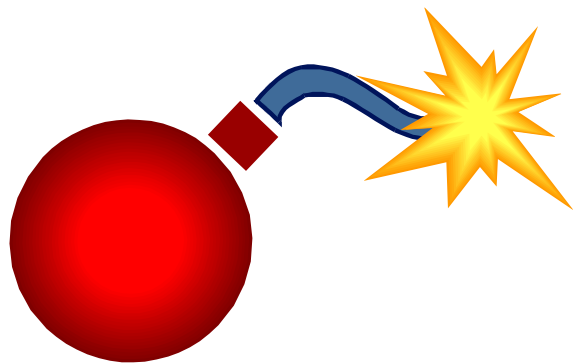


ΒΑ.ΟΙΚΙΑ Σ.ΗΜΕΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΚΟΥΜΑΚΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
Μαθηματικός

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ:

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΤΙΤΛΟΣ	ΣΕΛΙΔΑ
A. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	1
B. ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ	1
Κριτήριο Παρεμβολής.....	2
Θεωρήματα Συνέχειας σε κλειστό διάστημα.....	4
Γ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ	5
Εξίσωση Εφαπτομένης.....	5
ΘΜΤ.....	6
Θ. Rolle.....	6
Θ. Σταθερή.....	6
Θ. Fermat.....	6
Θ. Μονοτονίας.....	6
Θ. Ακροτάτων.....	6
Κυρτότητα.....	7
Σημεία Καμψής.....	7
Πιθανές Θέσεις Σημείων Καμψής.....	7
Ασύμπτωτες	8
Θεωρήματα De l' Hospital	8
ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	9
Πιθανές Θέσεις Ακροτάτων.....	10
Μεθοδολογία προσδιορισμού ολικών ακροτάτων.....	10
Μεθοδολογία Συνόλου Τιμών.....	11
Απόδειξη Ανισώσεων.....	12
Προβλήματα Μεγίστου-Ελαχίστου.....	14
Ρυθμός Μεταβολής.....	14
Ρίζες Εξίσωσης - Σημαντικές Παρατηρήσεις Στο Θ. Bolzano.....	15
ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ	17
Αν f συνεχής.....	17
Αν f παραγωγίσιμη	18
Διάφορα.....	18-20
Δ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ	21
Εμβαδά.....	22
ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ	23
Ε. ΤΙ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΚΑΝΟΥΜΕ ΣΤΑ ΜΕΛΗ ΜΙΑΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ή ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	25
Ζ. ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ ΔΕΝ ΙΣΧΥΟΥΝ ΤΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ	26
Η. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	28
ΟΠΙΣΘΟΦΥΛΛΟ: ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ (ΠΙΝΑΚΑΣ)	

ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ

έκδοση 2020-2

A. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και «1-1».
2. Ισχύει η ισοδυναμία: $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ με $x \in \Delta(f)$.
3. Αν $f: A \rightarrow R$ συνάρτηση «1-1» τότε:
 - $f^{-1}(f(x))=x$, για κάθε $x \in A$ (δηλαδή $f^{-1} \circ f$ ταυτοτική στο A)
 - $f(f^{-1}(x))=x$, για κάθε $x \in f(A)$ (δηλαδή $f \circ f^{-1}$ ταυτοτική στο $f(A)$)
4. Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο $y=x$ της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.
5. Αν μας δίνουν μια συναρτησιακή σχέση π.χ. $f(x \cdot y)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x, y \in R$, μπορεί να προκύψουν χρήσιμες σχέσεις, αν θέσουμε σ' αυτήν κατάλληλες τιμές στα x και y (μπορούμε να θέσουμε ό,τι τιμές θέλουμε, π.χ. ως y το $-x$ ή ως x και y το 0 κ.τ.λ.).

B. ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. Για να έχει νόημα το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ θα πρέπει το D_f να περιέχει γειτονιά του ξ (δηλαδή διάστημα τουλάχιστον μορφής (a, ξ) ή (ξ, β) ή $(a, \xi) \cup (\xi, \beta)$). Δεν είναι απαραίτητο το ξ να ανήκει στο D_f .
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$.
3. $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} [f(x) - \ell] = 0$.
4. Αν η f έχει όριο στο ξ , τότε αυτό είναι μοναδικό.
5. Οι ιδιότητες
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) + \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \xi} g(x)} \end{cases}$$
 ισχύουν μόνο αν τα όρια των f και g υπάρχουν και η αντίστοιχη πράξη τους δεν καταλήγει σε α.μ.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν κάποιο από τα παραπάνω όρια των πρώτων μελών υπάρχει π.χ. το $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) \cdot g(x))$, **δεν** σημαίνει ότι υπάρχουν οπωσδήποτε και τα όρια των f και g .

Επίσης αν υπάρχει το όριο της μιας (π.χ. της f) και το όριο της πράξης τους (π.χ. της $f \cdot g$) **δεν** σημαίνει οπωσδήποτε ότι υπάρχει και το όριο της άλλης (της g).

Αν όμως η υπόθεση αναφέρει ότι το όριο της μιας και το όριο της πράξης τους υπάρχει **στο $\mathbb{R}$** (δηλαδή είναι πεπερασμένο), τότε, ανάλογα την υπόθεση, **ίσως** μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει και το όριο της άλλης και μάλιστα ότι είναι πραγματικός αριθμός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$, τότε είναι κατά σειρά: $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} [(f(x) + g(x)) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) - \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \ell_1 - \ell_2 \in \mathbb{R}$. Άρα το όριο της g υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

6. Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \rho$ με $\rho \neq 0$, τότε υπάρχει γειτονιά Δ_ξ του ξ , όπου η f παίρνει το πρόσημο του ορίου της ρ , για κάθε $x \in \Delta_\xi$ (δηλαδή αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) > 0$, τότε υπάρχει Δ_ξ όπου $f(x) > 0$).

7. Αν $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \rho_1, \quad \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \rho_2 \\ \text{και } f(x) \leq g(x) \text{ σε μια γειτονιά του } \xi \end{array} \right\}$ τότε $\rho_1 \leq \rho_2$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι ιδιότητες 6. και 7. **δεν ισχύουν** με βεβαιότητα αν «παραλλάξουμε» τις ανισώσεις. Για παράδειγμα αν $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \rho_1, \quad \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \rho_2 \\ \text{και } f(x) < g(x) \text{ σε μια γειτονιά του } \xi \end{array} \right\}$ δεν προκύπτει οπωσδήποτε ότι $\rho_1 < \rho_2$ (αλλά για την ακρίβεια το συμπέρασμα παραμένει $\rho_1 \leq \rho_2$).

8. Κριτήριο παρεμβολής

Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ σε μια γειτονιά του ξ $\left\{ \begin{array}{l} \text{και } \lim_{x \rightarrow \xi} h(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$ τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \ell$

• Εφαρμογή για μηδενικές συναρτήσεις

Αν $|f(x)| \leq g(x)$ σε μια γειτονιά του ξ $\left\{ \begin{array}{l} \text{και } \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0 \end{array} \right\}$ τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$

9. Σημαντικές Παρατηρήσεις

• Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)| = a \in \bar{\mathbb{R}}, a \neq 0$, **δεν** σημαίνει απαραίτητα ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = a$ ή $-a$, καθώς το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ μπορεί να μην υπάρχει καν. Αν πάντως υπάρχει τότε θα είναι a ή $-a$.

Όμως **αν $a = 0$** ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$ και στην περίπτωση αυτή το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ υπάρχει σίγουρα είτε ισχύει η μία ισότητα είτε η άλλη.

- Μπορούμε **να δείξουμε** ότι ισχύουν οι συνεπαγωγές:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Av } \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ και} \\ f(x) > 0 \text{ σε γειτονιά του } \xi \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Av } \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ και} \\ f(x) < 0 \text{ σε γειτονιά του } \xi \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty$$

Η απόδειξη π.χ. της πρώτης γίνεται ως εξής:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = +\infty \text{ καθώς } \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ με } \frac{1}{f(x)} > 0 \text{ σε γειτονιά του } \xi.$$

Οι παραπάνω συνεπαγωγές μπορούν να χρησιμοποιηθούν όταν ζητάμε να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$. Τότε αρκεί τελικά να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = 0$ με $f(x) > 0$ ή < 0 αντίστοιχα σε γειτονιά του ξ .

10. Βασικά όρια

- Το όριο πολυωνυμικής συνάρτησης στο $\pm\infty$ είναι το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου της
- Το όριο ρητής συνάρτησης στο $\pm\infty$ είναι το όριο του πηλίκου των μεγιστοβάθμιων όρων της

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0,$$

τα $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta\mu x$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$ δεν υπάρχουν

- Με απόδειξη**

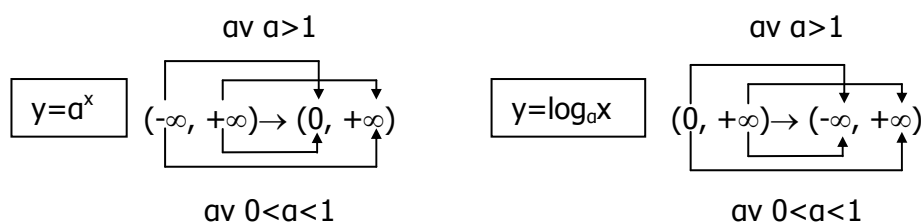
$$\text{Με } a \neq 0 \text{ είναι: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu ax}{ax} = 1 \text{ (θέτοντας όπου } ax = u), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu ax}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi ax}{ax} = 1$$

$$\text{Με } a \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0 \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu ax}{\eta\mu \beta x} = \frac{a}{\beta} \quad \text{και τέλος} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$$

- Ισχύουν οι χρήσιμες ιδιότητες $|\eta\mu x| \leq 1$, $|\sigma\upsilon\nu x| \leq 1$, $|\eta\mu x| \leq |x|$ με το « = » να ισχύει μόνο για $x=0$
- Όρια εκθετικής-λογαριθμικής συνάρτησης

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}, \quad x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0, \quad x_0 \in (0, +\infty)$$

Όσον αφορά στα όρια στα άκρα των πεδίων ορισμού εκθετικής και λογαριθμικής, ισχύει ο μνημονικός κανόνας:



11. Συνέχεια

Όλες οι γνωστές βασικές συναρτήσεις μονού τύπου, οι πράξεις τους, τα απόλυτά τους, οι δυνάμεις τους, οι ρίζες τους και οι συνθέσεις τους είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

Οι συναρτήσεις πολλαπλού τύπου όσον αφορά στη συνέχειά τους, χρειάζονται παραπέρα μελέτη με όρια, στα σημεία αλλαγής του τύπου (πιθανά σημεία ασυνέχειας).

