

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΕΥΧΟΣ ΙΙ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ)
ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ)

*Θεωρία
Μεθοδολογία
Λυμένα παραδείγματα
Ασκήσεις*

ΔΙΑΚΟΥΜΑΚΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
Μαθηματικός

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ:

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΟ x_0 -ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΣΕΛ. 1
<i>Παραδείγματα χρήσης της παραγώγου στη Φυσική και την Οικονομία</i>	ΣΕΛ. 4
2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΟ x_0 -ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΤΗΣ C_f	ΣΕΛ. 6
3. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ-ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ.....	ΣΕΛ. 8
<i>Σημαντικές Παρατηρήσεις</i>	ΣΕΛ. 9
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ.....	ΣΕΛ. 14
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.....	ΣΕΛ. 20
4. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ	ΣΕΛ. 35
<i>Θεώρημα Rolle</i>	ΣΕΛ. 35
<i>Θεώρημα Σταθερής Συνάρτησης</i>	ΣΕΛ. 37
<i>Πόρισμα (Συνέπεια Του Θεωρήματος Της Σταθερής)</i>	ΣΕΛ. 38
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ.....	ΣΕΛ. 39
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.....	ΣΕΛ. 46
5. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	ΣΕΛ. 59
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ-ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ	ΣΕΛ. 63
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.....	ΣΕΛ. 69
6. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	ΣΕΛ. 77
<i>Θεώρημα Fermat</i>	ΣΕΛ. 79
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ.....	ΣΕΛ. 83
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.....	ΣΕΛ. 87
7. ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ-ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ	ΣΕΛ. 95
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ.....	ΣΕΛ. 99
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.....	ΣΕΛ. 101
8. ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ.....	ΣΕΛ. 108
ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΩΝ	ΣΕΛ. 113
ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL.....	ΣΕΛ. 114
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.....	ΣΕΛ. 116
9. ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	ΣΕΛ. 122
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.....	ΣΕΛ. 124

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ-ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ	ΣΕΛ. 131
2. ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΧΩΡΙΟΥ-ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΟΥ	ΣΕΛ. 133
<i>Το Σύμβολο Σ</i>	ΣΕΛ. 136
3. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ	ΣΕΛ. 136
4. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΟΡΙΣΜΕΝΗ ΑΠΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ	ΣΕΛ. 141
<i>Θεμελιώδες θεώρημα Του Ολοκληρωτικού Λογισμού</i>	ΣΕΛ. 142
5. ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ	ΣΕΛ. 144
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ	ΣΕΛ. 150
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ	ΣΕΛ. 162
6. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ	ΣΕΛ. 191
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΕΜΒΑΔΑ	ΣΕΛ. 196
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΑ ΕΜΒΑΔΑ	ΣΕΛ. 197

<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</u>	ΣΕΛ. 203
-------------------------------	----------

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΚΕΦ. 3, 4</u>	ΣΕΛ. 209
--	----------

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ</u>	ΣΕΛ. 331
---	----------

<u>ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2ου ΤΕΥΧΟΥΣ</u>	ΣΕΛ. 333
---	----------

Το σύμβολο
κολλάμε στο
που καλό



ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

λειτουργεί όπως τα σημειώματα υπενθύμισης που συνηθίζουμε να ψυγείο ή στον χώρο εργασίας μας, για να μας θυμίζουν πράγματα είναι να μην λησμονηθούν.

Στις ασκήσεις το Σύμβολο	Σημαίνει
✓	• άσκηση η οποία πρέπει οπωσδήποτε να διδαχθεί
➡	• άσκηση για την οποία υπάρχει υπόδειξη στο τέλος του φυλλαδίου (οι ασκήσεις αυτές είναι κατά κανόνα δυσκολότερες από τις άλλες)

3. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΟ x_0 – ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο D_f και $x_0 \in D_f$. Η παράσταση $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ορίζεται για

κάθε $x \in D_f$ με $x \neq x_0$ και λέγεται **λόγος μεταβολής της f μεταξύ των x και x_0** .

