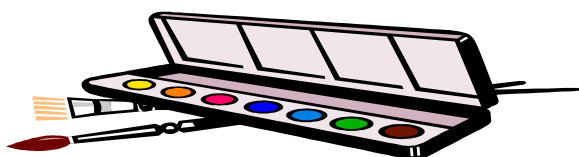


Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ασκήσεις Επανάληψης Μαθηματικών Προσανατολισμού



ΔΙΑΚΟΥΜΑΚΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
Μαθηματικός

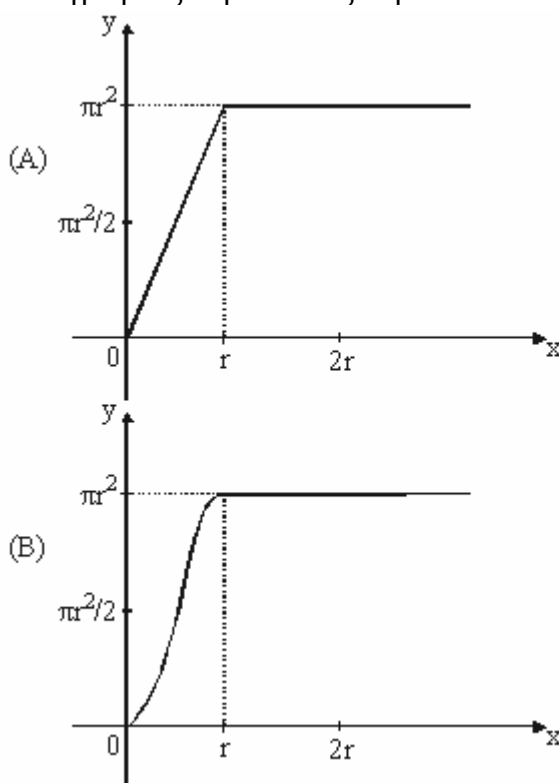
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ:

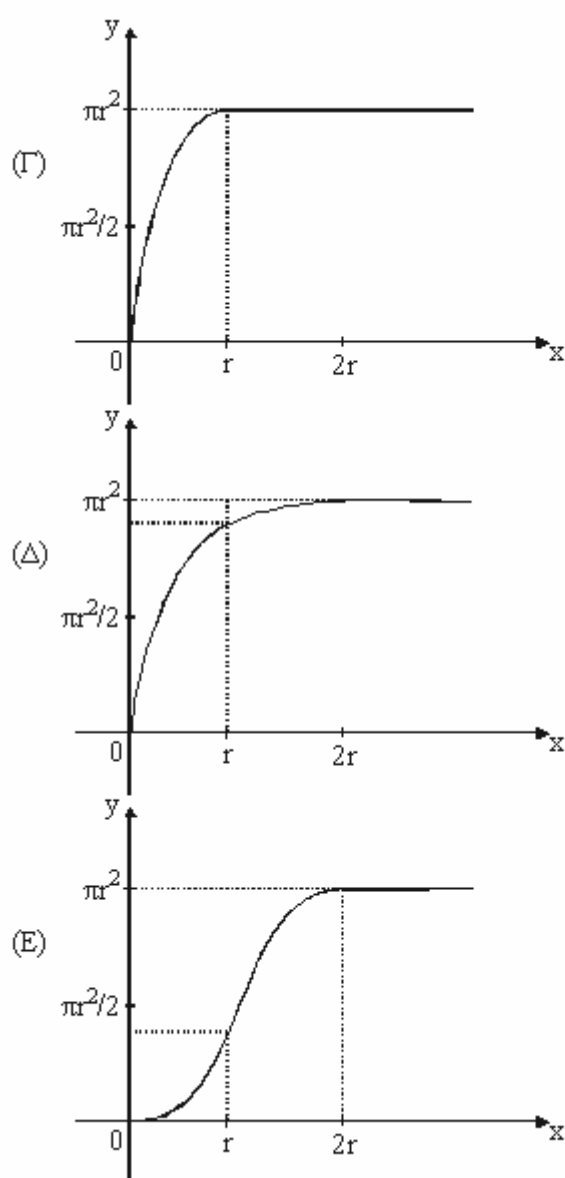
ΕΚΔΟΣΗ 2019-1

ΕΚΔΟΣΗ 2019-1

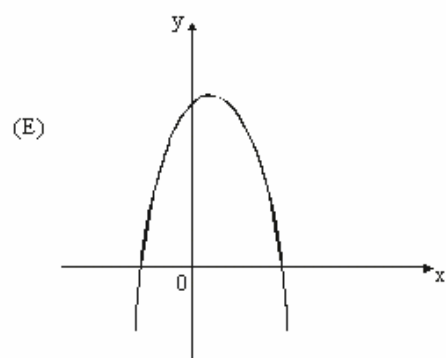
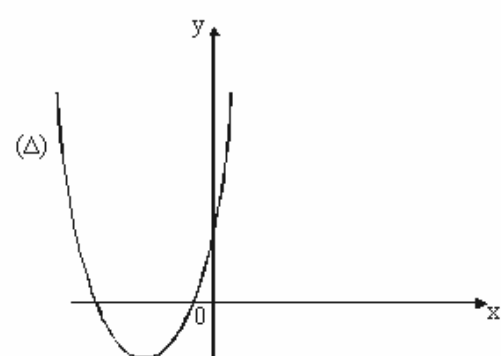
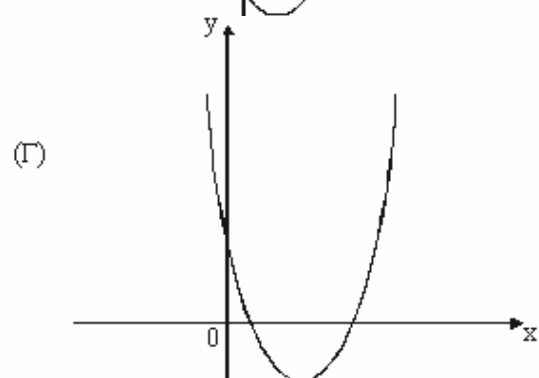
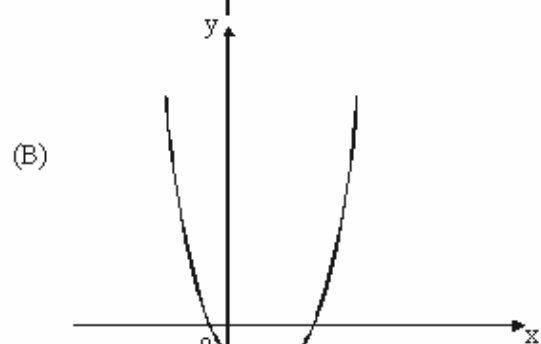
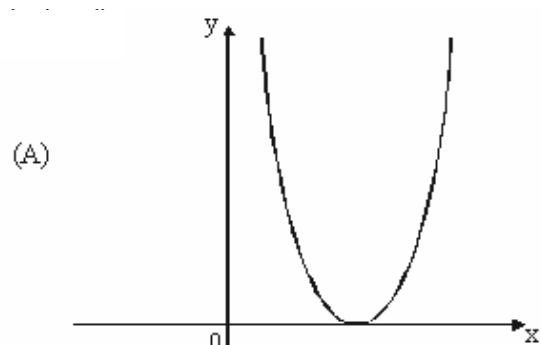
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣGeorg Friedrich
Bernhard
Riemann**1.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+1$.α) Να εξετάσετε ποιες από τις συναρτήσεις του παρακάτω πίνακα είναι ίσες με τη συνάρτηση f .

$f_1(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$	$f_2(x)=\frac{x^3+1}{x^2-x+1}$	$f_3(x)=(\sqrt{x+1})^2$
$f_4(x)=x\cdot(\frac{1}{x}+1)$	$f_5(x)=\ln e^{x+1}$	$f_6(x)=e^{\ln(x+1)}$

β) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις έχουν ίσες τιμές.**ΑΠ: α) $f_2, f_5, \beta) (1, +\infty)$** **2.** Έστω Δ ένας κυκλικός δίσκος ακτίνας r και Δ' ένας κυκλικός δίσκος ακτίνας x με το κέντρο του πάνω στον κύκλο C του κυκλικού δίσκου Δ . Αν συμβολίσουμε με $f(x)$ το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κυκλικών δίσκων, ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις παριστάνει καλύτερα την f ;



3. Ποια από τις επόμενες παραβολές μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ax^2+bx+\gamma$, όπου a, β, γ τρεις διαφορετικοί θετικοί αριθμοί.



4. ✓ ➡ Θεωρούμε f, g συναρτήσεις τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x)+f(3-2x)=2g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.
 β) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)+2f(1-x)=x^2-x$, να βρεθούν οι τύποι των f και g και το κοινό σημείο των C_f και C_g .

$$\text{ΑΠ: } \beta) f(x) = \frac{x^2 - x}{3}, \quad g(x) = \frac{5x^2 - 11x + 6}{6}, \quad (1, 0)$$

5. ✓ ➡ Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $c \cdot f(x+y) = f(x) \cdot f(y) + 1$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, με $c \in \mathbb{R}$.
 α) Να δείξετε ότι $|c|=2$.
 β) Αν $c=2$ να δείξετε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

$$\text{ΑΠ: } \beta) f(x) = 1$$

6. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(2x+y+1) = f(x-y+2)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
 α) Να βρείτε τις τιμές των x, y ώστε να ισχύει $f(3) = f(1)$.
 β) Να δείξετε ότι $f(3x+1) = f(2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 ➡ γ) Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

$$\text{ΑΠ: } (x = \frac{1}{3} \text{ και } y = \frac{4}{3}) \text{ ή } (x = \frac{1}{3} \text{ και } y = -\frac{2}{3})$$

7. Δίνεται η άρτια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x) \cdot f(y)}$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:
 α) $f(0) = -1$ ή 0 ή 1
 β) Να δείξετε ότι για κάθε μία από τις τιμές του $f(0)$ του α) ερωτήματος η f είναι σταθερή.

8. ➡ Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
 $f(x) \leq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε το $f(0)$ β) Να δείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{ΑΠ: } \alpha) f(0) = 0$$

9. ➡ Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x^2+y^2) = x \cdot f(x) + y \cdot f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.
 Να δείξετε ότι:
 α) $f(0) = 0$ β) η f είναι περιττή γ) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για κάθε x, y ομόσημους

10. Έστω $f(x) = \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$ συνάρτηση με $a > 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(1-x) = 1$.

- β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = f(\frac{1}{2005}) + f(\frac{2}{2005}) + \dots + f(\frac{2004}{2005})$.

$$\text{ΑΠ: } \beta) 1002$$

11. ✓ ➡ Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, τέτοια ώστε να ισχύει $f(x) = \frac{e^x}{2004^{f(x)}}$, για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

12. ✓ ➔ Δίνεται συνάρτηση f με $(f \circ f)(x) = x^2 - x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\mathbb{R}_f = \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(1)$.

ΑΠ: $f(1)=1$

13. ✓ Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x + f^3(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".

➔ β) Αν f^{-1} η αντίστροφη συνάρτηση της f , να δείξετε ότι $f^{-1}(x) + x^3 = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

➔ γ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει ως λύση την $x=0$.

ΑΠ: γ) Όχι

14. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $y=f(x)$ με $x, y \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

➔ β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $(f(x))^3 = f(x^3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

➔ γ) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα να λυθεί η εξίσωση $f(x) = x$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f^3(-1) + f^3(1) = f(0)$.

δ) Αν $f(8) = 64$, να υπολογιστεί η τιμή $f(2)$.

ΑΠ: γ) $x=-1, 0, 1, \delta$) $f(2)=4$

15. ➔ Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(|x|) = f(x)$.

16. α) Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + f(-x)$ είναι άρτια.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή και παρουσιάζει μέγιστο για $x=x_0$, να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=-x_0$.

➔ γ) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι περιττή. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[a, \beta]$ με $a, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $[-\beta, -a]$.

17. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ , οι οποίες παίρνουν θετικές τιμές για κάθε $x \in \Delta$ και οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες στο Δ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

18. ➔ Έστω f συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα Δ για την οποία ισχύει

$|f(x) - f(y)| < |x - y|$, για κάθε $x, y \in \Delta$ με $x \neq y$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

19. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $h(x) = \frac{1}{x+2}$ με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$.

A. ➔ α) Να βρείτε μια συνάρτηση g ώστε $f \circ g = h$.

β) Να βρείτε μια συνάρτηση φ ώστε $\varphi \circ f = h$.

B. α) Να βρείτε τις f^{-1} , g^{-1} , h^{-1} .

β) Να βρείτε τις $f^{-1} \circ g^{-1}$ και $g^{-1} \circ f^{-1}$.

γ) Να εξετάσετε αν $g^{-1} \circ f^{-1} = h^{-1}$

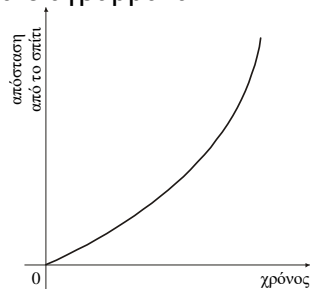
ΑΠ: A. α) $g(x) = x+2$, $D_g = \Delta$, β) $\varphi(x) = \frac{x}{1+2x}$, $D_\varphi = \Delta$

B. α) $f^{-1} = f$, $g^{-1} = x-2$, $x \in (2, +\infty)$, $h^{-1} = \frac{1-2x}{x}$, $x \in (0, \frac{1}{2})$

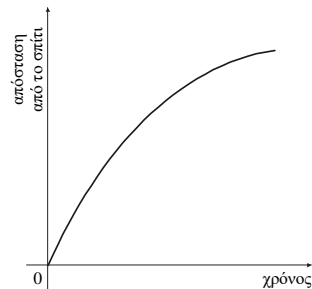
β) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{x-2}$, $x \in (2, +\infty)$, $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{1-2x}{x}$, $x \in (0, \frac{1}{2})$

γ) Είναι ίσες (γενικά ισχύει $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$).

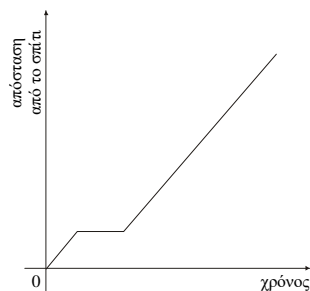
20. Δίνονται τα διαγράμματα:



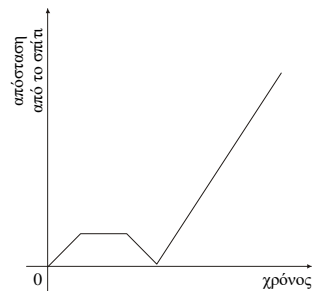
Διάγραμμα I



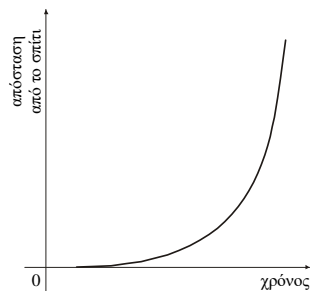
Διάγραμμα II



Διάγραμμα III



Διάγραμμα IV



Διάγραμμα V

και οι αφηγήσεις τριών μαθητών:

Μαθητής Α: Το πρωί ξεκίνησα στην αρχή με αργό ρυθμό για το σχολείο, όταν όμως κατάλαβα ότι επρόκειτο να αργήσω επιτάχυνα.

Μαθητής Β: Πήγαινα κανονικά μέχρι τη στιγμή που κλατάρισε ένα λάστιχο του ποδηλάτου μου. Το επισκεύασα επί τόπου και συνέχισα με την ίδια ταχύτητα.

Μαθητής Γ: Δεν είχα απομακρυνθεί πολύ, όταν θυμήθηκα ότι είχα αφήσει στο σπίτι το τετράδιο των Μαθηματικών. Αναγκάστηκα να γυρίσω πίσω να το πάρω και μετά ξεκίνησα πάλι για το σχολείο.

α) Συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε αφήγηση το διάγραμμα που της ταιριάζει:

Αφήγηση	A	B	Γ
Διάγραμμα			

β) Γράψτε από μια αφήγηση που να ταιριάζει στα υπόλοιπα διαγράμματα.

Μαθητής Δ:
(Διάγραμμα ...)

Μαθητής Ε:
(Διάγραμμα)

21. ➡ Αν οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονες και έχουν ως σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
22. Έστω συνάρτηση f με $f(x) = 2 - x - \ln(x+1)$.
α) Δείξτε ότι η f είναι "1-1" β) Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει μοναδική ρίζα.
γ) Να λυθεί η ανίσωση $x + \ln(x+1) \leq 0$
- ΑΠ: γ) $-1 < x \leq 0$**
23. ➡ Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της f .
24. ➡ Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν ορίζεται η $g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ισχύει ότι $(f \circ g^{-1} \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:
α) ορίζεται η $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
β) $f \circ g = g \circ f$
γ) $g = f \circ f$
25. Δίνεται $f(x) = x - x^2$.
α) Να βρεθεί το R_f αν $x \in [0, 1]$.
β) Δείξτε ότι αν $x \in [0, 1]$ η f δεν είναι «1-1».
γ) Αν $x \in [0, \frac{1}{2}]$ δείξτε ότι η f αντιστρέφεται.
δ) Αν $g(x) = \sqrt{f(x)}$, $x \in [0, 1]$ και $h(x) = \eta \mu^2 x$ να οριστεί η σύνθεση της g με την h .

