
Σ | Λ
Λ |
| 23. | Αν οι συναρτήσεις f και g είναι 1-1 στο R και ορίζεται στο R η $g \circ f$, τότε και η συνάρτηση $g \circ f$ είναι 1-1 στο R . | Σ | Λ |
| 24. | Αν η συνάρτηση f είναι 1-1, τότε ισχύουν:
α) $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε x που ανήκει στο σύνολο τιμών της f
β) $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in D_f$. | Σ
Σ | Λ
Λ |
| 25. | Κάθε κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των C_f και $C_{f^{-1}}$ ανήκει στην ευθεία $y = x$. | Σ | Λ |
| 26. | Αν μια συνάρτηση είναι άρτια, τότε υπάρχει η αντίστροφή της. | Σ | Λ |

27. Από τα παρακάτω διαγράμματα, ποιο διάγραμμα είναι γραφική παράσταση συνάρτησης:



28. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{x-2}{x^2+4}$ είναι το σύνολο

A. $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ **B.** $\mathbb{R}$ **Γ.** $\mathbb{R} - \{-2\}$
Δ. $[2, +\infty)$ **E.** $\mathbb{R} - \{2\}$

29. Αν $f(x) = x^3$ και $a \neq \beta$, τότε το $\frac{f(a)-f(\beta)}{a-\beta}$ είναι

A. $(a+\beta)^2$ **B.** $a^2+a\beta+\beta^2$ **Γ.** $a^2+\beta^2$
Δ. $a^2-a\beta+\beta^2$ **E.** $3a^2$

30. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\ln(9-x^2)$ είναι το σύνολο

A. $\mathbb{R}-\{-3, 3\}$

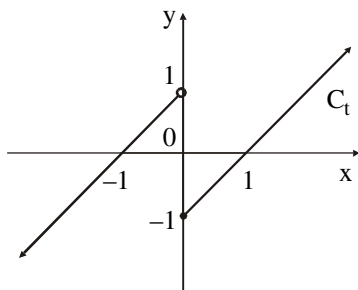
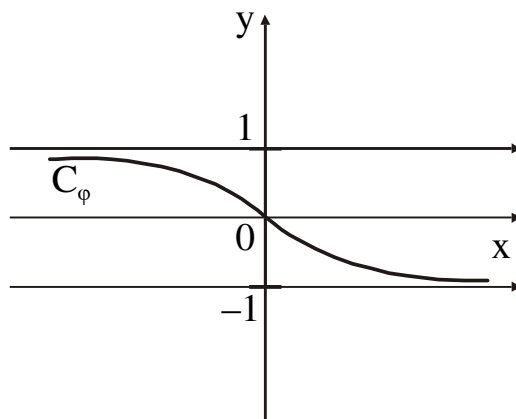
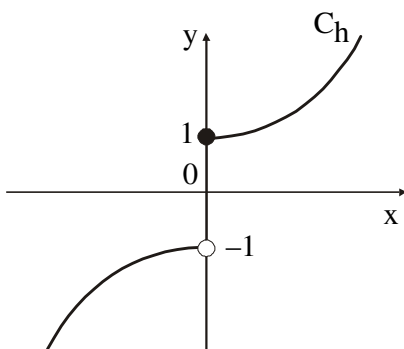
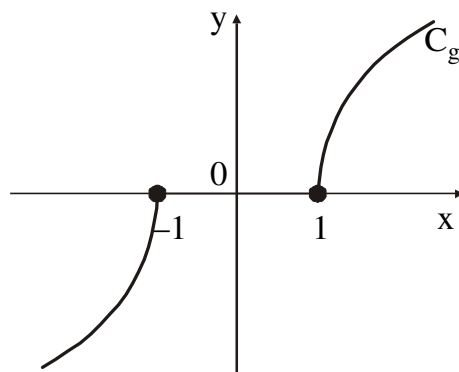
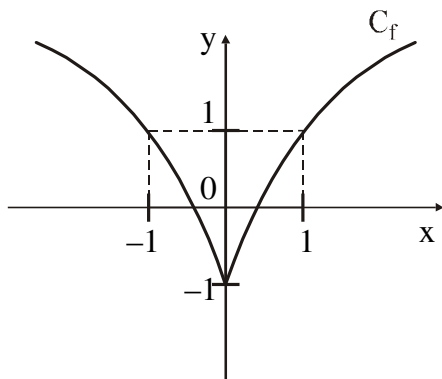
B. $\mathbb{R}-\{3\}$

Γ. $[3, +\infty)$

Δ. $(-3, 3)$

E. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

31. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις πέντε συναρτήσεων: f , g , h , φ , t .



Το διάστημα $(-1, 1)$ είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

A. f

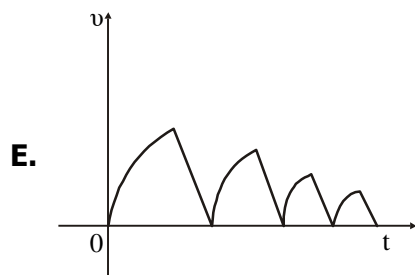
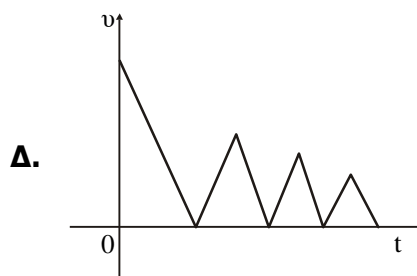
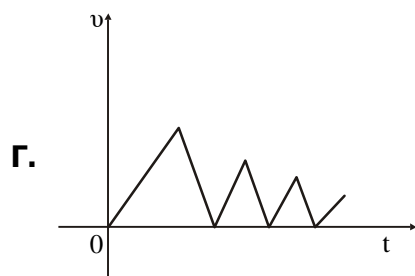
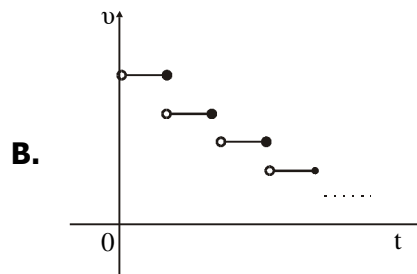
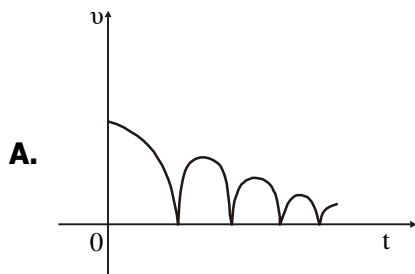
B. g

Γ. h

Δ. φ

E. t

- 32.** Μια μπάλα αφήνεται από ένα ύψος h και αναπηδά στο έδαφος. Η ταχύτητα κατά την κάθοδό της έχει μέτρο $u=g \cdot t$ ενώ κατά την άνοδο έχει μέτρο $u=u_0-g \cdot t$, όπου t η χρονική διάρκεια της αντίστοιχης κίνησης. Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα εκφράζει το μέτρο της ταχύτητας της μπάλας, κάθε χρονική στιγμή t ;



- 33.** Το σύνολο των τετμημένων των σημείων που η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-3x^2-x+3$ τέμνει τον άξονα x είναι
A. $\{-1, 1\}$ **B.** $\{1\}$ **Γ.** $\{-1, 1, 3\}$ **Δ.** $\{-1, -3, 1\}$ **Ε.** $\{1, 3\}$

- 34.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x-3}, & x \neq 3 \\ 10, & x = 3 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} \frac{-2x+2}{x-3}, & x \neq 3 \\ 10, & x = 3 \end{cases}$ και οι

παρακάτω προτάσεις:

- I.** $f(\frac{1}{2})=g(\frac{1}{2})$ **II.** $f(3)=g(3)$ **III.** $f(x)=g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Τότε ισχύει

- A.** μόνο η I **B.** μόνο η II **Γ.** μόνο οι I και II
Δ. μόνο η III **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

- 35.** Αν η πολυωνυμική εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς $-1, 3$, τότε η εξίσωση $f(3x)=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς

- A.** $-\frac{1}{3}, 1$ **B.** $\frac{1}{3}, -1$ **Γ.** $1, -3$ **Δ.** $-2, 6$ **Ε.** $2, -6$

36. Η συνάρτηση g της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, της C_f με τύπο $f(x)=1-2^x$ έχει τύπο

A. $g(x)=1+2^x$ **B.** $g(x)=1-2^{-x}$ **Γ.** $g(x)=\ln(1-x)$
Δ. $g(x)=\ln(x-1)$ **Ε.** $g(x)=2^x-1$

37. Το πλήθος των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^6+x^4+x^2+1$ με τον άξονα $x'x$ είναι

A. 6 **B.** 5 **Γ.** 4 **Δ.** 3 **Ε.** 0

38. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{ax^2+ax}$, $a<0$, έχει πεδίο ορισμού τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους

A. $x>0$ **B.** $x<-1$ **Γ.** $-1\leq x\leq 0$ **Δ.** $x<a$ **Ε.** $x>-1$

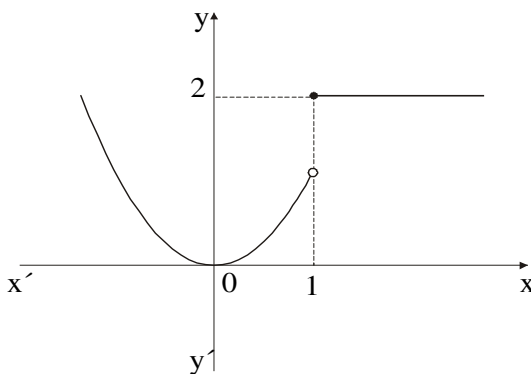
39. Το διπλανό διάγραμμα είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης:

A. $f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \end{cases}$

B. $f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases}$

Γ. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & -\infty < x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases}$

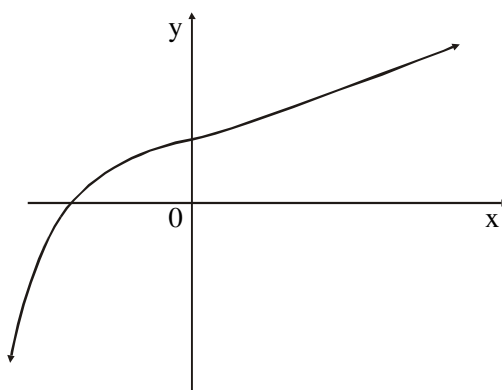
Ε. $f(x) = \begin{cases} e^x, & -\infty < x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases}$



Δ. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & -\infty < x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \end{cases}$

40. Η γραφική παράσταση C_f μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$, φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει

A. δύο τουλάχιστον ρίζες
B. μία μόνο ρίζα
Γ. καμία ρίζα
Δ. περισσότερες από δύο ρίζες
Ε. μία ρίζα θετική



41. Η συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα, είναι

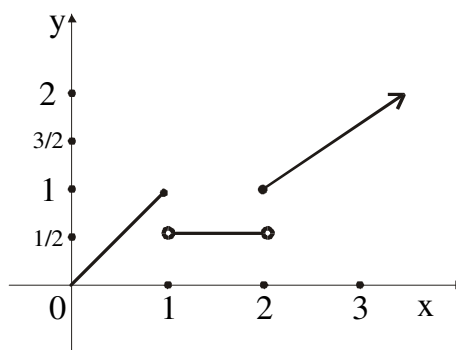
A. $f(x) = \frac{x}{2}$, αν $x \in [0, +\infty)$

B. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } 1 < x < 2 \\ \frac{x}{2}, & \text{αν } x \in [2, +\infty) \end{cases}$

Γ. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{αν } x \in (0, 1] \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } x \in (1, +\infty) \end{cases}$

Δ. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } 1 < x < 2 \\ x - \frac{3}{2}, & \text{αν } x \in [2, +\infty) \end{cases}$

Ε. κανένα από τα προηγούμενα



42. Για τις συναρτήσεις f και g που οι γραφικές τους παραστάσεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα, είναι **λάθος** ο ισχυρισμός

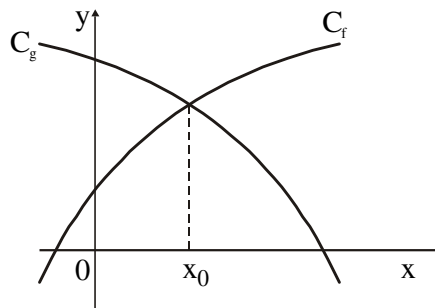
A. $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

B. $f(x) < g(x)$ αν $x < x_0$

Γ. $f(x) > g(x)$ αν $x > x_0$

Δ. $f(x_0) = g(x_0)$

Ε. η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$



43. Για τη συνάρτηση f , που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα, **δεν** ισχύει ότι:

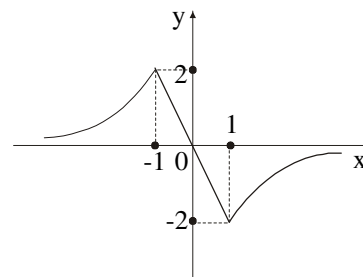
A. Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$

B. Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-2, 2]$

Γ. Είναι περιττή

Δ. Έχει ελάχιστο το -2 και μέγιστο το 2

Ε. Είναι άρτια



44. Η συνάρτηση $f(x) = |\eta\mu x - 1|$, $x \in [0, 2\pi]$ έχει μέγιστη τιμή όταν το x είναι ίσο με

A. -1

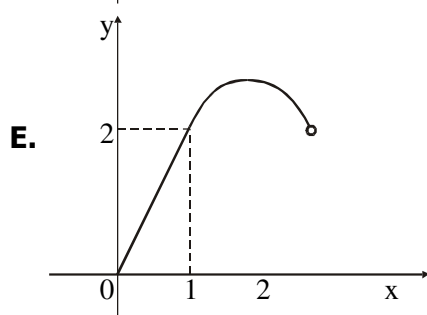
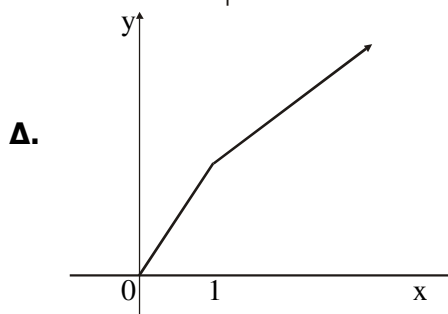
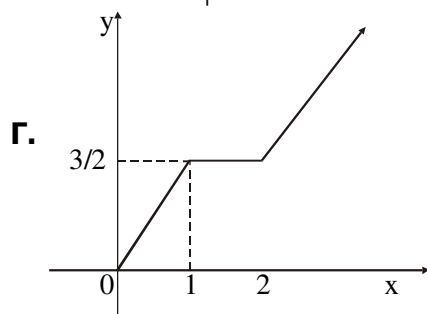
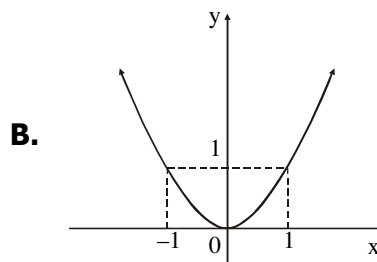
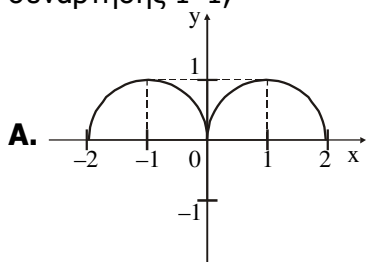
B. 0

Γ. $\frac{\pi}{2}$

Δ. $\frac{3\pi}{2}$

Ε. 2

45. Από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις ποια είναι γραφική παράσταση συνάρτησης 1-1;



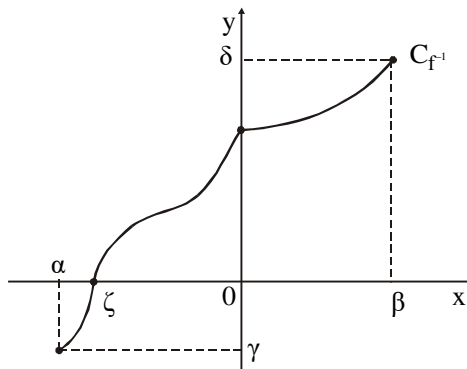
46. Αν $f(x)=x^4-4x^3-3x+7$ και $g(x)=7$, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ έχει τύπο
A. $7x^4-28x^3-21x+49$ **B.** $x^2-4x-14$ **Γ.** 289 **Δ.** 7 **Ε.** $(x^2-7)^2$
47. Αν $f(x)=\ln x$ και $g(x)=16-x^2$, τότε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι
A. $(-\infty, 4]$ **B.** $[-4, 4]$ **Γ.** $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$
Δ. $(-4, 4)$ **Ε.** $(0, 4)$
48. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία αντιστρέφεται. Τότε οι γραφικές παραστάσεις της f και της f^{-1} είναι συμμετρικές
A. ως προς την ευθεία $y=x$ **B.** ως προς την ευθεία $y=2x$
Γ. ως προς τον άξονα $y'y$ **Δ.** ως προς την αρχή των αξόνων
Ε. ως προς τον άξονα $x'x$
49. Η συνάρτηση $f(x)=2e^{-x}$ έχει αντίστροφη την
A. $g(x)=\ln\left(\frac{x}{2}\right)$ **B.** $h(x)=\ln\left(\frac{2}{x}\right)$
Γ. $\varphi(x)=\frac{1}{2}\ln x$ **Δ.** $\sigma(x)=\sqrt{\ln x}$ **Ε.** $t(x)=2\cdot\ln x$

50. Αν η συνάρτηση g έχει αντίστροφη την f , τότε το $g(f(x))$ είναι ίσο με

- Α. 1 Β. $g(x) \cdot f(x)$ Γ. $\frac{1}{x}$
 Δ. x Ε. κανένα από τα παραπάνω

51. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} μιας συνάρτησης f . Τότε **λάθος** είναι ο ισχυρισμός

- Α. πεδίο ορισμού της f είναι το $[\gamma, \delta]$
 Β. σύνολο τιμών της f είναι το $[a, \beta]$
 Γ. $f^{-1}(\zeta) = 0$
 Δ. $f(0) = \zeta$
 Ε. Η f έχει ελάχιστο το a για $x=0$



52. Αν $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ με $x > -1$, τότε η f^{-1} έχει τύπο

- Α. $f^{-1}(x) = (x-1)^3$ Β. $f^{-1}(x) = x^3 - 1$ Γ. $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$
 Δ. $f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x+1}$ Ε. $f^{-1}(x) = (x+1)^3$

53. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων με τύπους:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- α) $f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$ $(-\infty, 1/2]$
 β) $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x-2}$ $[2, +\infty)$
 γ) $f(t) = \sqrt{t^2 - 1}$ $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
 δ) $h(y) = \sqrt{y^3 - y}$ $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$
 ε) $g(x) = |x - 1|$ $\mathbb{R}$
 ζ) $R(u) = \sqrt{u^3 - 1} - \sqrt[3]{u - 2}$ $[2, +\infty)$
 η) $f(x) = \frac{x+1}{x(x-2)}$ $\mathbb{R} - \{0, 2\}$
 θ) $g(t) = \sqrt{\frac{t+1}{t(t-2)}}$ $[-1, 0) \cup (2, +\infty)$
 ι) $h(y) = \frac{\sqrt{y-1}}{y^3 - 1}$ $(1, +\infty)$
 κ) $f(\omega) = \frac{a \cdot \omega}{\omega^2 + |\omega|}$, $a \in \mathbb{R}$ $\mathbb{R}^*$
 λ) $\varphi(a) = \frac{a}{a^2 + |a-1|}$ $\mathbb{R}$

$$\mu) a(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{|x^2-5x+6|} \quad \mathbf{R-\{2,3\}}$$

54. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων με τύπους:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$\alpha) f(x) = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{x}{x-1}} \quad \mathbf{(1, +\infty)}$$

$$\beta) \gamma(\omega) = \omega - \sqrt{\omega^2 + 2\omega + 1} \quad \mathbf{R}$$

$$\gamma) \varphi(x) = \frac{x}{2\sqrt{2-\frac{x^2}{4}}} \quad \mathbf{(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})}$$

$$\delta) f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1} \quad \mathbf{[0, 1) \cup (1, +\infty)}$$

$$\epsilon) T(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)(x-3)} \quad \mathbf{[1, 2] \cup [3, +\infty)}$$

$$\zeta) f(x) = \left| \frac{x-2}{3-x} \right| \quad \mathbf{R-\{3\}}$$

$$\eta) h(x) = \frac{x\sqrt{a-1}}{\beta}, \quad a > 1, \beta \neq 0 \quad \mathbf{R}$$

$$\theta) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad \mathbf{R^*}$$

$$\iota) g(x) = \frac{2x \cdot |x-2|}{2|x|-x} \quad \mathbf{R^*}$$

$$\kappa) f(y) = \frac{2}{|y-1| + |y+2| - 1} \quad \mathbf{R}$$

$$\lambda) f(x) = \sqrt{|x-2| + |x-4| - 3} \quad \mathbf{(-\infty, \frac{3}{2}] \cup [\frac{9}{2}, +\infty)}$$

$$\mu) h(t) = t^2 - 5t + 6 \quad \mathbf{R}$$

$$\nu) g(x) = |x-1| \quad \mathbf{R}$$

$$\xi) g(x) = x^4 - \frac{3}{2}|x|^3 + \sqrt{2}|x| - 1 \quad \mathbf{R}$$

$$\omicron) f(x) = \frac{3x+1}{2x-4+\sqrt{x}} \quad \mathbf{[0, +\infty) - \left\{ \frac{17-\sqrt{33}}{8} \right\}}$$

$$\pi) \varphi(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \quad \mathbf{[0, +\infty)}$$

$$\rho) f(t) = \frac{2}{\sqrt{t}-t} - \frac{2-\sqrt{t+1}}{|t|-\sqrt{t}} \quad \mathbf{(0, 1) \cup (1, +\infty)}$$

$$\sigma) f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{x^2 - 1}} \quad \mathbf{[-\sqrt{5}, -1] \cup [1, \sqrt{5}]}$$

$$\tau) h(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{\sqrt{x} \cdot (x+1)}} \quad \mathbf{[1, +\infty)}$$

55. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων με τύπους:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$\alpha) f(x) = \frac{\sqrt{\ln x - 1} - x}{\sqrt{x} - 1} \quad (e, +\infty)$$

$$\beta) \gamma(\omega) = \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 + 1}}{|\omega| - \omega} \quad \mathbb{R}^*$$

$$\gamma) \varphi(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{e^x - 1}} \quad (0, +\infty)$$

$$\delta) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \cdot (\ln x - 1) \quad (2, +\infty)$$

$$\epsilon) T(x) = \frac{2}{\sqrt{|x|} - x} \quad \mathbb{R}^*$$

$$\zeta) f(x) = \left| \frac{x - 1}{\sin x - 1} \right| \quad \mathbb{R} - \{\kappa\pi\}$$

$$\eta) h(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 + 1} - x} \quad \mathbb{R}$$

$$\theta) f(x) = \frac{|e^x + e - 2|}{e^x + \sin^2 x} \quad \mathbb{R}$$

$$\iota) g(x) = \frac{2x \cdot |x - 2|}{\sqrt{|x|} + x} \quad \mathbb{R}^*$$

$$\kappa) f(y) = \frac{2}{|\ln y - 1| + |y^2 - y|} \quad (0, +\infty)$$

$$\lambda) f(x) = \sqrt[3]{|2x - 1| - |3 - 2x| + 1} \quad \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

$$\mu) h(t) = \frac{\ln[(e+1) \cdot e^t - e^{2t} - e]}{\eta\mu t} \quad (0, 1)$$

$$\nu) g(x) = \frac{1}{2\sin^2 x - 2\sin x + \eta\mu^2 x} \quad \mathbb{R} - \{\kappa\pi\}$$

$$\xi) g(x) = x^4 \cdot \sqrt{|e^x - 1| - 1} \quad [\ln 2, +\infty)$$

56. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων με τύπους:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$\alpha) u(x) = \eta\mu(x - 1) \quad \mathbb{R}$$

$$\beta) \varphi(x) = \eta\mu\left(\frac{3x}{-x^2 - 2}\right) \quad \mathbb{R}$$

$$\gamma) f(u) = \sin\left(\frac{u - \pi}{e^u}\right) \quad \mathbb{R}$$

$$\delta) f(x) = \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \mathbb{R} - \left\{\kappa\pi + \frac{3\pi}{4}\right\}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\epsilon) f(x) = \frac{\eta\mu x}{1 + \sin x} \quad \mathbb{R} - \{(2\kappa + 1)\pi\}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\zeta) g(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sin x$$

 $\mathbb{R}$

$$\eta) f(x) = \frac{|x-1|}{\exp x - \sqrt{3}}$$

$$\mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{3} \right\}, k \in \mathbb{Z}$$

57. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{\ln(|x|-1)}{\sqrt{e^{-x}+1}}, \quad \beta) g(x) = \frac{\ln(e^{-x}-1)}{\sqrt{2-|x|}}, \quad \gamma) h(x) = \frac{\sqrt{|x+2|-1}}{\ln^2 x - 5}$$

$$\text{ΑΠ: } \alpha) (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \quad \beta) (-2, 0),$$

$$\gamma) (0, e^{-\sqrt{5}}) \cup (e^{-\sqrt{5}}, e^{\sqrt{5}}) \cup (e^{\sqrt{5}}, +\infty)$$

58. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων με τύπους:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$\alpha) \varphi(\omega) = \frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega}$$

$$\mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{4} \right\}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\beta) f(x) = \frac{\eta\mu 3x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi^2 3x}{x^3}$$

$$\mathbb{R}^* - \left\{ \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right\}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\gamma) \varphi(x) = \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}$$

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{5\pi}{3} \right]$$

$$\delta) \varphi(\tau) = e^{|\tau| + \sin \tau}$$

 $\mathbb{R}$

$$\varepsilon) f(x) = e^{\frac{1}{2-x}}$$

 $\mathbb{R} - \{2\}$

$$\zeta) f(x) = \ln(2x+1)$$

$$\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$\eta) f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$$

$$(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

$$\theta) g(x) = \log\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2}\right)$$

$$[0, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$\iota) h(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

 $\mathbb{R}$

$$\kappa) f(x) = \frac{3|x|}{1 - \ln x}$$

$$(0, e) \cup (e, +\infty)$$

$$\lambda) h(x) = \log(4^x - 2^x - 12)$$

$$(2, +\infty)$$

$$\mu) h(x) = \sqrt{\log[\log(x^2 - 4x - 11)]}$$

$$(-\infty, -3] \cup [7, +\infty)$$

59. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων με τύπους:

$$\alpha) t(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x=1 \\ x^2, & \text{αν } x>1 \\ e^x, & \text{αν } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{αν } |x| < 1 \\ 3x-1, & \text{αν } |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{ΑΠ: } \alpha) (0, +\infty), \quad \beta) (-\infty, -2] \cup (-1, 1) \cup [2, +\infty)$$

60. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1) \cdot \sqrt{x+1}}$$

$$\beta) f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}-1} + \frac{3}{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x}}{|x-2|-1} + \frac{1}{|3x-8|-|x|}$$

$$\delta) f(x) = \frac{5}{|x-3|-1}$$

$$\epsilon) f(x) = \log(x^2+x-2) + \log \frac{x+3}{3-x}$$

$$\zeta) f(x) = \frac{\sin x}{2\eta\mu x-1} + \frac{1}{\epsilon\phi x-1}$$

$$\eta) f(x) = \sqrt{e^x-1} + \sqrt{1-\ln x}$$

ΑΠ: α) $(-1, 1) \cup (1, 2]$, β) $(2, 3) \cup (3, 4]$, γ) $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty) - \{2, 3, 4\}$,

δ) $\mathbb{R} - \{2, 4\}$, ε) $(-3, -2) \cup (1, 3)$,

ζ) $\mathbb{R} - \{2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{2}\}, k \in \mathbb{Z}$, η) $(0, e]$

61. Για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x-k}{x^2+k}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών;

ΑΠ: $k > 0$

62. Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2-3ax+3}{x^2-4x+(a+2)}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών;

ΑΠ: $a > 2$

63. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2-2\lambda x+9\lambda)$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

ΑΠ: $\lambda \in (0, 9)$

64. Αν $f(x) = \frac{ax-x^2}{x-2}$ και $g(x) = -x$, να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$, ώστε $f=g$ στο $\mathbb{R}-\{2\}$.

