

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

(Α) Συναρτήσεις

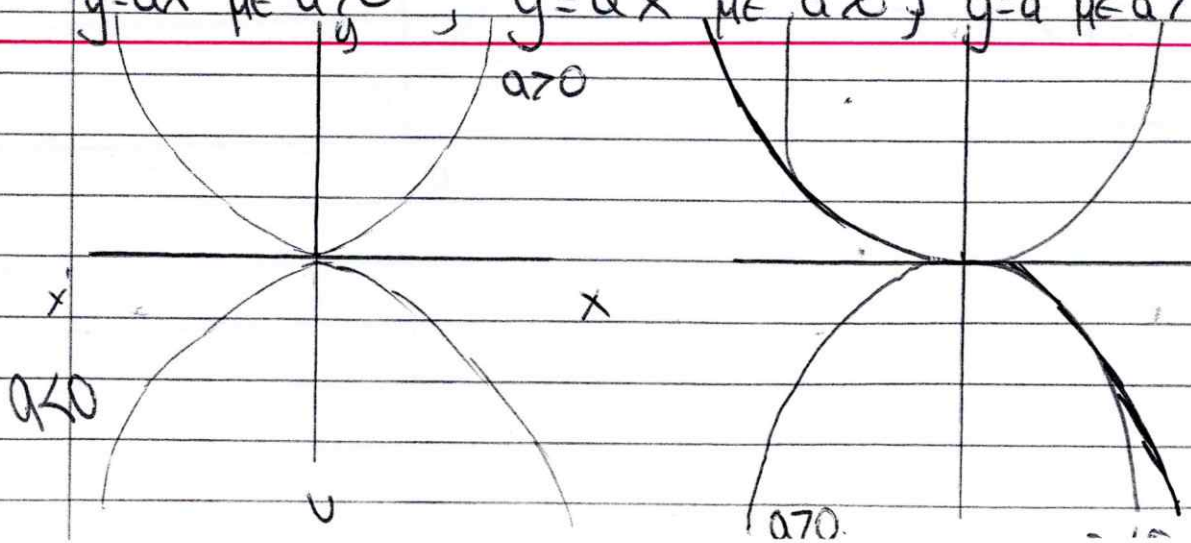
① Να δοθεί ο ορισμός της γραμμικής αντιστροφής f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A

Εστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζεται γραμμική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνας) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

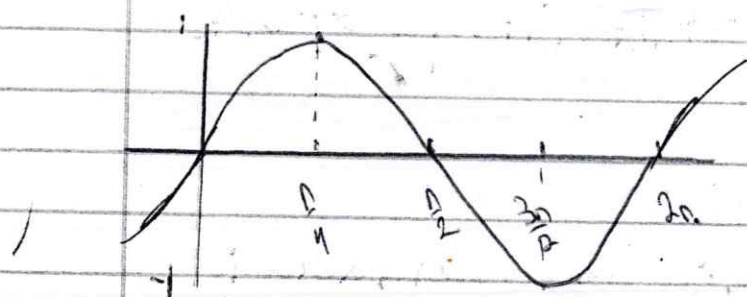
② Τι ονομάζεται γραφική παράσταση συνάρτησης f ορισμένη σε σύνολο A ;

Εστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f . Η εφάνταση όλων $(x, y = f(x))$ αναπαράγεται γραφικά από τα σημεία της C_f . Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εφάνταση της γραφικής παράστασης της f .

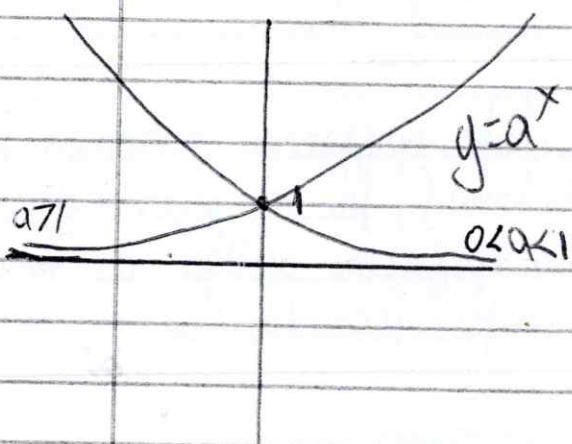
③ Να σχεδιαστούν πρόχειρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = ax^2$ με $a > 0$, $y = ax^3$ με $a > 0$, $y = a^x$ με $a > 1$, $y = \ln x$



2



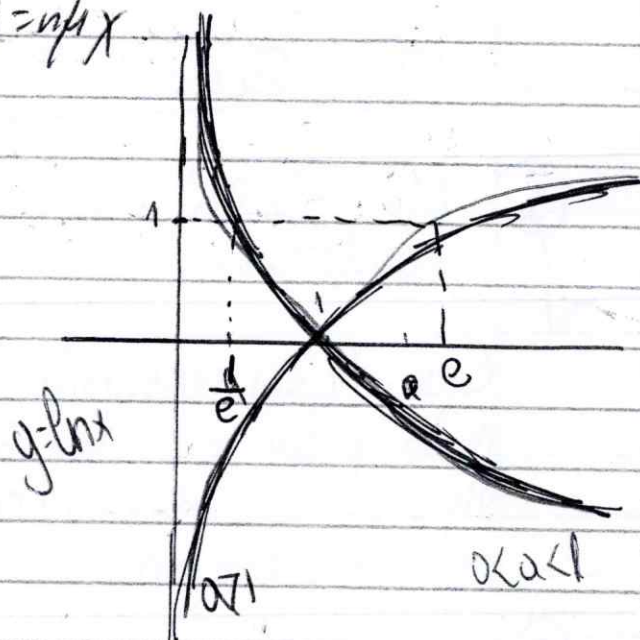
$$y = \sin x$$



$$y = a^x$$

$a < 1$

$0 < a < 1$



$$y = \ln x$$

e

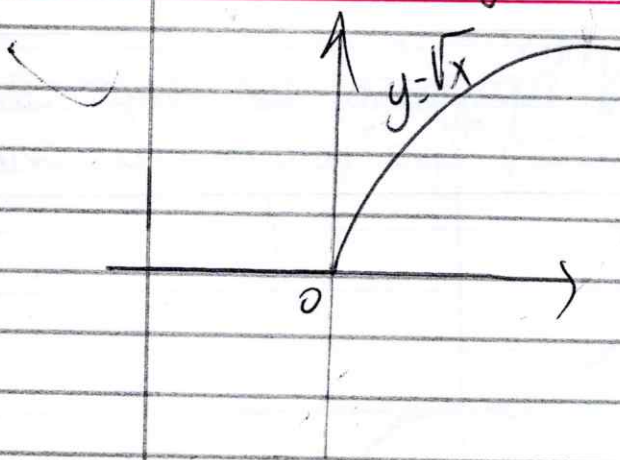
$1/e$

$0 < a < 1$

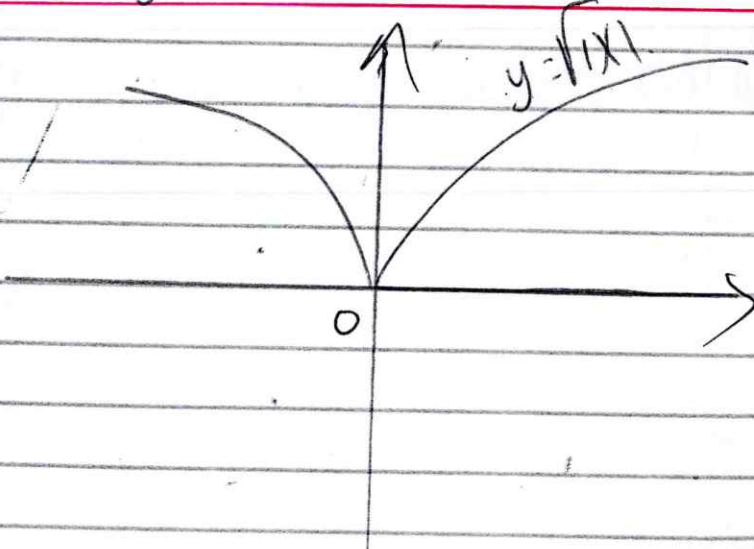
④ Να φέρει η ερώτηση τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης f .

$$y = f(x)$$

⑤ Να γίνουν προχείρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{|x|}$.



$$y = \sqrt{x}$$



$$y = \sqrt{|x|}$$

- ⑧ Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα να οριστεί η $f \circ g$.