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια συνάρτηση f λέγεται **παραγωγίσιμη σε $x_0 \in D_f$** , αν το όριο στο x_0 του λόγου μεταβολής της μεταξύ x και x_0 υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή

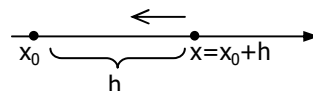
η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , το παραπάνω όριο συμβολίζεται με **$f'(x_0)$** και λέγεται **παράγωγος της f στο x_0** .

Έτσι **$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$** αν το όριο αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός

αριθμός.

Θεωρώντας $x \in D_f$ με $x \neq x_0$, μπορούμε να θέσουμε $x = x_0 + h$, με $h \neq 0$. Τότε ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ x και x_0 που ορίσαμε παραπάνω, μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια του h ως $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \neq 0$.



Προφανώς όταν $x \rightarrow x_0$, τότε $h \rightarrow 0$.

Άρα η παράγωγος της f στο x_0 μπορεί να οριστεί και ως εξής:

$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ αν το όριο αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Για την παράγωγο της συνάρτησης $y = f(x)$ στο x_0 , αντί του συμβόλου $f'(x_0)$, μπορούμε να χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$ ή $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$.

Η παράγωγος της συνάρτησης $y = f(x)$ στο x_0 , ονομάζεται και **ρυθμός μεταβολής** του y ως προς x , για $x = x_0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του D_f , τότε προφανώς η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο αν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

είναι πεπερασμένα (πραγματικοί αριθμοί) και ίσα μεταξύ τους.

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Μια συνάρτηση f λέγεται **παραγωγίσιμη στο D_f ή σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** (υποσύνολο του D_f), όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του D_f ή του (α, β) αντίστοιχα.
- Μια συνάρτηση f λέγεται **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, γνήσιο υποσύνολο του D_f** , όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και επιπλέον ισχύουν $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$
(δηλαδή όπως λέμε είναι παραγωγίσιμη στο α από δεξιά και από στο β αριστερά).

Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το D_f , τότε λέγεται απλά **παραγωγίσιμη**.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ – ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Έστω ότι συμβολίζουμε με A_1 εκείνο το υποσύνολο του D_f που περιέχει όλα τα σημεία στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Αν σε κάθε $x_0 \in A_1$ αντιστοιχίσουμε την παράγωγο $f'(x_0)$, ορίζουμε μια νέα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A_1 , η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος** ή απλά **παράγωγος** (συνάρτηση) **της f** και συμβολίζεται με **f'** .

Ο συμβολισμός αυτός οφείλεται στον **Lagrange**.

Έτσι είναι: $x_0 \xrightarrow{f'} f'(x_0)$, με $x_0 \in A_1$.

Το σύνολο A_1 που αποτελεί το πεδίο ορισμού της f' μπορούμε να το ονομάσουμε **σύνολο παραγωγισιμότητας της f** και συμβολίζεται με **$D_{f'}$** .

ΜΕΜΟ $D_{f'} \subseteq D_f$

Την παράγωγο της συνάρτησης $y=f(x)$ μπορούμε να τη συμβολίσουμε επίσης και με τα σύμβολα του **Leibniz** $\frac{df}{dx}$ ή $\frac{dy}{dx}$.

Αν συμβολίσουμε στη συνέχεια με A_2 , εκείνο το υποσύνολο του A_1 , που περιέχει όλα τα σημεία στα οποία είναι παραγωγίσιμη η νέα συνάρτηση f' και σε κάθε στοιχείο του x_0 αντιστοιχίσουμε την παράγωγο της f' (δηλαδή το $(f')'(x_0)$), τότε ορίζουμε την παράγωγο της παραγώγου της f . Αυτή η νέα συνάρτηση συμβολίζεται με **f''** , λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και έχει πεδίο ορισμού το A_2 .

Έτσι έχουμε $f'' = (f')'$.

Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό του Leibniz, η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $y=f(x)$ συμβολίζεται με τα σύμβολα $\frac{d^2f}{dx^2}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τη **νιοστή παράγωγο της f** , $n \in \mathbb{N}^*$, η οποία για $n \geq 3$ συμβολίζεται με **$f^{(n)}$** . Έτσι γενικά ισχύει $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$, $n \geq 2$.