ΑΠ: α) $[0, \frac{1}{4}]$, δ) $\eta \mu^2 \sqrt{x - x^2}$, $x \in [0, 1]$

26. Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 - \sqrt{5x}}{5\sqrt{5} - x\sqrt{x}}$$

$$\iota) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1} \right]$$

$$\lambda) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[4]{x-1}}$$

$$\theta) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} \right]$$

$$\kappa) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9 - \sqrt{x^2 - 6x + 9}}{|x - 1| - 2}$$

$$\mu) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x\sqrt{x} - 3x + 2\sqrt{x}}$$

ΑΠ: α) $-\frac{1}{2}$, β) -1, γ) Δεν υπάρχει, δ) -1, ε) 3, ζ) 0, η) $\frac{\sqrt{5}}{15}$, θ) 0, ι) Δεν υπάρχει, κ) Δεν υπάρχει, λ) 0, μ) 6

27. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3x^2 + 5}{\sqrt{x^3 + 1} - 3} = 4$.

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

ΑΠ: -7

28. Έστω f και g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x)}{x^2 + 4x} = a \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1 - \sqrt{5+x}}{g(x)} = \beta \in \mathbb{R}. \text{ Αν η } f \text{ είναι άρτια και η } g \text{ περιττή}$$

να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$.

ΑΠ: -8αβ

29. ✓ ➡ Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2f(x) + 3g(x)}{f^2(x) + g^2(x)} = 0$.

30. ✓ ➡ Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $3f(x+1) - 2f(2-x) = x^2 + 14x - 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{f(x)}$.

ΑΠ: $-\infty$

31. ✓ ➡ Να βρεθούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x} - 2x)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 4x + 3} + \sqrt{x^2 + 2x + 2} - 3x + 2)$$

ΑΠ: α) 0, β) 4

32. ✓ ➡ Αν για τις συναρτήσεις $f, g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x) - 5f(x)) = 0$ και

$5f(x) + g(x) \leq 0 \leq g(x)$, για κάθε $x \in (-1, 1)$ να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

33. ✓ ➡ Αν για τις συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x f^2(x) + g^2(x)) = 0$, να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

34. ✓ ➡ Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + g(x)] = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \cdot g(x)] = 0$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

35. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και

$$f^3(x) + f^2(x) \cdot \eta\mu(2-x) = 4 \cdot (x-2)^2 \cdot \eta\mu(x-2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

➡ α) Δείξτε ότι $\kappa = 2$.

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

γ) Αν για τη συνάρτηση g ισχύει $|g(x) - 3| \leq |f(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \text{ και } \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|g^2(x) - 7g(x) + 10| - 7g(x) + 19}{g^2(x) - |g(x) + 6|}$$

ΑΠ: β) 0, γ) i) 3, ii) $-\frac{6}{5}$

36. Έστω συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{2x + 1} + ax + 4\beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{4}.$$

α) Να βρείτε τους a και β .

β) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{4}{x}\right)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

➡ γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}_+$, αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) - 2x^2 + 8}{f^4(x) + (\lambda^2 - 6) \cdot x^2 - 4} = 1$.

ΑΠ: α) $a = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, β) $\frac{5}{4}$ και 0, γ) $\lambda = 2$

37. Αν $\sigma = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(a-x)^2}$, με $a, \beta > 0$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \sigma} f(x)$ με $f(x) = \frac{2a^x + 3\beta^{x+1}}{a^x + \beta^x}$.

$$\text{ΑΠ: } \sigma = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν } a > \beta > 0 \\ 3\beta, & \text{αν } 0 < a < \beta \\ \frac{3\beta + 2}{2}, & \text{αν } a = \beta \end{cases}$$

38. ➡ Δίνεται η συνάρτηση f με $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \eta\mu \frac{\pi(x-1)}{2} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\pi}{2}. \text{ Να υπολογίσετε τα όρια:}$$

$$\text{α) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \qquad \qquad \qquad \text{β) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$$

ΑΠ: α) 1, β) $-\frac{\pi}{4}$

- 39.** ➡ Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2-\eta\mu x}{x^2+x} = 3$ να υπολογίσετε τα:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2}{x}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|5-3f(x)|-1}{x^2-x}$

ΑΠ: α) 4, β) -12

- 40.** Δίνονται οι συναρτήσεις g και h με τύπους

$$g(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{3x^2 + 30x + 95} - \frac{\lambda}{4} (3x+5), \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } h(x) = \frac{4x-5}{3}.$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f = g \circ h$ είναι η $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 10} - \lambda x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) Αν $\lambda = 1$, να υπολογίσετε τα

i) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)+2x}{x^4+x-14}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu^3 x}{f(x)+x}$

ΑΠ: β) $+\infty$ αν $\lambda < 1$, $-\infty$ αν $\lambda > 1$, $\frac{5}{2}$ αν $\lambda = 1$, γ) i) $-\frac{5}{124}$, ii) 0

- 41.** Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = e^{3x+2}$ ορισμένη στο $\mathbb{R}^*$ και $g(x) = \ln x^2$ ορισμένη στο $[1, e^4]$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης της f με τη g .

β) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

γ) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - \eta\mu^2 x - 4}{x}$.

ΑΠ: α) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$, β) $2 \cdot (3x+2)$, γ) 6

- 42.** Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε $(f(x))^3 + x^2 \cdot f(x) = 2x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}, \text{ να βρείτε το } \ell.$$

ΑΠ: $\ell = 1$

- 43.** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x) - x \leq x^2 \leq f(x-1) + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

➡ α) Να βρεθεί ο τύπος της f .

β) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x}$

ΑΠ: α) $f(x) = x^2 + x$, β) 1

- 44.** Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = \sqrt{x-1} \text{ και } g(x) = \sqrt{4-x}$$

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

β) Να αποδείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 = 2$.

γ) Να εξετάσετε αν οι $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι και αυτές συνεχείς στο $x_0 = 2$.

ΑΠ: α) $(f \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{4-x}-1}$, $x \leq 3$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{4-\sqrt{x-1}}$, $1 \leq x \leq 17$

45. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3x-1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.
 β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
 γ) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f^{-1} .
 δ) Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων f και f^{-1} .

$$\text{ΑΠ: γ) } f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 2 \\ \frac{x+1}{3}, & x > 2 \end{cases}, \text{ δ) Γνησ. αύξουσες}$$

46. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ και η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει $x \cdot f(x) \geq x^2 \cdot P(x) + \eta\mu(2006x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το $f(0)$.

ΑΠ: 2006

47. ➡ Αν f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $f^2(x) + g^2(x) = \eta\mu^2 x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στο π .

48. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{|x| \cdot \sqrt{|x|}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
 β) Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(x) - 2| \leq |g(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

49. ✓ ➡ Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g τέτοια, ώστε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β, γ ώστε να ισχύουν οι συνθήκες:

i) $g(x+y) = e^y \cdot g(x) + e^x \cdot g(y) + \alpha xy + \beta$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \beta}{x} = \gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $g(0) = 0$

β) Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

γ) Αν θεωρηθεί γνωστό ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί

δ_1, δ_2 τέτοιοι, ώστε να ισχύει η σχέση: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g(x_0) + \delta_1 e^{x_0} + \delta_2 x_0$,

για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

ΑΠ: γ) $\delta_1 = \gamma$, $\delta_2 = \alpha$

- 50.** ➡ Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g τέτοια, ώστε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β, γ ώστε να ισχύουν:

i) $g(xy) = g(x) + g(y) + (x^2 - x)(\ln^2 y - \ln y) + \alpha x(y-1) + \beta$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x-1} = \gamma$

Να αποδείξετε ότι:

α) $g(1) = -\beta$,

β) $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$

γ) Με δεδομένο ότι $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{\ln h}{h-1} = 1$, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ τέτοιοι,

ώστε να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \delta_1 x_0^{-1} + \delta_2 x_0 + \delta_3$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

ΑΠ: γ) $\delta_1 = \gamma, \delta_2 = -1, \delta_3 = \alpha + 1$

- 51.** Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε $|f(x) - f(y)| \leq \rho \cdot |x - y|$, $\rho > 0$:

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β) Αν $\rho \in (0, 1)$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία το πολύ ρίζα.

- 52.** Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύουν $f(x \cdot y) = f(x) + f(y) + (x^2 - x) \cdot (y^2 - y)$, για

κάθε $x, y > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$, να δείξετε ότι:

α) Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

β) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{3}{x_0} + x_0 - 1$, για κάθε $x_0 > 0$

- 53.** Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{9+x}}{x} = 2$:

α) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ και

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

ΑΠ: β) $\frac{13}{6}$

- 54.** ✓ ➡ Έστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $[0, 1]$ με $f(x), g(x) \in [0, 1]$.

Αν $f \circ g = g \circ f$ στο $[0, 1]$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$ και $g(\xi) = \xi$.

- 55.** ➡ Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[1, +\infty)$ και ισχύει $|f(x) - 1| - \frac{2}{x+1} = x - 1$, για κάθε $x > 1$, να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(1, +\infty)$.

- 56.** ✓ ➡ Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$\sqrt{2 \cdot f^2(x)} = \sqrt{2} \cdot (1 + e^x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από

το σημείο $(0, -2)$. Να βρεθεί ο τύπος της f .

ΑΠ: $f(x) = -1 - e^x$

- 57.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $x \cdot f(x) - 5x^4 - x + 2\eta\mu x^2 = 0$.
 α) Να βρείτε τον τύπο της f και το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.
ΑΠ: α) $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- 58.** Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} = 2$ και $1 \leq f(x) + 1 \leq 3 + \sqrt{x}$ για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι:
 α) $f(0) = -1$
 ➔ β) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [0, 1]$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi^2 - \xi$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι αυτό το ξ δεν μπορεί να είναι άλλο από το 1.
- 59.** ➔ Έστω $f(x) = x^2 + \mu x + \kappa$, $g(x) = -x^2 + \mu x + \kappa$, $\mu, \kappa \in \mathbb{R}$ με $\kappa \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(a) = g(\beta) = 0$, $a < \beta$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $3f(\xi) + g(\xi) = 0$
- 60.** Έστω f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[a, \beta]$ με $f([a, \beta]) = [a, \beta]$. Ναδειχτεί ότι η ευθεία $y = x$ τέμνει την C_f σε ένα ακριβώς σημείο.
- 61.** ✓ Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g ώστε να ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} \right) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot g(x) - 1}{x} = 1 \text{ και}$$
 οι C_f, C_g δεν έχουν κανένα κοινό σημείο
 α) Να βρεθούν οι αριθμοί $f(0)$ και $g(0)$
 β) Ναδειχτεί ότι $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 γ) Ναδειχτεί ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) + f^2(\xi) = \frac{g(\xi)}{\xi}$.
ΑΠ: α) 4 και $\frac{1}{4}$
- 62.** Δείξτε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.
- 63.** Δείξτε ότι η εξίσωση $x^{2005} - 3x^{101} + 5x^{51} - 4 = 0$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.
- 64.** Αν $0 < a < 1$, δείξτε ότι η εξίσωση $x = a \cdot \eta\mu x - 1$ έχει μόνο μία ρίζα στο $(-2, 1)$.
- 65.** Θεωρούμε την εξίσωση: $\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0$, $\kappa, \lambda, \mu \neq 0$
 α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.
 ➔ β) Αν οι δύο ρίζες είναι οι ρ_1, ρ_2 , να δείξετε ότι: $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}$.
- 66.** ➔ Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(2005) = -1821$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f(a) - 2005)x^5 + 3x^2 + 5x + 7}{f(a)x^2 + x + 4} = -\infty$.

67. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x+y)+x+y=[f(x)+x] \cdot [f(y)+y]$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Ναδειχτεί ότι:

α) $f(0)=1$

➡ β) $f(x)+x>0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

➡ δ) Αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε $f(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

68. ✓ ➡ Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύουν $f(x+y)=f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in [0, +\infty) - \{1\}$ και $x-4 \leq f(x) \leq x^2-3x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, δείξτε ότι:

α) Η f είναι συνεχής στο 2

β) Η f είναι συνεχής στο 0

γ) Η f είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$

δ) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 4$

ε) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2,4)$

ζ) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (2,4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = \frac{f(2)+f(4)}{2}$

η) Εξετάστε αν η f είναι συνάρτηση «1-1».

θ) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in [2,4]$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = \frac{f(2)+f(3)+f(4)}{3}$

ΑΠ: η) Όχι

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(1-\ln x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε τα όρια της f στα άκρα του D_f .

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_f .

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f αφού πρώτα αποδείξετε ότι είναι συνεχής.

ΑΠ: α) $D_f=(0, e)$, β) στο 0^+ το $+\infty$, στο e^- το $-\infty$, δ) $\mathbb{R}$

70. Αν f συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο A που είναι "1-1", τότε

ισχύει ότι $f(f^{-1}(x))=x$ για κάθε $x \in A$.

Σ Λ

71. Να υπολογιστούν τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3|x| + |x-2| - 3}{|2-x^2| - x}$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} [(x-2) \cdot \sqrt{\frac{x^3+8}{x^2-4}}]$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - 2x) - \epsilon \phi x}{x}$

ΑΠ: α) Δεν υπάρχει, β) 0, γ) 1

72. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\gamma(z)=z^2$, $z(x)=\sqrt[3]{x+1}$, $x(t)=a^t$, $a>0$.

α) Να εκφράσετε την γ ως συνάρτηση του t .

β) Να βρεθεί, αν υπάρχει, το $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t)$.

ΑΠ: β) 1 αν $a>1$, $+\infty$ αν $0<a<1$, $(\sqrt[3]{2})^2$ αν $a=1$

- 73.** ➡ Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής και γνησίως αύξουσα για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$.

α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x}$

β) Δείξτε ότι $f(1)=0$

γ) Αν g συνάρτηση με $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση

της g τέμνει την ευθεία $\epsilon: y=2x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο $(0, 1)$.

ΑΠ: α) 0

- 74.** Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t^2 + (x^2 + y^2)t + 2} - \sqrt{t^2 + 4yt + 3}$, όπου (x, y) είναι οι συντεταγμένες σημείου M του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι αν $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, τότε το M ανήκει σε κύκλο.

➡ Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t^2 + 2xt + 3x^2} + \sqrt{t^2 - 2yt + 5y^2} - 2t$, όπου (x, y) είναι οι συντεταγμένες σημείου M του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι αν $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -2$, τότε το M ανήκει σε ευθεία.

Γ. Αποδείξτε ότι η ευθεία και ο κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία.

ΑΠ: Α. $x^2 + (y-2)^2 = 2^2$, Β. $y = x + 2$

- 75.** ➡ Α. Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής σε σημείο x_0 και η g ασυνεχής στο x_0 .
α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι ασυνεχής στο x_0 .
β) Θεωρούμε τα επόμενα τρία ζεύγη συναρτήσεων στα οποία η f είναι συνεχής στο 0 και η g δεν είναι συνεχής στο 0.

$$(1) f(x) = x^2 \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(2) f(x) = x \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(3) f(x) = |x| \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Είναι η συνάρτηση $f \cdot g$ ασυνεχής στο 0; Τι συμπέρασμα βγάξετε από τα παραπάνω τρία ζεύγη;

Β. Ας υποθέσουμε τώρα ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι ασυνεχείς στο x_0 .

α) Είναι το άθροισμα $f+g$ ασυνεχής στο x_0 ;

β) Είναι το γινόμενο $f \cdot g$ ασυνεχής στο x_0 ;

ΑΠ: Β. α) Όχι πάντα, β) Όχι πάντα

- 76.** ➡ Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f^2(x) + 4f(x) + 4\sigma\upsilon\nu^2 x \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

- 77.** Αν f συνάρτηση ορισμένη στο $[0, \pi]$ και ισχύει $1 + 2\sqrt{\eta\mu x} \leq f(x) \leq 2 + \eta\mu x$, για κάθε $x \in [0, \pi]$

α) να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\frac{\pi}{2}$.

➡ β) να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{f(x) - 3}$

γ) να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|3 - f(x)| - x f(x) - 3}{f(x) - 3}$

ΑΠ: β) -2, γ) $+\infty$

- 78.** ✓ Αν f συνάρτηση για την οποία ισχύει $x \cdot f(x) - x^4 + \eta\mu(ax) = x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και $f(0) = -a \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

β) Να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΑΠ: β) $-\infty$ και $+\infty$ αντίστοιχα

- 79.** ✓ Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[a, \beta]$ και ένας μη μηδενικός αριθμός κ ,

τέτοιος ώστε $\kappa + \frac{1}{\kappa} = f(a)$ και $\kappa^2 + \frac{1}{\kappa^2} = f^2(\beta)$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση $x^3 \cdot f(a) + f(\beta) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 1)$.