✓ Η $f \circ g$ είναι η σύνθεση της g με την f και συμβολίζεται ως $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

- ⑨ Να γραφεί ο τύπος της σύνθεσης της g με την f .
- ✓ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

- ⑩ Ποτέ μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

✓ Μια συνάρτηση λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$

- ⑪ Ποτέ μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει μέγιστο με σημείο $x_0 \in A$,

Μια συνάρτηση με τα παραπάνω χαρακτηριστικά παρουσιάζει $x_0 \in A$ μέγιστο το $f(x_0)$ όταν $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A$.

(12) Ποτε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι είναι άρτια; Ποτε περιττή; Ποια χαρακτηριστικά γνωρίσματα έχουν οι $\chi. \varphi$ τέτοιων συναρτήσεων;

Μια συνάρτηση f λέγεται άρτια αν $\forall x \in D_f$ ισχύουν:

$$\text{το } -x \in D_f \text{ κ } f(-x) = f(x).$$

~~Οι άρτιες είναι~~

Η $\chi. \varphi$ των άρτιων είναι συμμετρική ως προς τον yy'

Μια συνάρτηση f λέγεται περιττή αν $\forall x \in D_f$ ισχύουν:

$$\text{το } -x \in D_f \text{ κ } f(-x) = -f(x)$$

Η $\chi. \varphi$ των περιττων είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων O .

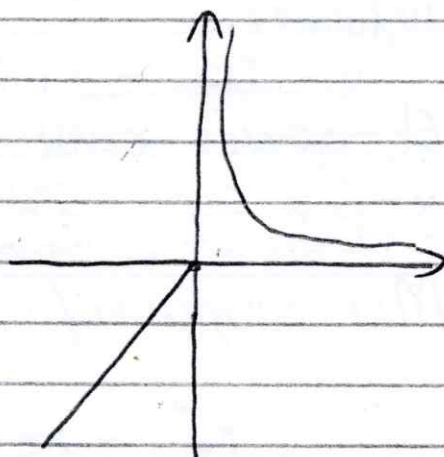
(13) Ποτε μια συνάρτηση f με π.ο A λέγεται "1-1";

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ λέγεται "1-1" όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει
 ότι $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ και
 ότι $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$

14) Είναι κάθε γνησίως μονότονη "1-1" το αντίστροφο ισχύει; Give an example.

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε ΠΡΟΦΑΝΩΣ, είναι "1-1". Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

$$n.x \quad g(x) \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$



η οποία είναι "1-1" στο $\mathbb{R}$,
αλλά όχι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$

15) Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέψιμη συνάρτηση, πώς ορίζεται η αντίστροφη της;

Ορίζεται μια συνάρτηση

$$g: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$$

με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχείται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται αντιστροφή συνάρτησης της f και συμβολίζεται

$$f^{-1}$$

(16) ✓ Αν $f: A \rightarrow B$ συνάρτηση η οποία αντιστρέφεται,
 2.0 οι ~~φ~~ f και f^{-1} είναι αμφιγόμενες
 ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις
 γωνίες xOy και $x'Oy'$.
 Έστω C, C' οι γ.ν. των f και f^{-1} στο ίδιο επίπεδο $\angle$ ίδων
 Επειδή η f αντιστρέφεται ισχύει

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$$

Εστω αν ένα σημείο $M(a, b)$ ανήκει στη f
 (της f), τότε το σημείο $M'(b, a)$ θα
 ανήκει στη f^{-1} και
 αντιστρόφως. ~~Εστω C, C' οι γ.ν. των f και f^{-1} στο ίδιο επίπεδο $\angle$ ίδων~~
~~ως προς την ευθεία $y=x$~~

Τα M, M' όμως είναι συμμετρικά ως προς
 την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και
 $x'Oy'$

Αρα οι γ.ν. των f και f^{-1} είναι συμμετρικές
 ως προς την ευθεία $y=x$

ΟΡΙΑ

① Αν $P(x)$ πολυώνυμο, αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\text{τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 =$$

$$= a_n \lim_{x \rightarrow x_0} x^n + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 =$$

$$= a_n x_0^n + \dots + a_0 = P(x_0)$$

② Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Έστω πως σε μια γειτονία του x_0 μια συνάρτηση f εγκλωβίζεται, ανάμεσα σε δύο άλλες h και g .

Αν καθώς το $x \rightarrow x_0$ και τα όρια των h, g κάνουν ℓ τότε το ίδιο και f θα κάνει ℓ .

Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x$ γειτονία του x_0

και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x$ γειτονία του x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$
 και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$

⑤ Αν δοθούν 2 πραγματικές συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

✓ με $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ κ $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$

εξετάστε αν ισχύει πάντα ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 0$.

Δεν ισχύει πάντα.
Για παράδειγμα,

αυτήν έχουμε $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$ τότε

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ κ $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$

και $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$

Άλλη εκφώνηση

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x))$ υπάρχει και

υπάρχει και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

ισχύει πάντα ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$;

⑥ Τι ονομάζεται ακολουθία?

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $a: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

⑦ Έστω f συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο A . Δώστε τον ορισμό της ~~συνεχούς~~ ~~της~~ f : α) σε σημείο $x_0 \in A$
 β) σε ανοικτό διάστημα $(a, b) \subseteq A$ γ) σε κλειστό διάστημα $[a, b] \subseteq A$

α) f συνεχής στο x_0 , όταν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

β) f συνεχής σε ανοικτό διάστημα (a, b) όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, b)

γ) f συνεχής σε κλειστό διάστημα $[a, b]$ όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, b) και

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ ή } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

8 Διατυπώστε τα τρία βασικά θεωρήματα σε κλειστά διαστήματα $[a, b]$.

Ισχύουν αντίστροφα?
Ισχύουν και σε ανοικτά διαστήματα?

ΔΕΝ ΙΣΧΥΟΥΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ
Θεώρημα Βολτανο ΟΥΤΕ ΣΕ ΑΝΟΙΚΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ.

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[a, b]$.

Αν f συνεχής στο $[a, b]$ κ $f(a) \cdot f(b) < 0$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο
ώστε $f(x_0) = 0$

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ
ΟΥΤΕ ΣΕ ΑΝΟΙΚΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$.