12. Θεωρήματα συνέχειας σε κλειστό διάστημα Έστω f ορισμένη σε κλειστό $[a, \beta]$.

• Θεώρημα Bolzano

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } f \text{ συνεχής στο } [a, \beta] \\ \text{και } f(a) \cdot f(\beta) < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα } x_0 \in (a, \beta) \\ \text{τέτοιο ώστε } f(x_0) = 0 \end{array}$$

• Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (Θ.Ε.Τ.)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } f \text{ συνεχής στο } [a, \beta] \\ \text{και } f(a) \neq f(\beta) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{τότε η } f \text{ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των} \\ f(a) \text{ και } f(\beta) \end{array}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν $f(a) \neq f(\beta)$, κάθε τιμή μορφής $\frac{\kappa \cdot f(a) + \lambda \cdot f(\beta)}{\kappa + \lambda}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}_+$, βρίσκεται

ανάμεσα στα $f(a)$ και $f(\beta)$ (με απόδειξη), οπότε με βάση το προηγούμενο θεώρημα, αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{\kappa \cdot f(a) + \lambda \cdot f(\beta)}{\kappa + \lambda}$.

• Θεώρημα μεγίστου-ελαχίστου

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } f \text{ συνεχής στο } [a, \beta] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{τότε η } f \text{ παίρνει και ελάχιστη και μέγιστη τιμή} \\ \text{στο } [a, \beta] \end{array}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Όλα τα παραπάνω θεωρήματα προϋποθέτουν συνέχεια συνάρτησης σε κλειστό διάστημα.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΠΡΟΣΗΜΟΥ (Εφαρμογές του θεωρήματος Bolzano)

α) Αν f συνεχής σε διάστημα Δ , με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε από

Θ. Bolzano η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .

β) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαδοχικά διαστήματα στα οποία χωρίζουν το D_f οι διαδοχικές της ρίζες.

Γ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

1. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (ή αλλιώς $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$) **αν το όριο αυτό**

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός (πεπερασμένο). Το όριο αυτό είναι το όριο του λόγου μεταβολής της f μεταξύ x και x_0 .

Το $f'(x_0)$ συμβολίζεται και με $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$ ή $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ με $y=f(x)$.

2. Αν f παραγωγίσιμη στο x_0 τότε f συνεχής στο x_0 .

3. Προσοχή χρειάζεται στο ότι για να είναι συνεχής ή παραγωγίσιμη μια συνάρτηση στο x_0 είναι απαραίτητο το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της, ενώ το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ μπορεί να

υπάρχει ακόμα και αν το x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

4. Όλες οι συναρτήσεις που ο τύπος τους δεν αναλύεται σε πολλαπλό είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με εξαίρεση συναρτήσεις που έχουν ή περιέχουν μορφή $[A(x)]^a$ με $a \in (0, 1)$. Τέτοιες συναρτήσεις **ίσως** δεν είναι παραγωγίσιμες στα σημεία που μηδενίζεται η βάση $A(x)$. Αν μας ενδιαφέρει η παραγωγισιμότητα στα σημεία αυτά, τη μελετάμε με τη βοήθεια του ορίου του λόγου μεταβολής.

Σε συναρτήσεις πολλαπλού τύπου, η μελέτη της παραγωγισιμότητας στα σημεία όπου αλλάζει ο τύπος (πιθανά σημεία ασυνέχειας), γίνεται με τη βοήθεια του ορίου του λόγου μεταβολής.

Για να μελετήσουμε την παραγωγισιμότητα της $|f|$, χρειάζεται ανάλυση του τύπου της f σε πολλαπλό (να «βγει» το απόλυτο) και να ερευνήσουμε την παραγωγισιμότητα της f στο σημείο που αλλάζει ο τύπος, με τη βοήθεια του ορίου του λόγου μεταβολής.

5. Εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $A(x_0, f(x_0))$

Υπάρχει μόνο αν f συνεχής στο x_0 και επιπλέον ορίζεται το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Ειδικότερα αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$, δηλαδή f παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε

$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

6. Παραγωγή σύνθετης συνάρτησης

• $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ή αλλιώς με τον κανόνα της αλυσίδας: Αν $y=f(u)$ και $u=g(x)$ τότε $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

7. Θεωρήματα παραγώγων**• Θ.Μ.Τ.**

$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } f \text{ συνεχής στο } [a, \beta] \\ f \text{ παραγωγίσιμη (τουλάχιστον) στο } (a, \beta) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα } \xi \in (a, \beta), \\ \text{τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} \end{array}$

• Θ. Rolle

$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } f \text{ συνεχής στο } [a, \beta] \\ f \text{ παραγωγίσιμη (τουλάχιστον) στο } (a, \beta) \\ \text{και } f(a) = f(\beta) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα } \xi \in (a, \beta), \\ \text{τέτοιο ώστε } f'(\xi) = 0 \end{array}$

• Θ. Σταθερής συνάρτησης

$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } f \text{ συνεχής σε διάστημα } \Delta \text{ και} \\ f'(x) = 0 \text{ για κάθε } x \text{ εσωτερικό σημείο του } \Delta \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{τότε η } f \text{ είναι σταθερή στο } \Delta \\ \text{(δηλαδή } f(x) = c, \text{ για κάθε } x \in \Delta) \end{array}$

• Πόρισμα

$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } f, g \text{ συνεχείς σε διάστημα } \Delta \text{ και} \\ f'(x) = g'(x) \text{ για κάθε } x \text{ εσωτερικό σημείο του } \Delta \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{τότε υπάρχει σταθερά } c \text{ τέτοια} \\ \text{ώστε } f(x) = g(x) + c \text{ για κάθε} \\ x \in \Delta \end{array}$

• Θ. Fermat

Έστω f ορισμένη σε διάστημα Δ .

$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } x_0 \text{ εσωτερικό σημείο του } \Delta \text{ στο οποίο παρουσιάζει} \\ \text{τοπικό ακρότατο και} \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 \end{array} \right\} \text{ τότε } f'(x_0) = 0$

• Θ. Μονοτονίας

$\left. \begin{array}{l} \text{Έστω } f \text{ συνεχής σε διάστημα } \Delta \text{ και} \\ \text{παραγωγίσιμη στο εσωτερικό (τουλάχιστον) του } \Delta. \\ \text{Αν } f'(x) > 0 \text{ στο εσωτερικό (τουλάχιστον) του } \Delta \end{array} \right\} \text{ τότε } f \nearrow \text{ στο } \Delta$

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

• 1ο Θ. Ακροτάτων

$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } f \text{ παραγωγίσιμη στο } (a, x_0) \cup (x_0, \beta), \\ f \text{ συνεχής στο } x_0 \\ f'(x) > 0 \text{ στο } (a, x_0) \text{ και } f'(x) < 0 \text{ στο } (x_0, \beta) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{τότε η } f \text{ παρουσιάζει τοπικό} \\ \text{μέγιστο στο } x_0 \end{array}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν η τελευταία συνθήκη ήταν $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) τότε η f θα παρουσίαζε τοπικό ελάχιστο στο x_0 .

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Κατά τη μελέτη της μονοτονίας και των ακροτάτων, δεν μας ενδιαφέρει η παραγωγισιμότητα της συνάρτησης σε συγκεκριμένα μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού της, αλλά σε διαστήματα, με την προϋπόθεση όμως, ότι στα συγκεκριμένα αυτά σημεία να είναι συνεχής.

• Κυρτότητα συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f συνεχής σε διάστημα Δ και

f παραγωγίσιμη στο **εσωτερικό** (τουλάχιστον) του Δ .

Η f λέγεται **κυρτή** στο Δ (ή αλλιώς στρέφει τα κοίλα προς τα άνω), αν και μόνο αν f' $\nearrow$ στο **εσωτερικό** (τουλάχιστον) του Δ

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η τελευταία πρόταση του παραπάνω ορισμού εκφράζει ισοδυναμία που σημαίνει ότι, αν μας πουν ότι η f είναι κυρτή στο Δ , τότε συμπεραίνουμε η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και μάλιστα ότι f' $\nearrow$ στο εσωτερικό του Δ .

ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Έστω f συνεχής σε διάστημα Δ και

δύο φορές παραγωγίσιμη στο **εσωτερικό** του Δ .
 Αν $f''(x) > 0$ για κάθε x **εσωτερικό** του Δ } τότε η f είναι **κυρτή** στο Δ (ή αλλιώς στρέφει τα κοίλα προς τα άνω)

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν αλλάξουμε τη μονοτονία της f' στο α) θεώρημα ή τα πρόσημα της f'' στο β), τότε η f θα είναι κοίλη (ή αλλιώς θα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω).

• Σημεία καμψής συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν f παραγωγίσιμη (τουλάχιστον) σε διάστημα $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ } τότε η C_f έχει σημείο
 η C_f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ και } καμψής το $(x_0, f(x_0))$ ή
 η f είναι κυρτή στο (a, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντίθετα } η f παρουσιάζει καμψή
 στο x_0

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η f παρουσιάζει καμψή στο x_0 και }
 η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 } τότε $f''(x_0) = 0$

**Πιθανές θέσεις
σημείων καμψής**

→ Τα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f'' μηδενίζεται
 → Τα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f'' δεν υπάρχει

ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΜΠΗΣ

Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$. }
 Αν η C_f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ και } τότε η f παρουσιάζει
 $f''(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f''(x) < 0$ στο (x_0, β) ή αντίθετα } καμψή στο x_0

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Κατά τη μελέτη της κυρτότητας, δεν μας ενδιαφέρει αν ορίζεται η f' και η f'' σε συγκεκριμένα μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού της, αρκεί η f να είναι συνεχής σε αυτά.

Κατά τη μελέτη των σημείων καμψής, δεν μας ενδιαφέρει αν ορίζεται η f'' σε συγκεκριμένα μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού της, αρκεί η C_f να δέχεται εκεί εφαπτομένη.

8. Ασύμπτωτες γραφικής παράστασης

$y=\lambda x+\beta$	ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$. Όμοια για το $-\infty$. ΘΕΩΡΗΜΑ: Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$. Όμοια για το $-\infty$.
Οριζόντια	Η ευθεία $y=\beta$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$. Όμοια για το $-\infty$. Η περίπτωση αυτή είναι προφανώς μερική περίπτωση της προηγούμενης ($y=\lambda x+\beta$) αν $\lambda=0$.