β) $|f(\beta)| < |f(a)|$

- 80.** Έστω συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Δείξτε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y = 3x - 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$.

γ) Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - x}{x + 1}$

ΑΠ: γ) 0

- 81.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1$, $x > 0$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

γ) Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετηθεί η f^{-1} ως προς τη μονοτονία.

δ) Δείξτε ότι η εξίσωση $x \cdot \ln x = ax + 1$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$ για οποιοδήποτε $a \in \mathbb{R}$.

➡ ε) Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot f^{-1}(x))$.

ΑΠ: α) f γν. φθίνουσα, β) $\mathbb{R}$, γ) f^{-1} γν. φθίνουσα, ε) $-\infty$

- 82.** ➔ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, $x \in [e, e^2]$. Ναδειχτεί ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 \in [e, e^2]$, τέτοιος ώστε $f(x_0) = \frac{3}{2}$.
- 83.** ✓ ➔ Έστω f συνεχής στο $[a, \beta]$ με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Αποδείξτε ότι:
 α) Για κάθε $x_1, x_2 \in [a, \beta]$, υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)}$.
 β) Δείξτε ότι $\frac{a+\beta}{2} > \sqrt{a\beta}$, για κάθε $a, \beta \geq 0$ με $a \neq \beta$.
 γ) Υπάρχει $x_3 \in [a, \beta]$, τέτοιο ώστε $f(x_3) > \sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)}$ για κάθε $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ με $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- 84.** Αν f συνάρτηση ορισμένη στο $[0, 1]$ και συνεχής με $f(0)=f(1)$ και g συνάρτηση με $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{v})$, $v \in \mathbb{N}^*$, τότε:
 α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .
 β) Να δείξετε ότι $g(0) + g(\frac{1}{v}) + g(\frac{2}{v}) + \dots + g(\frac{v-1}{v}) = 0$, για κάθε $v > 1$.
 ➔ γ) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = f(x + \frac{1}{v})$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 1)$, για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$.
- 85.** Δίνεται η $f(x) = e^x - e^{-x} + x + 1$
 α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μόνο μία ρίζα.
- ΑΠ: β) $(-\infty, +\infty)$**
- 86.** ✓ ➔ Αν f συνάρτηση συνεχής στο $[0, 2]$ και $f(0)=2$, $f(1)=4$, $f(2)=-4$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f(x))^2 = 9$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(0, 2)$.
- 87.** ✓ ➔ Έστω f συνεχής συνάρτηση με $f(x^2 - x) + f(x) = 3x^2 + x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 α) Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\rho^2 - \rho) = 3\rho^2 - 2$.
 β) Δείξτε ότι για κάθε $\gamma_0 \in (-6, 6)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \gamma_0$.
- 88.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot f(2) - 2 \cdot f(x)}{x - 2} = f(2) - 2 \cdot f'(2)$
- 89.** Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x - 3} = 2$.
 Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$.
- 90.** ➔ Δίνεται η συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο 2 και η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x^3 + 1), & x < 1 \\ f(2x), & x \geq 1 \end{cases}$ που είναι παραγωγίσιμη στο 1. Δείξτε ότι $f'(2) = 0$.

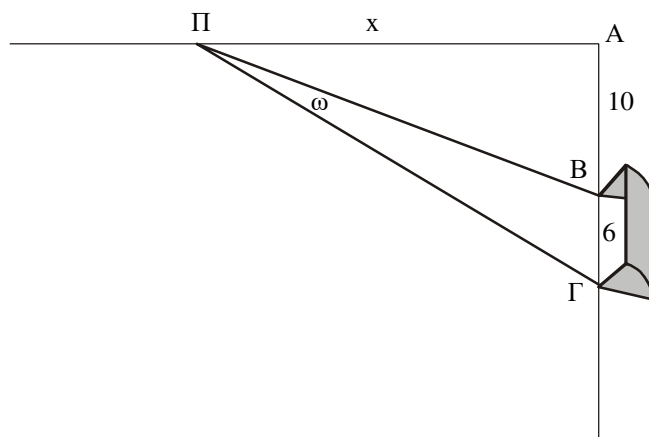
91. Αν f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(1)=2$ και $f'(1)=0$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$

ΑΠ: 1

92. Ένας ποταμός έχει πλάτος 120 m. Στη μια όχθη του βρίσκεται ένας σταθμός Σ παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Έστω A το πλησιέστερο προς τον σταθμό σημείο της άλλης όχθης. Ένα εργοστάσιο E βρίσκεται στην ίδια όχθη με το A και σε απόσταση 400 m από αυτό. Η $\Delta E \eta$ θέλει να δώσει ενέργεια στο εργοστάσιο μέσω ενός καλωδίου. Το υποβρύχιο καλώδιο κοστίζει 39 € το μέτρο και το καλώδιο ξηράς 15 € το μέτρο. Αν B τυχαίο σημείο μεταξύ των A και E όπου το καλώδιο θα εισέλθει στο νερό του ποταμού, να βρείτε:
- α) Τη συνάρτηση $K(x)$ που εκφράζει το κόστος τοποθέτησης του καλωδίου όπου x το μήκος AB .
- β) Πώς πρέπει να τοποθετήσει το καλώδιο η $\Delta E \eta$, ώστε να έχει το ελάχιστο δυνατό κόστος.
- γ) Πόσο κοστίζει στην περίπτωση αυτή το καλώδιο που τοποθετείται υποβρύχια και πόσο ολόκληρη η εγκατάσταση.

ΑΠ: α) $K(x) = 39 \cdot \sqrt{120^2 + x^2} + 15 \cdot (400 - x)$, $x > 0$, β) Να εισέλθει στον ποταμό 350 m μακριά από το εργοστάσιο, γ) 5.070 € και 10.320 € αντίστοιχα

93. Ένας παίκτης Π του ποδοσφαίρου επιτίθεται προς το αντίπαλο τέρμα $B\Gamma$ κινούμενος πάνω στην ευθεία PA . Αν $AB=10$ και $B\Gamma=6$:



- α) να υπολογίσετε τις εφαπτόμενες των γωνιών ΔPB και $\Delta P\Gamma$ ως συνάρτηση της απόστασης $PA=x$
- β) να υπολογίσετε την $\epsilon\varphi\omega$ ως συνάρτηση του x
- γ) από ποια απόσταση x θα πρέπει να "σουτάρει" ο παίκτης ώστε να έχει το ευρύτερο δυνατό οπτικό πεδίο προς το τέρμα;

Δίνεται ότι $\epsilon\varphi(a-b) = \frac{\epsilon\varphi a - \epsilon\varphi b}{1 + \epsilon\varphi a \cdot \epsilon\varphi b}$.

ΑΠ: α) $\frac{10}{x}$ και $\frac{16}{x}$, β) $\epsilon\varphi\omega = \frac{6x}{x^2 + 160}$, γ) Για να έχει το ευρύτερο

οπτικό πεδίο θα πρέπει η $\epsilon\varphi\omega$ να γίνει μέγιστη. Ζητάμε το μέγιστο της

παράστασης: $y = \frac{6x}{x^2 + 100}$. Είναι $y_{\max} = \frac{9}{160}$, για $x = \sqrt{160}$ m

94. α) Έστω συνάρτηση $P(x)=2x^3+ax^2+\beta$ με $a,\beta\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(0,-1)$ και παρουσιάζει καμπή στη θέση $1/2$.
- Na προσδιορίσετε τον τύπο της.
 - Na γίνει ο πίνακας μεταβολών της.
 - Na δείξετε ότι έχει μοναδική ρίζα ρ η οποία ανήκει στο διάστημα $(1,2)$.
- β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{1-x}{\kappa+x^3}$ με $x>-1$.
- Na προσδιορίσετε το $\kappa\in\mathbb{R}$ αν η γραφική της παράσταση έχει ασύμπτωτη την ευθεία $x=-1$.
 - Gια $\kappa=1$ na προσδιορίσετε τις υπόλοιπες ασύμπτωτες ευθείες της C_f .
 - Gια $\kappa=1$ na μελετήσετε τη μονοτονία της f .

ΑΠ: α) i) $P(x)=2x^3-3x^2-1$

x	$-\infty$	0	1/2	1	$+\infty$
P(x)					

β) i) $\kappa=1$, ii) $y=0$, iii) f γν. φθίνουσα στα $(-1,\rho]$ και γν. αύξουσα στο $[\rho,+\infty)$

95. Έστω συνάρτηση $f(x)=x+1$. Na βρεθεί η συνάρτηση g με $g(x)=ax^2+bx$ έτσι ώστε να είναι $(gof)'(x)=4x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΑΠ: $a=2, \beta=-1$

96. ✓ ➔ Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ οι οποίες είναι συνεχείς στο 0 και για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ικανοποιούν τη σχέση $f^2(x)+g^2(x)\leq x^2\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$. Na δείξετε ότι:
- $f(0)=g(0)=0$
 - $f'(0)=g'(0)=0$

97. Έστω f πολωνυμική συνάρτηση νιοστού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, για την οποία ισχύουν $f(0)=3$ και $\lim_{x\rightarrow+\infty}\frac{f(x)}{x^2+x+2}=2$. Αν η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο $(2, f(2))$ είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x+3y-2=0$, na βρείτε την f .

ΑΠ: $f(x)=2x^2-5x+3$

98. Έστω $f(x)=\begin{cases} \ln x, & x\geq 1 \\ -\ln x, & 0<x<1 \end{cases}$

- Na εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.
- ➔ β) Η ευθεία $y=a, a>0$, τέμνει τη C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$. Έστω $K(x_0, y_0)$ το σημείο τομής των εφαπτομένων της C_f στα A και B . Na δείξετε ότι:

$$\text{i) } x_1\cdot x_2=1 \qquad \text{ii) } x_0=\frac{2}{x_1+x_2}$$

ΑΠ: α) Όχι

99. Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$. Na βρεθούν οι ευθείες μορφής $y=\lambda x-1$ που εφάπτονται στη C και να δειχτεί ότι τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

ΑΠ: $y=2x-1, y=-2x-1$ και τομή το $(0, -1)$

100. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+1$.

α) Δείξτε ότι οι ευθείες $(3\lambda^2+1)x-y-2\lambda^3+1=0$ εφάπτονται στη C_f , για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Δείξτε ότι ορίζεται η αντίστροφη f^{-1} της f και με δεδομένο ότι είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματός της στο σημείο με τετμημένη $x=-1$.

$$\text{ΑΠ: } \beta) y = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$$

101. ✓ ➔ Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\ln x \leq x-1$ για κάθε $x > 0$.

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους δεν τέμνονται.

γ) Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση την οποία μπορεί να έχει ένα σημείο της C_f από την ευθεία $y = x$ καθώς και το αντίστοιχο σημείο.

δ) Ποια είναι τα σημεία των C_f και C_g που να απέχουν την ελάχιστη απόσταση;

$$\text{ΑΠ: } \gamma) d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}, M(0, 1), \delta) M(0, 1) \text{ και } N(1, 0)$$

102. ✓ Δίνεται συνάρτηση ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-3, 3]$, για την οποία ισχύει $2f(0)=f(3)+f(-3)$. Να δείξετε ότι υπάρχει θέση πιθανού σημείου καμπής της C_f στο $(-3, 3)$.

103. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) , με $f(a)=\beta$ και $f(\beta)=a$. Δείξτε ότι:

α) Υπάρχει $\gamma \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(\gamma)=\gamma$.

β) Υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\kappa) \cdot f'(\lambda)=1$.

104. ✓ ➔ **A.** Δείξτε ότι:

α) Αν $g(x) \leq h(x)$ σε γειτονιά του $\xi \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} h(x) = +\infty$

β) Αν $g(x) \leq h(x)$ σε γειτονιά του $\xi \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} h(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = -\infty$

➔ **B.** Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f'(x) > 2018$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon: y=2018x+1$. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει την ε σε ένα ακριβώς σημείο.

105. ✓ ➔ Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (a, β) για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \beta$ και $\lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = a$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της

γραφικής παράστασης της f όπου η εφαπτομένη ευθεία είναι κάθετη στη διχοτόμο της 1η ς και 3η ς γωνίας των αξόνων.

106. ✓ ➔ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4^{-1} \cdot x^4$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη της C_f σε οποιοδήποτε σημείο της $M(a, f(a))$, δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f .

107. ✓ ➔ Αν f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $f'(x) \cdot g(x) \neq g'(x) \cdot f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι μεταξύ δύο ριζών της f υπάρχει τουλάχιστον ρίζα της g .

108. ✓ ➔ Να λυθεί η εξίσωση $7^x + 4^x = 6^x + 5^x$ με τη βοήθεια του θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού λογισμού.

$$\text{ΑΠ: Ρίζες } 0 \text{ και } 1$$

109. ✓ ➡ Αν f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με $f(a)=f(\beta)=0$ και υπάρχει συνάρτηση g ορισμένη στο $[a, \beta]$ τέτοια ώστε να ισχύει $f'(x)+f'(x) \cdot g(x)-f(x)=0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$, δείξτε ότι $f(x)=0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$.

110. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$$[f(x)]^{1821} + a[f(x)]^3 = -e^{f(x)}, \quad a > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

➡ α) Να δείξετε ότι $f(x)=c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου c αρνητική σταθερά.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{e^x - 1}$.

ΑΠ: $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, η ευθεία $y=-c$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και η $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη

111. ✓ ➡ Να βρείτε συνάρτηση $g(x)$, η οποία είναι ορισμένη στο $(0, \pi)$ και ικανοποιεί τη σχέση $g'(x) \cdot \eta\mu x - g(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu^2 x$, αν είναι γνωστό ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $(\frac{\pi}{2}, g(\frac{\pi}{2}))$ διέρχεται από το σημείο $(-1, -2)$.

ΑΠ: $g(x)=(x-1) \cdot \eta\mu x$

112. ✓ ➡ Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει $f(x)+f'(x)=1$, με $f(x)>1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιοριστεί ο «γενικός» τύπος της f (οικογένεια συναρτήσεων).

β) Δείξτε ότι $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Μπορείτε να δείξετε ότι $f''(x) > 0$, χωρίς να προσδιορίσετε τον τύπο της f ;

ΑΠ: α) $f(x)=1+\frac{c}{e^x}$, $c>0$

113. ✓ ➡ Έστω f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $f(0)=0$ και $f(f(x))+x=2f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δείξτε ότι $f'(0)=1$ και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

114. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\ln(e^x-1)$ και $f(x)=\sqrt{1-e^{g(x)}}$.

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους

➡ β) Δείξτε ότι οι C_f και C_g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

➡ γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f και C_g σε οποιαδήποτε θέση $x_0 \in (0, \ln 2)$ τέμνονται.

α) $D_g=(0, +\infty)$, $D_f=(0, \ln 2]$

115. ✓ ➡ Δίνεται η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(0)=1$,

$f'(0)=0$, $f'(\frac{\pi}{2})=-1$ και $f(x+y)=f(x)f(y)-f(\frac{\pi}{2}-x) \cdot f(\frac{\pi}{2}-y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι :

α) $f(\frac{\pi}{2})=0$

β) $f'(x)=-f(\frac{\pi}{2}-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) $f''(x)+f(x)=0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

116. ➡ Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$$f'(x)+f(x)=1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0)=e+1.$$

α) Να βρείτε το όριο $\lim_{y \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow 2} f(xy))$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ΑΠ: α) 1**117.** ➡ α) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση :

$$(x^2 + x + 1)^{11} - (2x^2 - x + 1)^7 + (x^2 + x + 1)^7 - (2x^2 - x + 1)^{11} = x^2 - 2x.$$

➡ β) Να λυθεί η ανίσωση : $2 \ln \frac{2x^2 + x + 9}{x^2 + 4x + 7} + 5(x^2 - 3x + 2) < 0$.**ΑΠ: β) $x=0$ ή $x=2$, γ) $x \in (1, 2)$** **118.** ✓ α) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αποδείξτε ότι αν η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[a, \beta]$ τότε $f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) < \frac{f(a)+f(\beta)}{2}$,ενώ αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[a, \beta]$ τότε $f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) > \frac{f(a)+f(\beta)}{2}$.**(Ανισότητες Jensen)**β) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι : $e^{-(a+1)} + (a+1)^8 < \frac{1}{2} (e^{-a} + e^{-(a+2)} + (a+2)^8 + a^8)$.**119.** ✓ ➡ Έστω f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η οποία είναι κυρτή και γνησίως αύξουσα. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι η f^{-1} στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.**120.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - a$, $a > 0$.α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .γ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.**ΑΠ: α) f γν αύξ στο $[0, +\infty)$ και γν φθίν στο $(-\infty, 0]$, παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το $-a$, β) $[-a, +\infty)$, γ) 2 ρίζες****121.** Δείξτε ότι ισχύει:➡ i) $\frac{2x}{x^2 + 1} < 3x - 2$, για κάθε $x > 1$.ii) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$, για κάθε $x > 0$.**122.** ➡ Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = \sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$ να δείξετε ότι :α) υπάρχει $\xi \in (a, a+1)$ τέτοιο ώστε $(f \circ f)(a+1) - (f \circ f)(a) = \sin(f(\xi)) \cdot \sin \xi$, όπου $a \in \mathbb{R}$.β) $0 < e^{f(\gamma)} - e^{f(\beta)} < e(\gamma - \beta)$, για κάθε $\beta, \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$ με $\beta < \gamma$.**123.** Α. Αν f συνάρτηση γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι και η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.Β. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = a^x + x$, $a > 1$.α) Να μελετηθεί η $h(x)$ ως προς τη μονοτονία.β) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $g(x) = a^x \cdot a^x + a^x + x$, $x \in \mathbb{R}$.**ΑΠ: Β. α) Γν. αύξουσα, β) Γν. αύξουσα**

- 124.** Έστω συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1)=f'(1)=f''(1)=0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

α) Να βρεθεί η μονοτονία της f .