Αν f συνεχής στο $[a, b]$ κ $f(a) \neq f(b)$

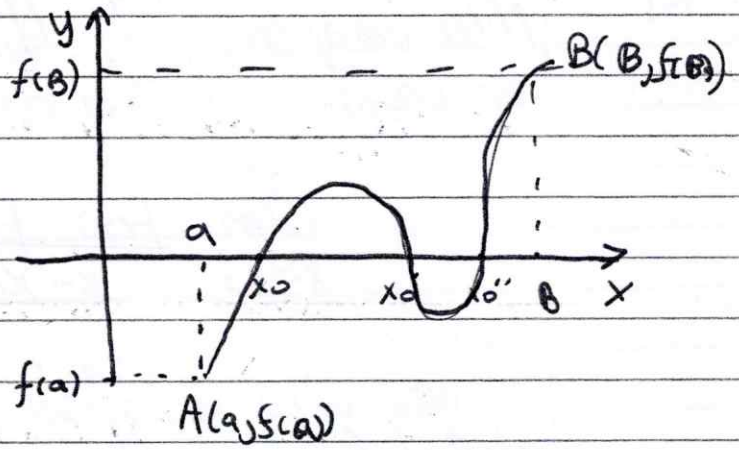
τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ κ $f(b)$
υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ ώστε
 $f(x_0) = \eta$

Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν f συνεχής στο $[a, b]$ τότε η f σε αυτό
παίρνει μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη
τιμή m . ^{υπάρχουν} $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ με $m = f(x_1)$, $M = f(x_2)$
και $\forall x \in [a, b]$ $m \leq f(x) \leq M$.

9) Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Bolzano.

✓ Δύο διάνοια σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[a, b]$. Επειδή τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(b, f(b))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα xx' , η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε τουλάχιστον ένα σημείο.



10) Να αποδείξετε το Θεώρημα των Ενδιάμεσων τιμών.

✓ Ας υποθέσουμε ότι $f(a) < f(b)$. Τότε θα υπάρχει $f(a) < \eta < f(b)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [a, b]$ παρατηρούμε ότι,

- g συνεχής στο $[a, b]$ κ
- $g(a)g(b) < 0$ αφού

$$g(a) = f(a) - \eta < 0 \text{ κ}$$

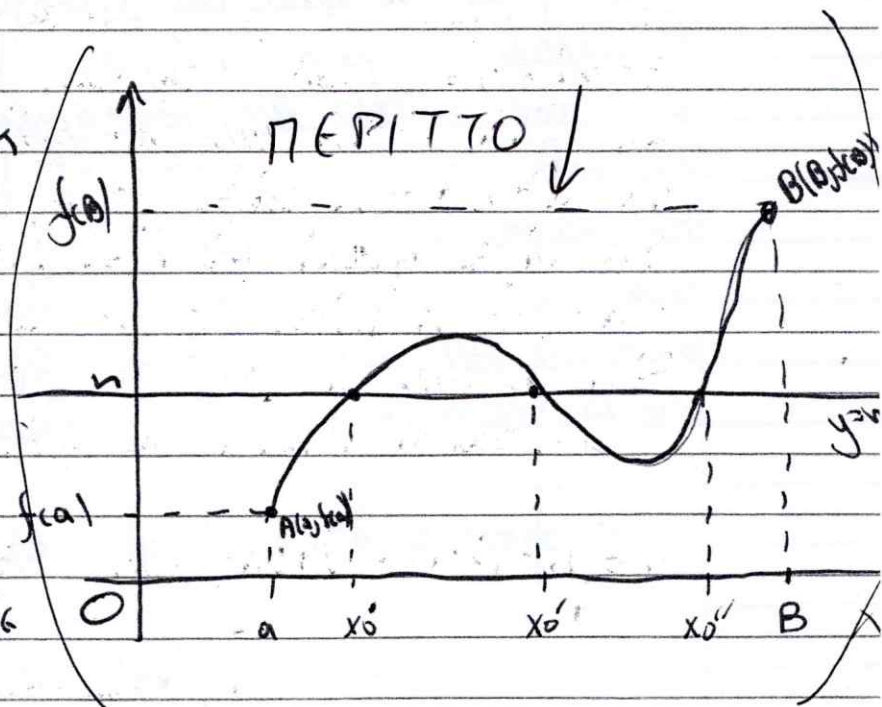
$$g(b) = f(b) - \eta > 0$$

Επομένως σύμφωνα με τον Bolzano υπάρχει

$x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0 \text{ οπότε}$$

$$f(x_0) = \eta.$$



ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

- ① Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παράγωγος στο x_0 του π.ο της και τι ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 ?

✓ Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παράγωγος στο $x_0 \in D_f$ αν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- ② Πώς είναι η γεωμετρική ερμηνεία της παραγωγής στο x_0 μιας παράγωγης συνάρτησης f στο x_0 ; Πώς ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$?

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν πάρουμε σημείο $M(x, f(x))$ με $x \neq x_0$ της C_f και την ευθεία AM ~~προσέγγιση~~ παρατηρούμε πως καθώς το x τείνει στο x_0 με $x > x_0$, η τμήνωση AM παίρνει οριακή θέση ϵ . Την ίδια θέση παίρνει όταν το x τείνει στο x_0 αλλά $x < x_0$. Την οριακή θέση της AM την ονομάζουμε εφαπτομένης ϵ της C_f στο A . Επειδή η κλίση της τμήνουσας είναι ίση με $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

η εφαπτομένη στο $\Theta A(x_0, f(x_0))$ έχει κλίση

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Αρα το $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Έστω : $(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f . Αν υπάρχει
 το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και εστίται με παράσταση από $\frac{0}{0}$ ή
 ορίζεται ως εφαπτομένη της C_f στο A , την ευθεία
 ϵ που διέρχεται από το A και έχει ωστελέων διευθύνουσα $\downarrow$

- (3) Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f σε σημείο $(x_0, f(x_0))$ αν η συνάρτηση είναι παράγωγο στο x_0 ;

✓

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

- (4) Τι ονομάζουμε ωστελέων διευθύνουσα της εφαπτομένης ή της
 παράγωγου συνάρτησης f σε σημείο $(x_0, f(x_0))$ της C_f ;

✓

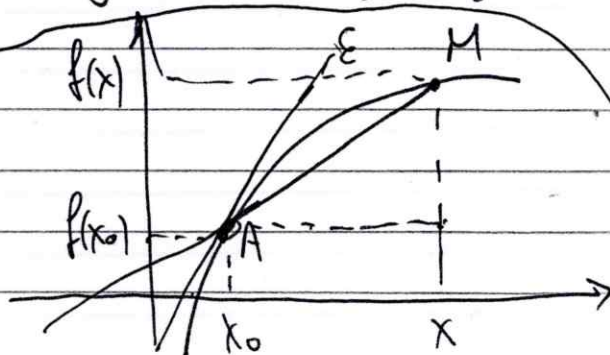
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$d\epsilon = f'(x_0)$$

- (5) Τι ονομάζουμε κλίση της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ ή της f στο x_0 ;

Κλίση της C_f στο A ή κλίση της f στο x_0 ονομάζουμε
 την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ϵ στο $A(x_0, f(x_0))$

Σημειώστε
 τη Ερώτηση 2



- ⑥ Αν x_0 σημείο εσωτερικού του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f , ποια είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η f να είναι παραγόμενη στο x_0 ;

Η f είναι παραγόμενη αν και μόνο αν υπάρχουν $\epsilon > 0$ και $\delta > 0$ τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}.$$

- ⑦ Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγόμενη;

α) Σε ανοιχτό διάστημα (a, b) ?

f παραγόμενη στο (a, b) όταν του η.ο. της όταν είναι παραγόμενη σε κάθε σημείο $x_0 \in (a, b)$.