Οι ασύμπτωτες των προηγούμενων μορφών αναζητώνται στα $-\infty$ και $+\infty$ εφόσον η συνάρτηση ορίζεται σε κατάλληλες γειτονιές.

Κατακόρυφη	Η ευθεία $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f αν και μόνο αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.
------------	--

Κατακόρυφες ασύμπτωτες αναζητούμε στα σημεία ασυνέχειας και στα πεπερασμένα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού (εφόσον υπάρχουν).

9. Κανόνες De l'Hospital

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (α.μ. $\frac{0}{0}$)

Αν $\xi \in \bar{\mathbb{R}}$ και Δ_ξ γειτονιά του ξ και f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο Δ_ξ $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0$ και - υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ πεπερασμένο ή άπειρο	TOTE $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
---	--

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (α.μ. $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$)

Αν $\xi \in \bar{R}$ και Δ_ξ γειτονιά του ξ και f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο Δ_ξ $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και - υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ πεπερασμένο ή άπειρο	TOTE $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
--	--

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Για τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα των συναρτήσεων, έχουμε συνοπτικά:

	Συναρτήσεις μονού τύπου	Απόλυτα συναρτήσεις μονού τύπου	Συναρτήσεις πολλαπλού τύπου
ΣΥΝΕΧΕΙΑ	Είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.	Είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους ως απόλυτα συνεχών.	Είναι συνεχείς στα υποδιαστήματα που έχουν ένα τύπο, εκτός από τα πιθανά σημεία ασυνέχειας, όπου χρειάζεται μελέτη με τη βοήθεια του ορίου.
ΠΑΡΑΓ/ΤΗΤΑ	Είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με εξαίρεση συναρτήσεις που έχουν ή περιέχουν μορφή $[g(x)]^a$, με $a \in (0, 1)$, οι οποίες ίσως δεν είναι παραγωγίσιμες στις ρίζες του $g(x)$, όπου και χρειάζεται έλεγχος με το όριο του λόγου μεταβολής.	Τις αναλύουμε σε πολλαπλό τύπο, «βγάζοντας» τα απόλυτα και εργαζόμαστε όπως στις συναρτήσεις πολλαπλού τύπου.	Είναι παραγωγίσιμες στα υποδιαστήματα που έχουν ένα τύπο, (εκτός αν ο τύπος έχει ή περιέχει τη μορφή $[g(x)]^a$, με $a \in (0, 1)$) με εξαίρεση τα πιθανά σημεία ασυνέχειας, όπου χρειάζεται μελέτη με τη βοήθεια του ορίου του λόγου μεταβολής.

2. Η σχέση του συμπεράσματος του Θ.Μ.Τ. μπορεί φυσικά να γραφεί και με τη μορφή $f(\beta) - f(a) = f'(\xi) \cdot (\beta - a)$.

3. Μία σχέση μορφής $f'(a) = 0$ (που συναντάμε στα Θ. Rolle και Θ. Fermat) σημαίνει ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(a, f(a))$ είναι οριζόντια (παράλληλη προς τον x').

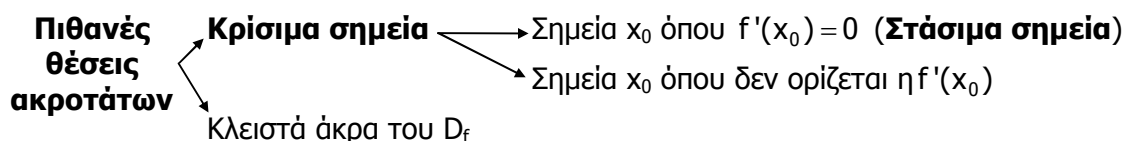
4. Για τη μονοτονία: Η f είναι $\uparrow$ στο $[a, \beta]$ ακόμα και όταν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$ με την προϋπόθεση ότι η f' μηδενίζεται σε μεμονωμένα πεπερασμένου πλήθους σημεία του (a, β) (και φυσικά ότι f συνεχής στο $[a, \beta]$).

Με τη βοήθεια της μονοτονίας μπορούμε:

	ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
α) Να δείξουμε ανισώσεις μορφής $f(A(x)) > f(B(x))$	Αν f γνησίως φθίνουσα στο Δ και ζητάμε να δείξουμε ότι $f(A(x)) > f(B(x))$, μπορούμε να δείξουμε ότι $A(x), B(x) \in \Delta$ και ότι $A(x) < B(x)$.
β) Να λύσουμε ανισώσεις μορφής $f(A(x)) > f(B(x))$	Αν f γνησίως φθίνουσα στο Δ και ζητάμε να λύσουμε την $f(A(x)) > f(B(x))$, μπορούμε να - δείξουμε ότι $A(x), B(x) \in \Delta$ και - να λύσουμε την ισοδύναμη ανίσωση $A(x) < B(x)$.
γ) Να δείξουμε σχέσεις "διάφορου" μορφής $f(A(x)) \neq f(B(x))$	Αν f γνησίως φθίνουσα στο Δ και ζητάμε να δείξουμε ότι $f(A(x)) \neq f(B(x))$, μπορούμε να δείξουμε ότι $A(x), B(x) \in \Delta$ και ότι $A(x) \neq B(x)$, (καθώς η f είναι και «1-1» ως γνησίως φθίνουσα).
δ) Να λύσουμε εξισώσεις μορφής $f(A(x)) = f(B(x))$	Αν f γνησίως φθίνουσα στο Δ και ζητάμε να λύσουμε την $f(A(x)) = f(B(x))$, μπορούμε να δείξουμε ότι $A(x), B(x) \in \Delta$ και - να λύσουμε την ισοδύναμη εξίσωση $A(x) = B(x)$ (καθώς η f είναι και «1-1» ως γνησίως φθίνουσα).

5. Για τα ακρότατα

Αν η f' διατηρεί το ίδιο πρόσημο και στο (a, x_0) και στο (x_0, β) και η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 .



Μεθοδολογία προσδιορισμού ολικών ακροτάτων

Αν f συνεχής σε κλειστό $[a, \beta]$, τότε από γνωστό θεώρημα συνέχειας παρουσιάζει και μέγιστο και ελάχιστο στο $[a, \beta]$, τιμές που προσδιορίζονται ως εξής:

- Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f
- Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά καθώς και στα άκρα του $[a, \beta]$
- Η μεγαλύτερη από τις παραπάνω τιμές είναι το ολικό μέγιστο και η μικρότερη το ολικό ελάχιστο της f στο $[a, \beta]$.

Σε παραμετρικές ασκήσεις που μας ζητούν την τιμή της παραμέτρου a ώστε η f να παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο x_0 , εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, όπου είναι παραγωγίσιμη, λέμε: « Για να παρουσιάζει η f ακρότατο στο x_0 **πρέπει** $f'(x_0)=0$, προσδιορίζουμε την τιμή του a από τη σχέση αυτή, την θέτουμε στην f' και ελέγχουμε αν η τελευταία αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά του x_0 . Αν αυτό συμβαίνει, δεχόμαστε την τιμή του a που προσδιορίστηκε, αλλιώς την απορρίπτουμε. Η «επαλήθευση» αυτή είναι απαραίτητη καθώς η συνθήκη $f'(x_0)=0$ είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή για την ύπαρξη ακρότατου στο x_0 .

6. Για το σύνολο τιμών

Αν f **συνεχής** συνάρτηση και **γνησίως μονότονη** σε διάστημα Δ τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε το $f(\Delta)$ με απλό τρόπο. Έτσι αν:

- $\Delta = [a, \beta]$ και $f \nearrow$ στο $[a, \beta]$ τότε $f(\Delta) = [f(a), f(\beta)]$
- $\Delta = [a, \beta]$ και $f \searrow$ στο $[a, \beta]$ τότε $f(\Delta) = [f(\beta), f(a)]$
- $\Delta = (a, \beta]$ και $f \nearrow$ στο $(a, \beta]$ τότε $f(\Delta) = (\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(\beta)]$
- $\Delta = [a, \beta)$ και $f \searrow$ στο $[a, \beta)$ τότε $f(\Delta) = (\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), f(a)]$ κ.τ.λ.

7. Για την κυρτότητα

Αν μια συνάρτηση στρέφει τα κοίλα άνω (κάτω), τότε η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f , εκτός από το σημείο επαφής, βρίσκεται κάτω (πάνω) από τη C_f .

8. Για τα σημεία καμψής

- Βασική προϋπόθεση για να είναι το x_0 θέση σημείου καμψής, είναι να υπάρχει η εφαπτομένη στο x_0 .
Η f'' που αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά του x_0 , μπορεί να μηδενίζεται στο x_0 ($f''(x_0)=0$) ή να μην ορίζεται στο x_0 .
- Αν η f'' δεν ορίζεται αριστερά και δεξιά του x_0 , αλλά ορίζεται η f' , τότε αντί της αλλαγής προσήμου της f'' , απαιτούμε αλλαγή μονοτονίας της f' .
- Αν f δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ , για να είναι ένα x_0 , εσωτερικό του Δ , θέση σημείου καμψής, αναγκαία (αλλά όχι ικανή) συνθήκη είναι η $f''(x_0)=0$.
- Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμψής $(x_0, f(x_0))$ «διαπερνά» τη C_f .
- Αν f δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα (a, β) τότε:
 - α) Μεταξύ δύο ακροτάτων της f στο (a, β) υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμψής.
 - β) Δεν είναι δυνατόν σε ένα $x_0 \in (a, \beta)$ να έχουμε και τοπικό ακρότατο και σημείο καμψής.