ΑΠ: $a=2$

65. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2+| -x^2+x-2 |}$ και $g(x) = (\sqrt{x})^2 + x^2 - x + 2$.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει $f=g$.

β) Στην περίπτωση που $f \neq g$, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο να ισχύει $f(x)=g(x)$.

ΑΠ: α) Όχι, β) $[0, +\infty)$

66. Να προσδιοριστούν οι τιμές των $k, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \frac{kx+4}{x-\lambda+2}$ και $g(x) = \frac{3x+2\lambda-2}{x+2\lambda-7}$ να είναι ίσες.

ΑΠ: $k=\lambda=3$

67. Να προσδιοριστούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \frac{2\lambda x+1-\lambda}{x+\lambda+2}$ και $g(x) = \frac{(\lambda^2-3)x-2\lambda+4}{x+2\lambda-1}$ να είναι ίσες.

ΑΠ: $\lambda=3$

68. Αν f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $2(f+g)(x) \cdot [(f+g)(x)-2x] \leq (f+g)^2(x) - (f-g)^2(x) - 4x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ναδειχτεί ότι $f=g$.

69. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί τη σχέση $f(x)+f(1-x)=x$ για όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x .

70. ✓ Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $f(x)$ σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Αν ισχύει ότι $2f(1-x)+1=x \cdot f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν ισχύει ότι $x \cdot f(x) + (1-x) \cdot f(2-x) = 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ΑΠ: } \alpha) f(x) = \frac{x-3}{x^2-x+4}, \beta) f(x) = -6x^2+15x-6$$

71. ✓ Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $3f(x-1) - f\left(\frac{1-x}{x}\right) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε τον τύπο της f .

$$\text{ΑΠ: } f(x) = \frac{3x^2+6x+4}{4(x+1)}, x \neq -1$$

72. ➡ Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με ιδιότητα $f(x)+f(y) \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

73. ✓ ➡ Δίνεται η συνάρτηση f με ιδιότητες:

- $D_f = \mathbb{R}$
- $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
- $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$
- $f(1) \neq 1$

Δείξτε ότι η f είναι η σταθερή μηδενική συνάρτηση, δηλαδή $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

74. ✓ ➡ Έστω α, β, γ τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου και μη ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση f που ικανοποιεί τη συνθήκη: $\beta^2 \cdot f(\pi-x) + \gamma^2 \cdot f(x-\pi) = \alpha^2 \sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη $f^2(\pi+x) + f^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 1$.

75. Δύο κινητά διασταυρώνονται σε ένα σημείο A και το πρώτο κατευθύνεται βόρεια του A με σταθερή ταχύτητα $u_1 = 60 \text{ km/h}$, ενώ το δεύτερο κατευθύνεται ανατολικά του A με σταθερή ταχύτητα $u_2 = 80 \text{ km/h}$.

α) Να εκφράσετε την απόσταση s των κινητών ως συνάρτηση του χρόνου t . Με πόση ταχύτητα απομακρύνεται το ένα από το άλλο;

β) Αν M το μέσον της απόστασης s να εκφράσετε την απόσταση AM σαν συνάρτηση του t .

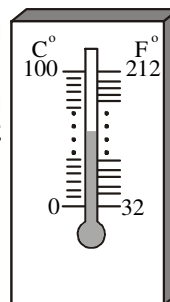
➡ γ) Πόσο πρέπει να ελαττωθεί η ταχύτητα του δεύτερου κινητού, ώστε μετά από 4 ώρες το M να απέχει από το A 180 km;

$$\text{ΑΠ: } \alpha) s(t) = \sqrt{60^2 \cdot t^2 + 80^2 \cdot t^2} = 100t. \text{ Άρα απομακρύνονται με ταχύτητα } 100 \text{ km/h}$$

$$\beta) AM = \frac{s}{2} = 50t, \gamma) \text{ Ο δεύτερος πρέπει να ελαττώσει την ταχύτητά του κατά } 13 \text{ km/h περίπου.}$$



- 76.** Στο θερμόμετρο του σχήματος μπορούμε να έχουμε τη θερμοκρασία ενός χώρου σε βαθμούς Κελσίου (C), αλλά και σε βαθμούς Φαρενάιτ (F). Θεωρούμε δεδομένο ότι η σχέση που συνδέει τις τιμές της θερμοκρασίας σε C με τις τιμές σε F είναι γραμμική (η γραφική της παράσταση είναι ευθεία).



α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης η οποία μετατρέπει τους βαθμούς C σε βαθμούς F.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης η οποία μετατρέπει τους βαθμούς F σε βαθμούς C.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει θερμοκρασία που να εκφράζεται με τον ίδιο αριθμό και στις δύο κλίμακες

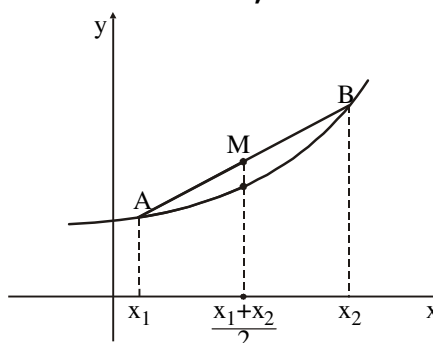
ΑΠ: α) $y = 1,8x + 32$, β) $x = \frac{y - 32}{1,8}$, γ) $x = y = -40$

- 77.** α) Το μέσο M μιας χορδής AB της καμπύλης μιας συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από το αντίστοιχο σημείο της καμπύλης. Να εκφράσετε με τη βοήθεια μιας ανισότητας την παραπάνω πρόταση.

β) Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση

$f(x) = x^2$ ισχύει η παραπάνω ιδιότητα.

γ) Ομοίως για τη συνάρτηση $g(x) = e^x$.



ΑΠ: α) $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, β) Ισχύει, γ) Ισχύει

- 78.** Να βρεθούν τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων με τύπους:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
R

α) $f(x) = 2x + 3$

β) $\varphi(x) = 2x + 3$ με $D_\varphi = [-2, 4]$

$[-1, 11]$

γ) $f(u) = \frac{4u-1}{u+2}$

$R - \{4\}$

δ) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

$R - \{1\}$

ε) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

$R - \{-\frac{1}{2}, 1\}$

ζ) $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$

$R - \{1\}$

η) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-1) \cdot (x+1)}$

$R - (-2, 1)$

θ) $h(x) = \frac{2x-3}{x-1}$, με $x \in [2, 4]$

$[1, \frac{5}{3}]$

ι) $g(x) = 3x^4 + x^2 - 1$

$[-1, +\infty)$

κ) $t(y) = 2y^2 - 5y + 3$

$[-\frac{1}{8}, +\infty)$

λ) $f(x) = x - \frac{1}{x}$

R

μ) $f(x) = \frac{2(x-1) \cdot (x+1) - 5x + 4}{x-1}$

R

$$\nu) g(x) = \frac{(x+1)^2}{3x} \quad (-\infty, 0] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$$

$$\xi) g(x) = 2 - \frac{3}{x+1} \quad \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\omicron) f(x) = \frac{3x}{x^2+1} \quad \text{Θέμα Γεν. Εξετάσεων Δ' Δέσμης 1985} \quad \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$$\pi) f(x) = \ln(x-2) + 3 \quad \mathbb{R}$$

$$\rho) f(x) = e^{\frac{1}{x-2}} - 1 \quad (-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\sigma) f(x) = e^{-x} + 2 \quad (2, +\infty)$$

79. Να βρεθούν τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων με τύπους:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$\alpha) f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10} \quad \mathbb{R}$$

$$\beta) \varphi(x) = \sqrt{3 \cdot |3x - 11| + 3} \quad [\sqrt{3}, +\infty)$$

$$\gamma) f(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x+3}} \quad (-\infty, 2)$$

$$\delta) f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\epsilon) f(t) = \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}} \quad [0, 1)$$

$$\zeta) \varphi(\omega) = \omega^3 + 2\omega - 5, \text{ με } \omega \in (-2, 4] \quad (-17, 67]$$

$$\eta) f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \in [1, 3] \\ 4x+1, & x \in (3, 5) \end{cases} \quad [2, 21)$$

$$\theta) g(x) = \frac{|x-4|+6}{x+1} \quad (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\iota) h(x) = \frac{3x+1}{1+|x-2|} \quad (-3, 7]$$

$$\kappa) \gamma(x) = |x^2 - 5x + 6| \quad [0, +\infty)$$

$$\lambda) g(x) = x - \sqrt{x^2 + 2x + 1} \quad (-\infty, -1]$$

$$\Rightarrow \mu) t(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1} \quad (0, 1]$$

$$\nu) f(x) = \sqrt{2\eta\mu x + 5} \quad [3, 7]$$

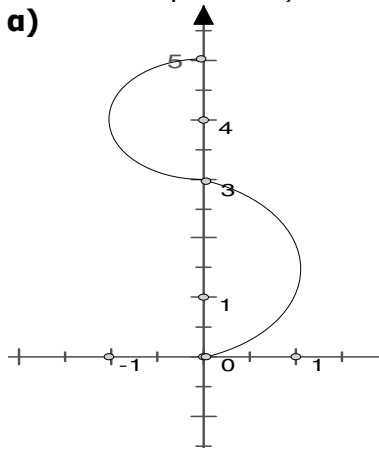
$$\xi) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} \text{ και } g(x) = \frac{4 - x^2}{x^2 - 5x + 6} \quad \mathbb{R} - \{1\}, \mathbb{R} - \{-1\}$$

Τι παρατηρείτε για τα σύνολα τιμών των f και g ;
Παρατηρώντας ότι $f = -g$, μπορείτε να γενικεύσετε
την παραπάνω παρατήρηση;

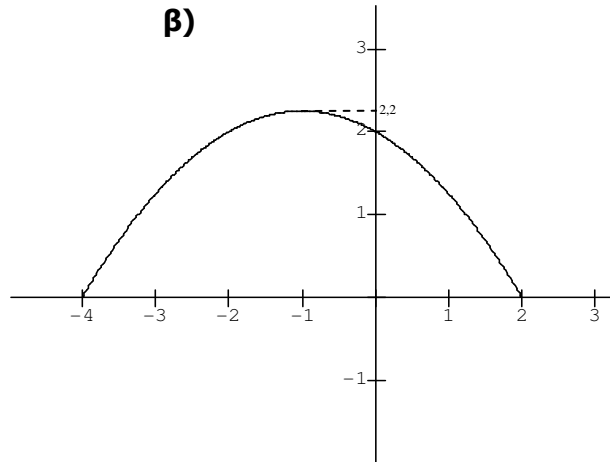
$$\omicron) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x, & x < 1 \end{cases} \quad \mathbb{R}$$

- 80.** Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω διαγράμματα είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και γι' αυτές να προσδιορίσετε από το σχήμα το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών τους:

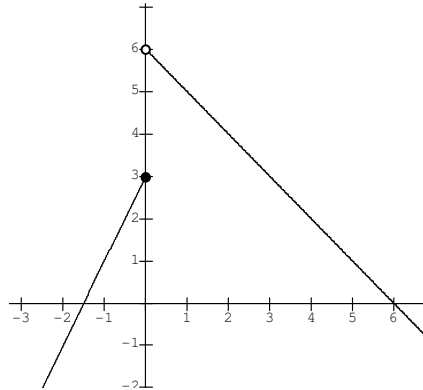
α)



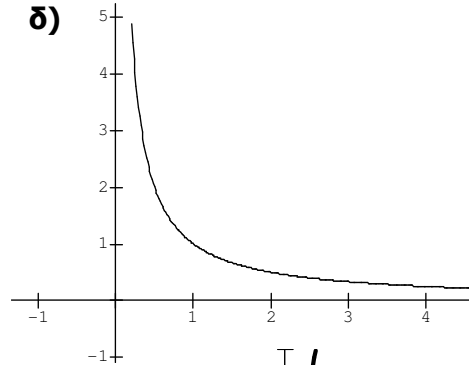
β)



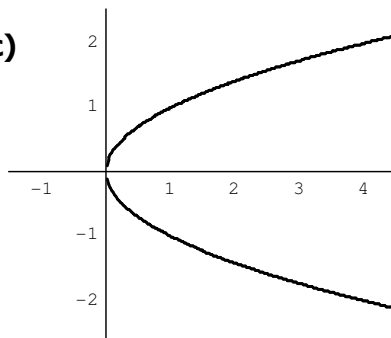
γ)



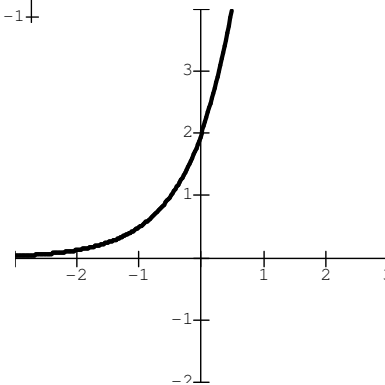
δ)



ε)



ζ)



- 81.** ➡ Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι $R_f \subseteq (-2, 2)$, όπου

$$f(x) = \frac{x^2 - \lambda x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

ΑΠ: $\lambda \in (-4, 0)$

- 82.** ➡ Να υπολογιστεί η τιμή του θετικού πραγματικού αριθμού a , ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + 1}$ να έχει σύνολο τιμών το $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

ΑΠ: $a=1$

- 83.** Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{(x-3) \cdot (x-6)^2 - 16x + 48}{x^2 - \alpha x + \beta} \text{ να έχει πεδίο ορισμού το } \mathbb{R} - \{2, 3\}.$$

Στη συνέχεια να απλοποιηθεί ο τύπος της και να γίνει η γραφική της παράσταση.

ΑΠ: $\alpha=5, \beta=6, f(x)=x-10$

- 84.** ✓ Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους:

α) $f(x)=x^2-1$

β) $g(x)=x^2-5x+6$

γ) $\varphi(x)=|x-1|$

δ) $\gamma(t)=\frac{|t|}{t}$

ε) $h(t)=|t^2-3t+2|$

ζ) $f(y)=|\ln y|$

η) $g(x)=2-\frac{3}{x+1}$

θ) $t(x)=\begin{cases} 1, & \text{αν } x=1 \\ x^2, & \text{αν } x>1 \\ e^x, & \text{αν } 0<x<1 \end{cases}$

ι) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{αν } x<-2 \\ 3x, & \text{αν } 0<x<2 \\ 7x-8, & \text{αν } x\geq 2 \end{cases}$

- 85.** Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης του α) να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων των υπόλοιπων ερωτημάτων:

α) $f(x)=\ln x$, β) $g(x)=-\ln x$, γ) $h(x)=|\ln x|$, δ) $\rho(x)=\ln(-x)$, ε) $\sigma(x)=\ln|x|$,

ζ) $\lambda(x)=\ln(x-1)+2$

- 86.** Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\begin{cases} -\ln x, & x>1 \\ 1-x^2, & x\leq 1 \end{cases}$

β) $g(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 1 \\ e^{x-2}, & x>2 \end{cases}$

- 87.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\{-3, 0, 3\}\rightarrow\mathbb{R}$ και $g:\{-1, 0, 1\}\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3-8x$ και $g(x)=x^3-x+5$.

α) Δείξτε ότι η f είναι ταυτοτική συνάρτηση (δηλαδή ότι $f(x)=x$ για κάθε $x\in D_f$).

β) Δείξτε ότι η g είναι σταθερή.

γ) Να οριστούν όσες από τις συναρτήσεις $f+g$, $f\cdot g$ και $\frac{f}{g}$ ορίζονται.

- 88.** Αν $f(x)=\sqrt{x^2-16}$ και $g(x)=\frac{2x\sqrt{9-x^2}}{\log(x^2-4x+5)}$, να οριστεί η συνάρτηση $f+g$ (αν ορίζεται).

ΑΠ: Δεν ορίζεται

- 89.** Να οριστούν οι συναρτήσεις $f\cdot g$ και $\frac{f}{g}$, αν f, g οι συναρτήσεις με τύπους:

α) $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=\sqrt{2-x}$

β) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$ και $g(x)=\frac{x-2}{x^2-5x+6}$

γ) $f(x)=x^2-1$ και $g(x)=x^3-6x^2+x$

δ) $f(x)=\sqrt{1-9x^2}$ και $g(x)=\frac{\sqrt{-x^2+3x-2}}{x^2+1}$.

Στην τελευταία αυτή περίπτωση να οριστεί και η συνάρτηση $(f+g)\cdot\frac{f}{g}$

$$\text{ΑΠ: α) } (f \cdot g)(x) = \sqrt{x \cdot (2-x)}, x \in [0, 2], \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}, x \in [0, 2]$$

$$\text{β) } (f \cdot g)(x) = \frac{x+1}{(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}, x \in \mathbb{R} - \{-2, 2, 3\}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4},$$

$$x \in \mathbb{R} - \{-2, 2, 3\}$$

$$\text{γ) } (f \cdot g)(x) = x \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 6x + 1), x \in \mathbb{R}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 1}{x \cdot (x^2 - 6x + 1)},$$

$$x \in \mathbb{R} - \{3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\},$$

$$\text{δ) } (f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{1-9x^2} \cdot \sqrt{-x^2+3x-2}}{x^2+1}, x \in [1, \frac{1}{3}],$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{1-9x^2} \cdot (x^2+1)}{\sqrt{-x^2+3x-2}}, x \in (1, \frac{1}{3})$$

90. ✓ Αν $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$ να βρείτε τη συνάρτηση $f \cdot g$

$$\text{ΑΠ: } (f \cdot g)(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-\infty, 0] \\ x^2 \cdot \ln x, & x \in (0, 1] \\ \ln x, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

91. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 2 \\ \sqrt{x}, & x > 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 3 \\ -2x+3, & x \geq 3 \end{cases}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις: α) $f+g$ β) $f \cdot g$ γ) $\frac{f}{g}$

$$\text{ΑΠ: α) } (f+g)(x) = \begin{cases} \ln x + 2x + 1, & 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{x} + \ln x, & 2 < x < 3 \\ \sqrt{x} - 2x + 3, & x \geq 3 \end{cases}$$

Ομοίως εργαζόμαστε για τις $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$

92. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της D_f .

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e$ για κάθε $x \in D_f$.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

$$\text{ΑΠ: α) } D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

93. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, $x \neq 0$, να βρείτε το $f(2)$.

$$\text{ΑΠ: } f(2) = -\frac{7}{4}$$

- 94.** ✓ Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες, ποιες περιττές και ποιες τίποτα από τα δύο:

α) $f(x) = \eta\mu|x|$

β) $g(x) = x^4 + x^2, x \in [-1, 2]$

γ) $t(x) = |x-1| + |x+1|$

δ) $h(x) = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$

ε) $\varphi(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}}$

ζ) $t(x) = \frac{3|x|}{1 - \ln x}$

η) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

θ) $g(x) = \frac{|x-1| - |x+1|}{|x-1| + |x+1|}$

ι) $h(x) = \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

κ) $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

λ) $\varphi(x) = x \cdot \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$

ΑΠ: Άρτιες οι α), γ), ε), λ), περιττές οι δ), η), θ), ι), κ)

- 95.** Δείξτε ότι αν μια συνάρτηση είναι ταυτόχρονα άρτια και περιττή στο $\mathbb{R}$, τότε είναι η σταθερή μηδενική συνάρτηση.

- 96.** Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ άρτια συνάρτηση, δείξτε ότι και η $-f$ είναι επίσης άρτια

- 97.** Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ περιττή συνάρτηση με $(e^{x^2} + 1) \cdot f(x) \leq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την f .

ΑΠ: $f(x) = \frac{x}{e^{x^2} + 1}$

- 98.** Δείξτε ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$ και πεδίο ορισμού $(-2, 9)$, δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το ευρύτερο υποσύνολο του $(-2, 9)$, στο οποίο θα μπορούσε να έχει ένα από τα παραπάνω χαρακτηριστικά και να αναφέρετε ποιο χαρακτηριστικό θα είχε.

ΑΠ: Στο $(-2, 2)$ θα ήταν περιττή

- 99.** ➡ Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ συμμετρικό ως προς το μηδέν, μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης.
ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Αν $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ να βρεθούν συναρτήσεις g, h με g άρτια και h περιττή, τέτοιες ώστε $f = g + h$.

ΑΠ: $g(x) = 3x^2 + 2, h(x) = -6x$

- 100.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y)] \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

➡ γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(|x|) = f(x)$.

- 101.** ✓ Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι περιττή. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[a, \beta]$ με $a, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $[-\beta, -a]$.

- 102.** Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει

$$f(\lambda^2 + 5\lambda) - f(-2\lambda + 8) = (-2\lambda + 8) - (\lambda^2 + 5\lambda).$$

ΑΠ: β) $\lambda = -8$ ή $\lambda = 1$

103. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + 2x - 1$

β) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -2x^3 - 4$

γ) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 4$

δ) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 4$

ε) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1 + 2x^3}{x^3}$

ζ) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$

η) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ με $f(x) = |x|$

θ) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x - |x|$

ι) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}$

κ) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 1$

λ) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \leq 1 \\ 3x + 2, & x > 1 \end{cases}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

f γν. αύξ.

f γν. φθ.

**f γν. φθ. στο $(-\infty, 0]$ και
γν. αύξ. στο $[0, +\infty)$**

f γν. αύξ.

f γν. φθ.

**f γν. αύξ. στο $(-\infty, 0)$ και
στο $[0, +\infty)$**

**f γν. φθ. στο $(-\infty, 0)$ και
γν. αύξ. στο $[0, +\infty)$**

f αύξ. στο $\mathbb{R}$

**f γν. φθ. στο $(-\infty, 1)$ και
γν. φθ. στο $(1, +\infty)$**

f γν. αύξ.