β) Σε κλειστό διάστημα $[a, b]$?

f παραγόμενη στο $[a, b]$ του η.ο. της όταν είναι παραγόμενη σε κάθε σημείο $x_0 \in (a, b)$ και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \in \mathbb{R}.$$

9) a) ΑΠΑΝΤΗΣΗ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0$

17

8) Αν f συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο A και A_1 το σύνολο στο οποίο ο f είναι παράγωγο να ορίσετε την πρώτη παράγωγο της f .

Αν υπάρχουν όλα τα παραπάνω, τότε f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A_1$ οπότε ορίζεται η πρώτη παράγωγο της f .

$$f : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f'(x)$$

η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγο της f .

9) Να αποδείξετε ότι:

a) $(c)' = 0$ Έστω $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, f παράγωγο στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $x \neq x_0$ τότε

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Επομένως το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ άρα $(c)' = 0$.

b) $(x)' = 1$, $x \in \mathbb{R}$ Έστω $f(x) = x$, f παράγωγο στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $x \neq x_0$ τότε

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$ άρα $(x)' = 1$.

1) $(x^v)' = v \cdot x^{v-1}$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $x \in \mathbb{R}$

✓ Eow $f(x) = x^v$, f map from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$

Eow ~~$x_0 \neq x$ for $x_0 \in \mathbb{R}$~~ $x_0 \in \mathbb{R}$ find $x \neq x_0$ for

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} =$$

$$= x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}$$

note $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) =$

$$= x_0^{v-1} + x_0^{v-1} \dots + x_0^{v-1} = v x_0^{v-1}, \text{ apu } (x^v)' = v x^{v-1}$$



2) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$ Eow $f(x) = \sqrt{x}$, f map from $\mathbb{Q}(0, +\infty)$ to $\mathbb{Q}(0, +\infty)$

✓ Eow ~~$x_0 \neq x$ for $x_0 \in \mathbb{Q}(0, +\infty)$~~ $x_0 \in (0, +\infty)$ and $x \neq x_0$

$$\forall x \in \mathbb{Q}(0, +\infty) \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \quad \text{note } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Apd $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ε) $(x^{-v})' = -v x^{-v-1}$, $v \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^*$

Ερω $f(x) = x^{-v}$, $v \in \mathbb{N}^*$ f ορισμένη στο $\mathbb{R}^*$

$$(x^{-v})' = \left(\frac{1}{x^v} \right)' = \frac{(1)' \cdot x^v - 1(x^v)'}{(x^v)^2} = \frac{-v x^{v-1}}{x^{2v}} = -v x^{-v-1}$$

αρα $(x^{-v})' = -v x^{-v-1}$

ζ) $(\varphi x)' = \frac{1}{\omega^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x / \omega x = 0\}$

$$(\varphi x)' = \left(\frac{\eta \mu x}{\omega x} \right)' = \frac{(\eta \mu x)' \cdot \omega x - \eta \mu x (\omega x)'}{\omega^2 x^2} =$$

$$= \frac{\omega^2 x + \eta \mu^2 x}{\omega^2 x^2} = \frac{1}{\omega^2 x}$$

η) $(x^a)' = a x^{a-1}$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $x > 0$

✓ Ερω $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ f ορισμένη στο $(0, +\infty)$

αυ $y = x^a = e^{a \ln x}$ και θέτω $v = a \ln x$ τότε $y = e^v$ Αρα

$$y' = (e^v)' = e^v \cdot v' = e^{a \ln x} \cdot a \cdot \frac{1}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1}$$

Αρα $(x^a)' = a x^{a-1}$ $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

✓
 θ) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Ερω $f(x) = a^x$, $a > 0$ f ορισμένη στο $\mathbb{R}$

αυ $y = a^x = e^{x \ln a}$ οπότε $x \cdot \ln a = v$ τότε

$y = a^v$ (οπότε $v = x$) $y' = (e^v)' = e^v \cdot v' = e^{x \ln a} \cdot \ln a =$
 $= a^x \cdot \ln a$ άρα $\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln a}$

✓
 ς) $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$

Ερω $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$

αυ $x > 0$ τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

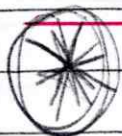
αυ $x < 0$ τότε $\ln|x| = \ln(-x)$ οπότε θεω $y = \ln(-x)$

και $v = -x$ άρα $y = \ln v$
 (οπότε $v = x$)

$$y' = (\ln v)' = \frac{1}{v} \cdot v' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

άρα $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$

- ✓ (10) Αποδείξτε ότι ^{κάθε} συνάρτηση που είναι παράλληλη σε σημείο x_0 του π.ο της είναι και συνεχής στο x_0 .
 Το αντίστροφο αχρείας. Δώστε παράδειγμα.



για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

αφού η f παράλληλη στο x_0 . ^{Αρα} $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ Αρα f και συνεχής στο x_0 .

Το αντίστροφο δεν αχρείας πάντα.

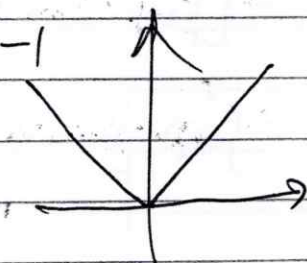
Για παράδειγμα η $f(x) = |x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ αλλά δεν παράλληλη σε αυτό αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \quad \text{ενώ} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1.$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x} = -1$$

δηλαδή διδγορεύει $x \rightarrow 0^-$



(11) ✓ Αν f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο x_0 , αποδείξτε ότι $f+g$ είναι παρ/η στο x_0 με $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Για $x \neq x_0$ ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Επειδή f, g παρ/ηες στο x_0 ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{Άρα } (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(12) ✓ Αν f, g, h συναρτήσεις παρ/ηες στο

$$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)]' = (f(x) \cdot g(x))' \cdot h(x) + (f(x) \cdot g(x)) \cdot h'(x) =$$

$$= [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) =$$

$$= f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

(13)

Διατυπώστε τον κανόνα αλυσίδας.

Αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε διαστήματα Δ και f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$ αν $y = f(g(x))$ ή f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$ τότε η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ ~~$y = f(u)$ και $u = g(x)$ τότε~~

$$\text{τότε } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

← ~~κανόνας αλυσίδας.~~

Για την παράγωγο $(f(g(x)))'$ έχουμε:

$$\text{Θέτω } g(x) = u \text{ οπότε } y = f(g(x)) = f(u)$$

$$\text{Τότε } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ έχουμε ο οποίος αφορά το } \frac{dy}{du} \text{ και το } \frac{du}{dx}$$

(14)

Αν δοθούν δύο μεταβλητές μεγέθη x, y που συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , η οριακή τιμή ρυθμού μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0

Αν δύο μεταβλητές μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε οριακή τιμή ρυθμού μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0 αν παράγωγο $f'(x_0)$.

του y ως προς x στο σημείο x_0 το $f'(x_0)$.

(15)

Αν K, E και P αντιστοιχά ος συναρτήσεις του κόστους, της εισπραξης και του κέρδους για x μονάδες παραχόμενου προϊόντος, τι ονομάζεται οριακό κόστος, οριακή εισπραξη και οριακό κέρδος για x_0 μονάδες προϊόντος;

Η παράγωγος $K'(x_0)$ παρισυνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x , όταν $x=x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0 . Ανάλογα ορίζονται και οι έννοιες οριακής πρᾶξης στο x_0 και οριακό κέρδος στο x_0 .

(16) ✓

Να διατυπώσετε το ΘΜΤ και να αναφέρετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.