Όταν για μια συνάρτηση f υπάρχει η $f^{(n)}$, θα λέμε ότι η f είναι **n φορές παραγωγίσιμη**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Προσοχή χρειάζεται στο ότι ο $f'(x_0)$ είναι αριθμός, ενώ η f' είναι συνάρτηση. Βέβαια όταν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε το $f'(x_0)$ είναι η τιμή της συνάρτησης f' στο x_0 , δηλαδή για να βρούμε το $f'(x_0)$, μπορούμε να θέσουμε στον τύπο $y=f'(x)$ όπου x το x_0 .
2. Το $f'(x_0)$ είναι δυνατόν να ορίζεται ΜΟΝΟ αν $x_0 \in D_f$. Έτσι ενώ το όριο της f στο x_0 είναι δυνατόν να υπάρχει ακόμα και όταν το x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα είναι έννοιες που αφορούν υποχρεωτικά σε σημεία που ανήκουν στο πεδίο ορισμού.
3. Προσοχή να μη συγχέουμε το σύμβολο $f^{(v)}$ της νιοστής παραγώγου της f , με το σύμβολο f^v που δίνει τη νιοστή δύναμη της f .

ΘΕΩΡΗΜΑ

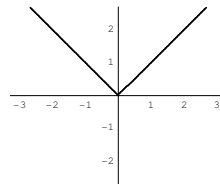
Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε $x_0 \in D_f$, τότε είναι και συνεχής στο x_0 .

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει, δηλαδή μπορεί μια συνάρτηση να είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη σε κάποιο x_0 .

Παράδειγμα συνάρτησης που είναι συνεχής σε x_0 , αλλά όχι παραγωγίσιμη σ' αυτό

Έστω $f(x)=|x|$. Ως γνωστόν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο 0, ως απόλυτο συνεχούς συνάρτησης.

Όμως $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$, οπότε:



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, καθώς $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Άμεσες συνέπειες του παραπάνω θεωρήματος

1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε σύνολο A τότε είναι και συνεχής στο A .
 2. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- Η πρόταση αυτή είναι η αντιθετοαντίστροφη του παραπάνω θεωρήματος.

Έτσι τελικά μια συνάρτηση f **δεν είναι παραγωγίσιμη σε $x_0 \in D_f$** σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .

β) Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ δεν υπάρχει (Στην κατηγορία αυτή εντάσσεται και η

περίπτωση όπου $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$).

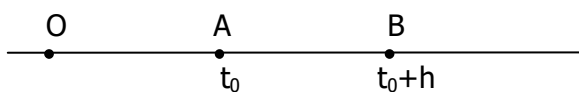
Υ) Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ενώ υπάρχει δεν είναι πραγματικός αριθμός (δηλαδή είναι $-\infty$ ή $+\infty$).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Προφανώς αν η f ορίζεται μόνο αριστερά του x_0 , σε γειτονιά του x_0 με κλειστό άκρο x_0 , τότε ως $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ λαμβάνουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Ανάλογη πρόταση ισχύει δεξιά του x_0 .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΧΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ-ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Έστω κινητό που κινείται πάνω σε έναν άξονα και η θέση του κάθε χρονική στιγμή t εκφράζεται από τη συνάρτηση $y=x(t)$.

Έστω επίσης ότι τη χρονική στιγμή t_0 το κινητό βρισκόταν στη θέση A δηλαδή $x(t_0)$ και τη χρονική στιγμή t_0+h (μετά παρέλευση χρόνου h) βρισκόταν στη θέση B δηλαδή $x(t_0+h)$.



Η **μέση ταχύτητα** του κινητού κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος h που μετακινήθηκε από το A στο B, θα είναι:

$\bar{u} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h}$, δηλαδή ο λόγος μεταβολής της απομάκρυνσης x μεταξύ t_0 και t_0+h .