**f γν. φθ. στο $(-\infty, 1]$ και
γν. αύξ. στο $(1, +\infty)$**

104. Να δείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 4x + 1, & x \leq 1 \\ 6x - 1, & x > 1 \end{cases}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 8, & x = 2 \\ 3x + 2, & x > 2 \end{cases}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

105. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x + x^3 + a^x$, $a > 1$

α) Δείξτε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα

β) Να λυθεί η ανίσωση $x^3 - 1 \geq 1 - x + a - a^x$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $a^{x+1} - a^{2x-3} = (2x-3)^3 - (x+1)^3 + (2x-3) - (x+1)$

ΑΠ: β) $x \geq 1$, γ) $x = 4$

106. ✓ Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\ln x + 2x = 2$

β) $3e^{-x} - \sqrt{x+4} = 1$

γ) $e^{x-1} + \sqrt{x} = 2 - \ln x$

δ) $1 - e^x + \frac{\ln 2}{x} = 0$, για κάθε $x > 0$

ΑΠ: α) $x = 1$, β) $x = 0$, γ) $x = 1$, δ) $x = \ln 2$

107. ✓ Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 1 - \ln x - x$

β) $g(x) = e^x + x - 1$

γ) $h(x) = x^{2019} + 2020x - 2021$

**ΑΠ: α) θετική στο $(-\infty, 1)$ και αρνητική στο $(1, +\infty)$,
β) θετική στο $(0, +\infty)$ και αρνητική στο $(-\infty, 0)$,
γ) θετική στο $(1, +\infty)$ και αρνητική στο $(-\infty, 1)$**

108. ✓ Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $e^x - x^{2019} \leq e^{x^{2019}} - x$

β) $\ln(x+2) - x \leq 2\ln x - \sqrt{x+2}$

ΑΠ: α) $x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$, β) $x \geq 2$

- 109.** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι $f^{2019}(x) + e^{f(x)} = \sqrt{x}$, για κάθε $x \geq 0$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty]$
- 110.** ✓ Αν f, g συναρτήσεις ορισμένες σε σύνολο A , δείξτε ότι ισχύουν οι προτάσεις:
α) Αν f και g είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο A .
β) Αν f και g είναι γνησίως φθίνουσες, τότε και η $f+g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A .
γ) Αν f και g είναι γνησίως αύξουσες με $f(x) > 0, g(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, τότε και η $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο A .
δ) Αν f και g είναι γνησίως φθίνουσες με $f(x) > 0, g(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, τότε και η $f \cdot g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A .
- 111.** Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ , οι οποίες παίρνουν θετικές τιμές για κάθε $x \in \Delta$ και οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες στο Δ .
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .
- 112.** α) Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση γνησίως φθίνουσα που η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $(-1, 0)$, να βρεθούν τα πρόσημά της.
β) Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση γνησίως μονότονη συνάρτηση που η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $(1, 0)$ και τον $y'y$ στο $(0, -3)$, να βρεθεί η μονοτονία της.
- 113.** ✓ Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.
α) Αν η f είναι άρτια, τότε είναι γνησίως μονότονη στο A ; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
β) Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο A , τότε μπορεί να είναι άρτια; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
γ) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο A , πόσες ρίζες μπορεί να έχει η εξίσωση $f(x)=0$; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
ΑΠ: α) Όχι, β) Όχι, γ) Το πολύ μία
- 114.** Να υπολογιστεί ο $a \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αν:
α) $g(x) = x^3 + x^2 + ax$ β) $f(x) = x^3 + x^2 + ax + 1$
Παρατηρώντας ότι $f = g + 1$, να συμπεράνετε μια γενικότερη πρόταση για τη μονοτονία.
ΑΠ: α) $a > 1/3$, β) $a > 1/3$
- 115.** Δείξτε ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = (a^2 + b + 2) \cdot |2x - 1| - 2b \cdot |x - 2| + 3ax + 2a - 5b$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \frac{1}{2}]$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.
- 116.** Να υπολογιστούν οι τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση με τύπο $h(x) = x^3 - 3x^2 + 2\kappa x + 4\lambda$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
ΑΠ: $\kappa > 3/2, \lambda \in \mathbb{R}$
- 117.** Να μελετηθεί η συνάρτηση $\varphi(x) = (\lambda - 1) \cdot x^2 + 2\mu - 3$ ως προς τη μονοτονία για όλες τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
ΑΠ: Αν $\lambda = 1$ τότε φ σταθερή, αν $\lambda < 1$ φ γν. αύξ. στο $(-\infty, 0]$ και γν. φθίν. στο $[0, +\infty)$, ενώ το αντίστροφο ισχύει αν $\lambda > 1$. Η τιμή του μ δεν επηρεάζει τη μονοτονία.

- 118.** Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $g(x)=|x-2|+(a^2-a) \cdot |x-1|$ για όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

ΑΠ: g γν. φθίν. στο $(-\infty, 1]$ και γν. αύξ. στο $[2, +\infty)$. Όσον αφορά στο $[1,$

$2]$ η g είναι γν. αύξ αν $a \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$, σταθερή αν

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ και γν. φθίν. αν } a \in (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$$

- 119.** ✓ ➔ Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και $f(x+y)=f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι:

α) $f(0)=1$

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$

- 120.** ✓ ➔ Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f\left(\frac{2x+f(x)}{3}\right) = x$, τότε η f είναι η ταυτοτική συνάρτηση.

- 121.** Να βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων και από εκεί να προσδιορίσετε τα ακρότατα, αν υπάρχουν:

α) $h(t)=\eta\mu t$

β) $f(x)=2x^2$

γ) $\varphi(x)=2x^2, x \in (1, 2]$

δ) $f(x)=(x-2)^2$

ε) $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$

ζ) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

η) $g(x)=\sqrt{x-2}+1$

θ) $\varphi(\omega)=\omega^2-5\omega+6$

ι) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(t)=t-|t|$

κ) $f(x)=|x-1| \cdot x^2$

λ) $t(x)=\begin{cases} x+1, & x \leq 2 \\ 3x-1, & 3 \leq x < 4 \end{cases}$

μ) $g(x)=\frac{2x+1}{x-2}$

ΑΠ: α) $[-1, 1]$, β) $[0, +\infty)$, γ) $(2, 8]$, δ) $[0, +\infty)$, ε) $(-1, 1)$, ζ) $[0, 1)$,

η) $[1, +\infty)$, θ) $[-\frac{1}{4}, +\infty)$, ι) $(-\infty, 0]$, κ) $[0, +\infty)$, λ), $(-\infty, 3] \cup [8, 11)$,

μ) $\mathbb{R} - \{2\}$

- 122.** Να βρεθούν οι θετικές τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{\lambda x}{x^2+1}$ να έχει ελάχιστη τιμή το -1 και μέγιστη το 1 .

ΑΠ: $\lambda=2$

- 123.** ✓ Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και έχει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο 2 το 5 , να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν ισχύει η σχέση $f(\alpha+2)+2 \cdot f(\beta-1)=15$

ΑΠ: $\alpha=0$ και $\beta=3$

- 124.** ✓ Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2)=0$ και $f^2(x)=2x \cdot f(x)-x^2 \cdot f(2-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Δείξτε ότι $[f(x)-x]^2=x^2 \cdot (1-f(2-x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

➔ β) Δείξτε ότι $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

➔ γ) Αν η C_f έχει μόνο δύο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ να δείξετε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή την οποία να βρείτε, καθώς και τη θέση που παίρνει την τιμή αυτή.

- 125.** Δίνεται σύρμα μήκους 3 μέτρων με το οποίο κατασκευάζουμε δύο ισόπλευρα τρίγωνα με κοινή κορυφή.

α) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών E των τριγώνων αυτών ως συνάρτηση της πλευράς x του ενός τριγώνου.

β) Να βρείτε πότε το παραπάνω εμβαδόν γίνεται ελάχιστο.

ΑΠ: α) $E(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} [x^2 + (1-x)^2]$, β) όταν τα τρίγωνα είναι ίσα

126. ✓ Να οριστούν οι παρακάτω σύνθετες συναρτήσεις:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) gof αν $f(x) = x^2 - 8x + 19$ και

$$(\text{gof})(x) = |x-4| \text{ στο } \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x-3}$$

β) gof αν

$$(\text{gof})(x) = \sqrt{2 - \sqrt{3-x}} \text{ στο } [-1, 3]$$

$$f(x) = \sqrt{3-x} \text{ και } g(x) = \sqrt{2-x}$$

γ) fog και gof αν $f(x) = \sqrt{3-6x^2}$

$$(\text{fog})(x) = \sqrt{3 - \frac{6}{(3-x)^2}} \text{ στο}$$

$$\text{και } g(x) = \frac{3-x}{x^2-6x+9}$$

$$(-\infty, 3 - \sqrt{2}] \cup [3 + \sqrt{2}, +\infty)$$

$$(\text{gof})(x) = \frac{\sqrt{3-6x^2} - 3}{6(x^2 + \sqrt{3-6x^2} - 2)} \text{ στο}$$

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

δ) Η σύνθεση της f με την g αν

$$(\text{gof})(x) = \sqrt{x^2 + 3} \text{ στο } [\sqrt{6}, +\infty)$$

$$f(x) = x^2 + 1, x \geq 0 \text{ και } g(x) = \sqrt{x+2}, x \geq 7$$

ε) gof αν $f(x) = x^3$ και $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 3x, & x > 1 \end{cases}$

$$(\text{gof})(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \leq 1 \\ 3x^3, & x > 1 \end{cases} \text{ στο } \mathbb{R}$$

ζ) fog αν $f(x) = 2x+1$ και $g(x) = \eta\mu x$

$$(\text{fog})(x) = 2\eta\mu x + 1 \text{ στο } \mathbb{R}$$

η) fog και gof αν $f(x) = |x-2|$ και

$$(\text{fog})(x) = |\sqrt{x^2 + 1} - 2| \text{ στο } \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$(\text{gof})(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} \text{ στο } \mathbb{R}$$

θ) gof αν $f(x) = \sin^2 x$ και

$$(\text{gof})(x) = \left| \frac{\eta\mu 2x}{2} \right| \text{ στο } \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x \cdot (1-x)}$$

ι) fof αν $f(x) = \begin{cases} 8x^2, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$

$$(\text{fof})(x) = \begin{cases} 512x^4, & x \geq 0 \\ 32x^2, & x < 0 \end{cases} \text{ στο } \mathbb{R}$$

κ) fog και gof αν

$$(\text{fog})(x) = 2(x^2 + x + 1) \text{ στο } \left(2, \frac{-1 + \sqrt{29}}{2}\right)$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \in [-2, 2] \\ 2x+2, & x \in (2, 7) \end{cases} \text{ και}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \in (2, 3) \\ 3x+1, & x \in [3, 5] \end{cases}$$

$$(\text{gof})(x) = \begin{cases} 9x^2 - 3x, & x \in (1, \frac{4}{3}) \\ 9x - 2, & x \in [\frac{4}{3}, 2] \end{cases} \text{ στο } (1, 2]$$

λ) Η σύνθεση της g με τη f αν

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ με } 0 \leq x \leq 4 \text{ και}$$

$$(\text{fog})(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-1}, & x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ x, & x \in [1, 2] \end{cases} \text{ στο } [\frac{1}{2}, 2]$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \in [0, 1) \\ x^2, & x \in [1, 3] \end{cases}$$

- 127.** ✓ Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 1]$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x^2)$

β) $f(x-4)$

γ) $f(\ln x)$

ΑΠ: α) $[-1, 1]$, β) $[4, 5]$, γ) $[1, e]$

- 128.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^4-4x^3-3x+7$ και $g(x)=7$. Να βρείτε τη συνάρτηση gof .

ΑΠ: $\text{gof}=g$

- 129.** Να ορίσετε τις παρακάτω σύνθετες συναρτήσεις:

α) gof και fof αν $f(x)=\sqrt{8-x}$ και $g(x)=\sqrt{6-x}$

β) gof αν $f(x)=\log(x-1)$ και $g(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ x^2 - 4x + 6, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

ΑΠ: α) $(\text{gof})(x)=\sqrt{6-\sqrt{8-x}}, -28 \leq x \leq 8, (\text{fof})(x)=\sqrt{8-\sqrt{8-x}}, -56 \leq x \leq 8$

β) $(\text{gof})(x)=\begin{cases} \sqrt{\log(x-1)}, & 2 \leq x < 11 \\ (\log(x-1))^2 - 4\log(x-1) + 6, & x \geq 11 \end{cases}$

- 130.** Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο σύνολο $A=[-1, 1]$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h με $h(x)=f(2-x^2)$.

β) Αν $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & -1 \leq x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ και $g(x)=\sqrt{x}$ με $0 \leq x \leq 4$, να ορίσετε την σύνθεση της f με την g .

ΑΠ: i) $D_h = [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$

- 131.** Αν $f(x)=\begin{cases} \ln x, & x > 1 \\ 2+x, & x \leq 1 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & x > 2 \end{cases}$ να βρείτε τη συνάρτηση fog

ΑΠ: $f(g(x))=\begin{cases} 2+x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}\ln x, & x > 2 \end{cases}$

- 132.** ✓ Αν $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x < 1 \\ x+2, & x \geq 1 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x < 5 \\ 2x-1, & x \geq 5 \end{cases}$, να ορίσετε τις gof και fof .

ΑΠ: $(\text{gof})(x)=\begin{cases} 2x^2+1, & x \in (-\infty, -2] \\ x^4+3x^2+3, & x \in (-2, 1) \\ x^2+5x+7, & x \in [1, 3) \\ 2x+3, & x \in [3, +\infty) \end{cases}, (\text{fof})(x)=\begin{cases} x^2+3, & x < 1 \\ x+4, & x \geq 1 \end{cases}$

- 133.** Να υπολογιστεί ο $a \in \mathbb{R}$ ώστε οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{a \cdot x - x^2}{x-2}$ και $g(x)=-x$ να είναι ίσες στο $\mathbb{R}-\{2\}$. Στη συνέχεια να οριστεί η σύνθεση της g με την f .

ΑΠ: $a=2, (\text{fog})(x)=x, x \neq -2$

- 134.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3x-1$ ορισμένη στο $[-1, 7]$ και $g(x)=x^2+3$ ορισμένη στο $[-7, 8]$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις fog , gof , fof .

ΑΠ: $(\text{fog})(x)=3x^2+8, x \in [-2, 2], (\text{gof})(x)=9x^2-6x+4, x \in [-1, 3], (\text{fof})(x)=9x-4, x \in [0, \frac{8}{3}]$

- 135.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2x+3$ και $g(x)=ax+1$. Να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$, ώστε $\text{gof}=\text{fog}$.

$$\text{ΑΠ: } a = \frac{4}{3}$$

136. Αν $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ και $h(x) = \ln x$, να οριστεί η συνάρτηση $h \circ (g \circ f)$.

$$\text{ΑΠ: } [h \circ (g \circ f)](x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ στο } (0, +\infty)$$

137. Αν $f: \mathbb{R}^* - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}^* - \{1\}$ με $f(x) = 1 - x^{-1}$, δείξτε ότι η συνάρτηση $h = f \circ (f \circ f)$ είναι ταυτοτική.

138. Αν f, g συναρτήσεις με $f(x) = x^2 + x - 1$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$, να βρεθούν οι τιμές $(f \circ g)(2)$ και $[f + (g \circ g)](3)$.

$$\text{ΑΠ: } 1 \text{ και } 9 \text{ αντίστοιχα}$$

139. Αν f γνησίως αύξουσα και g γνησίως φθίνουσα να λυθεί η ανίσωση $(f \circ g)(x + \ln x) - f(g(\ln x + 2)) \leq 0$, με $x > 0$

$$\text{ΑΠ: } x \geq 2$$

140. Αν f, g γνησίως φθίνουσες και περιττές συναρτήσεις να λυθεί η ανίσωση $f(g(x^2)) + (f \circ g)(x) \leq 0$, με $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ΑΠ: } -1 \leq x \leq 0$$

141. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $[-1, +\infty)$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(2 + \ln x) + f(6 - x)$

$$\text{ΑΠ: } \left[\frac{1}{e^3}, 7 \right]$$

142. Αν $f(x) = x - 1$ και $g(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη συνάρτηση φ για την οποία ισχύει $(\varphi \circ f)(x) + 3 \leq (f + g)(x) \leq (\varphi \circ g)(x) - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ΑΠ: } \varphi(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$$

143. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν } |x| \leq 2 \\ -\frac{3}{2}, & \text{αν } |x| > 2 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{αν } |x| \leq 3 \\ 3, & \text{αν } |x| > 3 \end{cases}$ και

$$h(x) = x^2 - 1.$$

- α) Να οριστούν όσες από τις συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$, $(f \circ g) \circ h$ ορίζονται.
β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f \circ f$ είναι σταθερή.

144. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = f(f(f(x))), \text{ αν } f(x) = \frac{1}{1-x};$$

$$\text{ΑΠ: } f(f(f(x))) = x \text{ με } x \neq 0 \text{ και } x \neq 1$$

145. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ και $g(x) = -x$.

- α) Να δείξετε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
β) Να δείξετε ότι $(f \circ g)(x) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

146. Αν $(f \circ f)(x) = 4x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 2$, να βρείτε τα $f(2)$ και $f(5)$.

$$\text{ΑΠ: } f(2) = 5, f(5) = 9$$

147. ✓ ➔ Αν $(f \circ f)(x) = 4x - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε το $f(1)$.

$$\text{ΑΠ: } f(1) = 1$$

148. Αν $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις 1-1 και περιττές και ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η $f \circ g$, να λυθεί η εξίσωση $(f \circ g)(x^2) + f(g(x - 2)) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$\text{ΑΠ: } x = -2 \text{ ή } x = 1$$

- 149.** ➡ Αν $(f \circ f)(x) = 2x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι:
 α) $f(2x+4) = 2f(x)+4$ και β) η C_f έχει με την ευθεία $y = -4$ κοινό σημείο
- 150.** Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = x^x$, $x > 0$ ως σύνθεση δύο άλλων συναρτήσεων.
ΑΠ: $f = h \circ g$ με $h(x) = e^x$ και $g(x) = x \ln x$
- 151.** ✓ Έστω f, g συναρτήσεις για τις οποίες ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ σε διάστημα συμμετρικό ως προς το 0. Δείξτε ότι:
 α) Αν f, g άρτιες, τότε $f \circ g$ και $g \circ f$ επίσης άρτιες.
 β) Αν f, g περιττές, τότε $f \circ g$ και $g \circ f$ επίσης περιττές.
 γ) Αν η μία είναι άρτια και η άλλη περιττή, τότε $f \circ g$ και $g \circ f$ άρτιες.
 δ) Αν f άρτια και g περιττή, δείξτε ότι η $g \circ g$ είναι περιττή ενώ οι $f \circ f$ και $g \circ f \circ g$ είναι άρτιες.
- 152.** ✓ **A.** Έστω f, g συναρτήσεις για τις οποίες ορίζεται η $g \circ f$. Δείξτε ότι:
 α) Αν οι f και g είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.
 β) Αν οι f και g είναι γνησίως φθίνουσες, τότε η $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.
 γ) Αν οι f και g είναι γνησίως μονότονες με διαφορετικά είδη μονοτονίας, τότε η $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα.
 δ) Αν οι g και $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_{g \circ f}$.
B. Τι συμπεραίνετε από τα παραπάνω για τη μονοτονία των συναρτήσεων $f(x) = -2(3x^3 + 5)^3 + 7$ και $g(x) = \ln(\ln(3x+1))$;
- 153.** ✓ Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$, οι οποίες είναι γνησίως μονότονες και έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας (είναι και οι δύο γνησίως αύξουσες ή και οι δύο γνησίως φθίνουσες).
 α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.
 β) Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων $f \circ f$ και $g \circ g$.
 γ) Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \ln[\ln(x)]$, $x > 1$.
- 154.** Αν $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ορίζεται η $g \circ f$ επίσης στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι αν η g είναι γνησίως φθίνουσα και η $g \circ f$ παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 , τότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 .
- 155.** ✓ Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x + 2$ και $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(g \circ f)(x) = x^2 - 4x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο τύπος της $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
ΑΠ: $g(x) = x^2 - 8x + 13$, $x \in \mathbb{R}$
- 156.** ✓ Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x + 2$ και $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(g \circ f)(x) = x^2 - x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο τύπος της $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
ΑΠ: $g(x) = \frac{1}{9}(x^2 - 7x - 8)$, $x \in \mathbb{R}$
- 157.** ✓ Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x - 7$ και $f \circ g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ g)(x) = \sqrt{x} + 1$, να οριστεί η συνάρτηση g .
ΑΠ: $g(x) = \frac{\sqrt{x} + 8}{2}$, με $x \geq 0$
- 158.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3 - 2x$ και $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 α) Να ορίσετε τη συνάρτηση g .
 β) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της g με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = x^3 + 2x^2 - 6x + 5$.

ΑΠ: α) $g(x)=x^2-5x+6$, β) (1, 2), (-1, 12)

- 159.** ✓ Αν f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-1, 1]$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης h με $h(x)=f(2-x^2)$.

ΑΠ: $[-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$

- 160.** ✓ Αν f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $[2, 10]$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ με $\varphi(x)=f(x^2+1)$.

ΑΠ: $[-3, -1] \cup [1, 3]$

- 161.** Αν $f(x)=ax+\beta$ και $g(x)=2x-1$, να βρεθεί συνθήκη μεταξύ των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι $f \circ g = g \circ f$.

ΑΠ: $a+\beta=1$

- 162.** ✓ Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν για οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση g είναι $f \circ g = g \circ f$, δείξτε ότι η f είναι η ταυτοτική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

- 163.** ✓ Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1»:

α) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$

β) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x)=x^2-5x+6$

γ) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(t)=3t+1$

δ) $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)=3x^2+1$

ε) φ με $\varphi(\omega)=2+\frac{5}{\omega-1}$

ζ) $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $U(t)=\frac{t+2}{2t^2+1}$

η) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}}$

θ) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)=x \cdot (x-1) - 4 \cdot (x-1)$

ι) $V: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $V(r)=\begin{cases} r+1, & r \in [-3, 0] \\ 2r+2, & r \in (0, 2) \end{cases}$

κ) $h: [4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(s)=3+\sqrt{s-4}$

λ) $g: [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x)=\begin{cases} x+2, & x \in [-2, 0] \\ 3x+2, & x \in (0, 4] \end{cases}$

μ) $t: (-\infty, -\frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ με $t(x)=x^2+x-2$

ΑΠ: «1-1», είναι οι α), γ), δ), ε), η), ι), κ), λ), μ)

- 164.** ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

α) Να δείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

➡ β) Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".

- 165.** ✓ Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(x))+f^3(x)=2x+3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3+x)=f(4-x)$

ΑΠ: β) $x=1$

- 166.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ συνάρτηση «1-1». Να δείξετε ότι η συνάρτηση φ με

$$\varphi(x)=-\frac{f(x)}{2\sqrt{f^2(x)+3}}$$
 είναι και αυτή «1-1».

- 167.** ✓ Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x-y)-f(x)=ay^2+\beta xy-\gamma$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $f(2)=8$ και $f(4)=22$, όπου a, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

α) Να υπολογιστούν οι τιμές των a, β

β) Να βρεθεί ο τύπος της f

γ) Να δείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

ΑΠ: α) $a=1, \beta=-2$, β) $f(x)=x^2+x+2$

168. ✓ Έστω συνάρτηση $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ με $a > 0$. Δείξτε ότι:

α) Αν η f είναι άρτια, τότε δεν αντιστρέφεται.

β) Αν η f είναι «1-1», τότε δεν μπορεί να είναι άρτια.

169. ✓ Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$. Αν ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η $f \circ g$ και είναι «1-1», να δείξετε ότι η g είναι «1-1».

170. ✓ Να οριστούν οι αντίστροφες (όπου υπάρχουν) των παρακάτω συναρτήσεων:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$

$$f^{-1}(x) = \frac{3-4x}{x-2}, x \neq 2$$

β) $f(x) = 4 - \frac{2}{5x}$

$$f^{-1}(x) = \frac{2}{5 \cdot (4-x)}, x \neq 4$$

γ) $g(x) = 5 + \sqrt{x-2}$

$$g^{-1}(x) = 2 + (x-5)^2, x \geq 5$$

δ) $h(t) = \sqrt{1 - \sqrt{2t-7}}$

$$h^{-1}(t) = \frac{1}{2} [7 + (1-t^2)^2], 0 \leq t \leq 1$$

ε) $\varphi(x) = 1 + \frac{4}{x-1}$

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{x-3}{x-1}, x \neq 1$$

ζ) $f(x) = \frac{3\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}$

$$f^{-1}(x) = \frac{2 \cdot [(x-3)^2 - 1]}{1 + (x-3)^2}, x \geq 3$$

η) $t(x) = 1 - 3x + 3 \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{9x^2 - 6x + 1}$

$$t^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{2}, & x > \frac{4}{3} \\ \frac{4-x}{8}, & -4 < x \leq \frac{4}{3} \\ -\frac{x}{4}, & x \leq -4 \end{cases}$$

⇒ **θ)** $f(x) = \frac{-4x}{3 + |x| + x^2}$

Όχι «1-1»

ι) $f(x) = \begin{cases} 5x-3, & x < 3 \\ x^2+3, & 3 \leq x \leq 5 \\ 2^{x-1}+12, & x > 5 \end{cases}$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{5}, & x < 12 \\ \sqrt{x-3}, & 12 \leq x \leq 28 \\ 1 + \frac{\log(x-12)}{\log 2}, & x > 28 \end{cases}$$

κ) $h(x) = \frac{10^x}{1+10^x}$

$$h^{-1}(x) = \log \frac{x}{1-x}, 0 < x < 1$$

λ) $g(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1}$

$$g^{-1}(x) = e^{\frac{x-2}{x-1}}, x \neq 1$$

171. ✓ Αν $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ x^2+1, & x \geq 1 \end{cases}$ να μελετήσετε τη μονοτονία της f και να προσδιορίσετε (αν ορίζεται) τη συνάρτηση f^{-1} .