Αν μια συνάρτηση f είναι

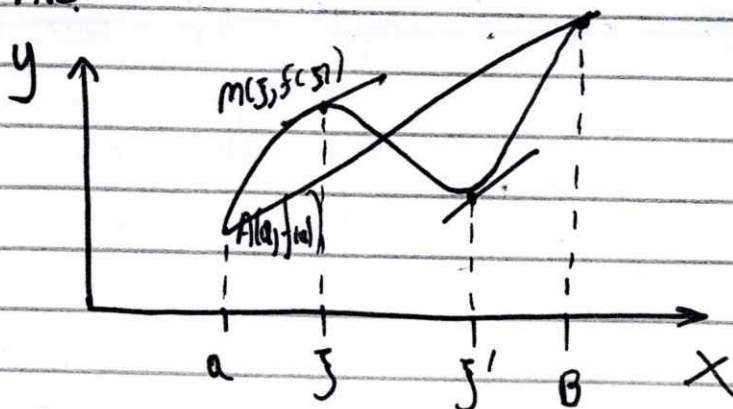
- συνεχής στο $[a, b]$
- παραγώγιμη στο (a, b)

Τότε υπάρχει ταλάντωση, είναι $f \in C^1(a, b)$:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ΓΕΩΜ. ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Γεωμετρικά σημαίνει πως υπάρχει ταλάντωση επί $f \in C^1(a, b)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της f στο $m(c, f(c))$ είναι παράλληλη της AB .



✓ 17. Να συνδυάσετε το Θ. Rolle και τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Αν για συνάρτηση f είναι

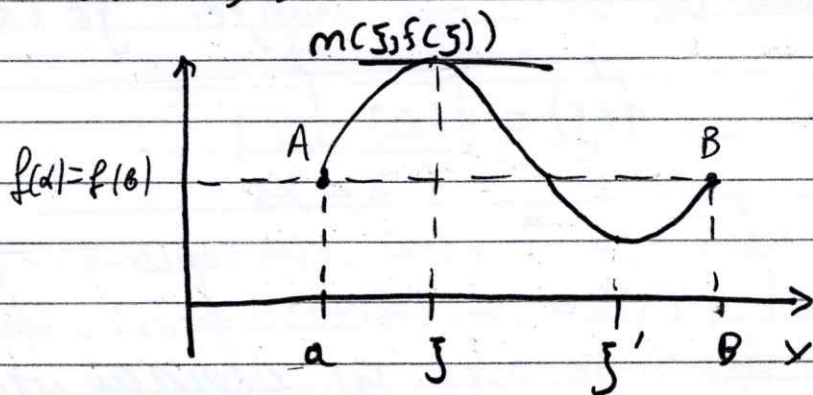
- συνεχής στο $[a, b]$
- παραγωγίσιμη στο (a, b)
- και $f(a) = f(b)$

τότε υπάρχει ένα, κατάχρον $\xi \in (a, b)$:

$$f'(\xi) = 0.$$

ΓΕΩΜ. ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Γεωμετρικά σημαίνει πως υπάρχει ένα κατάχρον $\xi \in (a, b)$ το οποίο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $m(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη των xx' .



ⓐ Να διατυπώσετε κ να αποδείξετε το Λήμμα του Rolle (συνθήκες)

Έστω f ορισμένη σε διαστήμα Δ . Αν f

• συνεχής στο Δ και

• $f'(x) = 0 \quad \forall x$ εσωτερικό του Δ

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$

• Αν $x_1 = x_2$ τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$

Αν $x_1 < x_2$ τότε στο $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του εητ. Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Επειδή όμως το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ ισχύει $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1)$. Όμοια για $x_2 < x_1$. Άρα σε όλες τις περιπτώσεις $f(x_1) = f(x_2)$.

(19)

Αποδείξτε ότι αν f, g συναρτήσεις συνεχής σε Δ και $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in \text{εσωτερικό του } \Delta$, τότε υπάρχει σταθερό $C \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) = g(x) + C \quad \forall x \in \Delta$.

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και $\forall$ εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Σαίκερς, η

$f - g$ είναι σταθερή στο Δ . Άρα υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε $\forall x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = C$ (=)

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + C$$

(20)

Το θεώρημα συνδεσης συνεπώς καλώς και το πορίσμα του ισχύει σε αυτή διατύπωση?
Δώστε παράδειγμα.

Το θεώρημα συνδεσης καλώς και το πορίσμα του ισχύουν σε διαστήματα και όχι σε ενιαία διαστήματα.
Για παράδειγμα,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

όμως η f δεν είναι συνεχής στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.



(21) Να διατυπώσετε κ ν αποδείξετε το θ. μονοτονίας συνεχούς σε διαστήμα Δ.

Ενώ f συνεχής σε ένα διάστημα Δ

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

Αν $f'(x) > 0 \quad \forall x$ εσωτερικό του Δ, τότε η $f \uparrow$ σε όλο το Δ.
Αν $f'(x) < 0 \quad \forall x$ εσωτερικό του Δ, τότε η $f \downarrow$ σε όλο το Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ενώ $f'(x) > 0$.

Ενώ $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, θα δ.ο. $f(x_1) < f(x_2)$

Αφού f συνεχής στο Δ και πυλμένη σε κάθε εσωτερικό του σημείο από ΘΜΤ θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$:

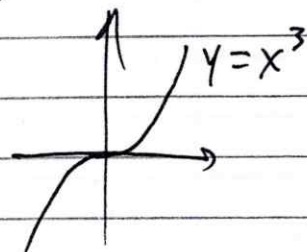
$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) (x_2 - x_1)$$

✓ Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$ έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ή $f(x_2) > f(x_1)$. Όμοια για $f'(x) < 0$.

(22) Λογικά το Αλτρινόμοιο του θ. Μονοτονίας; Πως αποδεικνύεται

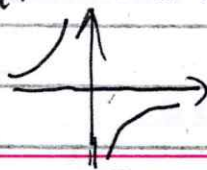
Ναι. Λογικά. Για παράδειγμα η $f(x) = x^3$ αν και είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η πυλ. $f'(x) = 3x^2$ δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$ αφού $f'(0) = 0$.

(Λογικά όμως $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$).



(23) $\downarrow$ Αν $f'(x) \geq 0 \quad \forall x$ που ανήκει σε ανοιχτό A , είναι η $f \uparrow$ στο A ; Δώστε παραδείγματα.

Οχι. Για παράδειγμα η $f(x) = -\frac{1}{x}$ είναι
 αυξής και γνησίως στο $\mathbb{R}^*$ που δεν είναι ζεύγος,
 έχει $f'(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$ στο $\mathbb{R}^*$ όμως δεν είναι
 γνησίως αυξήτως στο $\mathbb{R}^*$.



(24) $\downarrow$ Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A
 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα $x_0 \in A$;

Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο όταν
 υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε,

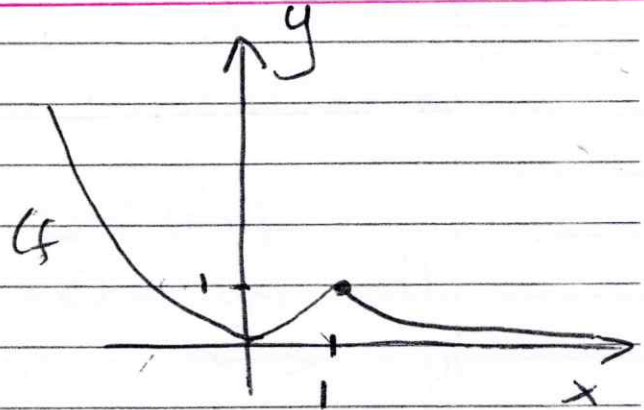
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται σημείο τοπικού μεγίστου ενώ
 το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f .