β) Να δείξετε ότι κάθε μια από τις εξισώσεις $f'(x)=0$ και $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση

ΑΠ: α) f γν. αύξ. στο $[1, +\infty)$ και γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$

- 125.** ➡ Αν f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f''(x) = 2f'(x) \cdot f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0)=1$ και $f'(0)=2$. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

- 126.** ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-a) \cdot e^x + 1$ με $a < 1$. Να αποδείξετε ότι:

➡ α) $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση $(x-a-1) \cdot e^x + x = -e^a + a$ έχει ακριβώς μια λύση, την $x=a$.

- 127.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ και $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

A. Να αποδείξετε ότι $g'(x) = f(x) \geq -\frac{1}{2e^3}$, για κάθε $x > 0$.

➡ B. Να αποδείξετε ότι:

i) Η εξίσωση $f(x)=1$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0, +\infty)$, την $x=1$.

ii) $f(\beta) < \frac{\beta \ln a - a \ln \beta}{(a-\beta)\alpha\beta} < f(a)$, όπου $0 < a < \beta < e\sqrt{e}$.

- 128.** ✓ ➡ Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\operatorname{erf} x}{\operatorname{erf} 5x}$

ΑΠ: 5

- 129.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln x \cdot \eta\mu x, & x > 0 \\ x^2 + a, & x \leq 0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι συνεχής στο 0 αν και μόνο αν $a=0$

β) Για $a=0$

i) η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

ii) η f' είναι συνεχής στο 0

iii) υπάρχει $\theta \in (0, \pi)$, τέτοιο ώστε $\operatorname{erf} \theta = -\frac{\theta \cdot \ln \theta}{1 + \ln \theta}$

- 130.** ➡ Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(e^x - 1)f(x) - x = \eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της f .

$$\text{ΑΠ: } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x + x}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

- 131.** ➡ Αν το διάγραμμα της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y=2x+1$ όταν

$x \rightarrow +\infty$, να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot f(x) + 5x^2 + 1}{x^2 \cdot f(x) - 2x^3 + 3x^2 + 3}$.

ΑΠ: $\frac{7}{4}$

132. ✓ Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (συνάρτηση περιττή)
- Είναι παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο συνεχή
- Η εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής της παράστασης στο σημείο $A(2,3)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

α) Δείξτε ότι για την παράγωγό της ισχύει $f'(-x) = f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f' είναι άρτια.

β) Με αλλαγή μεταβλητής $u = -x$ να αποδείξετε ότι $\int_{-2}^0 f(x) dx = -\int_0^2 f(x) dx$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-2}^2 f(x) dx = 0$.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-2}^2 f''(x) \cdot (x^2 + x + 1) dx$.

ΑΠ: δ) $I = -2$

133. α) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[-a, a]$, $a > 0$.

i) Να αποδείξετε ότι $\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^a f(x) dx, & \text{αν } f \text{ άρτια} \\ 0, & \text{αν } f \text{ περιττή} \end{cases}$

ii) Αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y) + \lambda xy(x+y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ ($a \in \mathbb{R}$).

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-0,2}^{0,2} \sin(xe^{|x|} + \eta \mu x) \cdot \log \frac{1+x}{1-x} dx$.

➡ γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $J = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^5 - 2x^3 - 10x + \sqrt{3}}{\sin^2 x} dx$.

ΑΠ: β) 0, γ) 6

134. ✓ Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $2f(x) + f(2004-x) = -x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{\ln x}$.

➡ γ) Αν $h(x) = x^2 f(x)$, αποδείξτε ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} x \cdot h''(x) dx = h(\alpha) - h(\beta).$$

ΑΠ: α) $f(x) = 668 - x$, β) $x = 1$

- 135.** Έστω η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g για τις οποίες ισχύουν : $(f \circ f \circ f)(x) = x$ και $(f \circ f)(x) = g'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν η C_g διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(2, \frac{9}{2})$, να δείξετε ότι :

α) $\int_0^1 f(g'(x))dx = \frac{1}{2}$.

β) $\int_1^2 (f \circ f \circ \dots \circ f)(t)dt = \frac{3}{2}$ (η f εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα 2006 φορές) .

- 136.** ✓ Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x) + f(x-1002) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

α) $f(x+2004) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) $\int_1^{2005} f(x+2005)dx = \int_2^{2006} f(x)dx$.

- 137.** Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$[f(x)]^3 - 2003[f(x)]^2 - 2003f(x) - 2004 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

➡ α) Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή .

β) Θεωρούμε τα ολοκληρώματα : $I = \int_3^5 \frac{x^4 + f(x) - 2004}{x^2 + x + 1} dx$, $J = \int_8^5 \frac{x^4}{x^2 + x + 1} dx$,

$K = \int_8^3 \frac{x^3 - x - 1}{x^2 + x + f(x) - 2003} dx$. Να υπολογίσετε την παράσταση $I - J - K$.

ΑΠ: β) $\frac{470}{3}$

- 138.** ✓ α) Αν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, \beta]$ και $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, να δείξετε ότι $\int_a^\beta f(x)dx \geq \int_a^\beta g(x)dx$.

➡ β) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$ να δείξετε ότι

$\left| \int_a^\beta f(x)dx \right| \leq \int_a^\beta |f(x)|dx$.

γ) Αποδείξτε ότι: $\left| \int_1^2 (x \sin(e^x + 1) + \eta \mu \frac{1}{x}) dx \right| \leq \frac{5}{2}$.

δ) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση φ με συνεχή παράγωγο στο $[-a, a]$, $a > 0$, τέτοια ώστε : $\varphi(-a) = 3a$, $\varphi(a) = 7a$ και $\varphi'(x) \geq 4$, για κάθε $x \in [-a, a]$.

139. ➡ Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[-5, 7]$, σύνολο τιμών

το $[-2, 9]$ και την ιδιότητα $\int_{-5}^7 f(x)dx = 0$. Να δείξετε ότι :

α) $-f^2(x) + 7f(x) + 18 \geq 0$, για κάθε $x \in [-5, 7]$.

β) $\int_{-5}^7 f^2(x)dx \leq 216$.

140. Δίνεται η τέσσερις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-1$, $f^{(3)}(0)=0$ και $f^{(4)}(x)+f^{(3)}(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

➡ α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{f(x)} dx$.

γ) Υπολογίστε το άθροισμα: $S = \int_3^4 f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx + \int_3^4 f^2(x)dx$.

ΑΠ: α) $\sin x$, β) $-\ln\left(\exp \frac{\pi}{12}\right)$, γ) 1

141. Η απόσταση x ενός μετεωρίτη που πλησιάζει τη γη, από τη στιγμή που έγινε ορατός με το τηλεσκόπιο του αστεροσκοπείου, ελαττώνεται με ρυθμό

$$50e^{\frac{t}{2}} + \frac{10000}{t+1} \text{ km/h.}$$

Τη χρονική στιγμή που έγινε αντιληπτός ο μετεωρίτης

απέχει από τη γη 10^5 km. Να βρείτε πόσο απέχει από τη γη μετά από 3 ώρες.

Δίνονται: $\ln 2 \approx 0,7$, $e \approx 2,7$ και $\sqrt{2,7} \approx 1,64$.

ΑΠ: 85657,2 km

142. Μια εταιρεία έχει διαπιστώσει ότι το οριακό κόστος λειτουργίας της είναι $(0,015x^2 - 2x + 80)$ δολάρια την ημέρα, όπου x είναι ο αριθμός των μονάδων προϊόντος που παράγονται ημερησίως. Αν η εταιρεία έχει πάγια έξοδα 1000 δολάρια την ημέρα, να βρείτε:

α) Το ημερήσιο κόστος παραγωγής x μονάδων προϊόντος

β) Την αύξηση του κόστους, αν αντί 30 μονάδων, παραχθούν 60 μονάδες προϊόντος την ημέρα.

ΑΠ: α) $K(x) = 0,005 \cdot x^3 - x^2 + 80x + 1000$, β) 645 δολάρια

143. Η δεξαμενή ύδρευσης ενός μικρού χωριού έχει στις 6 π.μ. 149 m^3 νερού. Οι κάτοικοι καταναλώνουν νερό με ρυθμό $t \cdot e^{-t} \text{ m}^3/\text{h}$, όπου t είναι ο χρόνος μετρούμενος από τις 6 π.μ. Συγχρόνως όμως υπάρχουν απώλειες από το δίκτυο, λόγω κακής συντήρησης, οι οποίες εκτιμήθηκαν σε $25 \text{ m}^3/\text{h}$. Αν κάποια συγκεκριμένη ημέρα δεν εισέρχεται νερό στη δεξαμενή, λόγω βλάβης, από τις 6 π.μ. έως τις 12 π.μ. να βρείτε:

α) Το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η ποσότητα $Q(t)$ του νερού της δεξαμενής

β) Την ποσότητα $Q(t)$ του νερού της δεξαμενής ύστερα από t ώρες

γ) Τι ώρα ο ρυθμός κατανάλωσης του νερού της δεξαμενής είναι μέγιστος

δ) Τι ώρα θα αδειάσει η δεξαμενή αν οι κάτοικοι συνεχίσουν να καταναλώνουν νερό με τον ίδιο ρυθμό και δεν επισκευάσουν τις βλάβες.

(Δίνεται $e^4 \approx 54$)

ΑΠ: α) $-(t \cdot e^{-t} + 25) \text{ m}^3/\text{h}$, β) $(t+1)e^{-t} - 25t + 95$, γ) 7 π.μ. δ) 10 π.μ.

- 144.** Ένα σώμα κινείται σε άξονα με επιτάχυνση $a(t)=2t+1$, όπου t είναι ο χρόνος σε sec. Η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή $t=0$ κατά την οποία βρίσκεται στην αρχή του άξονα είναι 2cm/s κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση. Να βρεθεί:

- α) Η ταχύτητά του και η θέση του τη χρονική στιγμή $t=3\text{s}$
 β) Το διάστημα που διανύθηκε μέχρι και το τρίτο δευτερόλεπτο.

ΑΠ: α) $u(3)=10\text{cm/s}$, $x(3)=7,5\text{cm}$, β) $s=59/6\text{ cm}$

- 145.** ✓ i) Έστω f, g συνεχείς στο $[a, \beta]$ με $a < \beta$ και $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να δείξετε ότι $\int_a^\beta f(x) dx \geq \int_a^\beta g(x) dx$.

➡ ii) Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\int_{-1}^1 t\sqrt{t^2+3} \cdot f(t) dt = f(x) - \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε τον τύπο της f .
 β) Να δείξετε ότι $f(t) \leq f(x)$ για κάθε $t \in [x, x+1]$, $x > 0$.
 γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt$.

ΑΠ: ii) α) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$, γ) 0

- 146.** ✓ Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και η συνάρτηση

$$g(x) = \int_1^x \left(\int_1^t \left(\int_1^z f(u^5) du \right) dz \right) dt.$$

- α) Να βρείτε τις g' , g'' , $g^{(3)}$.

- β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{(x-1)^3}$ αν είναι γνωστό ότι $f(1)=12$.

➡ γ) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \neq 0$, να δείξετε ότι η g'' είναι γνησίως μονότονη.

ΑΠ: β) 2

- 147.** ✓ ➡ Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f'(1)=1$ και $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+f^2(t)} dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 β) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f .

ΑΠ: β) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{x-1} - e^{1-x})$

- 148.** ✓ Ισχύει ότι αν f συνεχής σε διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά του σημεία με $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η f είναι αύξουσα (όχι γνησίως) στο $[a, \beta]$. Δείξτε ότι:

➡ α) αν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε:

$$\left(\int_a^\beta f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^\beta (f(x))^2 dx \cdot \int_a^\beta (g(x))^2 dx. \quad \textbf{(Ανισότητα Schwarz)}$$

➡ β) αν φ είναι μια συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $[a, \beta]$, τότε:

$$|\varphi(\beta) - \varphi(a)| \leq \sqrt{\left(\int_a^\beta (\varphi'(x))^2 dx \right) \cdot (\beta - a)}.$$

- 149.** Θεωρούμε τη συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x) = \int_1^x (x-vt)f(t)dt, \quad v \in \mathbb{N}^*, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να δείξετε ότι :}$$

α) $f(1)=0$ και $f'(1)=0$.

β) $f''(x) = (2-v)f(x) + (1-v)xf'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

➡ γ) Αν $v=1$ και ορίσουμε ως $g(x)=f(x)+f'(x)$, δείξτε ότι $g(x)=f(x)=0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- 150.** ➡ α) Αποδείξτε ότι : $\int_0^k \sqrt{k^2 - x^2} dx = \frac{\pi k^2}{4}$, $k > 0$.

β) Υπολογίστε το παρακάτω άθροισμα συναρτήσεων του $a > 0$:

$$S = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx + \int_0^{2a} \sqrt{4a^2 - x^2} dx + \int_0^{3a} \sqrt{9a^2 - x^2} dx + \int_0^{4a} \sqrt{16a^2 - x^2} dx.$$

ΑΠ: α) $\frac{\pi k^2}{4}$, β) $\frac{15\pi a^2}{2}$

- 151.** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{6x}$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να ορίσετε την f^{-1} .

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f και $C_{f^{-1}}$.

ΑΠ: α) $[0, +\infty)$, β) $f^{-1}(x) = \frac{1}{6}x^2$, γ) $(0,0)$ και $(6,6)$, δ) 12 τ.μ.

- 152.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa \cdot x^3 + \lambda \cdot x^2$.

α) Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ αν το σημείο $B(1, -2)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης.

β) Να δείξετε ότι τα σημεία των ακροτάτων και το σημείο καμπής είναι συνευθειακά.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα της f και της ευθείας του β) ερωτήματος.

ΑΠ: α) $\kappa=1, \lambda=-3$, γ) $\frac{1}{2}$ τ.μ.

- 153.** α) Δείξτε ότι αν f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $f(x) = c \cdot e^x$.

β) Αν f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 2001$ και $f'(x) - 3x^2 - \sin x = f(x) - x^3 - \eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f .

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από το διάγραμμα της f , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x=1$. (Δίνεται $\sin 1 \cong 1/2$)

ΑΠ: β) i) $f(x) = 2001e^x + x^3 + \eta \mu x$, ii) $2001(e-1) + \frac{3}{4}$ τ.μ.

154. ✓ Δίνονται συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν:

- Είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $[0, +\infty)$
- $f''(x) = g''(x) + 2$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$
- $f(0) = g(0)$ και $f(1) = g(1)$

α) Δείξτε ότι $f(x) = g(x) + x^2 - x$

β) Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $0 \leq \rho_1 < 1 < \rho_2$, τότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

γ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g .

ΑΠ: γ) $\frac{1}{6}$ τ.μ.

155. ➔ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{xa^y + (x^2 - 1)e^y}{a^{y-1} + e^{y+3}}$, όπου a θετικός

πραγματικός αριθμός με $a \neq e$.

α) Να βρεθεί ο a ώστε η συνάρτηση $g(x) = e^3 \ln a \cdot f(x)$ να παρουσιάζει ελάχιστο.

β) Για οποιαδήποτε από τις τιμές του a που βρήκατε στο (α) ερώτημα, αποδείξτε ότι για την παραπάνω συνάρτηση g ισχύει ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g και τον άξονα $x'x$ δεν είναι μεγαλύτερο από $\frac{4}{3}$

τ.μ.

ΑΠ: α) $a \in [1, e)$

156. Έστω η συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε :

$$f'(25) + f'(20) = f'(35) + f'(10).$$

➔ α) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (10, 35)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια ώστε

$$f''(\xi_1) = f''(\xi_2).$$

β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (10, 35)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$.

157. ➔ α) Αν f είναι μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση και η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει το πολύ n διακεκριμένες πραγματικές ρίζες ($n \in \mathbb{N}$), τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ $n+1$ διακεκριμένες πραγματικές ρίζες.

➔ β) Να λυθεί η εξίσωση : $4^x = -x^2 + 15x - 10$.