ΑΠ: f γν. αύξουσα, $f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & x < 2 \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 2 \end{cases}$

172. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+3x+6, x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι "1-1"

β) Να βρείτε τις τιμές του x ώστε i) $f^{-1}(x)=1$, ii) $f^{-1}(x)=0$

γ) Αν $f^{-1}(28)=a$, τότε το a είναι ίσο με (επιλέξτε ένα): i) -2, ii) -1, iii) 2, iv) -3

ΑΠ: β) i) $x=11$, ii) $x=6$, γ) iii)

173. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{x^2-1}{2x}$ και $g(x)=e^x$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $h=f \circ g$

β) Δείξτε ότι η h αντιστρέφεται και να οριστεί η h^{-1} .

ΑΠ: α) $h(x)=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}, x \in \mathbb{R}$, β) $h^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}), x \in \mathbb{R}$

174. ✓ Εξετάστε αν οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$f(f(x))=2005$ και $g(x) \geq \frac{g(2005)+g(2006)}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι αντιστρέψιμες ή

όχι.

ΑΠ: Δεν αντιστρέφονται

175. Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι "1-1" με $f((0, +\infty))=\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση g με $g(x)=a \cdot f(x^3-1)+\beta$ με $a \neq 0$, είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την g^{-1} .

ΑΠ: $D_{g^{-1}}=\mathbb{R}, g^{-1}(x)=\sqrt[3]{f^{-1}\left(\frac{x-\beta}{a}\right)+1}$

176. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x-3}}$

α) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β) Να βρεθεί η αντίστροφή της, αν ορίζεται.

ΑΠ: α) $[0, 1]$, β) $f^{-1}(x)=(1-x^2)^2+3, 0 \leq x \leq 1$

177. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{4x^3-1}{3}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .

ΑΠ: α) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{3x+1}{4}}, x \geq -\frac{1}{3} \\ -\sqrt[3]{-\frac{3x+1}{4}}, x < -\frac{1}{3} \end{cases}$, β) $(1, 1), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ως σημεία τομής

της C_f με τη διχοτόμο $y=x$ αφού η f είναι γν. αύξουσα

178. ✓ Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι "1-1" και να προσδιορίσετε τις αντίστροφές τους:

α) $f(x)=1+(x-3)^2, x \geq 3$, β) $g(x)=(2x-1)^4-1, x \geq \frac{1}{2}$

ΑΠ: α) $f^{-1}(x)=3+\sqrt{x-1}, x \geq 1$, β) $g(x)=\frac{1+\sqrt[4]{x+1}}{2}, x \geq -1$

179. ✓ Θεωρούμε συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(f(x))=e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Δείξτε ότι $f(f(x)) \cdot f(f(y))=f(f(x+y))$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f^2(f(x))=3 \cdot f(f(x))-2 \cdot f(0)$

➡ γ) Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ δεν έχει ρίζα το 0.

➡ δ) Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται.

ΑΠ: β) $x=\ln 2$ ή $x=0$

- 180.** ✓ ➡ Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της f .
- 181.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και $(f \circ f + g \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
 ➡ α) Η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$.
 β) Ισχύει $f^{-1}(x) = f(x) + g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 182.** Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις της μορφής $f(x) = ax + \beta$, $a \neq 0$, σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:
 α) $f = f^{-1}$ β) $f = -f^{-1}$ γ) $f = f^{-1} + c$ ($c \neq 0$, σταθερά)
ΑΠ: α) $f(x) = x$ ή $f(x) = -x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, β) Δεν υπάρχουν, γ) $f(x) = x + \frac{c}{2}$
- 183.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $h(x) = \frac{1}{x+2}$ με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$.
A. α) Να βρείτε μια συνάρτηση g ώστε $f \circ g = h$.
 β) Να βρείτε μια συνάρτηση φ ώστε $\varphi \circ f = h$.
B. α) Να βρείτε τις f^{-1} , g^{-1} , h^{-1} (αντίστροφες των f, g, h).
 β) Να βρείτε τις $f^{-1} \circ g^{-1}$ και $g^{-1} \circ f^{-1}$.
 γ) Να εξετάσετε αν $g^{-1} \circ f^{-1} = h^{-1}$ (δικαιολογήστε την απάντησή σας).
**ΑΠ: A. α) $g(x) = x + 2$, $D_g = \Delta$, β) $\varphi(x) = \frac{x}{1+2x}$, $D_\varphi = \Delta$,
 B. α) $f^{-1} = f$, $g^{-1}(x) = x + 2$, $x \in (2, +\infty)$ $h^{-1} = \frac{1-2x}{x}$, $x \in (0, \frac{1}{2})$,
 β) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{x-2}$, $x \in (2, +\infty)$, $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{1-2x}{x}$, $x \in (0, \frac{1}{2})$, γ) Είναι ίσες**
- 184.** ✓ ➡ Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι "1-1" και περιττή να αποδείξετε ότι υπάρχει η f^{-1} η οποία είναι επίσης περιττή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΡΙΩΝ - ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ



Bolzano
Bernhard

1. Μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_0 , έναν πραγματικό αριθμό ℓ . Αναγκαστικά το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της. **Σ** **Λ**

2. Τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης f , όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο x_0 , συμπίπτουν πάντοτε. **Σ** **Λ**

3. Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό. **Σ** **Λ**

4. Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_0 , τότε αυτό είναι μοναδικό. **Σ** **Λ**

5. α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)+g(x)) = \ell$, τότε οι συναρτήσεις f, g έχουν πάντοτε όριο στο x_0 . **Σ** **Λ**
 β) Αν για τις συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$, τότε πάντοτε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. **Σ** **Λ**

6. α) Αν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)+g(x))$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ υπάρχουν, τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. **Σ** **Λ**
 β) Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)+g(x))$ υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. **Σ** **Λ**
 γ) Αν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. **Σ** **Λ**
 δ) Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}^*$ και το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ υπάρχει, τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. **Σ** **Λ**

7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x} - 1$.
 Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. **Σ** **Λ**

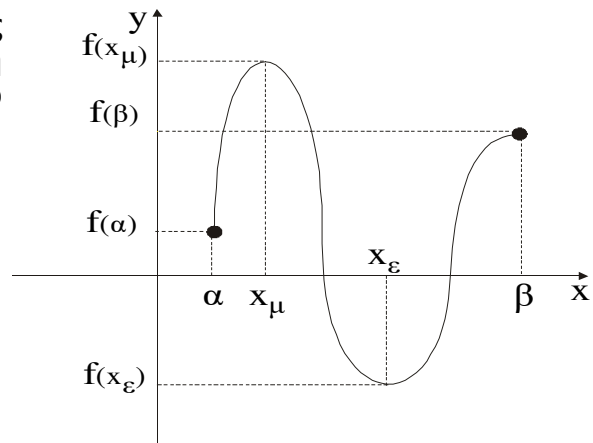
8. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$, $\ell \neq 0$, τότε πάντοτε ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$. **Σ** **Λ**

- 9.** Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι θετικός αριθμός, τότε η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο x_0 . **Σ Λ**
- 10.** Μια συνάρτηση f έχει στο $x_0=2020$ όριο το -2020 . Τότε η f παίρνει αρνητικές τιμές για κάποια x κοντά στο 2020 . **Σ Λ**
- 11.** Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα που περιέχει το 0 . Τότε ισχύει πάντοτε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=f(0)$. **Σ Λ**
- 12.** Αν $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=\beta$, $\lim_{x \rightarrow \beta} g(x)=\gamma$ και $f(x) \neq \beta$ κοντά στο a , τότε $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x))=\gamma$. **Σ Λ**
- 13.** Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x} = 3\ell$. **Σ Λ**
- 14.** Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(ax)}{x} = 1$ με $a \neq 0, 1$. **Σ Λ**
- 15.** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=+\infty$ και $g(x)<0$ κοντά στο x_0 , τότε πάντα ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))=-\infty$. **Σ Λ**
- 16.** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}=0$. **Σ Λ**
- 17.** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}=+\infty$. **Σ Λ**
- 18.** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=\ell \in \mathbb{R}^*$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$. **Σ Λ**
- 19.** Αν η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε πάντοτε ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=+\infty$. **Σ Λ**
- 20.** Αν $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x} + e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=0$. **Σ Λ**
- 21.** Αν $(1-x) \cdot (1+5x) \leq f(x) \leq (3x+1)^2$, τότε η f είναι συνεχής στο 0 . **Σ Λ**
- 22.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο (a, β) και υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f(\xi)<0$, τότε θα ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. **Σ Λ**

- | | | | |
|------------|--|----------|----------|
| 23. | Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, και παίρνει δύο διαφορετικές τιμές $f(x_1), f(x_2)$ με $x_1, x_2 \in [a, \beta]$, τότε παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$. | Σ | Λ |
| 24. | Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f(x_1)=1$ και $f(x_2)=4$, τότε υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=e$. | Σ | Λ |
| 25. | Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε το σύνολο τιμών της είναι $[f(a), f(\beta)]$. | Σ | Λ |
| 26. | Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε το σύνολο τιμών της είναι $[f(\beta), f(a)]$. | Σ | Λ |
| 27. | Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο $[a, \beta]$ με $f(a) \neq f(\beta)$, παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$. | Σ | Λ |
| 28. | Αν η f είναι ορισμένη, συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$. | Σ | Λ |
| 29. | Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$. Αν η f είναι «1-1» στο $[a, \beta]$, τότε είναι και γνησίως μονότονη στο $[a, \beta]$. | Σ | Λ |
| 30. | Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 με $f(x_0) \neq 0$, τότε κοντά στο x_0 οι τιμές της f είναι ομόσημες του $f(x_0)$. | Σ | Λ |
| 31. | Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ , τότε η αντίστροφή της είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $f(\Delta)$. | Σ | Λ |
| 32. | Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. | Σ | Λ |
| 33. | Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ 2-x^2, & x \geq 1 \end{cases}$. Ισχύει ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$. | Σ | Λ |
| 34. | Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε και η f^2 είναι συνεχής στο x_0 . | Σ | Λ |
| 35. | Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f+g$ δεν είναι συνεχής στο x_0 . | Σ | Λ |
| 36. | Αν οι συναρτήσεις f, g δεν είναι συνεχείς στο σημείο x_0 του κοινού πεδίου ορισμού τους, τότε η συνάρτηση $f+g$ δεν είναι συνεχής στο x_0 . | Σ | Λ |

37. Αν $f(x) \leq g(x)$ με $x \in (1, 3)$ και οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο πραγματικό αριθμό στο 2, τότε ισχύει ότι
A. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) > \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ **B.** $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) < 0$
Γ. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ **Δ.** $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$
Ε. τίποτα από τα παραπάνω
38. Αν $f(x) \leq x^3 + 1$ για $x < -4$, τότε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (αν υπάρχει) είναι ίσο με
A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **Γ.** 0 **Δ.** -1 **Ε.** -12
39. Έστω συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 6, & x = 2 \end{cases}$ και οι προτάσεις:
I. υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ **II.** η f ορίζεται στο 2 **III.** η f είναι συνεχής στο 2.
Τότε αληθεύουν
A. μόνο η I **B.** μόνο η II **Γ.** μόνο η I και η II
Δ. καμία από τις τρεις **Ε.** Όλες
40. Από τις παρακάτω ισότητες να βρείτε αυτήν που είναι **λάθος**
A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$ **B.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x^2} = -\infty$ **Γ.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} = +\infty$
Δ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-\sin^2 x} = +\infty$ **Ε.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^3} = +\infty$
41. Από τις παρακάτω ισότητες **λάθος** είναι η
A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 1$ **B.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$ **Γ.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$
Δ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{1}{x} = 0$ **Ε.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \varepsilon\phi \frac{1}{x} = 0$
42. Αν $f(x) = \frac{\pi x}{2x-1}$, τότε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu(f(x))$ είναι ίσο με
A. 0 **B.** $\frac{\pi}{2}$ **Γ.** 1 **Δ.** -1 **Ε.** $\frac{1}{2}$
43. Αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon\phi(\pi x)}{x}, & x \neq 0 \\ \kappa, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0, τότε το κ είναι ίσο με
A. 1 **B.** 0 **Γ.** π **Δ.** $\frac{\pi}{2}$ **Ε.** $-\pi$

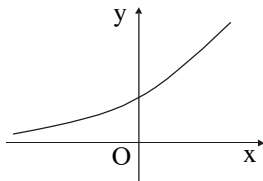
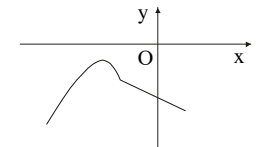
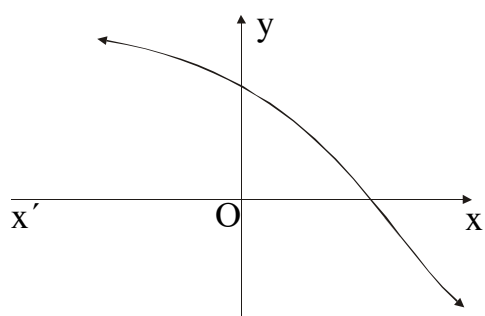
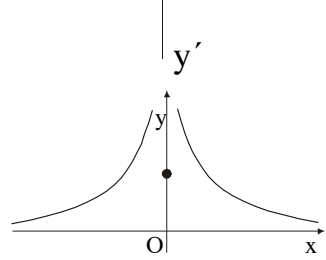
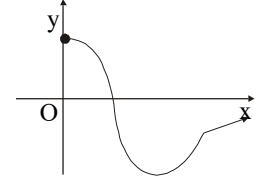
- 44.** Για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=4-2e^{-x}$ ισχύει
A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=+\infty$ **B.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=4$
Γ. Είναι γνησίως φθίνουσα **Δ.** $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
Ε. τίποτα από τα παραπάνω
- 45.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) > 0$, τότε από τις παρακάτω προτάσεις σωστή είναι πάντοτε η
A. $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$
B. δεν υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f(\xi)=0$
Γ. η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, \beta]$
Δ. η C_f δεν τέμνει ποτέ τον άξονα $y'y$
Ε. καμία από τις προηγούμενες προτάσεις
- 46.** Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$ και γνησίως φθίνουσα. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι
A. $[f(a), f(\beta)]$ **B.** $[f(\beta), f(a)]$ **Γ.** $[\beta, a]$
Δ. $(f(\beta), f(a))$ **Ε.** το $\mathbb{R}$
- 47.** Η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Το σύνολο τιμών της f είναι
A. $[f(a), f(\beta)]$
B. $(f(x_\epsilon), f(x_\mu))$
Γ. $[f(\beta), f(a)]$
Δ. $[f(x_\epsilon), f(x_\mu)]$
Ε. κανένα από τα προηγούμενα



- 48.** Σε κάθε γραφική παράσταση από τη στήλη Α του παρακάτω πίνακα αντιστοιχίστε μία από τις σχέσεις που ισχύουν από τη στήλη Β.

	Στήλη Α	Στήλη Β
1.		α. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ β. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ γ. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ δ. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ε. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$
2.		
3.		

49. Να αντιστοιχίσετε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης της στήλης Α με την ιδιότητα ή το συμβολισμό που περιγράφεται στη στήλη Β του παρακάτω πίνακα

	Στήλη Α	Στήλη Β
1.		α. η f δεν είναι συνεχής στο 0
2.		β. η f έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$
3.		γ. η f είναι γνησίως αύξουσα
4.		δ. $f(x) < 0$
5.		ε. η f είναι γνησίως φθίνουσα
		ζ. η f είναι περιττή
		η. $f(-1)=0$

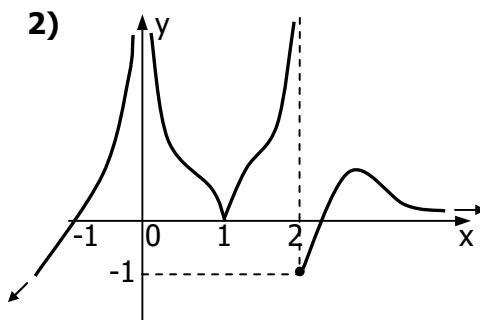
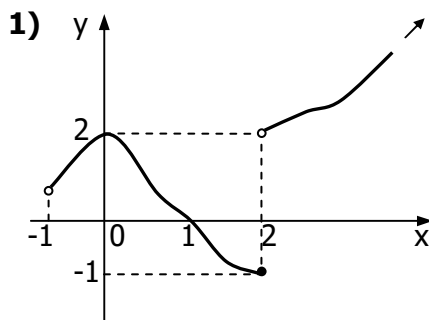
50. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα στοιχείο της στήλης Β του παρακάτω πίνακα, αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ.

Στήλη Α -πεδίο ορισμού	Στήλη Β -σύνολο τιμών
1. $\Delta = [a, \beta]$	α. $(\lim_{x \rightarrow \beta} f(x), \lim_{x \rightarrow a} f(x))$
2. $\Delta = [a, \beta)$	β. $[f(a), \lim_{x \rightarrow \beta} f(x))$
3. $\Delta = (a, \beta]$	γ. $(\lim_{x \rightarrow \beta} f(x), f(a)]$
4. $\Delta = (a, \beta)$	δ. $[f(\beta), f(a)]$
	ε. $[f(\beta), \lim_{x \rightarrow a} f(x))$
	ζ. $(\lim_{x \rightarrow a} f(x), f(\beta)]$

- 51.** Στη στήλη Α σημειώνεται μία απροσδιόριστη μορφή. Στη στήλη Β δίνεται ένα παράδειγμα που αναφέρεται σ' αυτήν τη μορφή. Συμπληρώστε τη στήλη Γ με ένα άλλο παράδειγμα που να δίνει διαφορετικό αποτέλεσμα από αυτό που έχει δοθεί.

Στήλη Α μορφή	Στήλη Β παράδειγμα που δίνεται	Στήλη Γ παράδειγμα που ζητείται
$\frac{0}{0}$	$f(x)=x^2-1$ $g(x)=x+1$ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=0$ $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)=0$ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)}=-2$	
$\frac{\infty}{\infty}$	$f(x)=2x+1$ $g(x)=x+3$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=+\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)=+\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=2$	
$0 \cdot \infty$	$f(x)=x^2$ $g(x)=\frac{1}{x^4}$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=0$ $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)=+\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x))=+\infty$	

- 52.** Να βρείτε, εφ' όσον υπάρχουν, τα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ αν η f έχει καθεμιά από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις:



Η ένδειξη $\rightarrow$ δηλώνει ότι η γραφική παράσταση συνεχίζεται απεριορίστα με τον ίδιο τρόπο.

53. ✓ Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2$	0
β) $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^7 - 7x + 2)$	2
γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 3x + 1 - (x-2)^2}{3} \right)$	$-\frac{1}{3}$
δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$	$\frac{1}{2}$
ε) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x+2}$	0
ζ) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{x - 6}$	12
η) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 + 3x - 5}$	$\frac{3}{7}$
θ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$	$-\frac{8}{3}$
ι) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$	$\frac{1}{2}$
κ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 18}{x - 3}$	12
λ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x - 2}$	0
μ) $\lim_{x \rightarrow 4} \left[\frac{1}{x-4} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right) \right]$	$-\frac{1}{16}$
ν) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \cdot (1+2x) \cdot (1+3x) - 1}{x}$	6
ξ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2}$	$+\infty$
ο) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1}$	$-\infty$
π) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 4x + 4}$	Δεν υπάρχει
ρ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$	Δεν υπάρχει
σ) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(-\frac{5x-15}{(x-3)^3} \right)$	$-\infty$
τ) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$	-1

54. ✓ Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1) \cdot x + a}{x^3 - a^3}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^v - 1}{x - 1}, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + x^2 + \dots + x^v) - v}{x - 1}, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$\frac{a-1}{3a^2}, \text{ αν } a \neq 0 \text{ και } -\infty \text{ αν } a=0$$

v

$$\frac{v \cdot (v+1)}{2}$$

55. ✓ Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+7}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+3x} - 3}{x}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4}$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-3} + \sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x-3}}$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$$

$$\theta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x - \sqrt{x+1} - 1}$$

$$\iota) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$\kappa) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1}$$

$$\lambda) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - 1}{\sqrt{5+x} - 2}$$

$$\mu) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\nu) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{7x-3}}$$

$$\xi) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$$

$$\omicron) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$\pi) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 3x + 2}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

3

$+\infty$

$$\frac{1}{2}$$

Δεν υπάρχει

$$\frac{1}{24}$$

$$1 + \sqrt{6}$$

$$-\frac{1}{56}$$

4

1

$$\frac{1}{2}$$

4

$$-\frac{1}{3}$$

$$\frac{7}{12}$$

$$-\frac{1}{3}$$

$+\infty$

$+\infty$

56. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}-2}$	$+\infty$
β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
γ) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$	$\frac{1}{12}$
δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$	$\frac{2}{3}$
ε) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{1-x}}{(x-1)^3} - 1 \right)$	$+\infty$
ζ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$	$-\frac{3}{2}$
η) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \cdot \sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$	0
θ) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-4}$	0
ι) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$	$+\infty$
κ) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} \right)$ (ΥΠΟΔ: $\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt{x-1}}$)	$+\infty$
λ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x}-1}{x-1}$	$\frac{1}{5}$
μ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}$	$\frac{1}{5}$

57. ✓ Να υπολογιστούν τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0 που δίνεται κάθε φορά:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ \sqrt{3x-2}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$	με $x_0 = 1$	1
β) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 3 - 2x, & x > 0 \end{cases}$	με $x_0 = 0$	Δεν υπάρχει
γ) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{3x^2 - 10x + 8}{x - 2}, & \text{αν } x \in [1, 2) \end{cases}$	i) με $x_0 = 1$, ii) με $x_0 = 2$	i) -1 , ii) 2

$$\delta) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}, & x \in (2, +\infty) \\ 3, & x = 2 \\ \frac{x^2-2}{4x\sqrt{2}-8}, & x \in (-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2) \end{cases} \quad \text{με } x_0=2 \quad \text{Δεν υπάρχει}$$

58. ✓ Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- α) $\lim_{x \rightarrow 1} |2x - 1|$ 1
- β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 - 4x + 4}{|x - 3|}$ $-\infty$
- γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 3|}$ Δεν υπάρχει
- δ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{8x^2}{|x - 5|}$ $+\infty$
- ε) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{|x - 4|}$ Δεν υπάρχει
- ζ) $\lim_{x \rightarrow -3} \left[(x-3)^2 + \sqrt{\frac{2|x|}{x^2-9}} \right]$ $+\infty$
- η) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{|x| - 3}$ -2
- θ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 16}{|x| \cdot (x - 4)}$ $+\infty$
- ι) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{|x| \cdot (x - 4)}$ 2
- κ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x - 5|}{(x - 5) \cdot |x|}$ Δεν υπάρχει
- λ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x - 5|}{(x - 5) \cdot |x|}$ $-\infty$
- μ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2| + x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ Δεν υπάρχει
- ν) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 + x - 2| - (x - 1)}{x^2 - 1}$ -2
- ξ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x| - 1}$ 0
- ο) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - 3 + |3x - x^2|}{x^2 - 9}$ $-\frac{1}{3}$
- π) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x + 1| - |x - 1|}{|x + 1| + |x - 1|}$ $-\frac{1}{2}$
- ρ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^2 - 4x + 3| - |x + 3|}{x}$ -5

σ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 1}{ x - 1 }$	$+\infty$
τ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{ x + 1 }{ x - 1 }$	1
υ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{ x + 1 }{ x - 1}$	Δεν υπάρχει
φ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x^2 - 9}$	Δεν υπάρχει
ψ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x+9} - \sqrt{13}}{2 \cdot x-1 }$	Δεν υπάρχει

59. ➔ Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 - a \cdot x + a^2} - a}{|x| - a}$, για κάθε τιμή του $a \in \mathbb{R}$

60. ✓ Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

ΑΠΑΝΤ

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{3x}$	$\frac{1}{3}$
β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 4x}{x}$	4
γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon \phi x}{x}$	1
δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 3x}{\eta \mu 4x}$	$\frac{3}{4}$
ε) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta \mu x}{x^2 - 3x}$	$-\frac{2}{3}$
ζ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 2x}{\epsilon \phi x}$	2
η) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^4 x}{x}$	0
θ) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\eta \mu x}{\pi - x}$	1
ι) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma \upsilon \nu 2x}{x^2}$ (χρειάζεται ο τύπος $\sigma \upsilon \nu 2x = 1 - 2\eta \mu^2 x$)	2
κ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu 2x - \sigma \upsilon \nu 4x}{x^2}$ (ισχύει ότι $\sigma \upsilon \nu A - \sigma \upsilon \nu B = 2\eta \mu \frac{A+B}{2} \cdot \eta \mu \frac{B-A}{2}$)	6
λ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta \mu x}{x + \eta \mu x}$	0
μ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \eta \mu x} - \sqrt{1 - \eta \mu x}}{x}$	1
ν) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta \mu(x-1)}{x^2 + 4x - 5}$	$\frac{1}{6}$
ξ) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1-x}{1+x} \cdot \eta \mu \left(\pi x - \frac{\pi}{3} \right) \right]$	0

- ο) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\frac{\pi x}{2})}{1 - \sqrt{x}}$ (ΥΠΟΔ: Χρησιμοποιείστε συζυγή παράσταση και π
 θυμηθείτε ότι $\sin x = \eta\mu(\frac{\pi}{2} - x)$ π
- η) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1}}{\eta\mu x}$ -1
- ρ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{1 - \sin x} \right)$ $\frac{1}{2}$
- σ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\eta\mu^2 x + \eta\mu x - 1}{2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 1}$ -3
- τ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sin x}$ 2
- υ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x \sin x} \right)$ 0

61. ✓ Να υπολογίσετε τα όρια:

- α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x}{\sqrt{x^2+1}-1}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x \cdot \sin \frac{1}{x})$
- ➡ δ) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\eta\mu x - \eta\mu a}{x - a}$ ε) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x^2+1} - \sin x}{x^2}$ ζ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{4+x}-2}$
- η) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x^2+2) \cdot \eta\mu x}{x^2+x}$

ΑΠ: α) 0, β) 4, γ) 0, δ) συνα, ε) $\frac{3}{2}$, ζ) 4, η) 2

62. Με βάση τους τύπους $\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta = 2\eta\mu \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha+\beta}{2}$ και

$\sin\alpha - \sin\beta = -2\eta\mu \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \eta\mu \frac{\alpha+\beta}{2}$, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

- α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 7x - \eta\mu 5x}{x}$, β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin 4x}{3x \cdot \eta\mu 4x}$

ΑΠ: α) 2, β) $\frac{1}{2}$

63. ✓ Δίνεται η συνάρτηση f με $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \eta\mu \frac{\pi(x-1)}{2} - 1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\pi}{2}. \text{ Να υπολογίσετε τα όρια:}$$

- α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1}$

ΑΠ: α) 1, β) $-\frac{\pi}{4}$

64. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4}{e^x - 1}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 3} [\log(x+3) + \log(x-3)]$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

ΑΠ: α) Δεν υπάρχει, β) $-\infty$, γ) $-\ln 2$

65. ✓ Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{(x-1)^3}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} [x^3 \cdot (1 + \frac{1}{x^4})]$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4}{x^2+x}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x + 1}{1 - \sigma \upsilon \nu^3 x}$$

$$\Rightarrow \zeta) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{2^{x-3} + 2^{3x-1} - 2^{2x-1}}$$

ΑΠ: α) δεν υπάρχει, β) δεν υπάρχει, γ) δεν υπάρχει, δ) δεν υπάρχει, ε) $+\infty$, ζ) $-\infty$

66. ✓ Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2+1)^{x^2-1} + \ln \frac{1}{(x^2+1)^{x-1}}}{x^3-1}$

ΑΠ: $\frac{\ln 2}{3}$

67. ✓ Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 3 \\ \lambda + \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x > 3 \end{cases}$, να έχει όριο στο 3.