Αν θεωρήσουμε τώρα ότι το h ολοένα και μικραίνει (απεριόριστα) δηλαδή $h \rightarrow 0$, τότε η χρονική στιγμή t_0+h τείνει να συμπίπτει με την t_0 οπότε ο παραπάνω λόγος μεταβολής τείνει να πάρει μια οριακή τιμή, που δεν είναι τίποτα άλλο παρά η **στιγμιαία ταχύτητα** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 . Έτσι:

$u(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h} = x'(t_0)$, δηλαδή η **στιγμιαία ταχύτητα** τη χρονική στιγμή t_0 είναι η **παράγωγος της απομάκρυνσης στο t_0** .

Με παρόμοιους συλλογισμούς βρίσκουμε ότι η **επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος της ταχύτητας στο t_0** , δηλαδή $a(t_0) = u'(t_0)$.

Τα παραπάνω ήταν λίγο πολύ αναμενόμενα αφού η ταχύτητα εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της απομάκρυνσης και η επιτάχυνση το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας.

Συνοπτικά για την **κίνηση πάνω σε άξονα** με αρχή σημείο O έχουμε:

Έστω υλικό σημείο που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται κάθε χρονική στιγμή t από τη συνάρτηση $y=x(t)$:

Η στιγμιαία ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι: $u(t_0) = x'(t_0)$

Η επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι $a(t_0) = u'(t_0) = x''(t_0)$

Η μέση ταχύτητά του στο διάστημα $[t_1, t_2]$ είναι $\bar{u} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$

Η αρχική του θέση πάνω στον άξονα είναι η $x(0)$

Η αρχική ταχύτητά του είναι η $u(0)$ (αλλιώς $x'(0)$)

Το κινητό ακινητοποιείται στιγμιαία κατά τις χρονικές στιγμές που είναι ρίζες της εξίσωσης $u(t)=0$ (αλλιώς $x'(t)=0$).

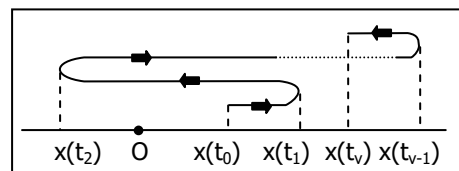
Το κινητό βρίσκεται στα θετικά του άξονα όταν $x(t)>0$, ενώ στα αρνητικά όταν $x(t)<0$.

Το κινητό κινείται προς τα θετικά του άξονα εκείνα τα χρονικά διαστήματα όπου $u(t)>0$, ενώ όταν $u(t)<0$, κινείται προς τα αρνητικά. Στην περίπτωση που η $u(t)$ μηδενίζεται μόνο σε μεμονωμένα σημεία, παίρνουμε τα διαστήματα όπου $u(t) \geq 0$ ή $u(t) \leq 0$ αντίστοιχα (ή αλλιώς, τα διαστήματα όπου η x είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα αντίστοιχα, βλέπε παρακάτω στην παράγραφο της ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ).

Το ολικό διάστημα που διάνυσε το κινητό μεταξύ των χρονικών στιγμών t_0 και t_v υπολογίζεται από τη σχέση

$$s = |x(t_0) - x(t_1)| + |x(t_1) - x(t_2)| + \dots + |x(t_{v-1}) - x(t_v)|$$

όπου $t_1, t_2, \dots, t_{v-1}$ οι διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $u(t)=0$ (δηλαδή οι χρονικές στιγμές μηδενισμού της ταχύτητάς του).



Το πρόσημο της απομάκρυνσης δείχνει τη θέση του κινητού σε σχέση με το O (αν είναι θετικό βρίσκεται δεξιά του O , ενώ αν είναι αρνητικό, αριστερά του O).