ΑΠ: 1 και 2

158. ➔ Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 1]$, τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$

$$\text{και } \int_0^1 \ln^2 f(x) dx + \frac{1}{5} = 2 \int_0^1 x^2 \ln f(x) dx.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^{x^2}$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \frac{f(x)}{f(1-x) + f(x)} dx$.

ΑΠ: β) 0,5

159. Α. Να αποδείξετε ότι:

α) $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) $\ln x \leq x-1$ για κάθε $x > 0$.

➡ γ) $e^x - \ln x > 0$ για κάθε $x > 0$.

Β. Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$, $g(x) = 12e^x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$, με $\lambda > 0$.

➡ α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του λ το εμβαδόν $E(\lambda)$.

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.

$$\text{ΑΠ: Β. α) } E(\lambda) = \begin{cases} 12e - 12e^\lambda + \lambda \ln \lambda, & \lambda \in (0, 1) \\ 0, & \lambda = 1 \\ -12e + 12e^\lambda - \lambda \ln \lambda, & \lambda > 1 \end{cases}, \text{ β) } 12e - 12$$

160. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \ln x + b \sin x - \frac{2a}{\pi}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

➡ α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \pi)$.

➡ β) Αν ισχύει $\int_0^a f(x) dx = \eta \mu α$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, a)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \text{συν} \xi$.

161. ✓ ➡ Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις f και g με $f(x) < 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Να δειχτεί ότι υπάρχει μοναδικός $\xi \in [0, 1]$, τέτοιος ώστε

$$\int_0^\xi f(t) dt = \int_1^\xi g(t) dt.$$

162. ➡ α) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $[a, b]$. Αν η f είναι αντιστρέψιμη και έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[a, b]$, να δείξετε ότι :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x) dx = bf(b) - af(a).$$

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^5$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να

υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$.

$$\text{ΑΠ: β) } \frac{11}{6}$$

163. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x + 3^x + 5^x}{e^x + \pi^x + 4^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το όριο της f στο $+\infty$.

β) Να βρείτε το όριο της f στο $-\infty$.

➡ γ) Αν $g(t) = e^{\eta \mu(\text{συν} t)}$, να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{f(x)}^{f(x)+1} (g(t) + 2t) dt$.

$$\text{ΑΠ: α) } +\infty, \text{ β) } 1, \text{ γ) } +\infty$$

164. ✓ ➡ α) Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο A και γνησίως αύξουσα στο A .

Αποδείξτε ότι:

i) Υπάρχει η f^{-1} η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.

ii) Ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$ αν και μόνο αν ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=x$.

➡ β) Αν $f(x)=x+\int_{2004}^x e^{-t^2} dt$, $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=f^{-1}(x)$.

ΑΠ: β) $x=2004$

165. ✓ ➡ Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\int_1^{3x} f(t)dt \geq 3x-1$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$\int_x^{f(x)} f(t)dt = (f(x))^3 - x^3$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

ΑΠ: $x=1$

166. Έστω η μη μηδενική πολυωνυμική συνάρτηση f τέτοια ώστε :

$f(x^2-y^2)=xf(x)-yf(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$.

➡ α) Να βρείτε την f .

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sqrt{1-(f(t))^2} dt$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{-1} \sqrt{-(x^2+4x+3)} dx$.

ΑΠ: α) $f(x)=x$

167. ✓ Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{\sin x}{1+e^x}$.

α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

➡ β) Να υπολογίσετε το $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

ΑΠ: α) 0, β) 1

168. α) Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $\ln x > x - \frac{1}{6}x^3$.

➡ β) Θεωρούμε τετράγωνο πλευράς 2 και παίρνουμε δύο τυχαία διαφορετικά σημεία A, B εντός του τετραγώνου. Την απόσταση των σημείων αυτών τη

συμβολίζουμε με D . Αποδείξτε ότι: $\int_{2\sqrt{2}}^D e^{6\eta\mu t} dt \leq \int_{2\sqrt{2}}^D e^{6t-t^3} dt$.

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

4.	α) Θέσατε όπου x το 1 (το οποίο βρίσκεται από τη σκέψη να βρούμε x τέτοιο ώστε $f(x)=f(3-2x)$) β) Θέτουμε όπου x το $1-u$
5.	α) Θέτουμε στη σχέση $x=y=0$ οπότε $f^2(0)-c \cdot f(0)+1=0$. Η εξίσωση αυτή όμως πρέπει να έχει διπλή πραγματική ρίζα, άρα $\Delta=0$ β) Αφού βρούμε το $f(0)$ από το α) ερώτημα θέτουμε στην αρχική σχέση όπου y το 0
6.	γ) Θέτοντας όπου $3x+1=\omega$ είναι $f(\omega)=f(2)$, για κάθε $\omega \in \mathbb{R}$. Άρα f σταθερή
8.	α) Η σχέση $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$ (1) για $x=y=0$ δίνει $f(0) \leq f(0)+f(0) \Leftrightarrow f(0) \geq 0$ (2). Όμως από τη σχέση $f(x) \leq x$, (3) για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για $x=0$ έχουμε $f(0) \leq 0$ (4). Άρα τελικά από (2) και (4) είναι $f(0)=0$. β) 1ος τρόπος: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) \neq x_0$. τότε από (3) $f(x_0) < x_0$ (5). Τότε η (1) για $x=x_0$ και $y=-x_0$ δίνει: $f(x_0-x_0) \leq f(x_0)+f(-x_0) \Leftrightarrow 0 \leq f(x_0)+f(-x_0) \Leftrightarrow f(x_0) \geq -f(-x_0)$ (6). Άρα από (5) και (6) είναι $x_0 > -f(-x_0) \Leftrightarrow f(-x_0) > -x_0$, άτοπο από την υπόθεση (3). Άρα δεν υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) \neq x_0$, οπότε $f(x)=x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. 2ος τρόπος: Η (1) για $y=-x$ δίνει $f(0) \leq f(x)+f(-x) \Leftrightarrow f(x)+f(-x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -f(-x)$ (7). Από τη σχέση (3) όμως είναι $f(-x) \leq -x \Leftrightarrow -f(-x) \geq x$ (8). Από (7) και (8) προκύπτει ότι $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η οποία σε συνδυασμό με την (3) δίνει ότι $f(x)=x$, $x \in \mathbb{R}$.
9.	α) Θέτουμε $x=y=0$ στην $f(x^2+y^2)=x \cdot f(x)+y \cdot f(y)$ (1),. β) Η (1) για $y=x$ δίνει $f(2x^2)=2xf(x)$ (2). Η (1) για $y=-x$ δίνει $f(2x^2)=xf(x)-xf(-x)$ (3). Από (2) και (3) προκύπτει ότι $xf(x)=-xf(-x) \Leftrightarrow x \cdot (f(x)+f(-x))=0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για να ισχύει η τελευταία αυτή σχέση για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί $f(x)+f(-x)=0 \Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα f περιττή. γ) Η (1) για $y=0$ δίνει $f(x^2)=xf(x)$ και για $x=0$ δίνει $f(y^2)=yf(y)$. Άρα $f(x^2)+f(y^2)=xf(x)+yf(y)$ οπότε από (1) είναι $f(x^2+y^2)=f(x^2)+f(y^2)$ (4), για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $x^2=\omega > 0$ και $y^2=\varphi > 0$, η (4) δίνει $f(\omega+\varphi)=f(\omega)+f(\varphi)$ (5), για κάθε $\omega, \varphi > 0$, δηλαδή $f(x+y)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x, y > 0$ (6). Επίσης από (5) είναι $-f(\omega+\varphi)=-f(\omega)-f(\varphi) \Leftrightarrow f((- \omega)+(- \varphi))=f(- \omega)+f(- \varphi)$ δηλαδή $f(x+y)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x, y < 0$ (7). Από (6) και (7) ισχύει δηλαδή $f(x+y)=f(x)+f(y)$, για κάθε x, y ομόσημους.
11.	Είναι προφανώς $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Για κάθε $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $e^{x_1} < e^{x_2}$ (1). Όμως $f(x_1)=\frac{e^{x_1}}{2004^{f(x_1)}} \Leftrightarrow e^{x_1}=f(x_1) \cdot 2004^{f(x_1)}$ και $f(x_2)=\frac{e^{x_2}}{2004^{f(x_2)}} \Leftrightarrow e^{x_2}=f(x_2) \cdot 2004^{f(x_2)}$ οπότε από (1) είναι $2004^{f(x_1)} \cdot f(x_1) < 2004^{f(x_2)} \cdot f(x_2)$. Αν υποθέσουμε ότι $f(x_1)=f(x_2)$ καταλήγουμε σε $2004^{f(x_1)} \cdot f(x_1) = 2004^{f(x_2)} \cdot f(x_2)$ άτοπο και αν υποθέσουμε ότι $f(x_1) > f(x_2)$, καταλήγουμε σε $2004^{f(x_1)} \cdot f(x_1) > 2004^{f(x_2)} \cdot f(x_2)$, πάλι άτοπο. Άρα ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε f γν. αύξουσα. ΑΛΛΙΩΣ: Ας υποθέσουμε ότι f όχι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) \geq f(x_2) \Leftrightarrow 2004^{f(x_1)} \geq 2004^{f(x_2)}$ (1).

	Επίσης $f(x_1) \geq f(x_2) > 0$ (2) (λόγω δοσμένης σχέσης). Άρα $(1) \cdot (2) \Rightarrow 2004^{f(x_1)} \cdot f(x_1) \geq 2004^{f(x_2)} \cdot f(x_2) \Leftrightarrow e^{x_1} \geq e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$, άτοπο.
12.	$f(f(1))=1$ (1). Όμως $f(f(f(x)))=f^2(x)-f(x)+1$, οπότε για $x=1$ είναι $f(f(f(1)))=f^2(1)-f(1)+1$, οπότε με βάση την (1) δίνει $f(1)=f^2(1)-f(1)+1 \Leftrightarrow \dots$
13.	β) Αφού η f είναι "1-1", για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό $x \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, οπότε η σχέση της υπόθεσης γίνεται ισοδύναμα $f(y)=f^{-1}(y)+y^3$, $y \in \mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x)+x^3=f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. γ) Αν έχει τη συγκεκριμένη λύση τότε $f(0)=1$ (1) Όμως για $x=0$ η σχέση της υπόθεσης γίνεται $f(f(0))=f^3(0)$, οπότε με βάση την (1) έχουμε $f(1)=1$, άτοπο αφού τότε θα ήταν $f(0)=f(1)$ πράγμα που δεν γίνεται αφού η f είναι "1-1".
14.	β) Αφού $f(f(x))=x^3$, είναι $f(f(f(x)))=f(x^3)$ (1). Αν $y=f(x)$ τότε $f(f(y))=y^3$ δηλαδή $f(f(f(x)))=(f(x))^3$ (2). Από (1) και (2) το ζητούμενο. γ) Αν $f(x)=x$ (3) τότε $f(f(x))=f(x)$ οπότε $x^3=f(x)$ και άρα από (3) $x^3=x$ οπότε $x=-1, 0, 1$ (δεν ισχύουν οι ισοδυναμίες στην υπογραμμισμένη θέση). Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι οι $-1, 0$ και 1 επαληθεύουν την αρχική. Έστω ότι $f(-1)>-1$ τότε $f(f(-1))>f(-1) \Leftrightarrow (-1)^3>f(-1) \Leftrightarrow -1>f(-1)$ άτοπο. Όμοια αν $f(-1)<-1$. Άρα $f(-1)=-1$. Όμοια για το 0 και το 1 .
15.	β) Για $x=y$ έχουμε $f(2x)=3f(x)$. Για $y=-x$, έχουμε $f(2x)=2f(x)+f(-x)$ απ' όπου προκύπτει $f(-x)=f(x)$ γ) Αν $x \geq 0$, ισχύει. Αν $x < 0$, $f(x)=f(-x)=f(x)$
16.	γ) Αν $-\beta \leq x_1 < x_2 < -\alpha$, τότε $\alpha \leq -x_2 < -x_1 \leq \beta$ με $f(-x_2) < f(-x_1) \Leftrightarrow -f(x_2) < -f(x_1)$, άρα $f(x_2) > f(x_1)$
18.	Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι $ f(x_1)-f(x_2) < x_1-x_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow - x_1-x_2 < f(x_1)-f(x_2) < x_1-x_2 \Leftrightarrow x_1-x_2 < f(x_1)-f(x_2) < -(x_1-x_2)$. Άρα $x_1-x_2 < f(x_1)-f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)-x_1 > f(x_2)-x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$. Άρα g γνησίως φθίνουσα στο Δ .
19.	A. α) Πρέπει $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x+2}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $g(x) > 0$. Άρα $g(x)=x+2$ με $x > 0$ και $x > -2$, οπότε $\Delta(g)=(0, +\infty)$.
20.	$A \rightarrow 1, B \rightarrow 3, \Gamma \rightarrow 4$
21.	Αν $(fog)^{-1}(x)=y$ τότε $x=f(g(y))$ (1) Όμως $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)=g^{-1}(f^{-1}(x)) \stackrel{(1)}{=} g^{-1}(f^{-1}(f(g(y))))=g^{-1}(g(y))=y=(fog)^{-1}(x)$
23.	Έστω $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $f(f(x_1))=f(f(x_2))$, άρα $f(f(x_1))-f(x_1)=f(f(x_2))-f(x_2)$, δηλαδή $x_1=x_2$. Άρα η f είναι 1-1
24.	α) Αρκεί να δ.ο. η f είναι "1-1". Έτσι για $x_1 \neq x_2$ έχουμε $f(g^{-1}(f(x_1))) \neq f(g^{-1}(f(x_2))) \Leftrightarrow g^{-1}(f(x_1)) \neq g^{-1}(f(x_2)) \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ β) $(fog^{-1} \circ f)(x)=x \Leftrightarrow (fog^{-1} \circ f)(f^{-1}(x))=f^{-1}(x) \Leftrightarrow (fog^{-1} \circ f \circ f^{-1})(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow$ $(fog^{-1})(x)=f^{-1}(x)$ (1) $(fog^{-1} \circ f)(x)=x \Leftrightarrow f^{-1}((fog^{-1} \circ f)(x))=f^{-1}(x) \Leftrightarrow (f^{-1} \circ fog^{-1} \circ f)(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow$ $(g^{-1} \circ f)(x)=f^{-1}(x)$ (2) Από (1) και (2) έχουμε $fog^{-1}=g^{-1} \circ f \Leftrightarrow gofog^{-1}=f \Leftrightarrow gof=fog$ γ) $gof=fog \Leftrightarrow f=g^{-1} \circ fog \Leftrightarrow fof=fog^{-1} \circ fof \Leftrightarrow fof=g$ αφού η $fog^{-1} \circ f$ είναι η ταυτοτική.
29.	$\left \frac{2f+3g}{f^2+g^2} \right \leq \frac{2 f +3 g }{f^2+g^2} = \frac{2 f }{f^2+g^2} + \frac{3 g }{f^2+g^2} \leq \frac{2f}{f^2} + \frac{3g}{g^2} = \frac{2}{f} + \frac{3}{g} \rightarrow 0$, εκλέγοντας $f(x), g(x) > 0$

30.	Θέτουμε όπου x το $x-1$ και μετά όπου x το $2-x$ και βρίσκουμε το $f(x)$
31.	α) "Σπάμε" το $2x$ σε x και x , β) "Σπάμε" το $-3x+2$ σε $-x+1$ και $-2x+1$
32.	Από τη σχέση $5f(x)+g(x) \leq 0 \leq g(x)$ έχουμε ότι $g(x) \geq 0$ και $5f(x)+g(x) \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq -5f(x) \Leftrightarrow 2g(x) \leq g(x)-5f(x) \Leftrightarrow g(x) \leq \frac{g(x)-5f(x)}{2}$. Άρα $0 \leq g(x) \leq \frac{g(x)-5f(x)}{2}$, οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ και μετά εύκολα για την f .
33.	$ g(x) = \sqrt{g^2(x)} \leq \sqrt{3^x \cdot f^2(x) + g^2(x)}$ και κριτήριο παρεμβολής αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x \cdot f^2(x) + g^2(x)) = 0$. Επίσης $f^2(x) = \frac{(3^x \cdot f^2(x) + g^2(x)) - g^2(x)}{3^x}$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3^x \cdot f^2(x) + g^2(x)) - g^2(x)}{3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(3^x \cdot f^2(x) + g^2(x)) - g^2(x) \right] \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^x} = (0-0) \cdot 0 = 0$. Άρα (με απόδειξη) είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ή αλλιώς για $x > 0$ είναι $ f(x) = \sqrt{f^2(x)} \leq \sqrt{3^x \cdot f^2(x)} \leq \sqrt{3^x \cdot f^2(x) + g^2(x)}$ και κριτήριο παρεμβολής
34.	Είναι $ f(x) = \sqrt{f^2(x)} \leq \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} = \sqrt{(f(x) + g(x))^2 - 2f(x) \cdot g(x)} \rightarrow 0$
35.	α) Για $x \neq 2$ διαιρούμε τη σχέση με $(x-2)^3$ γ) ii) Αφού $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$ τότε $\lim_{x \rightarrow 2} (g^2(x) - 7g(x) + 10) = -2 < 0$, άρα $g^2(x) - 7g(x) + 10 < 0$ σε μια γειτονιά του 2, οπότε $ g^2(x) - 7g(x) + 10 = -(g^2(x) - 7g(x) + 10)$ σε μια γειτονιά του 2. Όμοια βρίσκουμε ότι $ g(x) + 6 = g(x) + 6$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το ζητούμενο όριο.
36.	γ) Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με $x^2 \neq 0$
38.	β) Αν $\frac{f(x) + \eta \mu \frac{\pi(x-1)}{2} - 1}{\sqrt{x} - 1} = g(x)$ είναι $f(x) - 1 = (\sqrt{x} - 1) \cdot g(x) - \eta \mu \frac{\pi(x-1)}{2}$ άρα $\frac{f(x) - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \cdot g(x) - \frac{\eta \mu \frac{\pi(x-1)}{2}}{x - 1} = \frac{g(x)}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\eta \mu \frac{\pi(x-1)}{2}}{\frac{\pi(x-1)}{2}}$ άρα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = -\frac{\pi}{4}$
39.	α) Θέτουμε $\frac{f(x) - 2 - \eta \mu x}{x^2 + x} = g(x)$ κ.τ.λ. β) Θέτοντας $\frac{f(x) - 2}{x} = h(x)$ βρίσκουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} (5 - 3f(x)) = -1 < 0$, επομένως είναι $5 - 3f(x) < 0$ σε γειτονιά του 0. Άρα το ζητούμενο όριο γίνεται $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5 + 3f(x) - 1}{x^2 - x} = \dots$
43.	α) Κρατάμε την πρώτη ανίσωση και στη δεύτερη θέτουμε όπου x το $x+1$. Συνδυάζοντάς με την πρώτη έχουμε $f(x) = x^2 + x$