**ΑΠ: $\lambda = -3$
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

68. ✓ Να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών παραμέτρων, ώστε η συνάρτηση:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} 3 - \lambda x^2, & x > 1 \\ x + 1, & x \leq 1 \end{cases} \text{ να έχει όριο στο } x_0 = 1.$$

$\lambda = 1$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + \beta, & x \in [0, 2] \\ x^2 + 1, & x \in (2, 3] \\ 2ax - 3\beta, & x \in (3, 4] \end{cases} \text{ να έχει όρια στα } x_1 = 2 \text{ και } x_2 = 3.$$

$a = \frac{13}{12}, \beta = -\frac{7}{6}$

$$\gamma) f(x) = \frac{a \cdot |x-1|}{x-1} \cdot (2x^3 - 4) \text{ να έχει όριο στο } 1.$$

$a = 0$

$$\delta) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + ax^2 + \beta x + 4}{x-1}, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases} \text{ να έχει όριο στο } 1.$$

$a = 3, \beta = -8$

$$\epsilon) f(x) = \begin{cases} x^2 + \kappa x + \lambda, & x \in (-7, 1) \\ x + 1, & x \in [1, 2) \\ \kappa x + 3\lambda, & x \in [2, 7) \end{cases} \text{ να έχει όρια στα } 1 \text{ και } 2.$$

$\kappa = 0, \lambda = 1$

69. ✓ ➔ Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $\beta > 1$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + 1}{x^2 - 1}, & x < -1 \\ \ln(x + \beta), & x \geq -1 \end{cases}$$

να έχει όριο πραγματικό αριθμό στο $x_0 = -1$.

$$\text{ΑΠ: } \alpha = 1, \beta = 1 + \frac{1}{\sqrt{e}}$$

70. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x + 1}, & \text{αν } x < -1 \\ x^2 - 2\alpha x - \alpha, & \text{αν } x > -1 \end{cases}$. Να βρεθούν οι τιμές

των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να τέμνει τον $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -2 και το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

$$\text{ΑΠ: } \alpha = 2, \beta = 7, \gamma = 5$$

71. ✓ Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^v - vx + v - 1}{(x - 1)^2}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{ΑΠ: } \frac{v \cdot (v - 1)}{2}$$

72. ✓ Αν $\mu, v \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^v + \beta x^\mu + \gamma}{x - 1} = v\alpha + \mu\beta$.

$$\text{ΥΠΟΔ: } \gamma = -\alpha - \beta$$

73. Να υπολογιστεί το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu x + \eta\mu 2x + \eta\mu 4x + \dots + \eta\mu 2^v x}{x}$ στο 0, με $v \in \mathbb{N}$.

$$\text{ΑΠ: } 2^{v+1} - 1$$

74. ✓ Να βρείτε το θετικό ακέραιο v ώστε:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + \eta\mu 2x + \dots + \eta\mu vx}{x} = 28 \quad \Rightarrow \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu 2x \cdot \dots \cdot \eta\mu vx}{x^v} = 120$$

$$\text{ΑΠ: } \alpha) v = 7, \beta) v = 5$$

75. ✓ ➔ Αν $f^3(x) + f(x) = x^4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

$$\text{ΑΠ: και τα δύο } 0$$

76. ✓ Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, αν ισχύει καθεμιά από τις παρακάτω συνθήκες:

$$\alpha) \eta\mu 2x \leq x \cdot f(x) \leq x^2 + 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\beta) |x \cdot f(x) - \eta\mu 5x| \leq x^{2020}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \gamma) f^3(x) + f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \delta) f^2(x) \leq 2\eta\mu x \cdot f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ΑΠ: } \alpha) 2, \beta) 5, \gamma) 0, \delta) 0$$

77. ✓ ➔ Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^2(x) - 2x \cdot \eta\mu x \leq \eta\mu^2 x - 2x \cdot f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\text{ΑΠ: } 0$$

78. ✓ ➔ Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $x^2 \cdot f(x) \geq x+3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε τα:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{f(x)} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \{[f(x) - 2020] \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)}\}$$

ΑΠ: α) $+\infty$, β) 0, γ) 1

79. ✓ ➔ Αν $x \cdot f(x) \leq \eta\mu x \cdot f(x) - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

ΑΠ: $-\infty$

80. ✓ Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2x+7} + 1}{x-1}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7} - 3}{x-2}$$

$$\Rightarrow \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \eta\mu 2x - \eta\mu^3 x}{x^2 - x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x + x \cdot \eta\mu^2 x}$$

$$\Rightarrow \delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\eta\mu(x))}{x}$$

$$\Rightarrow \epsilon) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu \pi x}{x-2}$$

$$\Rightarrow \zeta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu \pi x}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{2}}$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} - 1}$$

$$\theta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x-1}$$

$$\iota) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-2| + |3x-x^2| - 3}{x-1}$$

$$\kappa) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3x^5 - x^2 + x - 5| - 2}{|x^3 + 2| - 3}$$

$$\Rightarrow \lambda) \lim_{x \rightarrow 0} |x^{2018} \cdot \eta\mu \frac{2019}{x}|$$

$$\mu) \lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x})$$

ΑΠ: α) $-\frac{1}{12}$, β) $\frac{7}{24}$, γ) 1, κ) $-\frac{14}{3}$, λ) 0

81. ✓ Αν $f(x) = \frac{x^3 - 2ax^2 + 4a^2x - 3a^3}{x^2 - a^2}$, $a \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \frac{x^2 + 5x - 6}{x - x^2}$, να βρεθεί ο a , ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

ΑΠ: $a = -\frac{14}{3}$

82. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^3 - (\beta+1) \cdot x^2 + \gamma + 1}{x^2 - 4x + 4} = 3$, να βρείτε τα $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

ΑΠ: $a=1, \beta=2, \gamma=3$

83. ✓ Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι πεπερασμένο το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6x^2 + 1} + 4\lambda x}{x+2}.$$

ΑΠ: $\lambda = \frac{5}{8}$

84. ✓ Να βρεθεί η τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι πεπερασμένο το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\mu x^2 + x - 2}{x - \mu}.$$

ΑΠ: $\mu \in \mathbb{R}$

85. ✓ Αν $f(x) = \frac{ax^2 + \beta x + 6}{x^2 - 5x + 6}$ να βρεθούν οι $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ και να είναι πεπερασμένοι αριθμοί.

ΑΠ: $a=1, \beta=-5$

86. ✓ Αν $f(x) = \frac{2x^2 + ax - \beta + 1}{x^2 - 2x}$, να βρεθούν οι $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{3}{2}$.

ΑΠ: $a=-5, \beta=-1$

87. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\kappa x^3 + \lambda x^2 + 4}{x + 2}$. Να βρεθούν οι $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 10$.

ΑΠ: $\kappa = \frac{3}{2}, \lambda = 2$

88. Αν $f(x) = \frac{a|x+2| + \beta|x-4| - 2}{x^2 - 5x + 6}$ να βρεθούν οι τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10$.

ΑΠ: $a=2, \beta=-8$

89. Να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x+a}-1}$ να έχει πεπερασμένο μη μηδενικό όριο στο -3 .

ΑΠ: $a=4$

90. ✓ Να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}_+$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+a}-2}{\eta\mu 5x} \in \mathbb{R}$.

ΑΠ: $a=4$

91. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} < f(x) \cdot \eta\mu x$, να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$.

ΑΠ: $a=0$

92. Να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-a}-2}{x-5} \in \mathbb{R}$.

ΑΠ: $a=1$

93. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\lambda^2 - 1)x^2 - \lambda^2 + 1}{x-1} = 3\lambda$.

ΑΠ: $\lambda=2$ ή $\lambda=-\frac{1}{2}$

94. Να προσδιοριστούν οι τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\mu}{x-1} - \frac{\lambda}{x^2-1} \right) = 2$

ΑΠ: $\lambda=8$ και $\mu=4$

95. Να προσδιοριστεί το όριο στο 0 της $f(x) = \frac{2x + \kappa \cdot \eta\mu x}{|x|}$, αν υπάρχει, για όλες τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

ΑΠ: Το όριο είναι 0 για $\kappa=-2$, ενώ για $\kappa \neq -2$ δεν υπάρχει

96. Να προσδιοριστεί, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\mu+1) \cdot x^2 + x - 2}{x-1}$ για όλες τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$.

ΑΠ: Το όριο είναι 3 για $\mu=0$, ενώ για $\mu \neq 0$ δεν υπάρχει

97. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\lambda^2 + 2)x^2 - 2(\lambda + \mu)x + \mu^2}{(x-1)^2}$. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

ΑΠ: Αν $\lambda \neq 1$ ή $\mu \neq 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ ενώ αν $\lambda=1$ και $\mu=1$ δεν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

98. ✓ ➔ Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό a , αν ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(ax)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\eta \mu x}{\pi - x}.$$

$$\text{ΑΠ: } a = \pm \sqrt{2}$$

99. ✓ Να δείξετε ότι:

α) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h) = \ell$

β) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, με $x_0 \neq 0$, αν και μόνο αν $\lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 \cdot h) = \ell$

100. α) Αν $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} (2f(x) + 3x^2 - 2x + 1)$

β) Αν $\lim_{x \rightarrow -1} (2f(x) + 3x^2 - 2x + 1) = 7$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$$\text{ΑΠ: α) } 10, \text{ β) } \frac{1}{2}$$

101. Αν f συνάρτηση με $f^3(x) + x^2 \cdot f(x) = 2x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η τιμή του ℓ .

$$\text{ΑΠ: } 1$$

102. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ και ισχύει ότι $f(x) \cdot \eta \mu 2x + f^2(x) = 3x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{ΑΠ: } \lambda = -3 \text{ ή } \lambda = 1$$

103. ✓ Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + a - \beta x}{x - 2} = 3$, δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \beta}{-2x + a + 2} = -\frac{1}{2}$

104. α) Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} - 4}{x + 2}$.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt{f(x)} - 4}{x - 2} = 3$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

$$\text{ΑΠ: α) } 0, \text{ β) } \frac{16}{9}$$

105. ✓ Αν $f(x) \geq 0$ κοντά στο 0 και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sqrt{f(x)} + x}{\eta \mu x} = 1$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\text{ΑΠ: } 0$$

106. Av $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = \ell \in \mathbb{R}$ να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ΑΠ: 0

107. ✓ Av $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x) = 3$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ΑΠ: 3

108. Av $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(x)}{\eta\mu 2x} = 2$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ΑΠ: 4

109. ✓ Av $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2 - \eta\mu x}{x^2 + x} = 3$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x}$.

ΑΠ: 4

110. ✓ Av $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot \eta\mu^2 \pi x}{x + 1} = +\infty$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

ΑΠ: $+\infty$

111. ✓ Av $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) \cdot \eta\mu^2 \pi x}{x + 1} = +\infty$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

ΑΠ: $+\infty$

112. ✓ ➔ Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{4}}{x^2 - 4} = +\infty$.

ΑΠ: $-\infty$

113. ✓ ➔ Av $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot \sqrt{f^2(x) + 2x^2} - f^2(x)]$.

ΑΠ: $-\infty$

114. Av $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3f^2(x) + 2f(x) + 1}{f^2(x) - f(x) + 3}$.

ΑΠ: 3

115. ✓ Av $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 1} [g(x) \cdot (x^3 - 3x + 2)] = 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)]$.

ΑΠ: 2

116. Av $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} - 1) \cdot g(x) = 2$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} (f \cdot g)(x)$

ΑΠ: 20

117. Av $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 5$ και $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x) \cdot (2x^2 + x - 10)] = 2$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \cdot g(x))$.

ΑΠ: $\frac{10}{9}$

- 118.** Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x \cdot \eta\mu x} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 0} [g(x) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - 1)] = 2$.

Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)],$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 \cdot g(x)]$

δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x^4 \cdot g(x)}{f(x) + \eta\mu x^2}$

ΑΠ: α) 12, β) 3, γ) 4, δ) $\frac{7}{4}$

- 119.** ✓ Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) \cdot (x^2 - 1)}{x - 2} = -\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{g(x) \cdot (x - 1)} = +\infty$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$.

ΑΠ: $-\infty$

- 120.** ✓ Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, αν για την f ισχύει ότι $\frac{x^3 - 1}{x - 1} \leq f(x) \leq 3x^2$, για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

ΑΠ: 3

- 121.** Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε $x - x^2 \leq f(x) \leq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) Δείξτε ότι $f(0) = 0$.

β) Βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

ΑΠ: β) 0 και 1

- 122.** ✓ Αν f συνάρτηση με $x^2 \cdot f(x) \leq x^2 - \eta\mu^2 x \leq f(x)$, για κάθε $x \in [-1, 1]$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ΑΠ: 0

- 123.** ✓ Αν f συνάρτηση με $f(x) - x \leq x^2 \leq f(x - 1) + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθούν:

α) η συνάρτηση f και β) το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x}$.

ΑΠ: α) $f(x) = x^2 + x$, β) 1

- 124.** ✓ Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $\eta\mu x \cdot x^2 \leq f(x) \leq \eta\mu x + x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε

τα: α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

και

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2x}{x + \eta\mu x}$

ΑΠ: α) 1, β) $\frac{3}{2}$

- 125.** Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x) - f(2)| \leq \kappa \cdot |x - 2|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$, δείξτε ότι υπάρχει το όριο της f στο 2.

- 126.** ✓ Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, αν ισχύει η σχέση $|f(x) - 2| \leq \left| \frac{x^2 - 1}{x + 1} \right|$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

ΑΠ: 2

- 127.** Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ και η f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

ΑΠ: -4

128. Αν $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2018$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+2)}{f(x^2)}$

ΑΠ: 1

129. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(3x) - \eta\mu 2x \cdot f(-x)}{x^2 + \eta\mu^2 x}$

ΑΠ: $\frac{5}{2}$ **ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ****130.** ✓ Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 2x + 11)$

 $+\infty$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^{10} + (x-1)^{10} + (x-2)^{10} + \dots + (x-10)^{10}]$

 $+\infty$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-4}{x+2}$

3

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4-3x^3}{5x^3}$

 $-\frac{3}{5}$

ε) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{(x-3)^2}$

0

ζ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{-4x^2 + x + 3}$

 $-\infty$

η) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4}{3x^3 + 1} - \frac{x^2}{3x + 2} \right)$

 $\frac{2}{9}$

θ) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1-t) \cdot (t^2 + 3)}{t^2 + 1}$

 $-\infty$

ι) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^{10} + (x-2)^{10} + \dots + (x-100)^{10}}{x^{10} - 10^{10}}$

100

κ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 - 1} \right)$

0

λ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1} \right)$

 $-\infty$

μ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\{1 + [x - (2-x)^3]^2\}^2}{(x-1)^2}$

 $+\infty$ **131.** ✓ Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 2}$

 $+\infty$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\sqrt{2-x} + 1)$

 $-\infty$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{9x^2 - x + 1}{-8x + 5}}$

 $+\infty$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 2}}{2x + 3}$

1

132. ✓ Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)]$	$\frac{1}{2}$
β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x \cdot (\sqrt{x^2 + 2} + x)]$	$+\infty$
γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x \cdot (\sqrt{x^2 + 2} + x)]$	-1
δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 2} - \sqrt{x^2 + x + 2})$	1
ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 2}}{x - \sqrt{x^2 - 2}}$	-1
ζ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x + 2)$	$\frac{3}{2}$
η) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + x - 10}}{3x + 2}$	-1
θ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$	-1
ι) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$	1
(ΥΠΟΔ: Διαιρέστε αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt{x}$)	
κ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-x + \sqrt{-x + \sqrt{-x}}}}$	1
λ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2 - \sqrt{x^2 - 3x - 1})$	$-\infty$
μ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2 - \sqrt{x^2 - 3x - 1})$	$\frac{7}{2}$
ν) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - x \right)$	-1
ξ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot \sqrt[3]{x^2})$	$-\infty$
ο) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3 - \sqrt{3x^2 + 5x + 7}}{2x + 7}$	$\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$
π) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt[4]{2x^4 + 3} \right)$	$-\infty$
ρ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}$	-1
σ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x\sqrt{x})$	$+\infty$
τ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x)$	$+\infty$
υ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x)$	0
φ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x)$	0

133. ✓ Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{x}$	2
β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}$	2
γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}$	0
δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x^4 + 1} + x^2 + 1}$	$\frac{1}{2}$
ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{\sqrt{3x^4 + x^2 + 1} - x}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
ζ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5 - x} + x}{\sqrt{2 - x} + \sqrt{-x}}$	$-\infty$
η) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9} + x}{\sqrt{x^2 - 4} + x}$	$\frac{9}{4}$
θ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$	1
ι) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 5} + x}$	1

134. ✓ Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$	-1
β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1})$	0
γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^2 + 4} - \sqrt[3]{x^2 + 1})$	0
δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^{\frac{5}{2}} \cdot (\sqrt[3]{x^3 + 2} - \sqrt[3]{x^3 + 1})]$	$+\infty$
ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 1})$	$-\infty$
ζ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2 + 1}}$	$+\infty$
η) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x} - 1}$	$-\infty$
θ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)} - x)$	-2

135. ✓ Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ αν } f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ αν } f(x) = \begin{cases} ax+1, & \text{αν } 0 < x < 10 \\ \frac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4}, & \text{αν } x \geq 10 \end{cases}$$

ΑΠ: α) 1 στο $-\infty$ και $+\infty$ στο $+\infty$, β) 0

136. Να υπολογιστούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ αν } f(x) = \sqrt{4x^2 - 2x + 3} - 2x - 1$$

ΑΠ: $+\infty$ και $-\frac{3}{2}$ αντίστοιχα

137. ✓ Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - |x-2|}{x} \quad \mathbf{2}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x-1| + |x-2|) \quad \mathbf{+\infty}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + |x-x^2|}} \quad \mathbf{0}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^4 - (x^2 + x \cdot |x|) + \frac{x}{|x|}} \quad \mathbf{+\infty}$$

138. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1| + |3-2x|}{1-3x}$.

ΑΠ: 1

139. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ αν } f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{|x-2|(x^2-1)}, & \text{αν } x < 1 \\ |x-2|, & \text{αν } 1 \leq x < 2 \\ \sqrt{x^2+2} - x, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ αν } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2}{|x| \cdot x}, & \text{αν } x \in \mathbb{R}^* \\ 3, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

ΑΠ: α) 0 και τα δύο, β) -1

140. ✓ α) Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$.

β) Να υπολογιστεί το όριο στο $+\infty$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{x + \eta \mu x}{x + \sin x}$ με

$D_f = (1, +\infty)$.

γ) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x \cdot \eta \mu x + 1}{x^2 + \eta \mu x + 3}$.