9. Για απόδειξη ανισώσεων:

- Για να αποδείξουμε ότι $\mathbf{A(x) \leq B(x)}$ (1), για κάθε $x \in \Delta$, όπου Δ ένα διάστημα και $A(x)$ και $B(x)$ παραστάσεις του x , φέρνουμε την (1) σε μορφή $A(x)-B(x) \leq 0$ και ορίζουμε συνάρτηση $f(x)=A(x)-B(x)$ στο Δ ή αν το Δ είναι ανοικτό διάστημα και η f μπορεί να οριστεί στο αντίστοιχο κλειστό, την ορίζουμε στο κλειστό. Στη συνέχεια
 - ή προσδιορίζουμε τη μονοτονία και τα ακρότατά της, με τη βοήθεια των οποίων αποδεικνύουμε την (1) (βλέπε και σημείωση με παράδειγμα παρακάτω)
 - ή εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. σε κατάλληλο διάστημα, το οποίο είναι συνήθως το $[r, x]$ ή το $[x, r]$, όπου r ρίζα της f .
 - ή χρησιμοποιούμε κυρτότητα και τη θέση της εφαπτομένης
 - ή εφαρμόζουμε δύο ΘΜΤ σε διαστήματα που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία
 - ή ολοκληρώνουμε τα μέλη κάποιας δεδομένης ή γνωστής ανισότητας
- Για να αποδείξουμε ανισότητα μορφής $\mathbf{A(a) < A(\beta)}$ όταν π.χ. $a < \beta$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x)=A(x)$. Έτσι αν $f \uparrow$ στο $[a, \beta]$ τότε προφανώς η ανισότητα ισχύει.
- Ειδικά αν πρόκειται για **διπλή ανισότητα**
 - ή αποδεικνύουμε κάθε μια από τις μονές ανισώσεις χωριστά όπως περιγράψαμε παραπάνω
 - ή αν η διπλή ανισότητα έρχεται σε μορφή $\kappa < \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} < \lambda$, ορίζουμε την $f(x)$ στο $[a, \beta]$ και εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. Έτσι θα υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}.$$
 Στη συνέχεια με τη βοήθεια του ότι $a < \xi < \beta$ καταλήγουμε ότι $\kappa < f'(\xi) < \lambda$ οπότε

$$\kappa < \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} < \lambda.$$

Πολλές φορές δεν «φαίνεται» καθαρά ποια είναι η κατάλληλη f που πρέπει να ορίσουμε και σε ποιο διάστημα $[a, \beta]$. Αυτά πρέπει να τα προσδιορίσουμε παρατηρώντας ή αλλάζοντας ισοδύναμα τη διπλή ανισότητα.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΑΛΗΘΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ (ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ)

$$1) \quad 1+x \leq e^x \leq 1+x \cdot e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad \frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1, \text{ για κάθε } x > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \leftarrow x = \ln u \\ \leftarrow x = e^u \end{array} \right\}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Υπάρχει περίπτωση να μην είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε τα πρόσημα της f' , οπότε και τη μονοτονία και τα ακρότατα της f . Τότε βρίσκουμε την f'' . Από τα πρόσημα της f'' , βρίσκουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f' , με τη

βοήθειά τους ίσως μπορούμε να βρούμε τα πρόσημα της f' και από εκεί τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .

Αν τα πρόσημα και της f'' δεν είναι γνωστά, συνεχίζουμε στην $f^{(3)}$ κ.τ.λ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x > x - \frac{x^3}{3}$ (1) για κάθε $x > 0$.

ΛΥΣΗ:

(Προσέξτε τα «παιχνίδια» με το «ανοικτό» και το «κλειστό» μηδέν)

(1) $\Leftrightarrow \eta\mu x - x + \frac{x^3}{3} > 0$. Ορίζουμε $f(x) = \eta\mu x - x + \frac{x^3}{3}$ στο $[0, +\infty)$ (Προσοχή στο «κλειστό», αφού θα χρειαστούμε το $f(0)$).

f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + x^2$ (άγνωστα πρόσημα—συνεχίζουμε)

f' παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f''(x) = -\eta\mu x + 2x$ (άγνωστα πρόσημα—συνεχίζουμε)

f'' παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f^{(3)}(x) = -\sigma\upsilon\nu x + 2$. Όμως $\sigma\upsilon\nu x < 2 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu x + 2 > 0$

για κάθε $x \geq 0$, οπότε $f^{(3)}(x) > 0$ και επομένως $f'' \nearrow$ στο $[0, +\infty)$.

Έτσι για $x > 0$ θα είναι $f''(x) > f''(0) \Leftrightarrow f''(x) > -\eta\mu 0 + 2 \cdot 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$.

Αφού $f''(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ θα είναι $f' \nearrow$ στο $[0, +\infty)$.

Έτσι για $x > 0$ θα είναι $f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > \sigma\upsilon\nu 0 - 1 + 0^2 \Leftrightarrow f'(x) > 0$.

Αφού $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ θα είναι $f \nearrow$ στο $[0, +\infty)$.

Έτσι για κάθε $x > 0$ θα είναι $f(x) > f(0) \Leftrightarrow \eta\mu x - x + \frac{x^3}{3} > \eta\mu 0 - 0 + \frac{0^3}{3} \Leftrightarrow \eta\mu x - x + \frac{x^3}{3} > 0$.

Άρα η (1) είναι αληθής.

10. Παράδειγμα πίνακα μεταβολών-Σύνολο τιμών

Με την προϋπόθεση ότι $D_f = [0, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο 4 έστω ότι έχουμε:

x	0	1	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	—	—	○	+	≠	—
$f(x)$						
	T.μ.		T.ε.	T.μ.		
Έστω	$f(0)=5$		$f(2)=-3$	$f(4)=10$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=-4$	

Τότε $R_f = (-4, 10]$, δηλαδή το $R(f)$ μιας συνεχούς συνάρτησης ορισμένης σε διάστημα μπορεί να προσδιοριστεί εύκολα ακόμα και αν δεν έχει σταθερή μονοτονία, αν υπολογίσουμε τις τιμές των ακροτάτων της, τα όρια στα ανοικτά άκρα του D_f και πάρουμε ως R_f ένα διάστημα με άκρα τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη από τις παραπάνω τιμές (ανοικτό άκρο αν η τιμή βγαίνει από όριο και κλειστό αν βγαίνει από ακρότατο).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Όπως αναφέραμε και προηγουμένως (βλέπε ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ στο θεώρημα μονοτονίας) δεν αλλάζουν τα συμπεράσματα του παραπάνω πίνακα ακόμα και αν η f δεν είναι ή δεν γνωρίζουμε αν είναι παραγωγίσιμη στα 1, 2 και 4, αρκεί να είναι συνεχής σε αυτά.

11. Βήματα για την επίλυση προβλημάτων μεγίστου-ελαχίστου:

α) Ορίζουμε (αν δεν είναι ορισμένες από την άσκηση) τις μεταβλητές με βάση τις οποίες θα μελετήσουμε το πρόβλημα.

β) Εντοπίζουμε λεκτικά την παράσταση, έστω K , της οποίας ζητάμε το μέγιστο ή το ελάχιστο (π.χ. όγκος, εμβαδόν, απόσταση, κέρδος κ.τ.λ.) και γράφουμε έναν τύπο για την K από γνωστές σχέσεις ή το σχήμα (αν χρειαστεί σχήμα αυτό πρέπει να παριστάνει μια **τυχαία** θεώρηση του προβλήματος)..

γ) Αν ο τύπος αυτός περιέχει μία μεταβλητή προχωράμε στο βήμα γ). Αν περιέχει δύο μεταβλητές x και y , υπολογίζουμε τη μία, έστω y , με τη βοήθεια της άλλης από κάποια συνθήκη που θα μας δίνουν ή από γνωστές σχέσεις ή από το σχήμα. Αντικαθιστούμε το y στον τύπο της K και έτσι έχουμε μια συνάρτηση $K(x)$

δ) Προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της $K(x)$ λαμβάνοντας υπόψιν:

1. τους περιορισμούς από τον τύπο της,
2. τη φυσική σημασία του x στο πρόβλημα
3. τις επιτρεπτές τιμές του x λόγω της εξάρτησής του από το y (αν υπάρχει τέτοια εξάρτηση).

ε) Βρίσκουμε την παράγωγο $K'(x)$ και προσδιορίζουμε τα πρόσημά της. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της K και υπολογίζουμε το (ολικό) μέγιστο ή το (ολικό) ελάχιστο σύμφωνα με τη γνωστή θεωρία.

ζ) Πρέπει να δώσουμε απάντηση προσέχοντας αν μας ζητούν «πότε η K έχει τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή (για ποιες τιμές των x και y)» ή «ποια είναι η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή αυτή».

12. Ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης π.χ. $V(t)$ είναι η παράγωγός της $V'(t)$ ενώ ο

ρυθμός μεταβολής της όταν π.χ. $t=2$ είναι το $V'(2)$ που γράφεται και αλλιώς $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=2}$.

Αν ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους, έστω V , είναι θετικός αυτό δηλώνει μία τάση αύξησης της τιμής του V στη συγκεκριμένη θέση, ενώ αν είναι αρνητικός δηλώνει μία τάση μείωσης.

Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής έχει μονάδες « $\frac{\text{μονάδες } y}{\text{μονάδες } x}$ » (μονάδες y ανά μονάδα x).

Τέλος δεν ξεχνάμε σε προβλήματα κίνησης πάνω σε άξονα, αν $x(t)$ η συνάρτηση «θέσης» του κινητού, τότε $u(t)=x'(t)$ και $a(t)=u'(t)=x''(t)$.

Επίσης ότι το **πρόσημο της ταχύτητας** $u(t)$ (ή αλλιώς η **μονοτονία της απομάκρυνσης** x) καθορίζει την **κατεύθυνση** του κινητού το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (δηλαδή αν κινείται με θετική ή αρνητική φορά)

Το συνολικό διάστημα s , που διάνυσε το κινητό κατά τη χρονική περίοδο $[t_0, t_n]$ ισούται με

$$s=|x(t_0)-x(t_1)|+|x(t_1)-x(t_2)|+...+|x(t_{n-1})-x(t_n)|$$

όπου $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}$ οι χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το κινητό αλλάζει φορά κίνησης (χρονικές στιγμές μηδενισμού της ταχύτητας).

13. Ασκήσεις που αφορούν σε ρίζες εξίσωσης ή συνάρτησης

A. Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση μορφής $A(x)=B(x)$ (1) **έχει τουλάχιστον μία ρίζα** στο (a, b)

Εφαρμόζουμε συνήθως μία από τις παρακάτω μεθόδους:

- Βρίσκουμε **προφανή ρίζα** της εξίσωσης στο (a, b) ή
- **Λύνουμε** αν είναι δυνατόν την (1) ή
- Ορίζουμε συνάρτηση $f(x)=A(x)-B(x)$ στο $[a, b]$ (αν είναι εφικτό) και εφαρμόζουμε **θεώρημα Bolzano** στο $[a, b]$ ή
- Ορίζουμε συνάρτηση $f(x)=A(x)-B(x)$ στο $[a, b]$ (αν είναι εφικτό) και εφαρμόζουμε **θεώρημα Rolle στην παράγουσα** της f στο $[a, b]$ ή
- Ορίζουμε συνάρτηση $f(x)=A(x)-B(x)$ και προσδιορίζουμε το **σύνολο τιμών** της, θεωρώντας ως πεδίο ορισμού το (a, b) . Αν αυτό περιέχει το 0, τότε η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a, b) ή
- **Με απαγωγή σε άτοπο**. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=A(x)-B(x)$ δεν έχει ρίζα στο (a, b) και καταλήγουμε σε άτοπο (ίσως και με τη βοήθεια της διατήρησης προσήμου).