47.	Είναι $f^2(\pi)+g^2(\pi)=\eta\mu\pi\Leftrightarrow f^2(\pi)+g^2(\pi)=0\Leftrightarrow f(\pi)=g(\pi)=0$ και $ f(x) =\sqrt{f^2(x)}\leq\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}=\sqrt{\eta\mu^2x}= \eta\mu x \Leftrightarrow - \eta\mu x \leq f(x)\leq\eta\mu x$. Από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x\rightarrow\pi} f(x)=0$. Άρα f συνεχής στο π . Όμοια για την g .
49.	α) Θέτουμε στην i) όπου $x=y=0$ και βρίσκουμε $g(0)=-\beta$. Στη συνέχεια στην ίδια σχέση θέτουμε $y=0$ και βρίσκουμε ότι $\beta=0$, άρα $g(0)=0$. β) Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{h\rightarrow 0} g(x_0+h)=g(x_0)$. Χρησιμοποιώντας γι' αυτό την i) κάπου θα προκύψει η ανάγκη γνώσης του $\lim_{h\rightarrow 0} g(h)$. Γι' αυτό έχουμε: Αφού $\beta=0$, από ii) είναι $\lim_{x\rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}=\gamma$, οπότε θέτοντας $\varphi(x)=\frac{g(x)}{x}$ βρίσκουμε το όριο της g .
50.	α) Θέτουμε στην i) $x=y=1$, β) Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{h\rightarrow 1} g(x_0h)=g(x_0)$. Έτσι βρίσκουμε από την ii) το παραπάνω όριο γνωρίζοντας ότι $\lim_{h\rightarrow 1} g(h)=g(1)$ και ότι $g(1)=-\beta$ γ) Αρκεί να βρούμε το $\lim_{h\rightarrow 1} \frac{g(x_0h)-g(x_0)}{x_0h-x_0}$ με τη βοήθεια της i). ΠΡΟΣΟΧΗ: Κάπου θα χρειαστεί η τιμή του β που είναι 0 και αποδεικνύεται ως εξής: Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\rightarrow 1} \frac{g(x)}{x-1}=\gamma$. Θέτοντας $f(x)=\frac{g(x)}{x-1}$ έχουμε $\lim_{x\rightarrow 1} g(x)=\lim_{x\rightarrow 1} f(x)\cdot\lim_{x\rightarrow 1} (x-1)=\gamma\cdot 0=0$. Όμως γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\rightarrow 1} g(x)=g(1)$, άρα $g(1)=0$. Όμως από α) ερώτημα $g(1)=-\beta$. Άρα $\beta=0$.
54.	Για την f : Ορίζουμε $h(x)=f(x)-x$ και εφαρμόζουμε Θ. Bolzano Για τη g : Αν για το ξ της f είναι $g(\xi)>\xi$ τότε $f(g(\xi))<f(\xi)=\xi<g(\xi)=g(f(\xi))$ άτοπο. Όμοια αν $g(\xi)<\xi$.
55.	Έστω ότι η f έχει ρίζα $\rho\in(1,+\infty)$. Τότε $ f(\rho)-1 -\frac{2}{\rho+1}=\rho-1\Leftrightarrow 1-\frac{2}{\rho+1}=\rho-1\Leftrightarrow \rho+1-2=\rho^2-1\Leftrightarrow \rho^2-\rho=0\Leftrightarrow \rho=0$ ή $\rho=1$, τιμές που δεν ανήκουν στο $(1,+\infty)$. Άρα η f δεν έχει ρίζα στο $(1,+\infty)$ και επειδή είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο.
56.	Από τη δοσμένη σχέση είναι $ f(x) =1+e^x$ (1). Η f δεν μηδενίζεται καθώς $ f(x) =1+e^x\neq 0$ και αφού είναι συνεχής, θα διατηρεί πρόσημο. Επειδή $f(0)=-2<0$ η f θα παίρνει μόνο αρνητικές τιμές, οπότε από (1) είναι $f(x)=-1-e^x$.
58.	β) Αφού δείξουμε με Θ. Bolzano ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in[0,1]$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi^2-\xi$ (1), θα δείξουμε ότι $\xi=1$. Για $\xi=0$ είναι από (1) $f(0)=0$ άτοπο γιατί $f(0)=-1$ από α) ερώτημα. Αν $0<\xi<1$ τότε από (1) έχουμε $f(\xi)=\xi\cdot(\xi-1)<0$ άτοπο γιατί από τη δοσμένη σχέση $1\leq f(x)+1\leq 3+\sqrt{x}$ (2), για κάθε $x>0$, είναι $0\leq f(\xi)\leq 2+\sqrt{\xi}$, δηλαδή $f(\xi)\geq 0$. Άρα η μόνη τιμή του ξ που είναι δεκτή είναι η $\xi=1$.
59.	Θ. Bolzano για την $h(x)=3f(x)+g(x)$ με τη σημείωση ότι ισχύει $f(a)=0\Leftrightarrow a^2+\mu a+\kappa=0\Leftrightarrow \mu a+\kappa=-a^2$ (1) και $g(\beta)=0\Leftrightarrow -\beta^2+\mu\beta+\kappa=0\Leftrightarrow \mu\beta+\kappa=\beta^2$ (2) οπότε $h(a)\cdot h(\beta)\leq 0$ και τελικά <0 , καθώς a και β όχι μηδέν, γιατί αν ήταν κάποιο μηδέν τότε από (1) ή (2) θα ήταν $\kappa=0$, άτοπο
65.	β) Να κάνετε χρήση των τύπων $\rho_1+\rho_2$ και $\rho_1\cdot\rho_2$, δεδομένου ότι η $f(x)$ είναι τριώνυμο.

66.	Αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (αφού $f(2005) = -1821 < 0$). Έτσι $f(a) < 0$ και $f(a) - 2005 < 0$. Παίρνουμε ηλίκο μεγιστοβάθμιων.
67.	β) Για $x = y = \frac{x}{2}$ βγαίνει $f(x) + x \geq 0$. Έστω ότι υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) + x_0 = 0$, τότε η δοσμένη σχέση για $x = x_0$ και $y = -x_0$ δίνει $1 = 0$ άτοπο. δ) Έστω ότι η f δεν είναι θετική για κάθε x , αλλά υπάρχει $x_0 < 0$ ή $x_0 > 0$ όπου $f(x_0) < 0$ (μία που $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$). Τότε στο $[0, x_0]$ και $[x_0, 0]$ Θ. Bolzano. ΚΑΛΥΤΕΡΑ: Αν' ευθείας με τη βοήθεια της διατήρησης προσήμου.
68.	α) $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -2$ από την ανισοτική σχέση. β) Από την $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ για $x=2$ και $y=0$, έχουμε $f(0) = 1$. Επίσης $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) = f(2) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} f(h)$. Όμως $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ οπότε $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 1$, άρα $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0)$ γ) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(x_0) \cdot f(0) = f(x_0)$, για κάθε $x_0 > 1$. δ) Από $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ για $x=y=2$ είναι $f(4) = 4$ και αφού f συνεχής στο 4, τότε ... ζ) ΘΕΤ στο $[2, 4]$ η) Όχι αφού $f(0) = f(x_1) = 1$, ενώ $x_1 \in (2, 4)$, άρα $x_1 \neq 0$ θ) Αφού f συνεχής στο $[2, 4]$ θα παίρνει μια ελάχιστη τιμή m και μια μέγιστη τιμή M στο $[2, 4]$. Άρα $m \leq f(2) \leq M$, $m \leq f(3) \leq M$ και $m \leq f(4) \leq M$, οπότε $m \leq \frac{f(2) + f(3) + f(4)}{3} \leq M$ (1). Η f δεν είναι σταθερή στο $[2, 4]$, αφού $f(4) = 4$ και $f(2) = -2$ και επειδή η εικόνα ενός διαστήματος με συνεχή και μη σταθερή συνάρτηση είναι διάστημα (από πόρισμα) το οποίο εδώ έχει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη M , θα είναι το $[m, M]$. Επομένως το $\frac{f(2) + f(3) + f(4)}{3}$ από (1) είναι τιμή της f και έτσι θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in [2, 4]$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f(x_2) = \frac{f(2) + f(3) + f(4)}{3}$.
73.	α) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x - 1}}{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x - 1}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x - 1}{\sigma\upsilon\nu x}$. Το πρώτο δίνει 1 με αλλαγή μεταβλητής. Για το δεύτερο έχουμε $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x - 1}{\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\eta\mu x - 1) \cdot (\eta\mu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu x \cdot (\eta\mu x + 1)} = \dots = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + 1} = 0$. β) f συνεχής στο 1, άρα $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Θέτουμε $\frac{f(x)}{x-1} = h(x) \Leftrightarrow f(x) = h(x) \cdot (x-1)$ κ.τ.λ. γ) Ορίζουμε $\varphi(x) = g(x) - 2x$ στο $[0, 1]$ και εφαρμόζουμε Θ. Bolzano. $\varphi(0) = g(0) = -f(0) > 0$ γιατί f γν. αύξουσα άρα $f(0) < f(1) = 0$ $\varphi(1) = g(1) - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$ Άρα $\varphi(0) \cdot \varphi(1) < 0$ οπότε ...
74.	Β. Χωρίστε το $2t$ σε $t+t$ και συζυγείς παραστάσεις

75.	A. α) Αν $h=f+g$ συνεχής στο x_0 τότε η $g=h-f$ θα ήταν συνεχής στο x_0, άτοπο β) Όχι πάντα, B. α) Όχι π.χ. $f(x)=\begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ β) Όχι π.χ. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$
76.	Η σχέση γίνεται $(f(x)+2)^2 \leq 4\eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα για $x=0$ η σχέση δίνει $f(0)=-2$ και για το όριο εφαρμόζουμε κριτήριο παρεμβολής.
77.	β) Κριτήριο παρεμβολής, το $f(x)-3$ είναι ≤ 0
81.	ε) Αφού $f^{-1} : (-\infty, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ συνεχής και γνησίως φθίνουσα θα είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) = +\infty$
82.	$f'(x) > 0$, άρα f γν. αύξουσα. Άρα $R(f)=[f(e), f(e^2)]$, όπου ανήκει το $\frac{3}{2}$ και επειδή είναι γν. αύξουσα θα παίρνει την τιμή αυτή μόνο μια φορά.
83.	α) Από Θ. Ελάχ-Μέγ τιμής η f παίρνει στο $[a, \beta]$ ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M. Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ είναι $m \leq f(x_1) \leq M$ και $m \leq f(x_2) \leq M$. Με πολ/σμό κατά μέλη είναι $m^2 \leq f(x_1) \cdot f(x_2) \leq M^2 \Leftrightarrow m \leq \sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)} \leq M$. Αν $m=M$ τότε η f είναι σταθερή στο $[a, \beta]$, οπότε υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ και μάλιστα οποιοδήποτε τέτοιο ώστε $f(x_0) = \sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)}$. Αν $m < M$ αφού f συνεχής, το σύνολο τιμών της θα είναι διάστημα και μάλιστα το $[m, M]$, οπότε υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ ώστε $f(x_0) = \sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)}$. Άρα σε κάθε περίπτωση ... γ) Προσθέτουμε κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες οπότε $m \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leq M$ με $m < M$, γιατί αν ήταν $m=M$ τότε f σταθερή στο $[a, \beta]$, άτοπο αφού $f(x_1) \neq f(x_2)$. Αφού $m < M$ το σύνολο τιμών της f στο $[a, \beta]$ είναι το $[m, M]$, οπότε υπάρχει $x_3 \in [a, \beta]$, ώστε $f(x_3) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > \sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)}$ από β).
84.	Για $v=1$ έχει ρίζα το 0. Για $v>1$ θεωρούμε ότι η g δεν έχει ρίζα. Τότε αφού είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο στο $[0, \frac{v-1}{v}]$, άτοπο λόγω του β) ερωτήματος.
86.	<u>1ος τρόπος:</u> Αρκεί να δείξουμε ότι η f παίρνει σε δύο διαφορετικά x τις τιμές 3 ή -3. Αφού $f(0) \neq f(1)$ και $3 \in (f(0), f(1))$ από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, η f παίρνει την τιμή 3 για κάποιο $x \in (0, 1)$. Όμοια η f παίρνει την τιμή -3 και στο διάστημα $(1, 2)$. Άρα η εξίσωση $f^2(x)=9$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες. <u>2ος τρόπος:</u> $f^2(x)=9 \Leftrightarrow (f(x)-3) \cdot (f(x)+3)=0$. Ορίζουμε $h(x)=f(x)-3$ στο $[0, 1]$ και δείχνουμε με Θ. Bolzano ότι έχει ρίζα στο $(0, 1)$. Ορίζουμε $g(x)=f(x)+3$ στο $[1, 2]$ και δείχνουμε με Θ. Bolzano ότι έχει ρίζα στο $(1, 2)$. Άρα προκύπτει το ζητούμενο.
87.	α) Ορίζουμε $g(x)=f(x^2-x)-3x^2+2$ και βρίσκουμε $g(0)$ και $g(1)$ β) Θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών βρίσκοντας το $f(-1)$ και το $f(2)$ θέτοντας στη δοσμένη σχέση όπου x το 2 και το -1

90.	Είναι $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+2h)-f(2)}{h} = \dots = 2f'(2)$, θέτοντας $2h=u$. Επίσης $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f[(1+h)^3+1]-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h^3+3h^2+3h)-f(2)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h^3+3h^2+3h)-f(2)}{h \cdot (h^2+3h+3)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} (h^2+3h+3) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+u)-f(2)}{u} \cdot 3 = 3f'(2)$ θέτοντας $h^3+3h^2+3h=u$. Όμως πρέπει $2f'(2)=3f'(2) \Leftrightarrow f'(2)=0$
96.	α) <u>1ος τρόπος</u>: $f(x) = \sqrt{f^2(x)} \leq \sqrt{f^2(x)+g^2(x)} \leq x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \leq f(x) \leq x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ και κριτήριο παρεμβολής. Όμοια για την } g.$ <u>2ος τρόπος</u>: $f^2(x)+g^2(x) \leq x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (f^2(x)+g^2(x)) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \right) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) + \lim_{x \rightarrow 0} g^2(x) \leq 0 \Rightarrow f^2(0) + g^2(0) \leq 0 \Rightarrow f(0) = g(0) = 0$ β) Για $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε: $f^2(x) + g^2(x) \leq x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{x^2} + \frac{g^2(x)}{x^2} \leq e^{-\frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 + \left(\frac{g(x)}{x} \right)^2 \leq e^{-\frac{1}{x^2}}.$ Έτσι $\left \frac{f(x)}{x} \right = \sqrt{\left(\frac{f(x)}{x} \right)^2} \leq \sqrt{\left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 + \left(\frac{g(x)}{x} \right)^2} \leq \sqrt{e^{-\frac{1}{x^2}}}.$ Άρα $-\sqrt{e^{-\frac{1}{x^2}}} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \sqrt{e^{-\frac{1}{x^2}}} \Leftrightarrow -\sqrt{e^{-\frac{1}{x^2}}} \leq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq \sqrt{e^{-\frac{1}{x^2}}}$. Όμως $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\sqrt{e^{-\frac{1}{x^2}}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{e^{-\frac{1}{x^2}}} = \dots = 0 \text{ οπότε από κριτήριο παρεμβολής είναι}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0, \text{ δηλαδή } f'(0)=0. \text{ Όμοια για την } g.$
98.	β) Επειδή η f είναι «1-1» στο $(0, 1)$ και στο $[1, +\infty)$, η $y=a$ θα τέμνει τη C_f σε ένα σημείο στο $(0, 1)$ έστω (x_1, a) και σε ένα σημείο στο $[1, +\infty)$ έστω (x_2, a). Άρα $\ln x_1 = a \Leftrightarrow x_1 = e^a, -\ln x_2 = a \Leftrightarrow x_2 = e^{-a}$
101.	β) $\ln x \leq x - 1 < x < x+1 \leq e^x$ για κάθε $x > 0$, γ) Αν $A(x_0, f(x_0))$ τυχαίο σημείο της C_f, τότε η απόστασή του από την $y=x$ είναι $d = \frac{ f(x_0) - y_0 }{\sqrt{2}} = \frac{e^{x_0} - x_0}{\sqrt{2}} \text{ και } d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ αφού } e^{x_0} \geq x_0 + 1.$ Το σημείο είναι το $M(0, 1)$ γιατί το $e^{x_0} - x_0$ κάνει 1 όταν $x_0=0$. ΑΛΛΙΩΣ: Αφού η $y=x$ είναι παράλληλη με την $y=x+1$ και $f(x) \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$, το σημείο $(0, f(0))$ που απέχει 0 από την $y=x+1$ θα απέχει ελάχιστη απόσταση από την $y=x$. Άρα $d=\dots$ δ) Το συμμετρικό σημείο του $M(0, 1)$ ως προς την $y=x$ είναι το $N(1, 0)$ και αφού οι C_f, C_g είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$, για να έχουν τη μικρότερη απόσταση θα πρέπει η C_f να απέχει τη μικρότερη απόσταση από την $y=x$, πράγμα που συμβαίνει για το σημείο M. Άρα τα M και N είναι τα ζητούμενα.