ΑΠ: β) 1, γ) 1**141.** Να υπολογιστούν τα όρια στο $+\infty$ των συναρτήσεων $f_1(x) = \frac{3}{x^2} \cdot \eta\mu x$,

$$f_2(x) = \frac{5}{x^2} \cdot \sigma\upsilon\nu x, \quad f_3(x) = \frac{2 - f_1(x)}{3 + f_2(x)} \quad \text{και} \quad f_4(x) = \frac{2x^2 - 3\eta\mu x}{3x^2 + 5\sigma\upsilon\nu x}.$$

ΑΠ: 0, 0, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ αντίστοιχα**142.** ✓ Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \eta\mu x}{x^2 + 1} = 0$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} [(\sqrt{x^2 + 1} + x) \cdot \eta\mu 2x] = 0$$

143. ✓ Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu^4 x}{2x}, \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x^4}{x}, \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x^2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x+\pi}{3} \right)$$

ΑΠ: Όλα 0**144.** ✓ Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x^3} \cdot \eta\mu \left(\lambda x + \frac{\pi}{6} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \cdot \eta\mu 5x + \sigma\upsilon\nu(x-3)}{x^4}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x}{2x^k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k > 1$$

ΑΠ: Όλα 0**145.** ✓ Αφού αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}) = 1$ να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu^p \frac{1}{x} \right) \text{ με } p \in \mathbb{N}^* \text{ και } p \geq 2.$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{3x^2 + 4}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + x} - x}$$

ΑΠ: α) $+\infty$, β) 0, γ) 1/3, δ) 2**146.** Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = 2$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.**ΑΠ: -1**

147. ✓ Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x}$	0
β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^{k+1}}, k \in \mathbb{N}$	0
γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot x^\lambda), \lambda \in \mathbb{Z}_-$	0
δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} - e^{-x}}{e^x - e^{-x-1}}$	e
ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3 \cdot 2^x}{e^x - 2^x}$	1
ζ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{x+1} + 5 \cdot e^x}{2 \cdot 3^x - e^x}$	-5
η) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+2} + 5}{2^x + 3^{x+1} + 1}$	3
θ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^x + 3^x + 1}{8^x + 5^x + 1}$	1
ι) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + e^{-x}) - x]$ (ΥΠΟΔ: Θυμηθείτε ότι $x = \ln e^x$)	0

148. ✓ Να υπολογιστούν τα όρια για όλες τις θετικές τιμές του α:

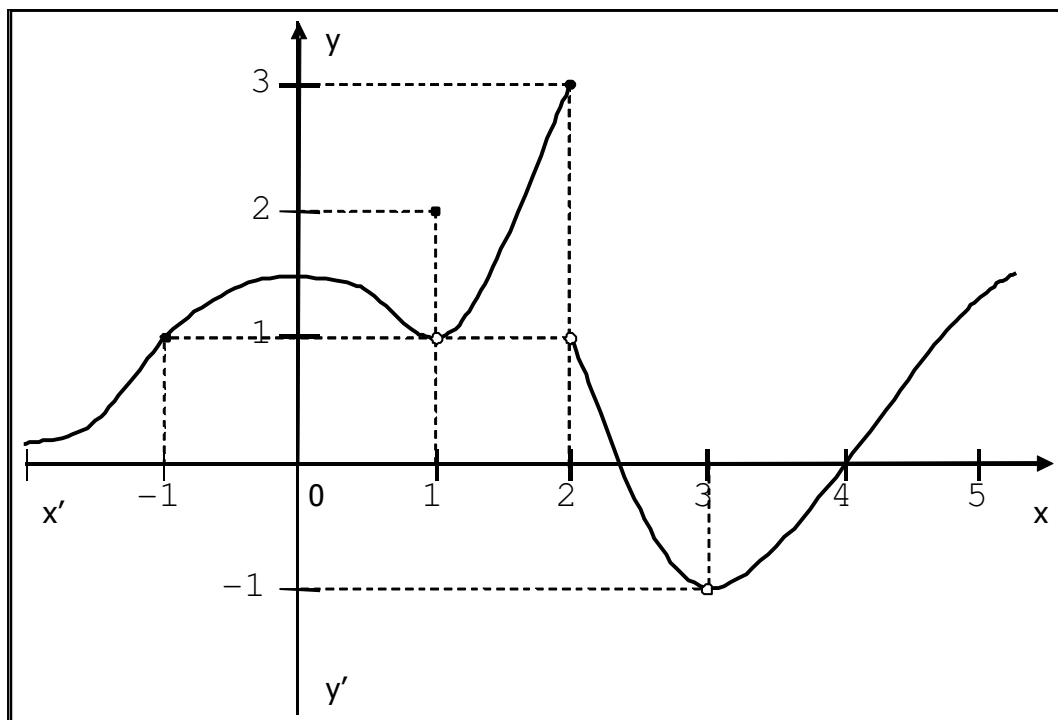
$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{x+1} + 2^{x+2}}{a^{x+2} + 2^{x+1}} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+1} - a^x}{e^x + a^{x+1}}$$

$$\text{ΑΠ: } \alpha) \begin{cases} \frac{1}{a}, \text{ αν } a > 2 \\ 2, \text{ αν } a < 2 \\ 1, \text{ αν } a = 2 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} -\frac{1}{a}, \text{ αν } a < e \\ e, \text{ αν } a > e \\ \frac{e-1}{e+1}, \text{ αν } a = e \end{cases}$$

149. Να βρείτε ένα κατάλληλο ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ισχύει:

- α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 5$.
- β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = 20$.
- γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty$.
- δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 2$.
- ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = +\infty$.
- ζ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

150. ✓ Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρεθούν τα:



α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 1)$

γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x) - 1}$

δ) $\lim_{x \rightarrow -1} f(f(x))$

ε) $\lim_{x \rightarrow 3} f(f(f(x)))$

ζ) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}$

η) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{|f(x)|}$

θ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)}$

ι) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) - 3}$

κ) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x) - 3}$

➔ λ) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x) + x - 5}$

μ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{f(x)}$

ν) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x) \cdot (x - 4)}$

151. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu x}{x^{2019}}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x^{2019}}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{\pi} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}}$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu 2x + \sigma \upsilon \nu 3x}{x^{2018}}$

ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\pi} \right)^{\sqrt{x^2+4}-3x}$

ζ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1-x^2}{x}}$

η) $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1-x^2}{(x-1)^3}}$

θ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \pi^{\sqrt{4x^2+1}-2}$

ι) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$

κ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 - 1}$

$$\lambda) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2^x + 1}{e^x - 3^{x+1}}$$

$$\mu) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 2^x}{e^x - 2^{x+1}}$$

$$\nu) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1})$$

$$\omicron) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\eta \mu^2 \frac{1}{x}}$$

$$\pi) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \ln \sqrt{x^2 + x + 2})$$

$$\rho) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x^2 + x + 2} + 1 + x)$$

$$\sigma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{2018} - |x^{2018} + x + 1|}{|3 - x + x^{2019}| + x^{2019}}$$

ΑΠ: α) 0, β) 0, γ) 0, δ) 0, ε) +∞, ζ) +∞, η) 0, θ) +∞, ι) -2, κ) 0, λ) 0, μ) $-\frac{1}{2}$, ν) +∞, ο) +∞, π) 0, ρ) +∞, σ) -1

152. Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta \mu x}{x - \eta \mu x}$$

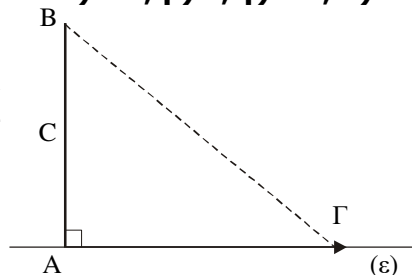
$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \cdot \eta \mu \frac{1}{x}}$$

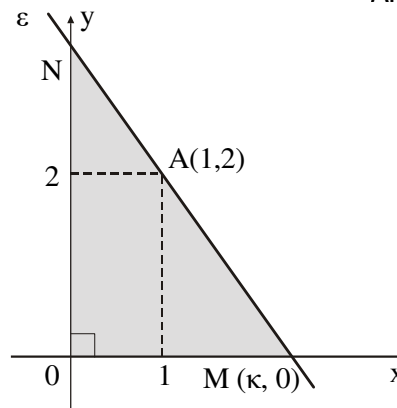
ΑΠ: α) +∞, β) 3, γ) +∞, δ) +∞

153. Το ευθύγραμμο τμήμα AB του διπλανού σχήματος έχει σταθερό μήκος C. Το σημείο Γ κινείται απομακρυνόμενο από το A επάνω στην (ε). Να αποδείξετε ότι τα μήκη των BΓ και AΓ τείνουν να γίνουν ίσα.



ΥΠΟΔ: Θέσατε AΓ=x και υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (B\Gamma - A\Gamma)$ ή το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$

154. Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο A(1, 2) και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα M και N αντιστοίχως.
α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου OMN ως συνάρτηση της τετμημένης κ του σημείου M.
β) Να βρείτε το όριο του εμβαδού όταν $\kappa \rightarrow +\infty$ και όταν $\kappa \rightarrow 1$.



ΑΠ: α) $E(\kappa) = \frac{\kappa^2}{\kappa - 1}$, β) +∞, +∞

- 155.** Το ποσοστό της ανεργίας σε μια χώρα είναι 12% και εκτιμάται ότι σε x έτη από τώρα θα δίνεται από τον τύπο $f(x) = \frac{16x + 36}{2x + 3} \%$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = (8 + \frac{12}{2x + 3}) \%$.

β) Να εξηγήσετε γιατί η ανεργία δεν θα πέσει ποτέ κάτω από το 8%.

γ) Καθώς περνούν τα χρόνια σε ποιο ποσοστό θα τείνει να σταθεροποιηθεί η ανεργία;

ΑΠ: γ) 8%

- 156.** Μετά t έτη από τον καθαρισμό ενός ποταμού ο πληθυσμός των ψαριών δίνεται από τη συνάρτηση $p(t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2(t-1)^2 + 1}{(t-1)^2 + 1} p_0$, όπου p_0 ο αρχικός πληθυσμός των ψαριών.

α) Να βρείτε τα $\lim_{t \rightarrow 1} p(t)$ και $\lim_{t \rightarrow 2} p(t)$ και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα.

β) Να βρείτε τα $\lim_{t \rightarrow 3} p(t)$ και $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$ και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα.

ΑΠ: α) $\frac{2}{3} p_0, p_0$, β) $\frac{6}{5} p_0, \frac{4}{3} p_0$

- 157.** Σε ένα σχολείο άρχισε να κυκλοφορεί μια φήμη μεταξύ των μαθητών για την πενθήμερη εκδρομή του σχολείου. Ο αριθμός $N(t)$ των μαθητών που άκουσαν τη φήμη βρέθηκε ότι μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο $N(t) = M \cdot (1 - e^{-0,5t})$, όπου M ο συνολικός αριθμός των μαθητών του σχολείου και t ο χρόνος σε ημέρες από τη στιγμή που ακούστηκε η φήμη. Να αποδείξετε ότι σχεδόν όλοι οι μαθητές τελικά θα ακούσουν τη φήμη.

- 158.** Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει $\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} \leq f(x) \leq \frac{6x^3 - x^2 + 4}{3x^3 + x + 2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να λυθεί η εξίσωση $\omega^2 - \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2) \cdot \omega + 3 = 0$

ΑΠ: $\omega = 1$ ή $\omega = 3$

- 159.** Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^k \cdot \frac{4x^2 - 3x + 1}{2x^3 + x + 1} \right)$ για όλες τις τιμές του $k \in \mathbb{Z}$.

ΥΠΟΔ: Βγάλτε κοινό παράγοντα από αριθμητή και παρονομαστή και στη συνέχεια διακρίνετε περιπτώσεις για το k .

ΑΠ: 2 αν $k=1$, 0 αν $k < 1$, $-\infty$ αν $k > 1$ με k άρτιο και $+\infty$ αν $k > 1$ με k περιττό

- 160.** α) Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x^2 + x} - (x+1)\sqrt{x^2 + 5}}{2x^2 + 3 - x \cdot |x - 4|}$

β) Αν ℓ_1 είναι το παραπάνω όριο και f, g, h συναρτήσεις ορισμένες σε μια γειτονιά του $x_0 \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

$$|f(x) - g(x)| \leq h(x) \cdot |g(x)|, \quad h(x) \geq 0, \quad g(x) \neq 0, \quad f(x) \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell_1 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \quad \text{δείξτε ότι} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell.$$

ΑΠ: α) το όριο είναι 0

161. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ με $|e^x f(x) - 2e^x| \leq |e^x|$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

162. Αν για τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|(2+x^4) \cdot f(x) - 3x^4| \leq x^2 + 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

163. ✓ Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, αν ισχύει κάθε φορά μία από τις παρακάτω συνθήκες:

α) $f^2(x) \leq 2e^x \cdot f(x)$, για x κοντά στο $-\infty$

➔ β) $x \cdot f^2(x) \geq 2e^{mx} \cdot f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΑΠ: α) 0, β) 0

164. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x) + f^2(x) + 2}{f^3(x) - f(x) - 1}$

ΑΠ: 1

165. ✓ Αν $f(x) \geq x^{2019}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ΑΠ: $+\infty$

166. ✓ Αν $f(x) \leq e^x - x^{2018}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ΑΠ: $-\infty$

167. ✓ Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\mu+1)x^3 + 3x + 1}{\mu x^2 + 2}$

α) $+\infty$ αν $\mu \in (-1, 0)$,
 $-\infty$ αν $\mu \in (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$
 και 0 αν $\mu = -1$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu+1)x^3 - \mu x^2 + 1}{4\mu x^2 + 1}$

β) $-\frac{1}{4}$ αν $\mu = -1$
 $+\infty$ αν $\mu < -1$ ή $\mu \geq 0$
 $-\infty$ αν $-1 < \mu < 0$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x^2 - x + 1}{(\mu-1)x^2 + 1}$

γ) 0 αν $\mu = 0$
 $+\infty$ αν $\mu = 1$

$\frac{\mu}{\mu-1}$ αν $\mu \neq 0$ & $\mu \neq 1$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\mu-1)x^3 + \mu x^2 - 2x + 1]$

δ) $-\infty$ αν $\mu > 1$
 $+\infty$ αν $\mu \leq 1$

ε) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 3} + \mu x)$

ε) $+\infty$ αν $\mu < 1$
 $-\infty$ αν $\mu > 1$

$-\frac{1}{2}$ αν $\mu = 1$

ζ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\mu x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 1})$, $\mu > 0$.

ζ) $-\infty$, αν $0 < \mu < 1$
 $+\infty$, αν $\mu > 1$
 1, αν $\mu = 1$

168. ✓ Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu(x^2 + x) - (x^2 + 3)}{\mu^2 x^2 - x \cdot (x + 3) + 2}$.

$$\text{ΑΠ: } \begin{cases} \frac{1}{\mu+1}, & \text{αν } \mu \neq 1 \text{ και } \mu \neq -1 \\ -\frac{1}{3}, & \text{αν } \mu = 1 \\ +\infty, & \text{αν } \mu = -1 \end{cases}$$

169. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 + \lambda x + 3}{4x + 1} + \lambda x + \kappa$.

α) Για τις διάφορες τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

β) Για ποια τιμή των κ, λ είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$;

$$\text{ΑΠ: α) } \begin{cases} -\infty, & \text{αν } \lambda > -1, \kappa \in \mathbb{R} \\ +\infty, & \text{αν } \lambda < -1, \kappa \in \mathbb{R} \\ \frac{2\kappa - 1}{2}, & \text{αν } \lambda = -1, \kappa \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \beta) \lambda = -1, \kappa = \frac{7}{2}$$

170. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot [\sqrt{ax^2 + 6x + 10} - (ax + 3)]$ με $a \in \mathbb{R}$.

ΥΠΟΔ: Για να έχει νόημα το όριο στο $+\infty$ πρέπει $a \geq 0$

$$\text{ΑΠ: } \begin{cases} +\infty, & \text{αν } 0 \leq a < 1 \\ -\infty, & \text{αν } a > 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } a = 1 \end{cases}$$

171. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ με $f(x) = e^{\frac{\mu x^2 + 3x + 1}{2x - 5}}$ για όλες τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\text{ΑΠ: } \begin{cases} 0, & \text{αν } \mu < 0 \\ e^{\frac{3}{2}}, & \text{αν } \mu = 0 \\ +\infty, & \text{αν } \mu > 0 \end{cases}$$

172. ✓ Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι πεπερασμένο το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - \lambda x).$$

ΑΠ: $\lambda = -2$

173. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha x + \beta + \sqrt{x^2 - 4x + 7}) = 0$.

ΑΠ: $\alpha = -1, \beta = 2$

174. ✓ Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 5} - \alpha x - \beta) = -3$.

ΑΠ: $\alpha = 1, \beta = \frac{5}{2}$

175. ✓ Αν f συνάρτηση με $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \alpha x + \beta$, να υπολογιστούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$.

$$\text{ΑΠ: } \alpha = -1, \beta = \frac{7}{2}$$

176. Να προσδιοριστούν οι $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}_+^*$ αν το όριο στο $+\infty$ της $f(x) = \sqrt{(x+\kappa) \cdot (x+\lambda)} - x$ είναι 1.

$$\text{ΑΠ: } \kappa = \lambda = 1$$

177. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των θετικών αριθμών α και β αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \alpha} - x}{\sqrt{x^2 + \beta} - x} = 3$

$$\text{ΑΠ: } \alpha = 3, \beta$$

178. ✓ Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων ώστε:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \alpha x - \beta) = 0$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[3]{x^3 + 2x} - \alpha x - \beta] = -1$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\alpha x^2 + x} - \sqrt{x^2 + \beta x}) = 1.$$

ΥΠΟΔ: γ) Για να έχει νόημα το όριο πρέπει $\alpha \geq 0$

$$\text{ΑΠ: } \alpha) \alpha = -1, \beta = 1, \beta) \alpha = \beta = 1, \gamma) \alpha = 1, \beta = -1$$

179. Αν $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 + x} - \alpha x - \beta$ να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\text{ΑΠ: } \alpha) \alpha = 3, \beta = -\frac{3}{4}, \beta) \alpha = 3, \beta = -\frac{7}{4}$$

180. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών παραμέτρων α, β και γ ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha x + \sqrt{x^2 + \beta x + \gamma}) = \ell \in \mathbb{R}^* \text{ και στη συνέχεια για τις τιμές αυτές των}$$

$$\text{παραμέτρων να βρείτε το } \lim_{\ell \rightarrow 1} \frac{\beta \ell + 2\alpha}{(\ell - 1)^3}.$$

$$\text{ΑΠ: } \alpha = -1, \beta = 2\ell, \gamma \in \mathbb{R}. \text{ Το όριο είναι } +\infty$$

181. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (2x^2 + 1)^{\mu-2} \cdot \frac{x^2 + 2}{x^4 + 4} - 4$.

$$\alpha) \text{ Να βρεθεί ο } \mu \in \mathbb{N}^* \text{ ώστε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}.$$

$$\beta) \text{ Για την τιμή του } \mu \text{ που βρήκατε στο } \alpha) \text{ ερώτημα να βρεθεί ο } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ ώστε για}$$

$$\text{τη συνάρτηση } g(x) = f(x) + \frac{\lambda x^2 + 2}{(\lambda - 1)x^2 + 1} \text{ να ισχύει } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{ΑΠ: } \alpha) \mu = 3, \beta) \lambda = \frac{8}{11}$$

182. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 - 2x^2 + 7x + 1} - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)) = 0$.

$$\text{ΑΠ: } \alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -1$$

183. Να προσδιοριστούν οι $\omega, \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + 2x} - 2x \sin \varphi - \eta \mu \omega) = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

$$\text{ΑΠ: } \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \omega = \frac{\pi}{6}$$

184. ✓ Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}^*$, ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 2$ με

$$f(x) = \frac{\sqrt{(a-1)^2 x^4 + 3x^2 + 2}}{3ax^2}.$$

$$\text{ΑΠ: } a \in (0, \frac{1}{7})$$

185. ✓ Να υπολογιστούν οι τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + a} - x}{\sqrt{x^2 + \beta} - x} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} ax = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \beta x = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + \beta x + 1}{x^2 - 1} = 3.$$

$$\text{ΑΠ: } a=3, \beta=1$$

186. ✓ Έστω συνάρτηση $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = 3. \quad \text{Να βρείτε τον } \lambda \in \mathbb{R}^*, \text{ ώστε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) + \lambda x - 1}{x \cdot f(x) - 2x^2 + 1} = 1.$$

$$\text{ΑΠ: } \lambda = -1$$

187. Αν $f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$, να βρείτε τα όρια $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x]$.

$$\text{ΑΠ: } \lambda=1, \beta=1$$

188. α) Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{\eta \mu x} = \ell$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x \cdot g(x)] = m$, με $\ell, m \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

189. ✓ Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x + \sqrt{x}} = 2$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x - \sqrt{x}) \cdot g(x)] = 5, \quad \text{να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x)$$

$$\text{ΑΠ: } 5$$

190. Αν ισχύουν οι σχέσεις $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = 3$ να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

$$\text{ΑΠ: } P(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

191. Αν $f(x) = \ln \frac{x-3}{2x}$, να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f

β) τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 3} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\text{ΑΠ: } \alpha) (-\infty, 0) \cup (3, +\infty), \beta) -\ln 2, -\ln 2, -\infty, +\infty \text{ αντίστοιχα}$$

192. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + \kappa^2}{x}\right)$, $\kappa > 0$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) Να δείξετε ότι η $f(x) - \ln x > 0$ και να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$.

ΑΠ: α) $(0, +\infty)$, β) $+\infty, +\infty$, γ) 0

193. ✓ ➔ Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax^2 + \beta x + \gamma)] = 0$, να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax^2]$ και β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

ΑΠ: α) $+\infty$ αν $\beta > 0$, $-\infty$ αν $\beta < 0$, γ αν $\beta = 0$, β) α

194. ✓ Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x + 2) = 0$, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$, β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot f(x) + x^2 + 1}{x \cdot f(x) - 3x^2 + 2}$

ΑΠ: α) -2 , β) $+\infty$, γ) 3, δ) $-\infty$

195. ✓ **A.** Να μελετήσετε τη συνέχεια των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0 που δίνεται κάθε φορά:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2}, & x \neq 1 \\ 4, & x = 1 \end{cases}$ στο $x_0 = 1$

ασυνεχής

β) $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ x^2, & x > 1 \\ e^x, & 0 < x < 1 \end{cases}$ στο $x_0 = 1$

ασυνεχής

γ) $f(x) = |x-1| + |x-2|$ αν i) $x_0 = 1$ ή ii) $x_0 = 2$

συνεχής

δ) $f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{|x-4| - (x^2 - 5x + 4)}{x-4}, & x \neq 4 \\ 6, & x = 4 \end{cases}$ στο $x_0 = 4$

ασυνεχής

ε) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x > 1 \\ 3-x^2, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases}$ στο $x_0 = 1$

συνεχής

B. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων των ερωτημάτων β), γ), δ) και ε).

196. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) $f(x) = \eta\mu(x^2 - x + 2)$

συνεχής στο $\mathbb{R}$

β) $f(x) = \sigma\upsilon\nu(\eta\mu 2x)$

συνεχής στο $\mathbb{R}$

γ) $f(t) = \ln \frac{1}{4-t^2}$

συνεχής στο $(-2, 2)$

δ) $g(x) = \eta\mu^2(\sigma\upsilon\nu x)$

συνεχής στο $\mathbb{R}$

ε) $\omega(y) = y^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{y}$

συνεχής στο $\mathbb{R}^*$

ζ) $f(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 2)$

συνεχής στο $\mathbb{R}$

$$\eta) \varphi(x) = \frac{e^x + 2\sqrt{x}}{x}$$

συνεχής στο $(0, +\infty)$

$$\theta) f(x) = \frac{\eta\mu 5x}{\sigma\upsilon\nu x}$$

συνεχής στο $\mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \right.$
 $\left. \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\iota) h(x) = \eta\mu^2 \sqrt{x} + \ln(\sqrt{x})^2$$

συνεχής στο $(0, +\infty)$

- 197. ✓** Να μελετήσετε τη συνέχεια των παρακάτω συναρτήσεων και να χαράξετε τις γραφικές τους παραστάσεις:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{\sqrt{x^2}} + x, & x \in \mathbb{R}^* \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Συνεχής στο

α) $\mathbb{R}^*$ β) $\mathbb{R}$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} 3x+4, & \text{αν } x \leq 2 \\ 3x^2-2, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

$$\delta) f(x) = \begin{cases} |3x-4|+x, & \text{αν } x \neq \frac{4}{3} \\ 4, & \text{αν } x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

γ) $\mathbb{R}$ δ) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\}$

- 198. ✓** Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \frac{|1-x^2|}{x^2-1}, & \text{αν } x \neq 1 \text{ και } x \neq -1 \\ 1, & \text{αν } x = -1 \end{cases}$$

συνεχής στο $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$$

συνεχής στο $\mathbb{R}$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{\frac{x-1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$$

συνεχής στο $\mathbb{R}^*$

$$\delta) f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{\frac{x-1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

συνεχής στο $\mathbb{R}$

$$\epsilon) f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot e^{-x^2}}{3\eta\mu^2 x}, & \text{αν } x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \\ e^2, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

συνεχής στο $\mathbb{R} - \{\kappa\pi\}, \kappa \in \mathbb{Z}$

$$\zeta) f(x) = \begin{cases} \frac{|\eta\mu x|}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

συνεχής στο $\mathbb{R}^*$

$$\eta) f(x) = \begin{cases} x \cdot \eta\mu x, & x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu^2 x - 1, & 0 < x < \pi \\ \eta\mu(\sqrt[3]{\pi x^2}) - 1, & x \geq \pi \end{cases}$$

συνεχής στο $\mathbb{R} - \{\pi\}$

- 199.** α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 \in D_f$, δείξτε ότι και η $|f|$ είναι συνεχής στο x_0 .

β) Εξετάστε αν ισχύει το αντίστροφο, με τη βοήθεια της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \\ -1, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

- 200.** α) Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0+h) - f(x_0-h)) = 0$.

β) Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης,

$$\text{χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ΑΠ: β) Δεν ισχύει

- 201.** ➡ Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1}$ και $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq -1 \\ 4x^2-5 & x < -1 \end{cases}$.

Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f , g , $g \circ f$ στο $x_0 = -1$, χωρίς να προσδιορίσετε την $g \circ f$.

ΑΠ: Συνεχείς όλες στο -1

- 202.** Αν f συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \kappa$ και $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda$ με $\kappa, \lambda, a \in \mathbb{R}$ να

δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο a .

- 203.** ✓ Να υπολογιστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu[\lambda(x-1)]}{x(x-1)}, & x < 1 \\ 2\lambda x^2 - 3x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$, να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

ΑΠ: $\lambda = 2$

- 204.** Να υπολογιστούν οι $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + \kappa, & x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + 9} + \lambda + 1, & x < 0 \end{cases}$, είναι συνεχής στο 0 και $f(2) = 2$.