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ Θ. BOLZANO

1. Σε περίπτωση που ζητάμε την ύπαρξη **δύο τουλάχιστον ριζών** στο (a, b) μπορούμε να εφαρμόσουμε Θ. Bolzano σε δύο κατάλληλα επιλεγμένα κλειστά υποδιαστήματα του $[a, b]$, ξένα μεταξύ τους (ή να έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο, το ένα άκρο τους – π.χ. $[a, \gamma]$ και $[\gamma, b]$).
2. Σε περίπτωση που κατά την εφαρμογή του Θ. Bolzano το γινόμενο $f(a) \cdot f(b)$ δεν είναι οπωσδήποτε αρνητικό, αλλά $f(a) \cdot f(b) \leq 0$, τότε παίρνοντας περιπτώσεις (αν $f(a) \cdot f(b) < 0$ ή $f(a) \cdot f(b) = 0$) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της f στο $[a, b]$.

3. Σε περίπτωση που η f δεν μπορεί να οριστεί εύκολα σε διάστημα $[a, b]$ όπου $f(a) \cdot f(b) < 0$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα όρια της f στα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού της και αν αυτά είναι ετερόσημα, τότε από γνωστή ιδιότητα των ορίων (σελίδα 2 ιδιότητα 6), υπάρχουν αριθμοί κ, λ σε κατάλληλες γειτονιές όπου $f(\kappa) \cdot f(\lambda) < 0$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε Θ. Bolzano στο $[\kappa, \lambda]$ (ή $[\lambda, \kappa]$).

Β. Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση μορφής $A(x)=B(x)$ (1) έχει το πολύ μία ρίζα στο

(a, b)

Εφαρμόζουμε συνήθως μία από τις παρακάτω μεθόδους:

- **Λύνουμε** αν είναι δυνατόν την (1) ή
- Ορίζουμε συνάρτηση $f(x)=A(x)-B(x)$ στο (a,b) και δείχνουμε ότι η f είναι "**1-1**" στο (a, b) ή
- Ορίζουμε συνάρτηση $f(x)=A(x)-B(x)$ στο (a, b) και δείχνουμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη** στο (a, b) ή
- **Με απαγωγή σε άτοπο.** Ορίζουμε συνάρτηση $f(x)=A(x)-B(x)$ στο (a, b) , υποθέτουμε ότι η f έχει δύο τουλάχιστον ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ στο (a,b) , εφαρμόζουμε συνήθως το Θ. Rolle στο $[\rho_1, \rho_2]$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο (a, b) .

Γ. Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση μορφής $A(x)=B(x)$ (1) έχει ακριβώς μία ρίζα

στο (a, b)

Αρκεί να δείξουμε ότι έχει μία τουλάχιστον και μία το πολύ, συνδυάζοντας μεθόδους από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

Δ. Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση μορφής $A(x)=B(x)$ (1) έχει τουλάχιστον n ή το πολύ n ή ακριβώς n ρίζες στο (a, b)

Εργαζόμαστε όπως αναφέραμε και στην περίπτωση μιας ρίζας, αλλά σε κατάλληλα υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Αν μας ζητούν όλες τις ρίζες μιας εξίσωσης τότε ή την λύνουμε με τους κλασσικούς Λυκειακούς τρόπους (ανάλογα με τη μορφή της) ή αν αυτό δεν είναι δυνατόν, δοκιμάζουμε να βρούμε τις **προφανείς** ρίζες της και στη συνέχεια να αποδείξουμε ότι δεν έχει άλλες. Αυτό ως γνωστόν γίνεται με τη βοήθεια της «συνέχειας και μονοτονίας» ή «απαγωγής σε άτοπο και θεώρημα Rolle» αφού πρώτα ορίσουμε κατάλληλη συνάρτηση.

2. Σε περίπτωση που η εξίσωση της οποίας μας ενδιαφέρουν οι ρίζες, είναι πολυωνυμική, δεν ξεχνάμε ότι ο βαθμός της, καθορίζει και το **πόσες το πολύ ρίζες** στο $\mathbb{R}$ θα έχει. Έτσι η εξίσωση $\alpha \cdot (x-\beta) \cdot (x-\gamma) + \beta \cdot (x-\alpha) \cdot (x-\gamma) + \gamma \cdot (x-\alpha) \cdot (x-\beta) = 0$, με $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, είναι δευτέρου βαθμού, οπότε έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ

(Οδηγίες προς ναυτιλλομένους)

Πριν ξεκινήσουμε τη λύση μιας άσκησης διαβάζουμε καλά την εκφώνηση, προσέχουμε τι τιμές παίρνουν οι παράμετροι ($\alpha, \beta, \kappa, \lambda, \theta$ αν υπάρχουν), τι τιμές παίρνει η μεταβλητή, τι τιμές παίρνει η συνάρτηση (αν μας τις δίνουν), αν μας δίνουν πληροφορίες γι' αυτήν και οτιδήποτε μας κάνει εντύπωση («άραγε αυτό γιατί μου το δίνουν;»), μιας και όλα όσα δίνονται θα μας χρειαστούν.

ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ – «ΚΛΕΙΔΙΑ»

1. Αν μας δίνουν ότι η f είναι συνεχής

α) Στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

β) Στο $[a, \beta]$ τότε • $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x_0 \in (a, \beta)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ και

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

- f ολοκληρώσιμη στο $[a, \beta]$ (υπάρχει το $\int_a^\beta f(x) dx$)
- Η εικόνα του $[a, \beta]$ (δηλ. το $f([a, \beta])$) είναι κλειστό διάστημα
- Η f παίρνει και ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο $[a, \beta]$ (θεώρημα συνέχειας)
- Αν επιπλέον $f(a) \neq f(\beta)$, η f παίρνει όλες τις τιμές ανάμεσα στα $f(a)$ και $f(\beta)$ (θεώρημα συνέχειας)
- Αν επιπλέον $f(a) \cdot f(\beta) < 0$, ισχύει το Θ. Bolzano
- Αν γνωρίζουμε τη μονοτονία της μπορούμε να βρούμε το R_f

γ) Στο Δ τότε • Αν γνωρίζουμε τη μονοτονία της μπορούμε να βρούμε το R_f .
(ανοικτό ή • Αν επιπλέον $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε από Θ. Bolzano η f
κλειστό) διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .

2. Αν μας δίνουν ότι η f είναι παραγωγίσιμη

- α) Στο x_0** τότε
- f συνεχής στο x_0
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$
 - $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$
 - Η C_f δέχεται εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$ με εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
- β) Στο $[a, \beta]$** τότε
- f συνεχής στο $[a, \beta]$, οπότε ισχύουν και όσα αναφέραμε για τη συνέχεια στο $[a, \beta]$.
 - Ισχύει το Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$
 - Ορίζεται η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in [a, \beta]$ με εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
 - Αν επιπλέον είναι $f(a) = f(\beta)$ ισχύει το Θ.Ρolle
 - Μπορούμε να βρούμε μονοτονία, ακρότατα, R_f
- γ) Στο (a, β)** τότε
- f συνεχής στο (a, β)
 - Αν επιπλέον f συνεχής στο $[a, \beta]$ ισχύει το Θ.Μ.Τ.
 - Αν επιπλέον f συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f(a) = f(\beta)$ ισχύει το Θ.Ρolle

3. Για να **δείξουμε** ότι μια **συνάρτηση f** της οποίας δεν δίνεται ο τύπος, αλλά κάποια σχέση που ικανοποιεί αυτή, είναι **συνεχής σε διάστημα Δ (το οποίο είναι το πεδίο ορισμού της)**, προσπαθούμε να δείξουμε ότι **για κάθε $x_0 \in \Delta$** ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (1) ή $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$ ή θέτοντας στην (1) όπου x το $x_0 + h$, να δείξουμε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ ή κάτι παρόμοιο.

4. Για να **δείξουμε** ότι μια **συνάρτηση f** της οποίας δεν δίνεται ο τύπος είναι **παραγωγίσιμη στο Δ** , αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$, **για κάθε $x_0 \in \Delta$** ή

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}, \text{ για κάθε } x_0 \in \Delta.$$

5. Το **Θ.Μ.Τ.** είναι ένα **χρήσιμο εργαλείο** γιατί μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλές ασκήσεις, μια που οι απαιτήσεις του είναι ελάχιστες. Δοκιμάστε να το εφαρμόσετε (αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του), ακόμα και αν η άσκηση δεν «θυμίζει» κάτι τέτοιο.

6. Αν **$f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ και f συνεχής στο Δ** , τότε f σταθερή στο Δ .

7. Αν **$f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ και f συνεχής στο Δ** , τότε $f \nearrow$

στο Δ .

8. **Αν η f' αλλάζει πρόσημο στα (α, x_0) και (x_0, β) και f συνεχής στο x_0 , τότε το x_0 είναι θέση τοπικού ακροτάτου.**

9. **Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ όπου είναι παραγωγίσιμη, τότε $f'(x_0) = 0$ (**Θ. Fermat**).**

Πολλές φορές μπορούμε με τη βοήθεια του Θ. Fermat, ξεκινώντας από μια **αληθή ανίσωση** να **αποδείξουμε** την ισχύ μιας **ισότητας** όπως στο παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα: Αν ισχύει $a^x \geq x+1$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $a > 0$, δείξτε ότι $a = e$.

Λύση: (1) $\Leftrightarrow a^x - x - 1 \geq 0$ (2).

Ορίζοντας $f(x) = a^x - x - 1$ παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$. Άρα (2) $\Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 και επειδή είναι παραγωγίσιμη στο 0 (και γενικότερα στο $\mathbb{R}$), θα ισχύει το Θ. Fermat. Άρα $f'(0) = 0$.