104.	A. α) και β) βλέπε αποδείξεις στο Παράρτημα του 1ου τεύχους του φυλλαδίου B. Ορίζουμε $h(x)=f(x)-(2017x+1)$ στο $\mathbb{R}$. $h'(x)=f'(x)-2017>2018-2017=1$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα οπότε έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$. Επίσης $R_h=(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x))$ Από ΘΜΤ για την h στο $[0, x]$ με $x>0$ υπάρχει $\xi_1 \in (0, x)$ ώστε $h'(\xi_1)=\frac{h(x)-h(0)}{x} \Leftrightarrow h(x)=x \cdot h'(\xi_1)+h(0)>x+h(0)$, αφού $h'(\xi_1)>1$. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+h(0))=+\infty$. Έτσι $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)=+\infty$. Με όμοιο τρόπο και ΘΜΤ στο $[x, 0]$ αποδεικνύουμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)=-\infty$. Άρα $R_h=(-\infty, +\infty) \ni 0$, οπότε η h έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.
105.	Ορίζουμε τη συνάρτηση $h(x)=\begin{cases} f(x)+x, & x \in (a, \beta) \\ a+\beta, & x=a \text{ ή } \beta \end{cases}$. Επειδή η h είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) και $h(a)=h(\beta)$ από Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $h'(x_0)=0$ (1). Όμως στο (a, β) είναι $h'(x)=f'(x)+1$, οπότε $h'(x_0)=f'(x_0)+1$ (2). Από (1) και (2) έχουμε ότι $f'(x_0)=-1$.
106.	<u>1ος τρόπος:</u> Η f είναι κυρτή οπότε έπεται το ζητούμενο <u>2ος τρόπος:</u> Θεωρούμε ότι υπάρχει και άλλο σημείο $N(\beta, f(\beta))$, ορίζουμε σαν συνάρτηση τη διαφορά της f με την εφαπτομένη και εφαρμόζουμε Θ. Rolle σ' αυτήν. <u>3ος τρόπος:</u> Αν έχει και άλλο $N(\beta, f(\beta))$ τότε από ΘΜΤ στο $[a, \beta]$ υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $\xi^3 = \frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$. Όμως από την εφαπτομένη στην οποία ανήκει το N βγαίνει ότι $a^3 = \frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$, οπότε $a=\xi$, άτοπο.
107.	Έστω ρ_1, ρ_2 δύο ρίζες της f με $\rho_1 < \rho_2$. Η δοσμένη σχέση για $x=\rho_1$ και $x=\rho_2$ δίνει $f'(\rho_1) \cdot g(\rho_1) \neq 0$ και $f'(\rho_2) \cdot g(\rho_2) \neq 0$ οπότε $g(\rho_1) \neq 0$ και $g(\rho_2) \neq 0$. Έστω ότι η g δεν έχει ρίζα στο (ρ_1, ρ_2), τότε δεν θα έχει ρίζα ούτε στο $[\rho_1, \rho_2]$, άρα $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\rho_1, \rho_2]$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ στο $[\rho_1, \rho_2]$. Ισχύει για την h το Θ. Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi)}{g^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi) = 0$, άτοπο αφού $f'(x) \cdot g(x) \neq g'(x) \cdot f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
108.	Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $7^x - 6^x = 5^x - 4^x$ με προφανείς ρίζες τις 0 και 1. Θα δείξουμε ότι δεν έχει άλλες. Έστω ότι έχει και άλλη ρίζα $\rho \neq 0, 1$, οπότε θα ισχύει $7^\rho - 6^\rho = 5^\rho - 4^\rho$ (1). Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(\omega) = \omega^\rho$, $\omega > 0$. Εφαρμόζουμε γι αυτήν ΘΜΤ στα $[4, 5]$ και $[6, 7]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (4, 5)$ και $\xi_2 \in (6, 7)$ με $f'(\xi_1) = \frac{f(7)-f(6)}{7-6}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(5)-f(4)}{5-4}$ που ισοδύναμα δίνουν ότι $\rho \cdot \xi_1^{\rho-1} = 5^\rho - 4^\rho$ και $\rho \cdot \xi_2^{\rho-1} = 7^\rho - 6^\rho$. Άρα λόγω της (1) είναι $\rho \cdot \xi_1^{\rho-1} = \rho \cdot \xi_2^{\rho-1} \Leftrightarrow \xi_1^{\rho-1} = \xi_2^{\rho-1} \Leftrightarrow \xi_1 = \xi_2$, άτοπο.

	ΚΑΛΥΤΕΡΑ: Η σχέση γράφεται ισοδύναμα $\frac{7^x - 6^x}{7-6} = \frac{5^x - 4^x}{5-4}$ (1). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=t^x$ με $t>0$ και $f'(t)=x \cdot t^{x-1}$. Η f είναι παρ/μη στα $[4, 5]$ και $[6, 7]$ οπότε από ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1 \in (4, 5)$ και $\xi_2 \in (6, 7)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(5)-f(4)}{5-4} \Leftrightarrow x \cdot \xi_1^{x-1} = \frac{5^x - 4^x}{5-4} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(7)-f(6)}{7-6} \Leftrightarrow x \cdot \xi_2^{x-1} = \frac{7^x - 6^x}{7-6}.$ Άρα η (1) $\Leftrightarrow x \cdot \xi_1^{x-1} = x \cdot \xi_2^{x-1} \Leftrightarrow x \cdot (\xi_1^{x-1} - \xi_2^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow x=0$ ή $\xi_1^{x-1} = \xi_2^{x-1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=0$ ή $(\frac{\xi_1}{\xi_2})^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x=0$ ή $x-1=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$.
109.	Αφού f συνεχής στο $[a, \beta]$ θα παίρνει μια ελάχιστη και μια μέγιστη τιμή στο $[a, \beta]$. α) Αν τις παίρνει στα a και β τότε αφού $f(a)=f(\beta)=0$ θα είναι και $f(x)=0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. β) Αν παίρνει μία από τις δύο στο a ή β και την άλλη σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του $[a, \beta]$, τότε από Fermat $f'(x_0)=0$, οπότε η σχέση $f'(x)+f'(x) \cdot g(x)-f(x)=0$ για $x=x_0$ δίνει $f(x_0)=0$, άρα πάλι οι ακραίες τιμές της είναι 0, οπότε $f(x)=0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. γ) Αν τέλος παίρνει τις ακραίες τιμές σε x_1, x_2 εσωτερικά του $[a, \beta]$, τότε πάλι από Fermat $f'(x_1)=f'(x_2)=0$, οπότε πάλι από τη σχέση $f'(x)+f'(x) \cdot g(x)-f(x)=0$ για $x=x_1$ και $x=x_2$ έχουμε $f(x_1)=0$ και $f(x_2)=0$, άρα πάλι οι ακραίες τιμές της είναι 0, οπότε $f(x)=0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.
110.	α) Για το αρνητικό έχουμε $c^{1821} + a \cdot c^3 = -e^c < 0 \Leftrightarrow c \cdot (c^{1820} + a) < 0$. Άρα $c < 0$.
111.	$(\frac{g(x)}{h(x)})' = 1 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{h(x)} = x + c$ (1). Το $g'(\frac{\pi}{2})$ βγαίνει από τη δοσμένη σχέση για $x = \frac{\pi}{2}$. Το $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1$. βγαίνει από την εξίσωση της εφαπτομένης που πρέπει να ικανοποιείται για $x=-1$ και $y=-2$. Το c βγαίνει από την (1) για $x = \frac{\pi}{2}$.
112.	α) Είναι $e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = e^x \Leftrightarrow (e^x \cdot f(x))' = (e^x)'$. Άρα $e^x \cdot f(x) = e^x + c \Leftrightarrow f(x) = 1 + \frac{c}{e^x}$ και επειδή $f(x) > 1$, είναι $c > 0$. β) Είναι $f'(x) = -\frac{c}{e^x}$ και $f''(x) = \frac{c}{e^x}$. Άρα $f''(x) > 0$. γ) Παραγωγίζοντας τη δοσμένη είναι $f'(x) + f''(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) = -f'(x)$. Όμως $f'(x) = 1 - f(x) < 0$ αφού $f(x) > 1$.
113.	Έχουμε ότι $f'(f(x)) \cdot f'(x) + 1 = 2f'(x)$ (1) Για $x=0$ είναι $f'(f(0)) \cdot f'(0) + 1 = 2f'(0) \Leftrightarrow (f'(0)-1)^2 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$. Αν υπήρχε x_0 τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, τότε από (1) θα ήταν $f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + 1 = 2f'(x_0) \Leftrightarrow 1 = 0$ άτοπο. Άρα η f' δεν μηδενίζεται και αφού είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο, το οποίο είναι θετικό καθώς $f'(0) = 1 > 0$. Άρα $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.
114.	β) Ορίζουμε $h(x) = g(x) - f(x)$ στο $(0, \ln 2]$. Προφανής ρίζα της h το $\ln 2$. Επίσης $h'(x) > 0$ (μετά από υπολογισμό), άρα η ρίζα είναι μοναδική. γ) Αν δεν τέμνονταν τότε θα ήταν παράλληλες, που σημαίνει ότι $g'(x_0) = f'(x_0) \Leftrightarrow h'(x_0) = 0$, άτοπο αφού $h'(x) > 0$.

115.	α) $x=y=0$, β) Παραγωγίζουμε τη δοσμένη ως προς y και θέτουμε $y=0$ γ) Παραγωγίζουμε ξανά και βρίσκουμε $f''(x) = f'(\frac{\pi}{2} - x) (1)$. Στη συνέχεια θέτουμε στη σχέση του β) όπου x το $\frac{\pi}{2} - x$, οπότε $f'(\frac{\pi}{2} - x) = -f(x) (2)$ και από (1), (2) έχουμε το ζητούμενο. δ) Επειδή έχουμε σχέση με την f και την f'', σύμφωνα με τη μεθοδολογία, ορίζουμε $g(x) = (f(x) - \sin x)^2 + [(f(x) - \sin x)']^2$. Θα δείξουμε ότι $g(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παραγωγίζοντας την g είναι $g'(x) = \dots = 2(f'(x) + \eta \mu x) \cdot (f''(x) + f(x)) = 0$ από γ). Έτσι $g(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι $g(0) = c \Leftrightarrow (f(0) - \sin 0)^2 + (f'(0) + \eta \mu 0)^2 = c \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow c = 0$. Άρα $g(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $(f(x) - \sin x)^2 + [(f(x) - \sin x)']^2 = 0$ και επομένως $f(x) - \sin x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
116.	Προσδιορίζουμε πρώτα τον τύπο της f αφού πολ/σουμε και τα δύο μέλη με e^x. Βγαίνει $f(x) = 1 + e^{1-x}$
117.	α) Η εξίσωση γράφεται $(x^2 + x + 1)^{11} + (x^2 + x + 1)^7 + x^2 + x + 1 = (2x^2 - x + 1)^{11} + (2x^2 - x + 1)^7 + 2x^2 - x + 1 \Leftrightarrow \varphi(x^2 + x + 1) = \varphi(2x^2 - x + 1)$ με $\varphi(x) = x^{11} + x^7 + x$. β) $2 \ln \frac{2x^2 + x + 9}{x^2 + 4x + 7} + 5[(2x^2 + x + 9) - (x^2 + 4x + 7)] < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2 \ln(2x^2 + x + 9) + 5(2x^2 + x + 9) < 2 \ln(x^2 + 4x + 7) + 5(x^2 + 4x + 7) \Leftrightarrow \dots$
119.	Είναι $f(f^{-1}(y)) = y$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$, οπότε παραγωγίζοντας είναι $(f(f^{-1}(y)))' = 1 \Leftrightarrow f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1}(y))' = 1 \Leftrightarrow (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} (1)$. Αφού η f' είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, θα είναι ή θετική ή αρνητική για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποκλείεται όμως $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα. Άρα $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε από την (1) είναι $(f^{-1}(y))' > 0$, για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα. Τότε για $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ με $y_1 < y_2$ είναι $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow f'(f^{-1}(y_1)) < f'(f^{-1}(y_2)) \Leftrightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(y_1))} > \frac{1}{f'(f^{-1}(y_2))} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (f^{-1})'(y_1) > (f^{-1})'(y_2)$. Άρα $(f^{-1})'$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η f^{-1} στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$. ΑΛΛΙΩΣ: Έστω $y = f(x)$ και $y_0 = f(x_0)$. Ισχύουν: Αν $y \neq y_0$ τότε $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$ (αφού η f^{-1} είναι «1-1») Η f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη, οπότε $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} x = x_0, \text{ δηλαδή όταν } y \rightarrow y_0, \text{ τότε } x \rightarrow x_0.$ Έτσι έχουμε $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} \in \mathbb{R}$ Άρα η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$ και ισχύει ότι $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. Αφού f κυρτή, η f' θα είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι έστω $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ με $y_1 < y_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \stackrel{f \text{ γν αύξ}}{\Leftrightarrow} x_1 < x_2 \stackrel{f' \text{ γν αύξ}}{\Leftrightarrow} f'(x_1) < f'(x_2) (2)$ Αφού η f' είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, θα είναι ή θετική ή αρνητική για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποκλείεται όμως $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, καθώς η f είναι γνησίως