Το πρόσημο της ταχύτητας δείχνει φορά κίνησης (αν είναι θετικό, το κινητό κινείται προς τα θετικά του άξονα-προς τα δεξιά, ενώ αν είναι αρνητικό, το κινητό κινείται προς τα αρνητικά του άξονα-προς τα αριστερά). Εναλλακτικά μπορούμε να εξετάσουμε τη μονοτονία της απομάκρυνσης (αν x γνησίως αύξουσα τότε κίνηση προς τα θετικά, ενώ αν x γνησίως φθίνουσα τότε κίνηση προς τα αρνητικά).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΧΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Στην οικονομία συναρτήσεις όπως το κόστος παραγωγής K , η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται με τη βοήθεια της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος.

Ως **οριακό κόστος**, **οριακή είσπραξη** και **οριακό κέρδος** για μια ποσότητα παραγόμενου προϊόντος x_0 ορίζουμε αντίστοιχα τις παραγώγους $K'(x_0)$, $E'(x_0)$ και $P'(x_0)$ των αντίστοιχων συναρτήσεων.

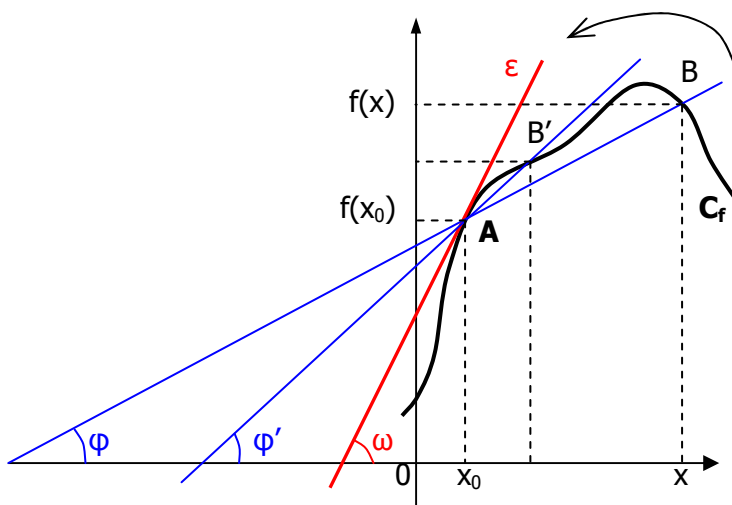
Στην παρακάτω παράγραφο θα δούμε μια χρήση της παραγώγου που αφορά σε διαγράμματα καμπυλών.

3.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΟ x_0 – ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΤΗΣ C_f ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ $A(x_0, f(x_0))$

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 , C_f η γραφική της παράσταση και $B(x, f(x))$ ένα τυχαίο σημείο της C_f διαφορετικό από το $A(x_0, f(x_0))$. Έστω φ η γωνία κλίσης της χορδής AB . Αφού η AB διέρχεται από τα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x, f(x))$ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{AB} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{με } x \neq x_0. \quad \text{Έτσι}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1).$$



Αν υποθέσουμε ότι το B κινούμενο επί της C_f πλησιάζει το A , τότε η AB αλλάζει θέσεις και γωνία κλίσης (το B γίνεται B' , το φ γίνεται φ' κ.τ.λ.) και σε κάποια οριακή θέση που το B τείνει να συμπίπτει με το A , το x τείνει στο x_0 , η AB τείνει να πάρει τη θέση ε και η γωνία φ τείνει να γίνει ω (το ίδιο συμβαίνει αν το B πλησιάζει το A "από αριστερά").

Έτσι $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon\varphi\varphi = \varepsilon\varphi\omega$ (2), οπότε από (1) και (2) έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \varepsilon\varphi\omega$.

Όμως $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$. Επομένως **$f'(x_0) = \varepsilon\varphi\omega$** (3) με την προϋπόθεση

φυσικά ότι η ε δεν είναι κάθετη στον x' (γιατί τότε δεν θα υπήρχε η $\varepsilon\varphi\omega$).

Η οριακή αυτή θέση ε της AB ονομάζεται **εφαπτομένη ευθεία της C_f** στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Άρα η παραπάνω σχέση (3) μας οδηγεί να διατυπώσουμε την παρακάτω πρόταση:

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 , τότε η παράγωγος $f'(x_0)$ μας δίνει την (τριγωνομετρική) εφαπτομένη της γωνίας κλίσης της εφαπτομένης ευθείας ε της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Επομένως το $f'(x_0)$ δίνει, με άλλα λόγια, το **συντελεστή διεύθυνσης** της ε .