Όμως $f'(x) = a^x \cdot \ln a - 1$ οπότε η σχέση $f'(0) = 0$ δίνει $a^0 \cdot \ln a - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$.

10. **Αν $f' \uparrow$ στο εσωτερικό του Δ και f συνεχής στο Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .**

11. **Η f παρουσιάζει καμπή στο x_0 , όταν υπάρχει η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ και η f αλλάζει τα κοίλα στα (α, x_0) και (x_0, β) .**

12. **Σχεδόν όλα τα θεωρήματα ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.**

13. **Σε προβλήματα ρυθμού μεταβολής, δεν ξεχνάμε ότι ο ρυθμός μεταβολής $K'(t)$ ενός μεγέθους $K(t)$ είναι θετικός όταν το μέγεθος αυξάνεται και αρνητικός όταν το μέγεθος μειώνεται.**

14. **Πολύ σημαντικές είναι οι παρακάτω ιδιότητες των ορίων**

α) Αν $f(x) \geq 0$ σε μια γειτονιά του ξ , τότε και $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \geq 0$ (αν το όριο υπάρχει)

β) Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) > 0$ (ή < 0) τότε και $f(x) > 0$ (ή < 0) σε μια γειτονιά του ξ

(βλέπε ιδιότητες 6. και 7. σελίδα 2).

γ) Αν $f(x) \leq g(x)$ σε γειτονιά του ξ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty$

Αν $f(x) \leq g(x)$ σε γειτονιά του ξ και $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = +\infty$

Τις δύο τελευταίες προτάσεις, αν και δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο, τις χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη.

Ένα παράδειγμα εφαρμογής της ιδιότητας β)

Αν μας δίνουν ότι f' συνεχής στο x_0 με $f'(x_0) > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0) > 0$. Άρα

σύμφωνα με την ιδιότητα β) υπάρχει γειτονιά του x_0 όπου $f'(x) > 0$. Επομένως συμπεραίνουμε ότι $f \uparrow$ σε μια γειτονιά του x_0 .

15. **Υπάρχει διαφορά ανάμεσα στο $(f \circ g)'(x)$ (δηλαδή $[f(g(x))]'$) και στο $(f' \circ g)(x)$ (δηλαδή $f'(g(x))$).**

Παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης είναι η πρώτη, ενώ η δεύτερη είναι η παράγωγος της f αν όπου x θέσουμε το $g(x)$.

- 16.** Αν $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$, τότε η $y = \lambda x + \beta$ είναι **ασύμπτωτη** της C_f (πλάγια αν $\lambda \neq 0$ ή οριζόντια αν $\lambda = 0$).
- 17.** Όταν μας λένε ότι ένα μέγεθος V είναι **ανάλογο** ενός άλλου μεγέθους θ , τότε υπάρχει αριθμός $\kappa \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε $V = \kappa \cdot \theta$.
- 18.** Ο κανόνας **De l'Hospital** ισχύει μόνο για μορφές ορίων που καταλήγουν σε α.μ. $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ και μόνο εφ' όσον οι f, g είναι παραγωγίσιμες **σε γειτονιά του ξ** και το $\frac{\lim_{x \rightarrow \xi} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow \xi} g'(x)}$ υπάρχει.

Δ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. Αν f ορισμένη σε διάστημα Δ και υπάρχει συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο Δ με $F' = f$, τότε το σύνολο των παραγουσών της f στο Δ αποτελείται από τις συναρτήσεις $F+c$, όπου c οποιαδήποτε σταθερή ποσότητα. Ισχύουν:

2. Αν f συνεχής σε διάστημα Δ και $a \in \Delta$, τότε θεωρώντας $x \in \Delta$, η συνάρτηση

$\int_a^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και μάλιστα είναι μια παράγουσα της f , δηλαδή

ισχύει:

$$\left(\int_a^x f(t) dt\right)' = f(x)$$

Η συνάρτηση $\int_a^x f(t) dt$ είναι συνάρτηση του x και λέγεται **συνάρτηση ορισμένη από ολοκλήρωμα**.

Το ποια παράγουσα είναι (από το σύνολο των παραγουσών της f) εξαρτάται από την τιμή του a . Έτσι για παράδειγμα η $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin t dt$ είναι η παράγουσα με τύπο

$\eta \mu x - \eta \mu \frac{\pi}{2} = \eta \mu x - 1$ (και όχι η «κλασσική» παράγουσα που είναι η $\eta \mu x$).

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν η f είναι συνεχής σε ένωση διαστημάτων, τότε η $\int_a^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο υποδιάστημα εκείνο που ανήκει το a (θεωρούμε δηλαδή ότι και το x ανήκει στο υποδιάστημα αυτό).

3. Αν f συνεχής σε διάστημα Δ , $a, x \in \Delta$ και F μια συγκεκριμένη παράγουσα της f τότε:

α) $\int_a^x f(t) dt = F(x) + c, c \in \mathbb{R}, c \text{ συγκεκριμένο}$

β) Αν f παραγωγίσιμη στο Δ , τότε $\int_a^x f'(t) dt = f(x) + c, c \in \mathbb{R}, c \text{ συγκεκριμένο.}$

γ) $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$

4. **Μέθοδοι ολοκλήρωσης**

α) Με τη βοήθεια της παράγουσας

β) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες

γ) Με αλλαγή μεταβλητής $u = \varphi(x)$.

Πολλές φορές πριν την εφαρμογή κάποιας από τις παραπάνω μεθόδους, χρειάζεται να εφαρμόσουμε κάποιο **τέχνασμα** που να αλλάζει τον τύπο της συνάρτησης.

5. Αν f συνεχής σε διάστημα $[a, b]$, τότε f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ (υπάρχει το $\int_a^b f(x) dx$).

6. **Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος** (Υποτίθεται ότι οι αναφερόμενες συναρτήσεις είναι συνεχείς στα αντίστοιχα διαστήματα):

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^\beta c \, dx = c \cdot (\beta - a)$
- $\int_a^\beta \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int_a^\beta f(x)dx$
- $\int_a^\beta (f(x) + g(x))dx = \int_a^\beta f(x)dx + \int_a^\beta g(x)dx$
- $\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$ σχέση Chasles (με f συνεχή σε διάστημα Δ και $a, \beta, \gamma \in \Delta$)
- Αν $a \leq \beta$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$
Ιδιαίτερα αν η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[a, \beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x)dx > 0$

7. Εμβαδά

α) Εμβαδόν οριζόμενο από μια συνεχή συνάρτηση f σε διάστημα $[a, \beta]$, τον x' και τις ευθείες $x=a$ και $x=\beta$

$$E = \int_a^\beta |f(x)| \, dx$$

β) Εμβαδόν οριζόμενο από μια συνεχή συνάρτηση f και τον x'

$$E = \int_{\rho_1}^{\rho_v} |f(x)| \, dx$$

όπου ρ_1, ρ_v η μικρότερη και η μεγαλύτερη αντίστοιχα ρίζα της f .

γ) Εμβαδόν οριζόμενο από δύο συνεχείς συναρτήσεις f, g σε διάστημα $[a, \beta]$ και τις ευθείες $x=a$ και $x=\beta$

$$E = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| \, dx$$

δ) Εμβαδόν οριζόμενο από δύο συνεχείς συναρτήσεις f, g

$$E = \int_{\rho_1}^{\rho_v} |f(x) - g(x)| \, dx$$

όπου ρ_1, ρ_v η μικρότερη και η μεγαλύτερη αντίστοιχα ρίζα της εξίσωσης $f(x)=g(x)$, δηλαδή οι τετμημένες των σημείων τομής των C_f και C_g .

ε) Εμβαδά σύνθετων χωρίων

Υπολογίζονται με προσθέσεις ή αφαιρέσεις εμβαδών άλλων απλών χωρίων.

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Άλλο είναι το $\int_a^x f(t)dt$ και άλλο το $\int_a^x f(t)d\omega$.

Για το πρώτο έχουμε $\int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x$,

ενώ για το δεύτερο $\int_a^x f(t)d\omega = f(t) \cdot \int_a^x d\omega = f(t) \cdot (x - a)$.

ΕΠΙΣΗΣ στο ολοκλήρωμα $\int_a^x f(x) \cdot g(t) dt$ αν η ποσότητα $f(x)$ είναι ανεξάρτητη του t , μπορεί να "περάσει" έξω από το ολοκλήρωμα (καθώς η ολοκλήρωση γίνεται ως προς t).

2. **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Άλλο είναι το $\int_a^x f'(t)dt$ και άλλο το $(\int_a^x f(t)dt)'$.

Το πρώτο είναι το ολοκλήρωμα της παραγώγου της f ως προς t και ισούται με $f(x)-f(a)$,

ενώ το δεύτερο είναι η παράγωγος ως προς x του ολοκληρώματος και ισούται με $f(x)$.

3. Όταν ζητάμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα μορφής $\int_a^b g(x) \cdot f'(x)dx$ ή $\int_a^b g(x) \cdot f''(x)dx$ κ.τ.λ. συνήθως η κατάλληλη μέθοδος είναι η ολοκλήρωση κατά παράγοντες (αν φυσικά η g είναι παραγωγίσιμη).

4. Από την ισότητα $\int_a^b f(x)dx = \int_\gamma^\delta f(x)dx$ **δεν συμπεραίνουμε** ότι $a=\gamma$ και $b=\delta$

Από την ισότητα $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ **δεν συμπεραίνουμε** ότι $f(x)=g(x)$

5. **ΠΡΟΣΟΧΗ**

- $(\int_a^b f(x)dx)^2 \neq \int_a^b f^2(x)dx$
- $\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^x f(t)dt \neq \int_a^x \lim_{x \rightarrow x_0} f(t)dt$

ΙΣΧΥΟΥΝ

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt$ με προϋποθέσεις f συνεχής στο Δ και $a, x_0 \in \Delta$

(αφού η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι τότε παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο Δ)

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^t f(\omega)d\omega = \int_a^t f(\omega)d\omega$ με προϋπόθεση ότι t ανεξάρτητο του x

μία που η συνάρτηση $\int_a^t f(\omega)d\omega$ είναι συνάρτηση του t

και δεν περιέχει x (ακόμα και αν είχε τη μορφή

$$\int_a^t f(x)dx, \text{ πάλι είναι συνάρτηση του } t).$$

6. Όταν ζητάμε να υπολογίσουμε τον τύπο συνάρτησης f

Στις ασκήσεις αυτές δίνεται συνήθως ή η f' ή μια σχέση που περιέχει την f' και την f , ίσως δίνεται επίσης άμεσα ή έμμεσα μια τιμή της f και ζητείται να υπολογίσουμε τον τύπο της f .