	αύξουσα. Άρα $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $(2) \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_1)} > \frac{1}{f'(x_2)} \Leftrightarrow (f^{-1})'(y_1) > (f^{-1})'(y_2)$. Άρα $(f^{-1})'$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η f^{-1} στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.
121.	i) <u>1ος τρ.</u> Είναι για $x > 1$, $3x > 3 \Leftrightarrow 3x - 3 > 0 \Leftrightarrow 3x - 2 > 1$ και $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1$. Άρα $\frac{2x}{x^2 + 1} < 3x - 2$, για κάθε $x > 1$. <u>2ος τρ.</u> Ορίζουμε συνάρτηση $f(x) = (3x-2) \cdot (x^2+1) - 2x$ στο $[1, +\infty)$ και δείχνουμε με μονοτονία ακρότατα ότι για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) > f(1) = 0$. <u>3ος τρ.</u> Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και καταλήγουμε σε $3x^3 - 2x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (3x^2 + x + 2) > 0$ κ.τ.λ.
122.	Το α αποδεικνύεται όπως είναι, αλλά για το β) χρειάζεται να προσδιορίσουμε την $f(x)$ που είναι η ημχ, από τις σχέσεις $f'(x) = \sin x$ και $f(0) = 0$.
125.	$f''(x) = 2f'(x) \cdot f(x) \Leftrightarrow (f'(x))' = (f^2(x))' \Leftrightarrow f'(x) = f^2(x) + c$ με $c=1$ από τις δοσμένες σχέσεις. Άρα $f'(x) > 0$.
126.	α) $f'(x) = e^x \cdot (x+1-a)$, ρίζα της το $a-1$, $f'(x) < 0$ για $x < a-1$ και $f'(x) > 0$ για $x > a-1$. Άρα $f_{\min} = f(a-1) = 1 - e^{a-1} > 0$
127.	B. i) $\frac{1 - \ln x}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \ln x + x^2 - 1 = 0$. Ορίζουμε $h(x)$ και δείχνουμε ότι η γν. αύξουσα. ii) $\frac{\beta \ln a - a \ln \beta}{(a-\beta)a\beta} = \frac{g(a) - g(\beta)}{a - \beta} = g'(\xi) = f(\xi)$, άρα αρκεί $f(\beta) < f(\xi) < f(a)$.
128.	Είναι $\frac{\varepsilon \phi x}{\varepsilon \phi 5x} = \frac{\frac{\eta \mu x}{\varepsilon \phi 5x}}{\frac{\eta \mu 5x}{\varepsilon \phi 5x}} = \frac{\sin 5x}{\sin x} \cdot \frac{\eta \mu x}{\eta \mu 5x}$. Το πρώτο κλάσμα έχει όριο που βγαίνει με De L' Hospital.
130.	Για $x \neq 0$, απλό. Το $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots = 2$
131.	Διαιρούμε με x^2.
133.	γ) Σπάμε το J σε τέσσερα, όπου τα τρία πρώτα είναι 0 (περιττές) και το 4ο εύκολο ή παίρνουμε τα τρία πρώτα μαζί (περιττή) και το 4ο εύκολο.
134.	γ) Βγαίνει ότι $\int_a^\beta x h''(x) dx = \beta h'(\beta) - a h'(\alpha) - h(\beta) + h(\alpha)$, οπότε για να είναι $\int_a^\beta x h''(x) dx = h(\alpha) - h(\beta)$, αρκεί να υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε $\beta h'(\beta) - a h'(\alpha) = 0$. Μια τέτοια περίπτωση είναι να βρούμε α, β ώστε να είναι ρίζες της $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{1336}{3}$. Άρα επιλέγουμε $\alpha = 0$ και $\beta = \frac{1336}{3}$.
137.	α) Στη δοσμένη σχέση σπάμε τα -2003 σε $-2004 + 1$ οπότε τελικά η σχέση μας δίνει $(f(x) - 2004) \cdot (f^2(x) + f(x) + 1) = 0$ και επομένως $f(x) = 2004$
138.	β) $- f(x) \leq f(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, οπότε λόγω του (α) : $-\int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta f(x) dx \Rightarrow \left \int_a^\beta f(x) dx \right \leq \int_a^\beta f(x) dx.$

139.	α) Για κάθε $x \in [-5, 7]$ είναι $-2 \leq f(x) \leq 9 \Leftrightarrow (f(x)+2) \cdot (9-f(x)) \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -f^2(x) + 7f(x) + 18 \geq 0.$ β) Από την $-f^2(x) + 7f(x) + 18 \geq 0$ προκύπτει $\int_{-5}^7 (-f^2(x) + 7f(x) + 18) dx \geq 0,$ απ' όπου μετά από διάσπαση και πράξεις παίρνουμε το ζητούμενο.
140.	α) Θέτουμε $f^{(3)}(x) = g(x)$. Τότε $g'(x) + g(x) = \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x \Leftrightarrow$ $e^x(g'(x) + g(x)) = e^x(\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x) \Leftrightarrow (e^x g(x))' = (e^x \eta \mu x)' \Leftrightarrow$ $e^x g(x) = e^x \eta \mu x + c_1$. Επειδή $g(0) = f^{(3)}(0) = 0$, προκύπτει $c_1 = 0$, οπότε $g(x) = \eta \mu x$ ή $f^{(3)}(x) = \eta \mu x$. Από την τελευταία ισότητα χρησιμοποιώντας και τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε διαδοχικά $f''(x) = -\sigma \upsilon \nu x$, $f'(x) = -\eta \mu x$, $f(x) = \sigma \upsilon \nu x$.
145.	ii) α) Είναι $\int_{-1}^1 x \sqrt{x^2 + 3} \cdot f(x) dx = c$ οπότε $f(x) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} = c \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} + c$. Για το c έχουμε ότι $\int_{-1}^1 x \sqrt{x^2 + 3} \cdot f(x) dx = c \Leftrightarrow \int_{-1}^1 x \sqrt{x^2 + 3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} + c \right) dx = c \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow c = 0$ β) f γνησίως φθίνουσα. γ) $f(x+1) \leq f(t) \leq f(x)$ για κάθε $t \in [x, x+1]$, $x > 0$. Άρα $\int_x^{x+1} f(x+1) dt \leq \int_x^{x+1} f(t) dt \leq \int_x^{x+1} f(x) dt \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x+1) \int_x^{x+1} dt \leq \int_x^{x+1} f(t) dt \leq f(x) \int_x^{x+1} dt \Leftrightarrow \dots$ και κριτήριο παρεμβολής.
146.	γ) Επειδή f συνεχής και $\neq 0$ διατηρεί πρόσημο (+ ή -). Άρα $f(x^5) > 0$ ή < 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι $g^{(3)}(x) = f(x^5) > 0$ ή $g^{(3)}(x) = f(x^5) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η g'' είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.
147.	α) Είναι $f'(x) = \sqrt{1+f^2(x)}$ και $f''(x) = (\sqrt{1+f^2(x)})' = \frac{2f(x) \cdot f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{f(x) \cdot f'(x)}{f'(x)} = f(x).$ β) Είναι $f''(x) = f(x) \Leftrightarrow f''(x) + f'(x) = f(x) + f'(x) \Leftrightarrow (f'(x) + f(x))' = f'(x) + f(x).$ Άρα $f'(x) + f(x) = c \cdot e^x$, $(1) \ x \in \mathbb{R}$. Όμως $f(1) = 0$ και $f'(1) = 1$, οπότε η (1) για $x = 1$ δίνει $c = e^{-1}$. Άρα $f'(x) + f(x) = e^{x-1} \Leftrightarrow f'(x) \cdot e^x + f(x) \cdot e^x = e^{x-1} \cdot e^x$ $\Leftrightarrow (f(x) \cdot e^x)' = e^{2x-1} \Leftrightarrow (f(x) \cdot e^x)' = \left(\frac{e^{2x-1}}{2} \right)' \Leftrightarrow f(x) \cdot e^x = \frac{e^{2x-1}}{2} + c \quad (2).$ Για $x = 1$ δίνει $c = -\frac{e}{2}$. Άρα $(2) \Leftrightarrow f(x) \cdot e^x = \frac{e^{2x-1}}{2} - \frac{e}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{(e^{2x-1} - e) \cdot e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot (e^{x-1} - e^{1-x})$
148.	α) Ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi(t) = \left(\int_a^t f(x)g(x)dx \right)^2 - \int_a^t (f(x))^2 dx \cdot \int_a^t (g(x))^2 dx,$ $a \leq t \leq \beta$, τότε $\varphi'(t) = \dots = - \int_a^t (f(x)g(t) - f(t)g(x))^2 dx \leq 0.$ β) Από το α) για $f(x) = 1$ και $g(x) = \varphi'(x)$ παίρνουμε το ζητούμενο.
149.	γ) Για $v = 1$ από το β) παίρνουμε $f''(x) = f(x)$ Άρα $g'(x) = f''(x) + f'(x) = f(x) + f'(x) \Leftrightarrow g'(x) = g(x)$. Άρα $g(x) = c \cdot e^x$ και τελικά $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x[f(x) + f'(x)] = 0 \Leftrightarrow [e^x f(x)]' = 0 \Leftrightarrow e^x f(x) = c_2$ κ.τ.λ.

150.	α) Η $y = \sqrt{k^2 - x^2}$ γράφεται $x^2 + y^2 = k^2$ (εξίσωση κύκλου). Το ολοκλήρωμα παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον παραπάνω κύκλο και βρίσκεται στο 1 ^ο τεταρτημόριο, άρα θα είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του κύκλου δηλαδή $\frac{\pi k^2}{4}$
155.	α) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις $a > e$, $0 < a < e$. Βρίσκουμε $g(x) = e^3 \ln a \cdot f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1) \ln a, & a \in (0, e) \\ e^3 a \ln a \cdot x, & a > e \end{cases}$ Για την περίπτωση $a > e$ η g δεν έχει ακρότατα, οπότε πρέπει $0 < a < e$ και $g(x) = (x^2 - 1) \ln a$. • Αν $a \in (0, 1)$ τότε $\ln a < 0$ και η g έχει μέγιστο οπότε $a \notin (0, 1)$. • Αν $a = 1$ τότε $g(x) = 0$ και η g έχει ελάχιστο το 0. • Αν $a \in (1, e)$ τότε $\ln a > 0$ και η g έχει ελάχιστο. Τελικά λοιπόν $a \in [1, e)$. β) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_{-1}^1 g(x) dx$
156.	α) ΘΜΤ για την f' στα διαστήματα $[10, 20]$ και $[25, 35]$
157.	α) Αν η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον $n+2$ ρίζες τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle για την f σε καθένα από τα $n+1$ διαδοχικά διαστήματα που ορίζονται από τις ρίζες της $f(x) = 0$, παίρνουμε ότι η $f'(x) = 0$ έχει $n+1$ τουλάχιστον ρίζες, που είναι άτοπο. β) Είναι $4^x = -x^2 + 15x - 10 \Leftrightarrow 4^x + x^2 - 15x + 10 = 0$. Έστω $f(x) = 4^x + x^2 - 15x + 10$. Τότε $f'(x) = 4^x \ln 4 + 2x - 15$, $f''(x) = 4^x (\ln 4)^2 + 2 > 0$. Άρα η $f'(x) = 0$ θα έχει το πολύ μία ρίζα, οπότε σύμφωνα με το α) η $f(x) = 0$ θα έχει το πολύ δύο ρίζες. Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$ και $f(2) = 0$. Άρα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.
158.	α) Έχουμε $\int_0^1 \ln^2 f(x) dx + \int_0^1 x^4 dx = 2 \int_0^1 x^2 \ln f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 [\ln f(x) - x^2]^2 dx = 0$ $\Leftrightarrow \ln f(x) - x^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2}$, για κάθε $x \in [0, 1]$. β) $I = \int_0^1 \frac{f(x)}{f(1-x) + f(x)} dx = \int_0^1 \frac{f(x) + f(1-x) - f(1-x)}{f(1-x) + f(x)} dx = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(1-x) + f(x)} dx$ $\int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(1-x) + f(x)} dx \stackrel{1-x=u}{=} \int_1^0 \frac{f(u)}{f(u) + f(1-u)} du = 1 - I$. Άρα $2I = 1 \Leftrightarrow I = 0,5$.
159.	A. γ) Από α) και β) είναι $e^x \geq x+1 > x-1 \geq \ln x$. B. α) Από A. γ) είναι $g(x) - f(x) > 0$ και παίρνουμε τρεις περιπτώσεις αν $\lambda \in (0, 1)$, $\lambda = 1$ και $\lambda > 1$.
160.	α) Θ. Rolle στην παράγουσα β) Θ. Rolle στην $h(x) = \int_0^x f(x) dx - \eta \mu x$ στο $[0, a]$
161.	Έστω $h(x) = \int_0^x f(t) dt - \int_1^x g(t) dt$. Εφαρμόζουμε Θ. Bolzano στο $[0, 1]$. Για τη μοναδικότητα $h'(x) < 0$.

162.	α) Για το δεύτερο ολοκλήρωμα θέτουμε $x=f(t)$, $t \in [a, \beta]$, οπότε $dx=f'(t)dt$. Για $x=f(a)$ παίρνουμε $t=a$, ενώ για $x=f(\beta)$ παίρνουμε $t=\beta$ (η f είναι 1-1) .
163.	γ) Επειδή $-1 \leq \eta\mu(\sin t) \leq 1$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ είναι $\frac{1}{e} \leq g(t) \leq e$, οπότε : $\int_{f(x)}^{f(x)+1} \left(\frac{1}{e} + 2t\right) dt \leq \int_{f(x)}^{f(x)+1} (g(t) + 2t) dt \leq \int_{f(x)}^{f(x)+1} (e + 2t) dt \Leftrightarrow$ $\frac{1}{e} + 2f(x) + 1 \leq \int_{f(x)}^{f(x)+1} (g(t) + 2t) dt \leq e + 2f(x) + 1. \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e} + 2f(x) + 1\right) =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e + 2f(x) + 1) = +\infty, \text{ από το κριτήριο της παρεμβολής παίρνουμε}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{f(x)}^{f(x)+1} (g(t) + 2t) dt = +\infty, \text{ αφού αποδείξουμε την ιδιότητα}$ $\left. \begin{array}{l} \text{Αν } h(x) \leq f(x) \text{ σε γειτονιά του } \xi \\ \text{και } \lim_{x \rightarrow \xi} h(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$
164.	α) i) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο A θα είναι και "1-1" οπότε υπάρχει η αντίστροφη της $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$. Έστω $y_1, y_2 \in f(A)$ τέτοια ώστε $y_1 < y_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ αφού f γν.αύξουσα $\Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, αφού $x = f^{-1}(y)$. Επομένως η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα. ii) Ευθύ και αντίστροφο. <u>Έστω ότι ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$. Τότε θα είναι $f(\rho) = f^{-1}(\rho)$ (1)</u> και θα δείξουμε ότι $f(\rho) = \rho$. Αν $f(\rho) > \rho$ τότε $f^{-1}(f(\rho)) > f^{-1}(\rho) \Leftrightarrow \rho > f^{-1}(\rho) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \rho > f(\rho)$ (άτοπο) . Όμοια αν $f(\rho) < \rho$. Άρα $f(\rho) = \rho$. <u>Έστω ότι ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$. Τότε θα είναι $f(\rho) = \rho$ (2) και θα</u> δείξουμε ότι $f(\rho) = f^{-1}(\rho)$. Από την (2) προκύπτει $\rho = f^{-1}(\rho) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f(\rho) = f^{-1}(\rho)$.

	β) Από α) ii) ισχύει η ισοδυναμία $f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow x+\int_{2004}^x e^{-t^2} dt = x \Leftrightarrow \int_{2004}^x e^{-t^2} dt = 0$ (3). Επειδή $e^{-t^2} > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, αν $x > 2004$ θα ήταν $\int_{2004}^x e^{-t^2} dt > 0$ και αν $x < 2004$ θα ήταν $\int_{2004}^x e^{-t^2} dt = -\int_x^{2004} e^{-t^2} dt < 0$, οπότε η (3) δεν έχει ρίζα στο $(2004, +\infty)$ ούτε στο $(-\infty, 2004)$. Τέλος αν $x=2004$ τότε $\int_{2004}^x e^{-t^2} dt = \int_{2004}^{2004} e^{-t^2} dt = 0$. Άρα η μοναδική ρίζα είναι το 2004.
165.	Αν ορίσουμε $h(x) = \int_1^{3x} f(t)dt - 3x + 1$, τότε $h(\frac{1}{3}) = 0$, οπότε η δοσμένη σχέση δίνει ότι η h έχει ελάχιστο στο $\frac{1}{3}$ και επομένως από Θ. Fermat είναι $h'(\frac{1}{3}) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(1) = 1$. Η εξίσωση $\int_x^{f(x)} f(t)dt = (f(x))^3 - x^3$ όμως επαληθεύεται για $x=1$.
166.	α) Για $y=0$: $f(x^2) = xf(x)$. Αν $\deg f(x) = n$ ο βαθμός του $f(x)$ τότε $\deg f(x^2) = 2n$ και $\deg[xf(x)] = n+1$. Όμως πρέπει $\deg f(x^2) = \deg[xf(x)] \Leftrightarrow n=1$. Άρα $f(x) = ax + \beta$ με $a \neq 0$. Η σχέση $f(x^2) = xf(x)$ γράφεται $ax^2 + \beta = x(ax + \beta) \Leftrightarrow ax^2 + \beta = ax^2 + \beta x \Leftrightarrow \beta = 0$ (ισότητα πολυωνύμων). Άρα $f(x) = ax$, $a \neq 0$. Από την $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ προκύπτει $a=1$. Επομένως $f(x) = x$.
167.	β) Θέτουμε στο I όπου $x=-u$, οπότε τελικά $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \cdot \sin x}{1+e^x} dx$. Προσθέτοντας το I της υπόθεσης με το παραπάνω έχουμε $2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^x \cdot \sin x}{1+e^x} + \frac{\sin x}{1+e^x} \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot (1+e^x)}{1+e^x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2$. Άρα $I=1$.
168.	β) Η μέγιστη απόσταση των A, B θα είναι ίση με τη διαγώνιο του τετραγώνου, δηλαδή ίση με $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Άρα $0 < D \leq 2\sqrt{2}$. Από το (α) έχουμε για κάθε $x > 0$: $6\eta\mu x > 6x - x^3 \Leftrightarrow e^{6\eta\mu x} > e^{6x - x^3} \Leftrightarrow \int_{2\sqrt{2}}^{Dij} e^{6\eta\mu t} dt \leq \int_{2\sqrt{2}}^{Dij} e^{6t - t^3} dt$.