ΑΠ: $\kappa = -8, \lambda = -12$

- 205.** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β και γ , αν η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{(x-1)^2}, & x \neq 1 \\ \gamma, & x = 1 \end{cases} \quad \text{είναι συνεχής.}$$

ΑΠ: $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 1$

- 206.** ✓ Να υπολογιστούν οι τιμές των πραγματικών παραμέτρων α, β, γ , ώστε η συνάρτηση:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) $f(x) = \alpha \cdot \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x$ να είναι συνεχής

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\beta) \varphi(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 2, & x \leq -1 \\ \alpha + 2\beta x - 1, & -1 < x \leq 2 \\ 3\alpha + \beta - 2, & x > 2 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής στα } -1$$

$\alpha = -4, \beta = -3$

και 2

$$\gamma) \tau(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ \alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x, & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta = 1$$

$$\delta) f(t) = \begin{cases} \frac{\eta\mu t}{\pi - t} + \alpha - t, & t < \pi \\ 3\alpha t - 1, & t \geq \pi \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής στο } \pi \quad \alpha = \frac{\pi - 2}{1 - 3\pi}$$

$$\epsilon) f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^2 \pi x}{(x+1)^2}, & \text{αν } x \neq -1 \\ \alpha, & \text{αν } x = -1 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής στο } -1 \quad \alpha = \pi^2$$

(ΥΠΟΔ: $\eta\mu^2 \pi x = \eta\mu^2(\pi x + \pi) = \eta\mu^2[\pi(x+1)]$)

$$\zeta) \varphi(\tau) = \begin{cases} 7\tau^2 - 1, & \tau < \gamma \\ 6, & \tau = \gamma \\ 6\tau - 1 + \alpha, & \tau > \gamma \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής} \quad \begin{matrix} \alpha = 1 \text{ και } \gamma = 1 \text{ ή} \\ \alpha = 13 \text{ και } \gamma = -1 \end{matrix}$$

$$\eta) f(x) = \begin{cases} 3\alpha e^{x+1} + x, & x \leq -1 \\ 2x^2 - \alpha x + 3\beta, & -1 < x < 0 \\ \beta\eta\mu x + \alpha\sigma\upsilon\nu x + 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής} \quad \alpha = 4, \beta = \frac{5}{3}$$

(Πανελλήνιες Εξετάσεις 1986)

$$\theta) f(x) = \begin{cases} \frac{3\alpha}{x^3} + 1, & \text{αν } 0 < x \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4}, & \text{αν } x > 2 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής στο } 2 \quad \alpha = -3$$

(Πανελλήνιες Εξετάσεις 1989)

$$\iota) \gamma(x) = \begin{cases} \frac{4x - \eta\mu x}{4x + \eta\mu x}, & x \in (0, \pi] \\ \alpha x + \beta, & x \notin (0, \pi] \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής} \quad \alpha = \frac{2}{5\pi}, \beta = \frac{3}{5}$$

$$\kappa) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}, & \text{αν } 0 < x \neq 1 \\ \alpha, & \text{αν } x = 1 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής} \quad \alpha = 3$$

$$\lambda) f(x) = \begin{cases} 3 - \alpha x^2, & \text{αν } |x| \leq 1 \\ \frac{\beta}{|x|}, & \text{αν } |x| > 1 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta = 3 - \alpha$$

$$\mu) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + \alpha x + \beta}{x - 2}, & \text{αν } x \neq 2 \\ 0, & \text{αν } x = 2 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής} \quad \alpha = -12, \beta = 16$$

Στη συνέχεια να χαράξετε τη γραφική της παράσταση

$$v) f(x) = \begin{cases} \sin^2 x + (2\alpha + \beta) \cdot \epsilon \phi x, & x \in (0, \frac{\pi}{4}) \\ 2 \cdot (3\alpha - 2\beta + 1) \cdot \eta \mu^2 x - 1, & x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}] \text{ να είναι} \\ \alpha + \sqrt{3} \cdot \beta \cdot \epsilon \phi x, & x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad \alpha = \frac{7}{8}, \beta = \frac{1}{8}$$

συνεχής στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

207. Δίνεται η συνάρτηση $g(y) = \frac{a - 3x + \beta \cdot e^{yx}}{4 + e^{yx}}$, όπου a, β, x σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

α) Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y)$

β) Να υπολογιστούν οι a, β , ώστε η συνάρτηση $f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y)$ να είναι συνεχής στο 0 και να ισχύει $f(-4) = 0$.

$$\text{ΑΠ: α) } \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = \begin{cases} \frac{a - 3x}{4}, & \text{αν } x < 0 \\ \frac{a + \beta}{5}, & \text{αν } x = 0, \beta) a = -12, \beta = -3 \\ \beta, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

208. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & 0 < x < 5 \\ (a^2 + \beta^2) \ln(x - 5 + e) + 2(a + 1)e^{5-x}, & x \geq 5 \end{cases}$

α) Να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$.

β) Να βρεθούν τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο 5.

γ) Για τις τιμές των a, β που προσδιορίσατε στο β) ερώτημα να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ΘΕΜΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2000

ΑΠ: α) $(a+1)^2 + \beta^2 + 1, 1, \beta) a = -1, \beta = 0, \gamma) +\infty$

209. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3\sqrt{1 - \sin 2x}}{\sqrt{2} \cdot x}$ με $x \neq 0$. Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν

να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση η οποία να παίρνει τις τιμές της f για $x \neq 0$, αλλά να είναι συνεχής στο 0.

ΑΠ: Δεν είναι δυνατόν

210. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x - 1}{2x + 4 - \sqrt{4x^2 + 10x + 22}}$ με $x \neq 1$. Να εξετάσετε αν

είναι δυνατόν να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση g η οποία να παίρνει τις τιμές της f για $x \neq 1$, αλλά να είναι συνεχής στο 1.

ΑΠ: Ναι με $g(x) = f(x)$ για $x \neq 1$ και $g(1) = 2$

211. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση με $(x-1) \cdot f(x) \leq x^2 - 3x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το $f(1)$

ΑΠ: -1

212. ✓ Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $x \cdot f(x) + 3x = \eta \mu 2x + (x+1)^4 \cdot x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το $f(0)$.

ΑΠ: $f(0)=0$

- 213.** Έστω $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής με $\eta\mu x - x^2 \leq x \cdot f(x) \leq x^2 + x$, για κάθε $x \in (-1, 1)$. Να υπολογίσετε το $f(0)$.

ΑΠ: $f(0)=1$

- 214.** ✓ ➡ Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $x^2 \cdot f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sin^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το $f(0)$.

ΑΠ: $f(0)=\frac{3}{2}$

- 215.** Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x}}{x^2 - x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στο 1, να βρείτε το $f(1)$.

ΑΠ: 1

- 216.** ➡ Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$, με $2 + f(x) \cdot (x^2 - 1) \leq \sqrt{x^2 + 3}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $f(-1)$ και $f(1)$.

ΑΠ: $f(-1)=\frac{1}{4}$, $f(1)=\frac{1}{4}$

- 217.** Δίνεται συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι $x \cdot f(x) - x^3 = 2005 \cdot \eta\mu x - x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και $f(0) = 2005 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2 - 9}$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

- 218.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο $x_0 \neq 0$ και περιττή. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στο $-x_0$.

- 219.** Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x^2}{x^2 - 4} = \kappa \in \mathbb{R}$ και $f(2) = -4$ να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 2

- 220.** Αν f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = -2$, να προσδιορίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(f(2) - 1) \cdot x^5 - 3x^2 - x - 1]$.

ΑΠ: $+\infty$

- 221.** Αν f συνάρτηση συνεχής στο 0 και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

α) Να βρεθεί το $f(0)$.β) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x + 2x \cdot f(x)}{x^2 + \eta\mu x \cdot f(x)} = \frac{2a+1}{a+1}$ **ΑΠ: α) 0**

- 222.** ✓ Να βρεθεί ο τύπος συνεχούς συνάρτησης f , για την οποία ισχύει $x \cdot f(x) - 2 = f(x) - \sqrt{3x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ΑΠ: } f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{3x^2 + 1}}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ -\frac{3}{2}, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

- 223.** Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση με $x \cdot f(x) = \eta\mu 2021x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την f .

$$\text{ΑΠ: } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 2021x}{x}, & x \neq 0 \\ 2021, & x = 0 \end{cases}$$

- 224.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.
- 225.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.
- 226.** ✓ Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $1-x^2 \leq f(x) \leq 1+x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείχτεί ότι:
 α) η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.
 β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{x+1}}{x} = -\frac{1}{2}$
- 227.** ✓ Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
 i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και ii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$
 Δείξτε ότι:
 α) $f(0) = 0$
 β) f περιττή
 ➡ γ) αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε ισχύει $x^3 \cdot f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 δ) η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- 228.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο $x_0=0$ με $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- 229.** ✓ Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$.
 Αν η f είναι συνεχής στο 1, δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.
- 230.** Αν $|f(x) - f(y)| \leq a \cdot |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $a > 0$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{R}$.
- 231.** ✓ Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μια λύση στα αντίστοιχα διαστήματα:
 α) $x^4 - x^3 + 7x^2 = 3x + 1$ στο $(0, 1)$
 β) $(x+1) \cdot 2^{x+1} = 1$ στο $(-1, 0)$
 γ) $x^{x-2} + e^x - 5x = 0$ στο $(1, 3)$ (ΥΠΟΔ: $x^{x-2} = e^{(x-2) \cdot \ln x}$ (γιατί;))
 δ) $\frac{x^2+1}{x+a} + \frac{x^6+1}{x+\beta} = 0$, με $a < \beta$, στο $(-\beta, -a)$
 ε) $\frac{\eta\mu x}{\frac{\pi}{2} - x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$ στο $(0, \frac{\pi}{2})$
 ζ) $\ln x + e^x = 0$ στο $(0, 1)$

- 232.** Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων, έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$ με τετμημένη στα αντίστοιχα διαστήματα:
- α) $f(x)=(x-1) \cdot (x^2+2)+x \cdot (x^4+4)$ στο $(0, 1)$
 β) $f(x)=(x^2+1) \cdot (x-\beta)+(x^6+1) \cdot (x-\alpha)$ στο (α, β)
 γ) $f(x)=x^2-x \cdot \eta\mu x$ -συνx στα $(-\pi, 0)$ και $(0, \pi)$
 δ) $f(x)=\eta\mu x - \frac{\pi}{2} + x$ στο $(0, \frac{\pi}{2})$
- 233.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + x^{2019} + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.
- 234.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $2e^x + x = 1$ έχει τουλάχιστον μία αρνητική ρίζα.
- 235.** Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 8]$ για την οποία ισχύουν ότι $f(0)=1$, $f(2)=-2$, $f(4)=2$, $f(6)=-4$ και $f(8)=1$.
- α) Να βρείτε πόσες φορές τουλάχιστον, η γραφική παράσταση της f θα τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $(0, 8)$.
 β) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0, 2]$ και $[4, 6]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[2, 4]$ και $[6, 8]$, τότε να βρείτε πόσες ρίζες θα έχει η εξίσωση $f(x) = 0$.
- ΑΠ: α) τουλάχιστον τέσσερις ρίζες, β) τέσσερις ρίζες**
- 236.** ✓ Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x$ και $g(x)=\sin 2x$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{4})$.
- 237.** Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $2f(1)+f(2)=0$. Να δείξετε ότι η C_f έχει με τον $x'x$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.
- 238.** Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3-3x+1=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(0, 2)$.
- 239.** Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3-6x^2+3=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$.
- 240.** Αν $a>0$ και $a+\beta+1<0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3+\beta x^2+a=0$ έχει τουλάχιστον μία θετική και μια αρνητική ρίζα στο $(-1, 1)$.
- 241.** ✓ Αν $0<\kappa<\lambda<\mu$, δείξτε ότι η εξίσωση $\frac{\kappa}{x-\kappa} + \frac{\lambda}{x-\lambda} + \frac{\mu}{x-\mu} = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(0, \mu)$.
- 242.** Αν f συνάρτηση συνεχής στο $[a, \beta]$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x_0) = \frac{1}{a-x_0} + \frac{1}{\beta-x_0}$
- 243.** ✓ ➡ Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο ώστε $\frac{2\eta\mu x_0}{1+\sin^2 x_0} = \frac{\sin x_0}{\eta\mu^2 x_0} + 1$
- 244.** Αν f συνάρτηση συνεχής σε διάστημα $[a, \beta]$ με $f(a)+f(\beta)=0$, δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

- 245.** ✓ Δίνεται συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα $[a, \beta]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Δείξτε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ ισχύει $f(x_1) + f(x_2) \neq 0$.
- 246.** Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0, 1]$ με σύνολο τιμών το $[0, 1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(\kappa) + \kappa \cdot e^\kappa = e^\kappa$.
- 247.** Έστω f συνάρτηση με $f(x) = x^2 + x + 2020$, $x \in [-1, 1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2021$.
- 248.** Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(1) = 2$, $f(2) = -1$ και $f(3) = 3$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι συνάρτηση «1-1».
- 249.** Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[0, 1]$ με $-1 \leq f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $f^2(x_0) + f(x_0) + x_0 = 0$.
- 250.** ✓ Δείξτε ότι η εξίσωση $x = a \cdot \ln x + \beta$, με $a, \beta > 0$, έχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα που δεν υπερβαίνει τον αριθμό $a + \beta$.
- 251.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + (x - \lambda)^2 = 0$, με $\lambda \neq 1$, έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα μικρότερη του 1.
- 252.** Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[1, e]$ και γνησίως φθίνουσα με $f(e) = e$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $a \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f(a) = a \cdot \ln a + 2$.
- 253.** ✓ ➔ Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(-1) = 1$ και $f(f(x)) + x^{2020} \cdot f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $f(1)$ και $f(0)$.
- ΑΠ: $f(1) = -1$, $f(0) = 0$**
- 254.** ✓ ➔ Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = -1$ και $f(-1) = 1$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{2014}(x) + 2014 \cdot f^2(x) = 2014$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.
- 255.** ✓ Αν $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής με $f(0) = f(4)$ και η συνάρτηση με $h(x) = f(x) - f(x+2)$:
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της h .
- β) Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [0, 2]$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = f(\xi+2)$.
- ΑΠ: α) $[0, 2]$**
- 256.** ✓ Έστω f μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[0, a]$ με $f(0) = f(a)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f\left(\frac{a}{2} + x\right)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left[0, \frac{a}{2}\right]$.
- 257.** ✓ Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \delta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $f(x_0) + e^{x_0+1} + \ln x_0 = 1$.

- 258.** ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
β) Να βρείτε τα όρια της f στα άκρα του D_f .
γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_f .
δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f αφού πρώτα αποδείξετε ότι είναι συνεχής.
ΑΠ: α) $D_f = (0, e)$, β) στο 0^+ το $+\infty$, στο e^- το $-\infty$, δ) $\mathbb{R}$
- 259.** Έστω συναρτήσεις $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[0, 1]$. Αν $g(0) = f(1)$ και $f(0) = g(1)$, με $g(0) \neq g(1)$, δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.
- 260.** Δίνεται συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[0, 1]$. Δείξτε ότι η γραφική της παράσταση έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων.
- 261.** ✓ Έστω συναρτήσεις $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a, b]$ με $f(x) - g(x) = c \cdot x$ για κάθε $x \in [a, b]$, με $c \in \mathbb{R}$ σταθερό. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες $\rho_1, \rho_2 \in [a, b]$ με $\rho_1 < \rho_2$, δείξτε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.
- 262.** Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τέτοιο ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $P(-1) > -1$ και $P(1) < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$, τέτοιο ώστε $P(x_0) = x_0$.
- 263.** Έστω συνεχής και 1-1 συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από τα σημεία $A(3, 1)$ και $B(2, 5)$, να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη που ανήκει στο $(1, 5)$.
- 264.** Αν f, g συναρτήσεις συνεχείς στο $[0, 1]$ με $f(0) < g(0) < g(1) < f(1)$, δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0, 1)$.
- 265.** ✓ Υποθέτουμε ότι f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[0, 10]$ και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδικές ρίζες το 3 και το 7.
α) Αν υπάρχει $x_0 < 3$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > 0$, να δείξετε ότι η $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 3)$
β) Αν υπάρχει $x_1 \in (3, 7)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) < 0$, να δείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (3, 7)$.
- 266.** Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x - 4 \leq f(x) \leq x^2 - 3x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:
α) Η f είναι συνεχής στο 2.
➡ β) Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύση στο $[3, 4]$
- 267.** Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$, όπου a, b ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί και $a \leq f(x) \leq b$ για κάθε $x \in [a, b]$, δείξτε ότι υπάρχει $\gamma \in [a, b]$, τέτοιο ώστε $\gamma \cdot f(\gamma) = a \cdot b$.
- 268.** Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$ που ικανοποιούν τις συνθήκες:
i) $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$
ii) $f(b) = b, g(a) = a$
Αν $\mu \in (0, 2)$ να δειχθεί ότι υπάρχει $\gamma \in (a, b)$ τέτοιο ώστε
$$\begin{vmatrix} \mu & g(\gamma) \\ \mu & f(\gamma) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & 2 \\ g(\gamma) & 2 \end{vmatrix}$$

- 269.** Με τη βοήθεια του θεωρήματος Bolzano να βρείτε μια τουλάχιστον τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + x + 2^k - 4$ να μηδενίζεται σε ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 1)$.

ΑΠ: Οποιαδήποτε τιμή στο $(1, 2)$

- 270.** ✓ Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x + 1$, $x \in [-1, 0]$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

ΑΠ: α) $[-1, 1]$

- 271.** ✓ ➔ Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) + f(2) + f(3) = 0$. Να δείξετε ότι η C_f έχει με τον x' ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

- 272.** Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f αν ισχύει ότι $|f(x)| = e^x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = -2$.

ΑΠ: $f(x) = -e^x - 1$

- 273.** ✓ ➔ Έστω f συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$. Να δείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση $g(x) = \ln(f(x) - x)$ -συνκ και έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

- 274.** ✓ ➔ Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ με $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) = 8$. να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2$.

- 275.** ✓ Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f σε κάθε περίπτωση:

α) αν $f^2(x) = 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) αν $f^2(x) = x^2 - 6x + 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) αν $f^2(x) + 4f(x) - 5 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) αν $f^2(x) = 2f(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΑΠ: α) $f(x) = 3$ ή $f(x) = -3$, β) $f(x) = x - 3$ ή $f(x) = -(x - 3)$ ή

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x \geq 3 \\ -(x - 3), & x < 3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} -(x - 3), & x \geq 3 \\ x - 3, & x < 3 \end{cases}$$

γ) $f(x) = -5$ ή $f(x) = 1$, δ) $f(x) = 1 + \sqrt{2}$ ή $f(x) = 1 - \sqrt{2}$

- 276.** ✓ Δίνεται η συνεχής συνάρτηση h ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $h(0) = 3$, $h(1) = 3e - 2$ και $h^2(x) - 4e^x \cdot h(x) = 4 - 3e^{2x} - 4e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

➔ α) Να δείξετε ότι $h(x) = \begin{cases} 3e^x - 2, & x \geq \ln 2 \\ e^x + 2, & x < \ln 2 \end{cases}$

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της h .

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $\gamma \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $h(\gamma) = \frac{h(a) + h(\beta)}{2}$, με $a < \ln 2 < \beta$.

ΑΠ: β) $(2, +\infty)$

- 277.** ✓ Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα x' .

A. Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(2020)x^3 + x - 2021}{f(2020) - f(-2021)x^2} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot f(-1) + 2021}{(x-1)^2}$$

B. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{f(x)} = \frac{x}{x^2 - 1}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 1)$.

Γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2020)$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $(2020 - \xi) \cdot f(\xi + 2021) = \xi \cdot f(\xi)$.

ΑΠ: A. α) $+\infty$, β) $+\infty$

- 278.** Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα x' ενώ τέμνει τον y' στο σημείο $A(0, a)$, $a > 0$. Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - f(2021)x^2} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(f(2) \cdot x^2 - x + 1)$$

ΑΠ: α) 0, β) $+\infty$

- 279.** ✓ ➔ Η ανάβαση στην ψηλότερη κορυφή του Ολύμπου (Μύτικας, 2.917 μ.) γίνεται συνήθως από τη θέση "Πριόνια" και διαρκεί για ένα μέσο ορειβάτη 6 ώρες. Η κατάβαση διαρκεί επίσης 6 ώρες. Ένας ορειβάτης ξεκινάει από τα "Πριόνια" στις 6 το πρωί και χωρίς να σταματήσει βρίσκεται σε 6 ώρες στην κορυφή, όπου και διανυκτερεύει. Την άλλη μέρα ξεκινάει στις 6 το πρωί την κατάβαση από τον "Μύτικα" και σε 6 ώρες, ακολουθώντας την ίδια διαδρομή, βρίσκεται στα "Πριόνια". Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής στο οποίο βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες.

- 280.** ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
 γ) Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια.
 δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 έτσι ώστε $f(x_0) = \frac{3}{2}$.

ΑΠ: α) $\Delta_f = [2, 6]$, δ) $R_f = [-2, 2]$

- 281.** ✓ ➔ Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \ln(e^x - 1) - x$ και να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - 1) + 2021 = x$ έχει μοναδική λύση.

ΑΠ: $(-\infty, 0)$

- 282.** Έστω $f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής, γνησίως αύξουσα στο $[1, 4]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[4, 5]$. Αν $f(4) = 2019$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$ και $f(5) = -2020$, να βρείτε το σύνολο τιμών της και το πλήθος των ριζών της.

ΑΠ: $R_f = [-2020, 2019]$, ρίζες δύο

- 283.** Έστω f συνάρτηση συνεχής, ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 2019)$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + x^{2019}}{x + 2020} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot f(x) - x^{2019}}{x - 2020}$$

ΑΠ: α) $+\infty$, β) $-\infty$

284. ✓ Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και γνησίως αύξουσα με

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

α) Να δείξετε ότι υπάρχει η f^{-1} , να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της και να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

➡ β) Αν η f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x) + x + 1}{2x - f^{-1}(x)}$

➡ γ) Αν $f(x) = x - \frac{1}{x} + 1$ με f^{-1} συνεχής, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$

ΑΠ: α) $f^{-1}: (-\infty, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, β) $\frac{1}{2}$, γ) 0

285. ✓ ➡ Έστω $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής με $f(0) = -10$ και $f(2) = 10$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) = 20$ έχει στο $(0, 2)$ δύο τουλάχιστον ρίζες.

286. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 4$, $f(3) = 9$ και $f(5) = 3$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι συνάρτηση «1-1».

287. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με την C_f να διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2019)$ και $B(2, 2021)$. να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2020$.

288. ✓ Δίνεται συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα $[a, \beta]$ με $f(a) \neq f(\beta)$.

α) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{f(a) + f(\beta)}{2}$.

β) Δείξτε γενικότερα ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{\kappa \cdot f(a) + \lambda \cdot f(\beta)}{\kappa + \lambda}$,

$$\kappa, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

289. Αν f συνεχής σε διάστημα $[a, \beta]$ με $\gamma, \delta \in [a, \beta]$ και $f(a) < f(\gamma) < f(\delta) < f(\beta)$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(\gamma) + f(\delta) = 2f(\xi)$.

290. ✓ ➡ Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$ και $f(2) \cdot f(3) = 16$. Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(\lambda, 6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

291. ✓ Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(a) + f(\beta) + f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}{3}.$$

292. ✓ Έστω $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, συνάρτηση συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $3f(x_0) = f(1) + f(2) + f(3)$.

293. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0, 4]$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [0, 4]$ τέτοιο ώστε $6f(x_0) = f(1) + 2f(2) + 3f(3)$

294. Έστω f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$ και $x_1, x_2, \dots, x_v \in (a, \beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi(a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_v)}{v}$

295. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$ και $x_1, x_2, \dots, x_v \in (a, \beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $v \cdot f(x_0) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_v)$.

296. ✓ ➔ Έστω f συνεχής συνάρτηση με $f(3)=2$ και $f(f(x)) \cdot f(x)=1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $f(2)$ και $f(1)$.

$$\text{ΑΠ: } f(2) = \frac{1}{2}, f(1) = 1$$

297. ✓ Αν $f, g: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις συνεχείς με $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, δείξτε ότι υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$, τέτοιοι ώστε $f(x) \geq g(x) + \lambda$ και $f(x) \leq g(x) + \mu$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

298. ✓ ➔ Έστω συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow [a, \beta]$ με ιδιότητα $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varphi \cdot |x_1 - x_2|$, για κάθε $x_1, x_2 \in [a, \beta]$, με $0 < \varphi < 1$. Δείξτε ότι:

α) Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.

β) Η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική λύση στο $[a, \beta]$.

299. ✓ Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$. Αν ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η $f \circ g$ και είναι «1-1», τότε:

α) Να δείξετε ότι η g είναι «1-1».

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(f(x) + x^3) = g(1 + f(x) - x)$ έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα.

300. ✓ **A.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$ και $f(0) = f(2\pi)$, δείξτε ότι:

α) Η συνάρτηση $f(x + \pi)$ είναι συνεχής στο $[0, \pi]$

β) Υπάρχει $x_0 \in [0, \pi]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = f(x_0 + \pi)$

B. Υπάρχουν δύο τουλάχιστον αντιδιαμετρικά σημεία του Ισημερινού της γης με την ίδια θερμοκρασία.

301. ✓ ➔ Αν μια συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$ είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \neq x^2$, για κάθε $x \geq 0$, να δείξετε ότι:

α) $f(x) > x^2$, για κάθε $x \geq 0$.