Το σημείο A ονομάζεται **σημείο επαφής** της ε με τη C_f .

Ως **κλίση της C_f στο A** ή **κλίση της f στο x_0** , ονομάζουμε την κλίση της εφαπτομένης της C_f στο A, δηλαδή το $f'(x_0)$.

ΜΕΛΕΤΗ ΥΠΑΡΞΗΣ – ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΣΤΟ $A(x_0, f(x_0))$

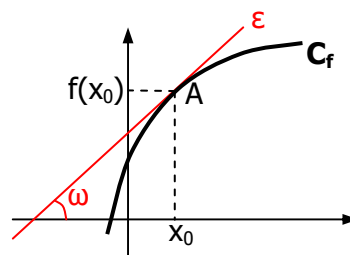
Είναι προφανές ότι για να υπάρχει πιθανότητα ύπαρξης της εφαπτομένης σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$, βασική προϋπόθεση είναι το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

Ελέγχουμε στη συνέχεια αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και:

1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0

Τότε ορίζεται η εφαπτομένη ε της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$, δεν είναι κάθετη στον $x'x$, **έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(x_0)$** και εξίσωση:

$$\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

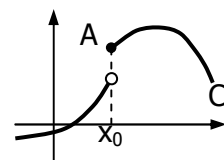


2. Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0

Αναζητάμε το «γιατί»:

α) Γιατί η f δεν είναι συνεχής στο x_0

Τότε δεν ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$.

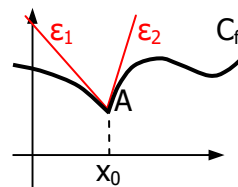


β) Γιατί, αν και η f είναι συνεχής στο x_0 , δεν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{πιθανώς γιατί } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0})$$

Τότε δεν ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$.

Αν τα πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής στο x_0 είναι διαφορετικά, τότε ορίζονται δύο **ημιεφαπτόμενες της C_f στο A** (βλέπε σχήμα, οι ε_1 και ε_2) και το A λέγεται **γωνιακό σημείο** της C_f (γιατί εκεί η C_f σχηματίζει «μύτη», «γωνία»).

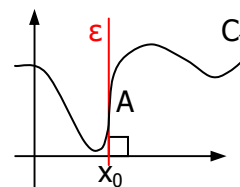


γ) Γιατί αν και η f είναι συνεχής στο x_0 είναι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$$

Τότε ορίζεται η εφαπτομένη ε της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ και είναι ευθεία κάθετη στον $x'x$ (κατακόρυφη), δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης και έχει εξίσωση:

$$\varepsilon : x = x_0$$



Άρα τελικά αν υπάρχει η εφαπτομένη ε της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ θα έχει σίγουρα μία από τις εξισώσεις:

$$\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (\text{ευθεία παράλληλη προς τον } x'x \text{ ή πλάγια})$$

$$\text{ή} \quad \varepsilon : x = x_0 \quad (\text{ευθεία κάθετη στον } x'x)$$

3.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ – ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Α. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Μπορούμε να προσδιορίσουμε τους τύπους των παραγώγων διαφόρων βασικών συναρτήσεων, υπολογίζοντας το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ σε τυχαίο (οποιοδήποτε) x_0 του πεδίου ορισμού τους.

Για παράδειγμα για να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x^2$ παίρνουμε το όριο του λόγου μεταβολής σε $x_0 \in \mathbb{R}$ και έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0) \cdot (x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

Άρα $f'(x_0) = 2x_0$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, οπότε $f'(x) = 2x$. Βρήκαμε λοιπόν ότι η παράγωγος της x^2 είναι η $2x$. Αυτό μπορούμε απλούστερα να το γράφουμε και ως $(x^2)' = 2x$.