α) Αν μας δίνουν τον τύπο της f' και ζητάμε την f

Προσπαθούμε να "μαντέψουμε" τις παράγουσες της f' , οι οποίες στον τύπο τους θα περιέχουν και μια σταθερά c .

Αν επιπλέον μας δίνουν άμεσα ή έμμεσα και μια τιμή της f (π.χ. $f(1)=5$), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το c , οπότε και τον ακριβή τύπο της f .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν δεν ζητάμε τον τύπο της f , αλλά την διαφορά $f(\beta)-f(a)$ δύο τιμών της, τότε:

- ή βρίσκουμε τον τύπο της f (με το c) όπως περιγράψαμε και στη συνέχεια τη διαφορά $f(\beta)-f(a)$ (τα c αφαιρούμενα «φεύγουν»)
- ή εναλλακτικά, υπολογίζουμε το $\int_a^\beta f'(x) dx$, καθώς αυτό μας δίνει απ' ευθείας το $f(\beta)-f(a)$ (μην ξεχνάτε ότι $\int_a^\beta f'(x) dx = [f(x)]_a^\beta$).

β) Αν μας δίνουν μια σχέση που περιέχει την f' (ίσως και την f) και ζητάμε την f

Προσπαθούμε να φέρουμε τη σχέση σε μία από τις μορφές $(A(f(x)))' = 0$ ή $(A(f(x)))' = (B(x))'$ ή $(A(f(x)))' = (A(f(x)))$, όπου $A(f(x))$ παράσταση της $f(x)$ και $B(x)$ παράσταση του x .

Συγκεκριμένα αν καταλήξουμε σε

- $(A(f(x)))' = 0$, τότε από το θεώρημα της σταθερής συνάρτησης είναι $A(f(x))=c$, απ' όπου βρίσκουμε την $f(x)$ (*).
- $(A(f(x)))' = (B(x))'$, τότε από γνωστό θεώρημα των παραγώγων είναι $A(f(x))=B(x)+c$, απ' όπου βρίσκουμε την $f(x)$ (*).
- $(A(f(x)))' = (A(f(x)))$, τότε από γνωστή εφαρμογή ισχύει $A(f(x))=c \cdot e^x$, απ' όπου βρίσκουμε την $f(x)$ (*).

(*) Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να προσδιορίσουμε το c , αν μας δίνουν άμεσα ή έμμεσα μια τιμή της f .

Ε. ΤΙ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΚΑΝΟΥΜΕ ΣΤΑ ΜΕΛΗ ΜΙΑΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ή ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΙΣΟΤΗΤΑ

Έχοντας μια ισότητα συναρτήσεων $f(x)=g(x)$, για κάθε x , μπορούμε:

α) Να συμπεράνουμε ότι τα όριά τους στο ξ είναι ίσα (με προϋπόθεση ότι τα όρια αυτά υπάρχουν).

β) Να παραγωγίσουμε τα μέλη της ισότητας (με προϋπόθεση ότι οι f, g είναι παραγωγίσιμες).

γ) Να πάρουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα των μελών της ισότητας, (με προϋπόθεση ότι οι f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$)

δηλαδή ισχύουν οι συνεπαγωγές:

ΣΧΕΣΗ	ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ
$f(x)=g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$	Να ορίζονται τα όρια
$f(x)=g(x) \Rightarrow f'(x)=g'(x)$	f, g παραγωγίσιμες στο $[a, \beta]$
$f(x)=g(x) \Rightarrow \int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\beta g(x)dx$	f, g συνεχείς στο $[a, \beta]$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι αντίστροφες των παραπάνω συνεπαγωγών δεν ισχύουν.

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

Ισχύουν οι συνεπαγωγές:

ΣΧΕΣΗ	ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ
$f(x) \geq g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$	Να ορίζονται τα όρια
$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^\beta f(x) dx \geq 0$	f συνεχής στο $[a, \beta]$
$f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^\beta f(x)dx \geq \int_a^\beta g(x)dx$	f, g συνεχείς στο $[a, \beta]$.

ΠΡΟΣΟΧΗ

1. Οι αντίστροφες των παραπάνω συνεπαγωγών δεν ισχύουν.
2. ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ Η ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ $f(x) \geq g(x) \Rightarrow f'(x) \geq g'(x)$

Ζ. ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ ΔΕΝ ΙΣΧΥΟΥΝ ΤΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ ή ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ ΤΟΥΣ

Όλες οι βασικές προτάσεις της ανάλυσης με τις οποίες ασχοληθήκαμε (οι περισσότερες εκφράζονται με τη μορφή θεωρημάτων), αφορούν σε συνεπαγωγές, με αποτέλεσμα να μην ισχύουν οι αντίστροφες προτάσεις. Όσες από τις παρακάτω προτάσεις ξεκινούν με (*) (αστερίσκο), σημαίνει ότι υπάρχει απόδειξή τους, με αντιπαράδειγμα, στο σχολικό βιβλίο. Επίσης τα θεωρήματα αυτά έχουν αυστηρές προϋποθέσεις, με αποτέλεσμα να μην ισχύουν αν παραλλάξουμε τις προϋποθέσεις αυτές.

Στη συνέχεια αναφερόμαστε στα βασικότερα από αυτά:

- Αν f γνησίως μονότονη σε διάστημα Δ , τότε είναι και «1-1» στο Δ
 - ο (*) Αν η f 1-1 σε διάστημα Δ , τότε δεν είναι πάντα γνησίως μονότονη στο Δ .

Παράδειγμα: $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

- (*) Αν για τις συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty, \text{ τότε δεν ισχύει απαραίτητα ότι } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 0$$

Παράδειγμα: $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1, g(x) = \frac{1}{x^2}$

- Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα $[a, \beta]$ και $f(a) \cdot f(\beta) < 0$, τότε η f έχει ρίζα στο (a, β) .
 - ο Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και έχει ρίζα στο (a, β) , δεν σημαίνει οπωσδήποτε ότι $f(a) \cdot f(\beta) < 0$.
 - ο Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f(a) \cdot f(\beta) > 0$ δεν σημαίνει ότι αποκλείεται να έχει ρίζα στο (a, β) .

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε x_0 , τότε είναι και συνεχής στο x_0 .
 - ο (*) Αν η f είναι συνεχής σε x_0 , δεν είναι απαραίτητα και παραγωγίσιμη στο x_0 .

Παράδειγμα: $f(x) = |x|$ στο 0

- ο Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , δεν αποκλείεται να είναι συνεχής στο x_0 .
- Αν f συνεχής σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ με $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι σταθερή στο Δ .
 - ο (*) Αν $f'(x) = 0$ σε ένωση διαστημάτων A , τότε η f δεν είναι απαραίτητα σταθερή στο A .

Παράδειγμα: $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

- Αν f συνεχής σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ με $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

- Αν $f'(x) > 0$ σε ένωση διαστημάτων A , τότε η f δεν είναι απαραίτητα γνησίως αύξουσα στο A (ομοίως για $f'(x) < 0$ στο A και f γνησίως φθίνουσα).
- (*) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ τότε δεν ισχύει οπωσδήποτε ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$ (ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$, με απόδειξη). Ομοίως για γνησίως φθίνουσα.

Παράδειγμα: $f(x) = x^3$

- Αν f ορισμένη σε διάστημα Δ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ όπου είναι παραγωγίσιμη, τότε $f'(x_0) = 0$.
 - Αν υπάρχει x_0 όπου $f'(x_0) = 0$, τότε η f δεν παρουσιάζει οπωσδήποτε ακρότατο στο x_0 .
- Αν f παραγωγίσιμη σε διάστημα (a, b) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο είναι συνεχής και η $f'(x)$ έχει διαφορετικά πρόσημα στα (a, x_0) και (x_0, b) , τότε η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο
 - Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 , δεν υπάρχουν απαραίτητα διαστήματα μορφής (a, x_0) και (x_0, b) , στα οποία η f έχει διαφορετική μονοτονία.
- Αν f συνεχής σε διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ με $f''(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
 - (*) Αν η f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ , τότε δεν ισχύει οπωσδήποτε ότι $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$ (ισχύει όμως $f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$, με απόδειξη). Ομοίως αν η f είναι κοίλη.

Παράδειγμα: $f(x) = x^4$

- Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε $f''(x_0) = 0$.
 - Αν υπάρχει x_0 όπου $f''(x_0) = 0$, τότε η f δεν παρουσιάζει οπωσδήποτε καμπή στο x_0 .

Παράδειγμα: $f(x) = x^4$ στο 0

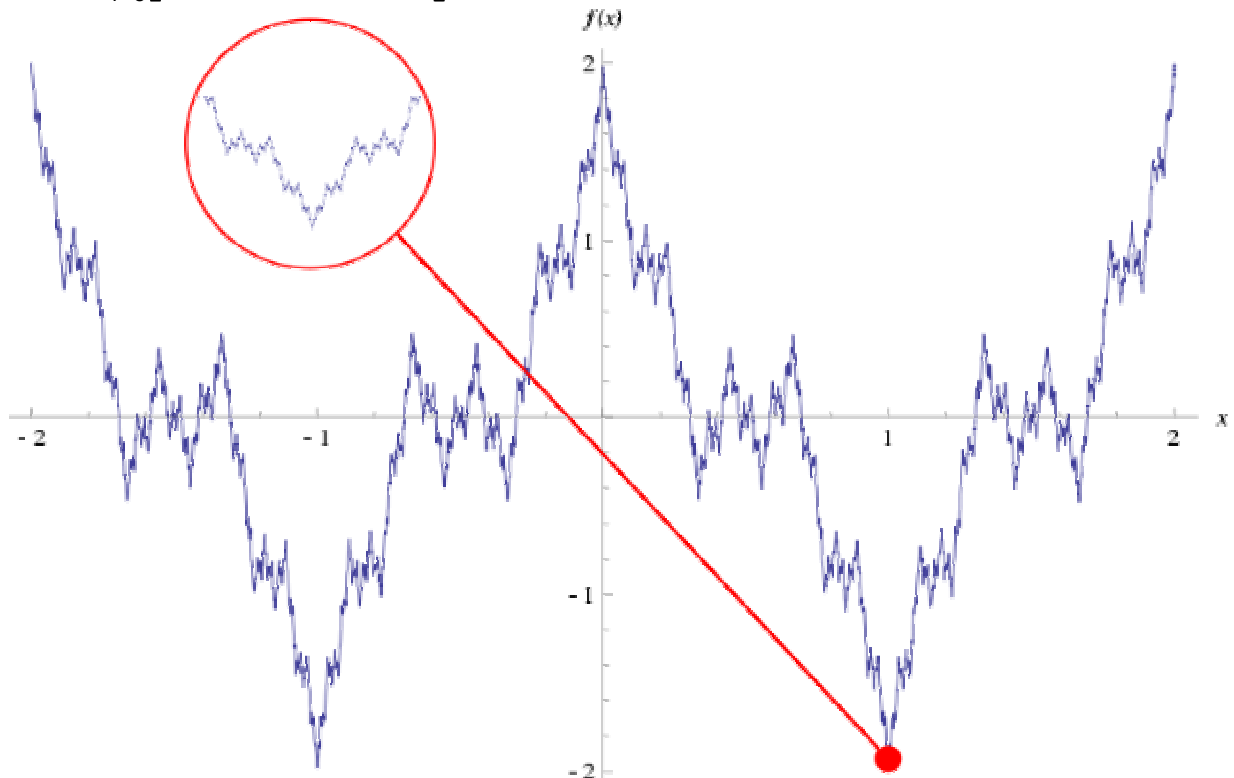
Η. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παραθέτουμε στη συνέχεια κάποια παραδείγματα συναρτήσεων με «παράξενες» ιδιότητες.