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

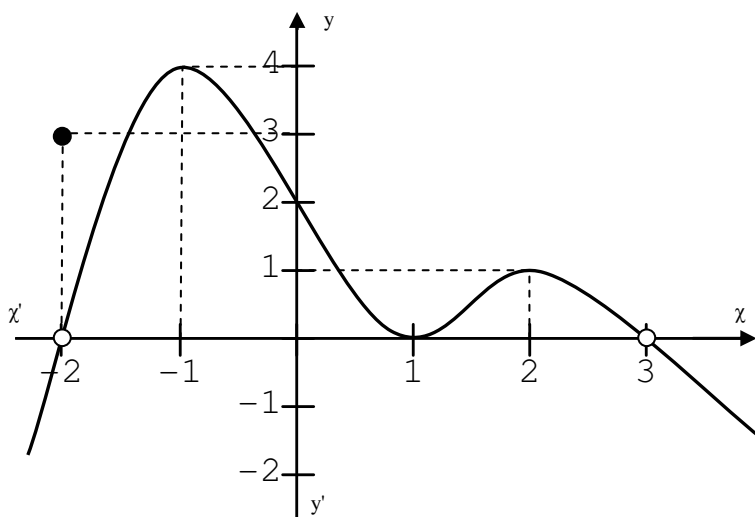
302. ✓ Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

➔ α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί ο τύπος της αντίστροφης.

$$\text{ΑΠ: } f^{-1}(x) = \frac{x^3 + x}{2}$$

- 303.** ✓ Δίνεται η συνάρτηση f που έχει τη γραφική παράσταση του παρακάτω σχήματος.
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι είναι ένωση δύο διαστημάτων.
 - β) Να γράψετε τα σημεία ασυνέχειάς της.
 - γ) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μεγίστου-ελαχίστου στο $[-2, 2]$.
 - δ) Να δείξετε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[-1, 1]$ και, με βάση αυτό, ότι υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{\pi^2}{4}$.
 - ε) Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[-1, 2]$. Υπάρχει $x_0 \in (-1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$;
 - ζ) Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x) = -x^3 - 3x + 15$, $x \in [-4, 4]$
 - i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = (f+g)(x)$
 - ➡ ii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $\xi \in (2, 3)$, τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$



ΑΠ: ζ) i) $D_h = [-4, 3) \cup (3, 4)$

- 304.** ✓ ➡ Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
- $x \cdot f(x) \leq \eta \mu 2x$, (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - $|x \cdot g(x) - \sin 3x + 1| \leq x^2$, (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - $f(1) < g(1)$
- α) Να δείξετε ότι $f(0) = 2$
 - β) Να δείξετε ότι $g(0) = 0$
 - γ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1- ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1.	Σ
2.	Σ
3.	Λ
4.	Σ
5.	Λ
6.	Σ
7. α	Σ
β	Σ
8.	Λ
9.	Σ
10.	Σ
11.	Σ
12.	Λ
13.	Σ
14.	Σ

15.	Σ
16.	Σ
17.	Λ
18.	Λ
19.	Σ
20. α	Λ
β	Λ
21	Σ
22.α	Σ
β	Σ
23.	Σ
24.α	Σ
β	Σ
25.	Λ
26.	Λ

27.	Β
28.	Β
29.	Β
30.	Δ
31.	Δ
32.	Γ
33.	Γ
34.	Γ
35.	Α
36.	Β
37.	Ε
38.	Γ
39.	Β
40.	Β
41.	Β

42.	Α
43.	Ε
44.	Δ
45.	Δ
46.	Δ
47.	Δ
48.	Α
49.	Β
50.	Δ
51.	Ε
52.	Β

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2- ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1.	Λ
2.	Λ
3.	Λ
4.	Σ
5.	α) Λ
	β) Λ
6.	α) Λ
	β) Σ
	γ) Λ
	δ) Σ
7.	Λ
8.	Λ
9.	Σ
10.	Σ
11.	Λ
12.	Σ
13.	Σ
14.	Λ
15.	Λ

16.	Σ
17.	Σ
18.	Σ
19.	Λ
20.	Σ
21	Σ
22.	Σ
23.	Σ
24.	Σ
25.	Σ
26.	Σ
27.	Λ
28.	Σ
29.	Σ
30.	Σ

31.	Σ
32.	Λ
33.	Σ
34.	Σ
35.	Σ
36.	Λ
37.	Γ
38.	Β
39.	Γ
40.	Γ
41.	Γ
42.	Α
43.	Γ
44.	Ε
45.	Ε

46.	Β
47.	Δ
48.	1→γ
	2→ε
	3→β
49.	1→γ
	2→δ
	3→ε
	4→α
	5→β
50.	1→δ
	2→γ
	3→ε
	4→α

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1ου ΤΕΥΧΟΥΣ

ΚΕΦ. 1 - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	
72.	Θέσατε όπου y το x
73.	Θέσατε στη 2η σχέση $x=y=0$ και στην 3η $x=y=1$. Το ζητούμενο προκύπτει από την 3η για $x=x \in \mathbb{R}^*$ και $y=1$, σε συνδυασμό με το $f(0)=0$.
74.	Θέτοντας στη δεδομένη σχέση όπου x το $\pi-x$ και το $\pi+x$ και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει θα καταλήξουμε τελικά ότι $f(x)=-\sin x$. Τότε όμως $f(\pi+x)=\sin x$ και $f(\frac{\pi}{2}-x)=-\eta\mu x$. Αντικαθιστώντας στο α' μέλος της ζητούμενης σχέσης έχουμε το αποτέλεσμα.
75.	γ) Έστω ότι πρέπει να έχει ταχύτητα x km/h. Τότε $AM = \frac{s(t)}{2}$, άρα $180 = \frac{\sqrt{60^2 \cdot t^2 + x^2 \cdot t^2}}{2}$. Για $t=4$, έχουμε $\sqrt{x^2 + 3 \cdot 600} = 90$, οπότε $x \approx 67$.
79.	μ. $y = \sqrt{x} - \sqrt{x-1} > 0$. Άρα $y > 0$, οπότε $y + \sqrt{x-1} = \sqrt{x} \Leftrightarrow (y + \sqrt{x-1})^2 = (\sqrt{x})^2$ κ.τ.λ.
81.	Είναι $-2 < \frac{x^2 - \lambda x + 1}{x^2 + x + 1} < 2 \Leftrightarrow -2 \cdot (x^2 + x + 1) < x^2 - \lambda x + 1 < 2 \cdot (x^2 + x + 1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 3x^2 - (\lambda - 2)x + 3 &> 0 \\ x^2 + (\lambda + 2)x + 1 &> 0 \end{aligned} \right\}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα πρέπει $\Delta_1 < 0$ και $\Delta_2 < 0$.
82.	$y = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + 1} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4(y-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-2y+2) \cdot (a+2y-2) \geq 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{-a+2}{2} \leq y \leq \frac{a+2}{2}$. Άρα $\frac{-a+2}{2} = \frac{1}{2}$ και $\frac{a+2}{2} = \frac{3}{2}$ οπότε $a=1$
99.	Έστω g άρτια και h περιττή, τέτοιες ώστε $f(x)=g(x)+h(x)$. Τότε $f(-x)=g(x)-h(x)$. Λύνοντας το σύστημα ως προς g και h τις προσδιορίζουμε.
100.	γ) Δύο περιπτώσεις αν $x \geq 0$ ή αν $x < 0$ με βάση το β
119.	α) Για $y=0$ και $x \neq 0$ είναι $f(x)=f(x) \cdot f(0) \Leftrightarrow f(0)=1$ β) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ με $x_1 < x_2$, τότε $x_2 = x_1 + \theta$ με $\theta > 0$. Θα είναι $f(x_2) = f(x_1 + \theta) = f(x_1) \cdot f(\theta) > f(x_1)$ αφού $f(\theta) > 1$.
120.	Με απαγωγή σε άτοπο υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο $\xi \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\xi) \neq \xi$, δηλαδή η f δεν είναι ταυτοτική. Έστω $f(\xi) > \xi$. Τότε $2\xi + f(\xi) > 2\xi + \xi \Leftrightarrow \frac{2\xi + f(\xi)}{3} > \xi \Leftrightarrow f\left(\frac{2\xi + f(\xi)}{3}\right) > f(\xi) \Leftrightarrow \xi > f(\xi)$ άτοπο
124.	β) Από τη σχέση του α) προκύπτει ότι $1-f(2-x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και με αλλαγή μεταβλητής, το ζητούμενο γ) Από τη σχέση του α) για $x=0$ είναι $f(0)=0$ και από τη σχέση του α) για $x=1$ είναι $(f(1)-1) \cdot f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1)=1$, αφού αποκλείεται $f(1)=0$, καθώς $f(0)=0$ και $f(2)=0$. Άρα η σχέση του β) γίνεται $f(x) \leq f(1)$, οπότε η f έχει μέγιστο στο 1 το 1.
147.	$f(f(1))=1$ (1). Όμως $f(f(f(x)))=4f(x)-3$, οπότε για $x=1$ είναι $f(f(f(1)))=4f(1)-3$, οπότε με βάση την (1) δίνει $f(1)=4f(1)-3 \Leftrightarrow \dots$

149.	α) Θέτουμε στην 1η όπου x το $f(x)$, β) Θέτουμε στο α) όπου x το -4
164.	β) Έστω $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1} = x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1 - x_2 + \sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x_1 - x_2) \cdot \left(1 + \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}}\right) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x_1 - x_2) \cdot \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1} + x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}}\right) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2) \cdot \left(\frac{f(x_1) + f(x_2)}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}}\right) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1 = x_2$ καθώς η παρένθεση και με βάση το α) ερώτημα είναι θετική.
170.	θ. Η ισότητα $f(x_1)=f(x_2)$ εξασφαλίζει ότι x_1, x_2 ομόσημοι, άρα $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1 $ (όπου χρειαστεί).
179.	γ) Αν η εξίσωση είχε ρίζα 0 τότε $f(0)=0$, άρα $f(f(0))=f(0) \Leftrightarrow e^0=0 \Leftrightarrow 1=0$, άτοπο. δ) Αρκεί να δείξουμε ότι είναι "1-1". Έτσι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι $f(f(x_1))=f(f(x_2)) \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
180.	Έστω $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $f(f(x_1))=f(f(x_2))$, άρα $f(f(x_1))-f(x_1)=f(f(x_2))-f(x_2)$, δηλαδή $x_1=x_2$. Άρα η f είναι 1-1
181.	α) Έστω $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow (f+g)(f(x_1)) = (f+g)(f(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ f + g \circ f)(x_1) = (f \circ f + g \circ f)(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$
184.	$f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow -x = f^{-1}(-f(x)) \Leftrightarrow -f^{-1}(y) = f^{-1}(-y)$

ΚΕΦ. 2 – ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ		
54.	γ)	Είναι $x+x^2+\dots+x^v-v=(x-1)+(x^2-1)+\dots+(x^v-1)$
59.		Περιοπτώσεις αν $a=0, a>0, a<0$
61.	δ)	Θέτουμε όπου x το $u+a$ και αναλύουμε το $\eta\mu(u+a)$
65.	ζ)	"Σπάζοντας" τους εκθέτες στον παρονομαστή και βγάζοντας το 2^x κοινό παράγοντα, αν ονομάσουμε το $2^x=\omega$ καταλήγουμε στην μορφή $\frac{\omega}{8} \cdot (2\omega-1)^2$ που τείνει στο μηδέν ενώ είναι πάντα θετική
69.		Αν $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ και θέσουμε $g(x) = \frac{ax+1}{x^2-1} \Leftrightarrow ax+1 = g(x) \cdot (x^2-1)$ είναι $\lim_{x \rightarrow -1} (ax+1) = \lim_{x \rightarrow -1} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -1} (x^2-1) = \ell \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow -a+1=0 \Leftrightarrow a=1.$ Άρα πρέπει $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{1}{2}$ οπότε $\beta = 1 + \frac{1}{\sqrt{e}}$
74.	β)	Ο προσδιορισμός του v με δοκιμές
75.		$\left \frac{f(x)}{x^3} \right = \left \frac{x}{1+f^2(x)} \right \leq x $
76.	γ)	$f(x) = \left \frac{x}{f^2(x)+1} \right \leq x$, δ) $f^2(x) - 2\eta\mu x \cdot f(x) + \eta\mu^2 x \leq \eta\mu^2 x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (f(x) - \eta\mu x)^2 \leq \eta\mu^2 x \Leftrightarrow f(x) - \eta\mu x \leq \eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu x - \eta\mu x \leq f(x) \leq \eta\mu x + \eta\mu x $
77.		Κατασκευάζουμε ταυτότητες $(f(x)-x)^2 \leq (\eta\mu x-x)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x)-x \leq \eta\mu x-x , \text{ βρίσκουμε το } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x)-x) \text{ και από εκεί το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

78.	α) Για $x \neq 0$, $f(x) \geq \frac{x+3}{x^2}$ με το όριο της δεύτερης να είναι $+\infty$, β) $\left \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{f(x)} \right \leq \frac{1}{ f(x) } = \frac{1}{f(x)}$ μια που $f(x) > 0$ κοντά στο 0 λόγω του ορίου της και κριτήριο παρεμβολής γ) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - 2020] \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}} - 2020 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu \frac{1}{f(x)}$. Με αλλαγή μεταβλητής το πρώτο έχει όριο 1 και το δεύτερο 0
79.	$\eta\mu x - x < 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε $f(x) \leq \frac{1}{\eta\mu x - x}$ με $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta\mu x - x} = -\infty$
80.	γ) Διαιρούμε με x^3, δ) $\frac{\eta\mu(\eta\mu(\eta\mu x))}{\eta\mu(\eta\mu x)} \cdot \frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x}$, ε) Θέτουμε $x-2=h$, ζ) $\eta\mu \pi x = 2\eta\mu \frac{\pi x}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{2}$, λ) $x^{2018} \cdot \eta\mu \frac{2019}{x} \leq x^{2018}$
98.	Για το πρώτο όριο μετατρέπουμε το $\sigma\upsilon\nu(ax)$ σε $1 - 2\eta\mu^2 \frac{ax}{2}$ και κάποια στιγμή προκύπτει η ανάγκη να γνωρίζουμε αν $a=0$ ή όχι. Όμως $a \neq 0$ γιατί αν ήταν 0 το πρώτο όριο βγαίνει 0 ενώ το δεύτερο πάντα είναι 1.
112.	Είναι $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{4} = \eta\mu(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{4}) = -\eta\mu[\frac{\pi}{4} \cdot (x-2)]$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{4}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-f(x) \cdot \eta\mu[\frac{\pi}{4} \cdot (x-2)]}{(x-2) \cdot (x+2)}$ οπότε αν $\frac{-f(x) \cdot \eta\mu[\frac{\pi}{4} \cdot (x-2)]}{(x-2) \cdot (x+2)} =$ $= h(x)$ είναι $f(x) = -\frac{h(x) \cdot (x-2) \cdot (x+2)}{\eta\mu[\frac{\pi}{4} \cdot (x-2)]} = -\frac{h(x) \cdot (x+2)}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\frac{\pi}{4} \cdot (x-2)}{\eta\mu[\frac{\pi}{4} \cdot (x-2)]}$ κ.τ.λ.
113.	Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $f(x)$
150.	λ) $f(x) + x - 5 = (f(x) - 3) + (x - 2) \rightarrow 0^+$
163.	β) Για $x < 0$ η δοσμένη δίνει $f^2(x) \leq 2 \frac{\eta\mu x}{x} \cdot f(x) \Leftrightarrow f^2(x) - 2 \frac{\eta\mu x}{x} \cdot f(x) + (\frac{\eta\mu x}{x})^2 \leq (\frac{\eta\mu x}{x})^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(f(x) - \frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 \leq (\frac{\eta\mu x}{x})^2 \Leftrightarrow f(x) - \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \leq f(x) \leq \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x}$ κ.τ.λ.
193.	α) $\lim[f(x) - ax^2] = \lim[f(x) - (ax^2 + \beta x + \gamma) + (\beta x + \gamma)]$

	$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - (ax^2 + \beta x + \gamma) + (ax^2 + \beta x + \gamma)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} [f(x) - (ax^2 + \beta x + \gamma)]$ $+ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + \beta x + \gamma}{x^2} = 0 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2})}{x^2} = \dots$
201.	Η f είναι συνεχής στο -1, η g είναι συνεχής στο f(-1)=0, οπότε και η gοf είναι συνεχής στο -1
214.	Είναι $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sin^2 x}{x^2}$ για $x \neq 0$. Έτσι $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1 + \eta \mu^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} = \dots$
216.	Λύστε την ανίσωση ως προς f(x) για $x < -1$, $-1 < x < 1$ και $x > 1$ και πάρτε πλευρικά όρια στα -1 και 1
227.	γ) Αν $x=0$ προφανής Αν $x>0$ από μονοτονία $f(x)>f(0)=0$ και $x^3>0$, άρα $x^3 \cdot f(x)>0$. Όμοια αν $x<0$.
243.	Θ. Bolzano στο $[0, \pi]$
253.	Θέτουμε στη σχέση $x=-1$ και βρίσκουμε $f(1)=-1$. Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$: $f(x_0)=0$. Θέτουμε στη σχέση $x=x_0$ και βρίσκουμε το $f(0)$
254.	Υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0)=0$. Κάνουμε Θ. Bolzano στην $g(x) = f^{2014}(x) + 2014 \cdot f^2(x) - 2014$ στα $[-1, x_0]$ και $[x_0, 1]$
266.	β) Για $x=3$ και $x=4$ η διπλή ανίσωση δίνει $-1 \leq f(3) \leq 0$ και $0 \leq f(4) \leq 4$. Άρα $f(3) \cdot f(4) \leq 0$, οπότε περιπτώσεις.
271.	Αν δεν μηδενιζόταν θα διατηρούσε πρόσημο
273.	Η $h(x)=f(x)-x-1$ είναι $\neq 0$, οπότε διατηρεί πρόσημο
274.	Αν δεν υπήρχε, τότε $f(x)-2 \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η $f(x)-2$ θα διατηρούσε πρόσημο, άρα $f(x)>2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x)<2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι στην πρώτη περίπτωση είναι $f(1)>2$, $f(2)>2$ και $f(3)>2$, οπότε ... άτοπο. Όμοια και στην δεύτερη.
276.	α) Με συμπλήρωση τετραγώνου καταλήγουμε σε $(h(x)-2e^x)^2 = (2-e^x)^2 \Leftrightarrow h(x)-2e^x = 2-e^x$ (1). Ορίζουμε $\varphi(x)=h(x)-2e^x$, οπότε η σχέση (1) γίνεται $\varphi(x) = 2-e^x$ (2). Η λύση της $2-e^x=0$ είναι η $x=\ln 2$ που είναι και η μοναδική ρίζα της φ και αφού φ συνεχής, θα διατηρεί πρόσημο στα $(-\infty, \ln 2)$ και $(\ln 2, +\infty)$. $\varphi(0)=h(0)-2e^0=1>0$ και αφού $0<\ln 2$ θα είναι $\varphi(x)>0$, για κάθε $x \in (-\infty, \ln 2)$ και $2-e^x>0$. Άρα (2) $\Leftrightarrow \varphi(x)=2-e^x \Leftrightarrow h(x)=e^x+2$, για κάθε $x \in (-\infty, \ln 2)$ Με παρόμοιο τρόπο αφού $\varphi(1)=\dots=e-2>0$ είναι $\varphi(x)>0$, για κάθε $x \in (\ln 2, +\infty)$ και $2-e^x<0$. Άρα (2) $\Leftrightarrow \varphi(x)=e^x-2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow h(x)=3e^x-2$, για κάθε $x \in (\ln 2, +\infty)$. Τέλος επειδή η h είναι συνεχής στο $\ln 2$ είναι $h(x) = \begin{cases} 3e^x - 2, & x \geq \ln 2 \\ e^x + 2, & x < \ln 2 \end{cases}$
279.	Έστω $f(t)$, $g(t)$ οι συναρτήσεις που εκφράζουν τη θέση του ορειβάτη κατά την ανάβαση και κατάβαση π.χ. την απόσταση από τα πριόνια. Θεωρήστε την $h(t)=f(t)-g(t)$ στο $[6, 12]$, τότε $h(6)=f(6)-g(6)=0- g(6)<0$, $h(12)=f(12)-g(12)= f(12)-0>0$.

281.	Βρείτε τη μονοτονία της f αφού πρώτα τη φέρετε σε μορφή $f(x)=\ln(1-\frac{1}{e^x})$
284.	β) Είναι $f^{-1}: (-\infty, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ και αφού f^{-1} γνησίως αύξουσα και συνεχής, θα είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$. Έτσι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x) + x + 1}{2x - f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{f^{-1}(x)}{x} + 1 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{f^{-1}(x)}{x}} = \frac{1}{2}$ γ) Θέτουμε για το όριο $y=f^{-1}(x)$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ και $x=f(y)$. Τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y - f(y)}{f(y) + y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y - y + \frac{1}{y} + 1}{y - \frac{1}{y} + 1 + y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{y} + 1}{2y - \frac{1}{y} + 1} = \dots = 0$
285.	Δύο τρόποι: 1^{ος}: Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $f(x)=\pm\sqrt{20}$ και ΘΕΤ 2^{ος}: Υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0)=0$. Κάνουμε Θ. Bolzano στην $g(x)=f^2(x)-20$ στα $[0, x_0]$ και $[x_0, 2]$
290.	Αρκεί να δείξουμε με ΘΕΤ ότι η f παίρνει την τιμή 6
296.	$f(2)=\frac{1}{2}$. Άρα από ΘΕΤ υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$: $f(x_0)=1$. Η δοσμένη σχέση για $x=x_0$ δίνει $f(1)=1$
298.	α) $f(x)-f(x_0) \leq \varphi \cdot x-x_0 \Leftrightarrow -\varphi \cdot x-x_0 \leq f(x)-f(x_0) \leq \varphi \cdot x-x_0$, με $\lim_{x \rightarrow x_0} (-\varphi \cdot x-x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi \cdot x-x_0 = 0$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)-f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x_0 \in [a, \beta]$ β) Ορίζουμε $g(x)=f(x)-x$ στο $[a, \beta]$ και Bolzano. Το ότι δεν υπάρχουν δύο λύσεις με απαγωγή σε άτοπο γιατί αν υπήρχαν δύο λύσεις οι ξ_1 και ξ_2 θα ήταν $\xi_1-\xi_2 \leq \varphi \cdot \xi_1-\xi_2 \Leftrightarrow \varphi \geq 1$ άτοπο.
301.	α) Ορίζουμε συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2$ και δείχνουμε ότι διατηρεί πρόσημο και μάλιστα θετικό αφού $g(0)>0$. β) Αφού $0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{x^2}$, για κάθε $x>0$, με κριτήριο παρεμβολής δείχνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$. Στη συνέχεια είναι $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ και $\frac{1}{f(x)} > 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ή πιο απλά από την πρόταση Αν $f(x) \geq g(x)$ σε γειτονιά του ξ } τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = +\infty$ επειδή $f(x) > x^2$, για κάθε $x \geq 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

302.	α) Για το $f(0)$ θέτουμε στη δεδομένη όπου $x=0$. Για το όριο στο 0 καταλήγουμε στη σχέση $f(x) = \frac{2x}{f^2(x)+1}$ και έχουμε ότι $ f(x) = \left \frac{2x}{f^2(x)+1} \right = \frac{ 2x }{f^2(x)+1} \leq \frac{ 2x }{1} = 2x $ και χρησιμοποιούμε την εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής.
303.	ζ) ii) Ορίζουμε συνάρτηση $H(x) = \begin{cases} h(x), & 2 \leq x < 3 \\ g(3), & x = 3 \end{cases}$, Η H είναι συνεχής στο $[2, 3)$ ως άθροισμα συνεχών, αλλά και στο 3 αφού $\lim_{x \rightarrow 3^-} H(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (f(x) + g(x)) = 0 + g(3) = g(3)$. Άρα η H είναι συνεχής στο $[2, 3]$. Επίσης $h(2)=h(2)=f(2)+g(2)=1+1=2$ και $H(3)=g(3)=-21$, οπότε $H(2) \cdot H(3) < 0$. Άρα ισχύει για την H το θεώρημα Bolzano οπότε υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ ώστε $H(\xi)=0$. Όμως εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η H στο $(2, 3)$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε και "1-1". Άρα η ρίζα ξ είναι μοναδική
304.	α) Για $x > 0$ $(1) \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{\eta\mu 2x}{x}$ (3) και αφού f συνεχής, θα υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Άρα $(3) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 2x}{x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(0) \leq 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 2x}{2x} \stackrel{u=2x}{\Leftrightarrow} f(0) \leq 2 \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{\eta\mu u}{u} \Leftrightarrow f(0) \leq 2.$ Για $x < 0$ $(1) \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{\eta\mu 2x}{x}$ και όμοια προκύπτει ότι $f(0) \geq 2$. Άρα τελικά $f(0)=2$. β) Για $x \neq 0$ $(2) \Leftrightarrow \frac{ x \cdot g(x) - \text{συν} 3x + 1 }{ x } \leq \frac{x^2}{ x } \Leftrightarrow g(x) - \frac{\text{συν} 3x - 1}{x} \leq \frac{ x ^2}{ x } \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow - x \leq g(x) - 3 \frac{\text{συν} 3x - 1}{3x} \leq x \Leftrightarrow - x + 3 \frac{\text{συν} 3x - 1}{3x} \leq g(x) \leq x + 3 \frac{\text{συν} 3x - 1}{3x}$ Τα όρια στο 0 του 1ου και 3ου μέλους είναι 0, άρα από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ και αφού g συνεχής θα είναι $g(0)=0$. γ) Ορίζουμε $h(x)=f(x)-g(x)$, $x \in [0, 1]$ που είναι συνεχής. $h(0)=f(0)-g(0)=2-0=2>0$ και $h(1)=f(1)-g(1)<0$. Άρα κ.τ.λ. από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$. Άρα ...