- (25) ✓ Αν μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε $x_0 \in \mathbb{A}$, θα παρουσιάζει ορισδήποτε και ολικό?

ΟΧΙ. Για παράδειγμα

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$



η f παρουσιάζει στο $x=1$ τοπικό μέγιστο το $f(1)=1$ ενώ ορισ δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

- (26) ✓ Να διατυπώσετε + να αποδείξετε το Θ. Fermat.

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

Εστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι υπλκή στο x_0 τότε $f'(x_0) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

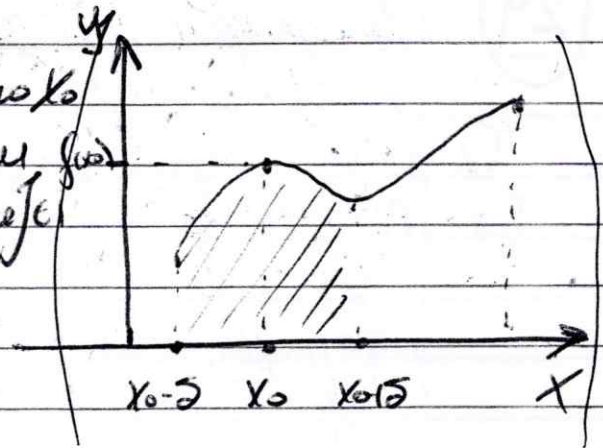
Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \text{ και}$$

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Επειδή f υπλκή στο x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Εμφανώς,

αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ τότε λόγω της (1) θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$

ΟΠΟΤΕ $f'(x_0) > 0$. (2)

αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ τότε λόγω της (1) θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$

$f'(x) < 0$ (3)

Από (2) κ (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

(27) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτίτων μιας συνεχούς συνάρτησης σε διάστημα Δ ;

Τα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η $f'(x_0) = 0$
 Τα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f δεν είναι γνησίως
 ή αγκυρά του Δ . (αν ανήκουν στο π.ο της f).

ΑΥΤΟΙΣ ΤΟΙΣ

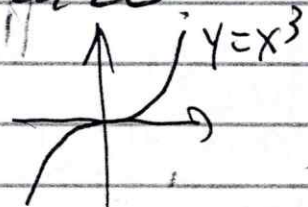
(28) Τα κρίσιμα σημεία συνάρτησης f σε διάστημα Δ είναι πάντα θέσεις τοπικών ακροτίτων?

(29) Τα κρίσιμα είναι ^{τα εσωτερ. σημεία του π.ο} ~~αυτά~~ που η f γνησίως ή αντιστρέφεται ή δεν μεταβάλλεται.

Τα κρίσιμα σημεία δεν είναι πάντα θέσεις τοπικών ακροτίτων
 Για π.χ η $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αυξ.

Με $f'(x) = 3x^2$, το $f'(0) = 0$ είναι ρίζα της παραγώγου αλλά όχι τοπικό ακρότιτο.

Διότι κριτήριο είναι
~~Αν όχι δεν είναι ακρότιτο~~



30) Έστω f συνεχής συν/η στο (a, b) με f συνεχής (α)
 Ένα σημείο του x_0 στο οποίο όπως είναι obvious.

Αποδείξτε ότι :

α) Αν $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, b) τότε η f
 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 .

β) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$
 τότε η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0
 και μελλοντικά η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (a, b) .

α) Επειδή $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, x_0)$ και η f συνεχής στο x_0 η f
 είναι γνησίως αυξανόμενη στο $(a, x_0]$.

Επομένως προκύπτει $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (a, x_0]$ ①

Επειδή $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0, b)$ και η f συνεχής στο x_0 η f
 είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, b)$

Αρα $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in [x_0, b)$ ②

Επομένως λόγω της ① & ② ισχύει $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (a, b)$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (a, b)
 και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

β) Έστω ότι $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$. Έστω $x_1 \in (a, x_0)$
 $x_2 \in (x_0, b)$.
 Επειδή f συνεχής στο x_0 , θα είναι φανερό ότι κάθε διαστήμα
 Αρα για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Αρα το $f(x_0)$
 δεν είναι τοπικό ακρότατο της f .
 Έστω $x_1 < x_2 \in (a, b)$ με $x_1 < x_2$.

Αν $x_1, x_2 \in (a, x_0)$ επειδή $f \uparrow$ στο (a, x_0) , $f(x_1) < f(x_2)$

Αν $x_1, x_2 \in (x_0, b)$ επειδή $f \uparrow$ στο (x_0, b) : $f(x_1) < f(x_2)$.

Αν $x_1 < x_0 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ όντως όπως είπαμε πριν.
 Επομένως σε κάθε περίπτωση $f(x_1) < f(x_2)$ άρα $f \uparrow$ στο (a, b) .

Ομοίως αν $f'(x) < 0$ στο (a, b) .

- 31) Ποτε μια συνάρτηση που είναι συνεχής σε διαστήμα Δ και παρήκν στο εσωτερικό του, λέμε ότι είναι κυρτή στο Δ ;

Η συνάρτηση f οπείκει να κοίτα ανώ είναι ή είναι κυρτή στο Δ αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

- 32) Να διατηρώτε το θεώρημα της κυρτότητας. Ισχύει το αντίστροφο του θεώρηματος; Πως να πειραξίμε.

Εστω μια συνάρτηση συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δύο φορές παρήκν στο εσωτερικό του Δ

Ποτε αν $f''(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ τότε η f είναι κυρτή στο Δ

Αν $f''(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

για πειραξίμε η συνάρτηση $f(x) = x^4$. Επειδή $f'(x) = 4x^3$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Όμως η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$ αφού $f''(0) = 0$

33) Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο (a, b) με ελάχιστη τιμή
 ενα σημείο x_0 . Πότε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται
 Σ.Κ της f ?

Αν η f είναι κυρτή στο (a, x_0) και κοίλη στο (x_0, b)
 ή αντίστροφα και η f έχει εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$
 τότε το $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται Σ.Κ.

34) Πείτε ποια είναι οι πιθανές θέσεις των Σ.Κ
 συνάρτησης f ορισμένη σε διαστήμα D .

Οι πιθανές θέσεις Σ.Κ μιας συνάρτησης είναι

- τα εσωτερικά σημεία του D στα οποία η f'' μηδενίζεται
- τα εσωτερικά σημεία του D στα οποία η f'' δεν υπάρχει.

35) Διατυπώστε το Θ.Σ.Κ.

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα (a, b) και $x_0 \in (a, b)$

Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
 ορίζεται εφαπτομένη της f στο $A(x_0, f(x_0))$

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι Σ.Κ.

36) α) Ποτε μια ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασυμπτωτική της cf ?

Αν ενα τμήμα των από τα $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

ισούται με απείρο. Τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασυμπτωτική της cf .

β) Που ανήτταίτε τις κατακόρυφες ασυμπτωτικές της cf ?

Στα x_0 όπου f ασυνέχης ή στη ανοικτή άκρη του Π.Ο της όταν αυτά δεν είναι απείρο. (Παραδείγματα)

γ) Αν f συνεχής σε διαστήμα Δ , είναι δυνατόν να έχει η cf κατακόρυφη ασυμπτωτική?