1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΧΗΣ ΑΛΛΑ ΠΟΥΘΕΝΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗ

$$f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^v \cdot \sigma\upsilon\nu(12^v \cdot \pi \cdot x) \right]$$

Karl Weierstrass (1872)



2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗ ΜΟΝΟ ΣΤΟ 0

Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = x \cdot f(x)$, όπου f η παραπάνω συνάρτηση του Weierstrass.

Αυτή εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι παραγωγίσιμη στο 0 (με το όριο του λόγου μεταβολής).

Επιπλέον αποδεικνύεται ότι δεν είναι πουθενά αλλού παραγωγίσιμη.

3. ΟΤΑΝ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΙΝΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗ, Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΗΣ ΕΙΝΑΙ ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ ΣΥΝΕΧΗΣ;

• ΟΧΙ

Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αλλά η παράγωγός της

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{δεν είναι συνεχής στο } 0, \text{ καθώς το } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$$

αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει.

Αυτό αποτελεί και παράδειγμα συνάρτησης (f') η οποία αν και δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (δεν είναι στο 0), έχει παράγουσα στο $\mathbb{R}$ (την f).

• **ΟΜΩΣ**

Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση, με $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Είναι $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Το όριο αυτό δίνει α.μ. $\frac{0}{0}$ και μπορούμε

να εφαρμόσουμε το θεώρημα De l' Hospital καθώς καταλήγει σε $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$, το οποίο

σύμφωνα με την υπόθεση υπάρχει στο $\mathbb{R}$ (χωρίς την υπόθεση αυτή δεν θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα De l' Hospital). Έτσι διαδοχικά έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{α.μ. } \frac{0}{0}}{=} \lim_{\text{D.L. } x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell$$

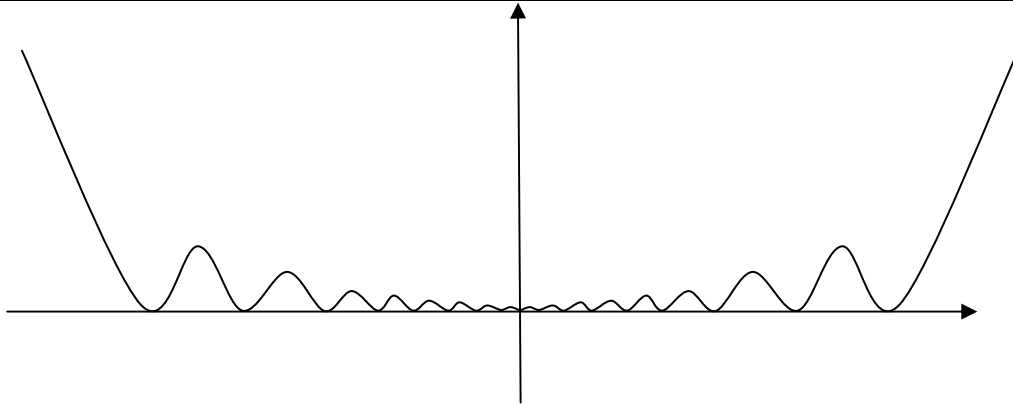
Έτσι αποδείξαμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$, οπότε f' συνεχής στο x_0 .

4. ΑΝ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΕΙ ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΣΤΟ x_0 , ΘΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ ΓΕΙΤΟΝΙΑ ΤΟΥ x_0 ΑΠΟ ΑΡΙΣΤΕΡΑ ΤΟΥ x_0 ΟΠΟΥ ΘΑ ΕΙΝΑΙ ΓΝΗΣΙΩΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΚΑΙ ΓΕΙΤΟΝΙΑ ΤΟΥ x_0 ΑΠΟ ΔΕΞΙΑ ΤΟΥ x_0 ΟΠΟΥ ΘΑ ΕΙΝΑΙ ΓΝΗΣΙΩΣ ΑΥΞΟΥΣΑ;

• **ΟΧΙ**

$$\text{Για παράδειγμα η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x^4 \cdot \eta\mu^2 \frac{1}{x}, & \text{για } x \neq 0 \\ 0, & \text{για } x = 0 \end{cases}.$$

Η γραφική της παράσταση είναι περίπου όπως φαίνεται παρακάτω (τα κύματα στην πραγματικότητα είναι πολύ πιο πυκνά όσο πλησιάζουμε προς το 0, απλά εδώ τη σχεδιάζουμε έτσι, χάριν μεγαλύτερης ευκρίνειας). Λόγω της αδιάκοπης συμπαγούς κυματοειδούς μορφής της γύρω από το 0, δεν είναι γνήσιως φθίνουσα σε κανένα διάστημα μορφής $(\alpha, 0)$ και δεν είναι γνήσιως αύξουσα σε κανένα διάστημα μορφής $(0, \beta)$, αλλά όσο μεγεθύνουμε το διάγραμμα στο 0, παρατηρούμε τον ίδιο κυματισμό.



5. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΠΟΥ ΔΕΝ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΑΠΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ Ή ΣΥΝΘΕΣΕΩΝ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ($y=x^a$, $y=\eta\mu x$ κ.τ.λ.)

Δεν μπορούν να εφαρμοστούν οι μέθοδοι υπολογισμού των αόριστων ολοκληρωμάτων για τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \eta\mu x^2 dx, \quad \int \sqrt{\eta\mu x} dx, \quad \int \sqrt{x^3+1} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int \frac{1}{\ln x} dx, \quad \int \frac{\eta\mu x}{x} dx$$

Κάποια μάλιστα από αυτά έχει αποδειχτεί ότι δεν υπολογίζονται.

ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Θ.Μ.Τ.

- f συνεχής στο $[a, \beta]$
 - f παραγωγίσιμη στο (a, β)
- τότε $\exists \xi \in (a, \beta): f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$

Θ. ΣΤΑΘΕΡΗΣ

- f συνεχής σε διάστημα Δ
 - $f'(x) = 0$ για κάθε x **εσωτερικό** σημείο του Δ
- τότε f είναι σταθερή στο Δ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

Θεώρημα μονοτονίας

- Έστω f συνεχής σε διάστημα Δ και
 - f παραγωγίσιμη στο **εσωτερικό** του Δ .
 - Αν $f'(x) > 0$ στο **εσωτερικό** του Δ
- τότε $f \nearrow$ στο Δ

ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Ισχύει

- f συνεχής σε $x_0 \in (a, \beta)$
 - $f \nearrow$ στο (a, x_0) και $f \searrow$ στο (x_0, β)
- τότε η f παρουσιάζει τοπ. μέγιστο στο x_0

Θεώρημα τοπικών ακροτάτων

- Έστω f παραγωγίσιμη σε διάστημα (a, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 .
 - f συνεχής στο x_0 .
 - Αν $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β)
- τότε η f παρουσιάζει τοπ. μέγιστο στο x_0

Θ. Fermat

- f ορισμένη σε διάστημα Δ
 - f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε x_0 **εσωτερικό** του Δ
 - f παραγωγίσιμη στο x_0
- τότε $f'(x_0) = 0$

Θ. ROLLE

- f συνεχής στο $[a, \beta]$
 - f παραγωγίσιμη στο (a, β)
 - $f(a) = f(\beta)$
- τότε $\exists \xi \in (a, \beta): f'(\xi) = 0$

ΠΟΡΙΣΜΑ

- f, g συνεχείς σε διάστημα Δ
 - $f'(x) = g'(x)$ για κάθε x **εσωτερικό** σημείο του Δ
- τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

ορισμός κυρτότητας

- Έστω f συνεχής σε διάστημα Δ και
- f παραγωγίσιμη στο **εσωτερικό** του Δ .

Η f λέγεται **κυρτή** (στρέφει τα κοίλα άνω $\cup$) στο Δ , **αν και μόνο αν** (ισοδυναμία) $f' \nearrow$ στο **εσωτερικό** του Δ

Θεώρημα κυρτότητας

- Έστω f συνεχής σε διάστημα Δ και
 - f δύο φορές παραγωγίσιμη στο **εσωτερικό** του Δ .
 - Αν $f''(x) > 0$ για κάθε x **εσωτερικό** του Δ
- τότε f **κυρτή** (κοίλα άνω $\cup$) στο Δ

ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

ορισμός σημείων καμψής

- Έστω f παραγωγίσιμη σε διάστημα (a, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 .
 - Αν η C_f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$
 - $f' \nearrow$ στο (a, x_0) και $f' \searrow$ στο (x_0, β) ή αντίστροφα
- τότε η f παρουσιάζει καμψή στο x_0

Θεώρημα σημείων καμψής

- Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα (a, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 .
 - Αν η C_f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ και
 - $f''(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f''(x) < 0$ στο (x_0, β) ή αντίστροφα
- τότε η f παρουσιάζει καμψή στο x_0

Θεώρημα

- Η f παρουσιάζει καμψή στο x_0
 - f δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0
- τότε $f''(x_0) = 0$