Ναι, στη άκρη του Δ , αν αυτή δεν είναι απείρο.

ή αν είναι ανοικτή. (Παραδείγματα)

δ) Αν f συνεχής σε διαστήμα $[a, b]$, είναι δυνατόν η cf να έχει κατακόρυφη ασυμπτωτική;

Προφανώς όχι.

37) Ποτε μια ευθεία $y=l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της f ?

Αν $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l, l \in \mathbb{R}$, τότε η $y=l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $\pm\infty$. Μπορεί στο $-\infty$

β) Που αναφέρεται ως οριζόντιες ασύμπτωτες της f ?

~~Στα άπειρα~~ Στο $+\infty$ και $-\infty$

γ) Αν $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, είναι δυνατόν η f να έχει οριζόντια ασύμπτωτη?

Όχι, γιατί δεν ορίζεται η f κοντά στο $-\infty$ ή στο $+\infty$.
 Όχι, γιατί το άπειρο δεν ανήκει στο π.ο της f .
 Δόω $D_f = [-1, 1]$

38) α) Ποτε μια ευθεία $y=lx+B$ λέγεται ασύμπτωτη της f ?

✓ Η ευθεία $y=lx+B$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ αντιστοίχως στο $-\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (lx+B)) = 0$ ή $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (lx+B)) = 0$

($\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - lx] = B \in \mathbb{R}$)

αντιστοίχως για το $-\infty$.

β) Που αναφέρεται ως ασύμπτωτες της $y=lx+B$ της f ?

Στα άπειρα $-\infty$ και $+\infty$

γ) Αν $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ είναι δυνατόν η f να έχει οριζόντια ασύμπτωτη;

Όχι, επειδή το άπειρο δεν ανήκει στο π.ο της f .
 Δόω $D_f = [-1, 1]$
 Δόω δεν ορίζεται η f κοντά στο $-\infty$ ή στο $+\infty$

39) Να αναφερείτε τα 2 θεωρήματα De' Hospital
1^ο Θεώρημα

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

$x_0 \in \mathbb{R} \cup (-\infty, +\infty)$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\text{τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2^ο Θεώρημα

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

$x_0 \in \mathbb{R} \cup (-\infty, +\infty)$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\text{τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Όποια αν έχουν α.φ. $\frac{-\infty}{-\infty} \vee \frac{+\infty}{-\infty} \vee \frac{-\infty}{+\infty}$

ΑΡΧΗ ΤΑ ΠΙΣΤΑ ΝΕΝ $\equiv$ (ΡΕΙ)
 9 ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

1 Έστω f συνάρτηση ορισμένη σε Διάνυσμα Δ . Τι ονομάζουμε παράγωγο της f ;

Έστω f ορισμένη σε Διάνυσμα Δ . Αρχική συνάρτηση ή Παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παράγωγος στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \Delta.$$

② Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα Διάνυσμα Δ . Αν F μια παράγουσα της f στο Δ , τότε ν.α. αποδείξετε ότι:

• Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και



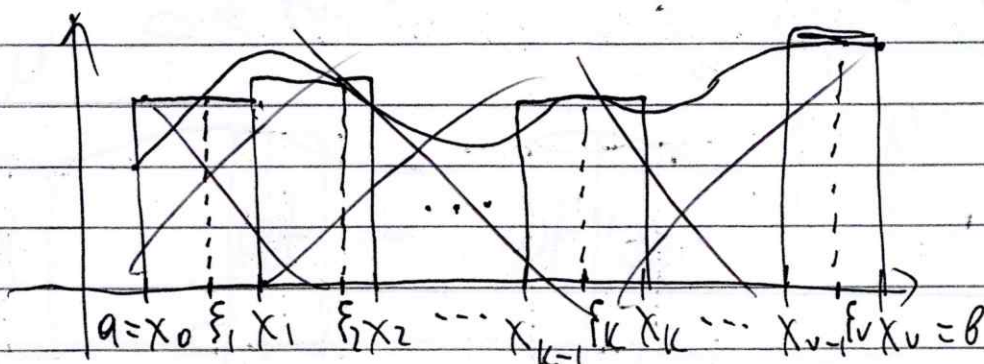
• Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

• Κάθε συνάρτηση μορφής $G(x) = F(x) + C$ είναι παράγουσα της f αφού

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \Delta$$

• Έστω G μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε $\forall x \in \Delta$
 ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$ οπότε
 $G'(x) = F'(x) \quad \forall x \in \Delta$.

Από σύμπτωση με μορφή υπάρχει $C \in \mathbb{R}$
 $G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in \Delta.$



- (3) Να δώσετε ορισμό του Εμβαδού Κυρίου Ω το οποίο περικλείεται από μια συνεχή συνάρτηση f , με $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ τον άξονα xx' , και τις ευθείες $x=a$ & $x=b$.

Εστω f μια (συνεχής) συνάρτηση σε $[a, b]$ με $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ και Ω το κύριο που ορίζεται από τη f , τον άξονα xx' και τις ευθείες $x=a$ και $x=b$.

Χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε n ισομήκεις υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ με τα σημεία $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$.

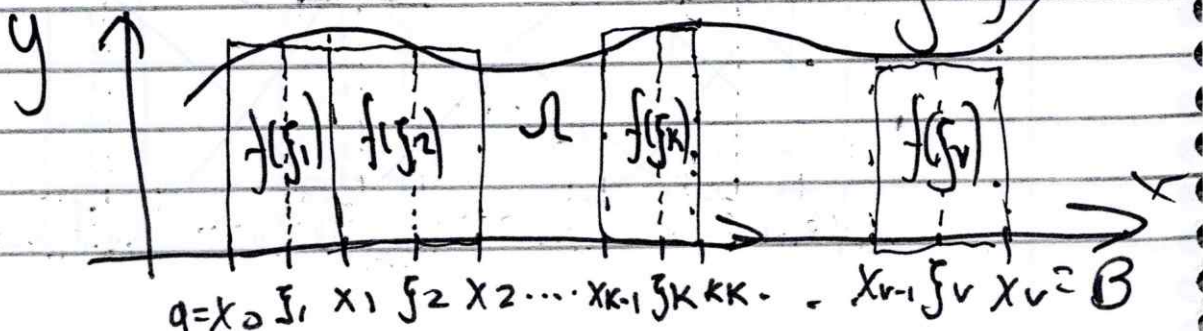
Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_k και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψος τα $f(\xi_k)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι

$$R_n = f(\xi_1) \Delta x + f(\xi_2) \Delta x + \dots = [f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)] \Delta x$$

Να ορίσουμε το $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = E$, $E \in \mathbb{R}$ και

είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_k . Το όριο αυτό ορίζεται εμβαδόν του επιπεδίου κυρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega) \geq 0$.

Βρίστε
σχέση
πίσω



Εκτιμήσω τα αρχικά και έχω 3 να βρεθούν
 (α) του σημείου, και το $f(x) \geq 0$ και η συνέχεια

41

- (4) Η ολοκλήρωση ορίζεται ολοκληρώσει από το a στο b ($a < b$)
 μιας συνάρτησης f συνεχούς στο $[a, b]$;

Το όριο του αθροίσματος $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x \right) = I, I \in \mathbb{R}$
 και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων ξ_k .

Αυτό το όριο ονομάζεται ολοκλήρωση της συνεχούς
 f από το a στο b , και συμβολίζεται με $\int_a^b f(x) dx$

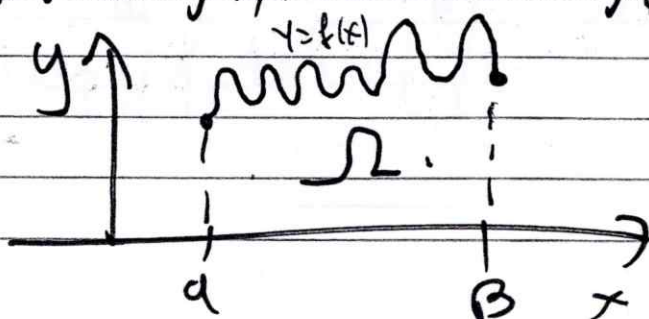
$$\text{Αρα} \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x \right).$$

- (5) Αν f συνεχής σε $[a, b]$ με $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ να
 αναφέρετε τη γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος
 $\int_a^b f(x) dx$ και ν.δ.ο $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου
 ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

Αν $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ τότε το $\int_a^b f(x) dx$ δίνει
 το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται
 από τη γραμμική πυκνωτική της f , τον άξονα
 xx' και τις $x=a$ και $x=b$

Αρα αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.



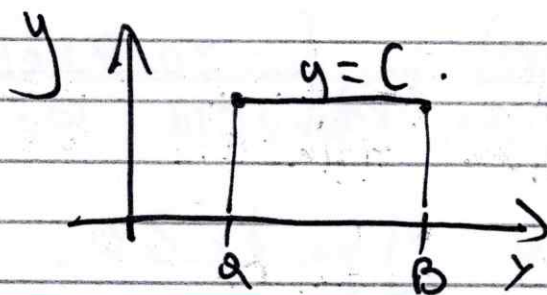
⑥ Να αναφέρετε τη γεωμετρική ερμηνεία του ολοκλήρου $\int_a^B c dx$ όπου $c > 0$ και $a < B$ ενώ $f(x) = c$

Αν $a < B$ $\int_a^B c dx = \int_a^B f(x) dx =$

$= \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(\frac{B-a}{v} \cdot vc \right) = c(B-a)$ και

Αν $c > 0$ το $\int_a^B c dx$ επειδή $c > 0$ $B > a$ το $\int_a^B c dx$

Εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $B-a$ και ύψος c .



Αρα $\int_a^B c dx = c \cdot (B-a)$

⑦ Αν f, g συνεπείς συνεχείς σε διαστήμα $[a, B]$ να γράψουν οι ιδιότητες των φηγμένων ολοκληρωμάτων

• $\int_a^B \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^B f(x) dx$

• $\int_a^B [f(x) + g(x)] dx = \int_a^B f(x) dx + \int_a^B g(x) dx$

• $\int_a^B (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^B f(x) dx + \mu \int_a^B g(x) dx$

- ⑧ Αν f συνεχής σε διαστήμα Δ και $a, b, \gamma \in \Delta$ να γραφεί ο Chasles.

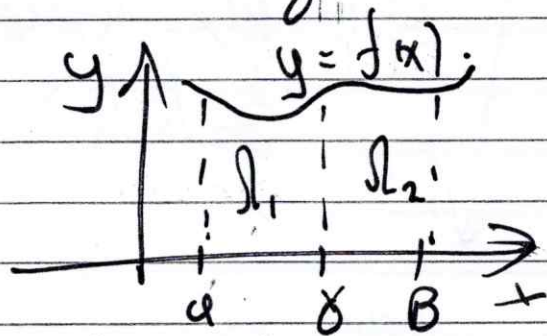
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^b f(x) dx.$$

- ⑨ Να δοθεί η γεωμ. ερμηνεία της διαφοράς των ολοκλ $\int_a^b f(x) dx$ σε $\int_a^\gamma f(x) dx$ και $\int_\gamma^b f(x) dx$ μιας συνεχούς f στο $[a, b]$ στην περίπτωση που $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$ και $a < \gamma < b$.

Αφού $f(x) \geq 0$ και $a < \gamma < b$, η ιδιότητα σημαίνει ότι $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$ όπου αρα

$$E(\Omega_1) = \int_a^\gamma f(x) dx, \quad E(\Omega_2) = \int_\gamma^b f(x) dx$$

και $E(\Omega) = \int_a^b f(x) dx$.



(10) Αν f ορισμένη συνεχώς σε διαστήμα Δ , και $a \in \Delta$ τότε ισχύει ότι $\left(\int_a^x f(t) dt\right)' = f(x)$ να αποδειχθεί η σχέση. Εφαρμόζοντας την προτάση

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(t) dt = \text{εμβαδόν χωρίου } \Omega$$

$\approx f(x) \cdot h$ για μικρά $h > 0$.

Αρα για μικρά $h > 0$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f(x)$$

$$\text{οπότε } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x).$$

Αν f είναι συνεχής ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και $a \in \Delta$ τότε $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in \Delta$ είναι μία παραγωγή της f στο Δ .

$$\text{Οπότε } \left(\int_a^x f(t) dt\right)' = f(x), \forall x \in \Delta.$$

Αν $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ αραγή να δ-ο. $F'(x) = f(x) \forall x \in \Delta$

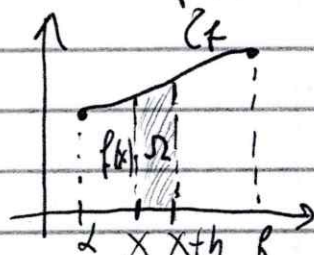
$$\text{Οπότε } F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Για μικρά $h > 0$ είναι $F(x+h) - F(x) \stackrel{①}{=} \int_x^{x+h} f(t) dt$

$$= \int_x^{x+h} f(t) dt = E(\Omega) \approx f(x) \cdot h \quad (\text{αδούγ } \approx \text{ μέχρι } \approx \text{ να } \mu \text{ μικρά } h \text{ είναι σχεδόν ορθογώνιο})$$

Αρα για μικρά $h > 0$ είναι $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)$ οπότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$



✓✓

45



(11)

Διωνήστε το Θ. θεωρήμα των ολοκλήρωσις και να αποδείξετε.

Εστω f συνεχής στο $[a, b]$. A, G ή και παράγουσα της f στο $[a, b]$ τότε

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

Παράδειγμα

Απόδειξη

Ζητούμε να αποδείξουμε θεωρήμα $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

Είναι μία παράγουσα της f στο $[a, b]$. Επειδή G είναι μία παράγουσα της f στο $[a, b]$ θα υπάρχει $C \in \mathbb{R}$:

$$G(x) = F(x) + C \quad (1)$$

η (1) για $x=a$ $G(a) = F(a) + C = \int_a^a f(t) dt + C = C$

οπότε $C = G(a)$.

$$\text{Από } G(x) = F(x) + G(a)$$

για $x=b$ έχουμε $G(b) = F(b) + G(a) = \int_a^b f(t) dt + G(a)$

από $\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$

- (12) Να γραφεί ο τύπος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα καθώς και οι προϋποθέσεις εφαρμογής του.

$$\int_a^B f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^B - \int_a^B f'(x) g(x) dx$$

όπου f', g' είναι συνεχείς στο $[a, B]$.

- (13) Να γραφεί ο τύπος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητών για το ορισμένο ολοκλήρωμα καθώς και οι προϋποθέσεις εφαρμογής του.

$$\int_a^B f(g(x)) g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du$$

όπου f, g' είναι συνεχείς $u = g(x)$, $du = g'(x) dx$

και $u_1 = g(a)$, $u_2 = g(B)$.