Με παρόμοιους τρόπους προσδιορίσαμε τις παρακάτω παραγώγους των βασικών συναρτήσεων:

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ		ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ
1.	ΣΤΑΘΕΡΗ	$(c)' = 0$
2.	ΤΑΥΤΟΤΙΚΗ	$(x)' = 1$
3.	ΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΦΥΣΙΚΟ	$(x^v)' = v \cdot x^{v-1}, v \in \mathbb{N}^*$
4.	ΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ 1. (*)	$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}, a \in \mathbb{R}^*$
5.	2. (*)	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
6.	ΡΙΖΑ 1. (*)	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
7.	ΗΜΙΤΟΝΟ	$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
8.	ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ	$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$
9.	ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ	$(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
10.	ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ	$(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$
11.	ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΜΕ ΒΑΣΗ e	$(e^x)' = e^x$
12.	ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΜΕ ΒΑΣΗ $a > 0$ ΚΑΙ $a \neq 1$ (η σχέση ισχύει και για $a = 1$)	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
13.	ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΜΕ ΒΑΣΗ e 3. (*)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(Για τα (*) του παραπάνω πίνακα, βλέπε «ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ» παρακάτω)

Έτσι για παράδειγμα, αν μας ζητήσουν την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\ln x$ (δηλαδή το $(\ln x)'$), δεν θα χρειαστεί να την υπολογίσουμε με το όριο του λόγου μεταβολής της, αλλά κατ' ευθείαν θα πούμε $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ▼

1. (*)

Όλες οι παραπάνω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στα «ευρύτερα» πεδία ορισμού τους, με εξαίρεση τη συνάρτηση $\sqrt{x}$ και γενικότερα η x^a , όταν $a \in (0, 1)$.

Αυτές οι δύο (στην ουσία ανήκουν στην ίδια μορφή, καθώς $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$), ενώ έχουν πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, δεν είναι παραγωγίσιμες στο 0. Δηλαδή η **$\sqrt{x}$ και γενικότερα η x^a , όταν $a \in (0, 1)$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$** . Γι αυτό το λόγο άλλωστε δίνουμε χωριστά τις παραγώγους των x^v , $v \in \mathbb{N}^*$ και x^a , $a \in \mathbb{R}^*$, παρόλο που είναι ίδιες (διαφέρουν στα σύνολα παραγωγισιμότητας, καθώς η πρώτη είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ενώ στη δεύτερη το σύνολο παραγωγισιμότητας εξαρτάται από το a).

2. (*)

Η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ (5η στον παραπάνω πίνακα) έχει παράγωγο που μπορεί να προκύψει από την παράγωγο της δύναμης x^a , καθώς $\frac{1}{x} = x^{-1}$. Δίνουμε όμως απ' ευθείας την παράγωγό της με χωριστό τύπο, γιατί την συναντάμε πολύ συχνά. Φυσικά οι παράγωγοι άλλων τέτοιων δυνάμεων του x (όπως $\frac{1}{x^2}$ δηλ. x^{-2} , $\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2}$ δηλ. $x^{-\frac{2}{3}}$ κ.τ.λ.) υπολογίζονται με τη βοήθεια της παραγώγου του x^a .

3. (*)

Ισχύει ότι, όχι μόνο $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, αλλά και γενικότερα **$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$** .

Β. ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ		ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ
1. $f+g$	ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	$(f+g)' = f' + g'$
2. $c \cdot f, c \in \mathbb{R}$	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	$(c \cdot f)' = c \cdot f'$
3. $f \cdot g$	ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4. $\frac{1}{g}$		$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$
5. $\frac{f}{g}$	ΠΗΛΙΚΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
6. $f \circ g$	ΣΥΝΘΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ δηλαδή $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Γενικά για n συναρτήσεις (όχι άπειρες) $f_1, f_2, \dots, f_n$ ισχύουν:

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n' \quad \text{και}$$

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot \dots \cdot f_n + \dots + f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n'$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΟ ΤΗΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όσον αφορά στην παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$, αν ονομάσουμε ως «**βασική**» τη συνάρτηση f και ως «**δευτερεύουσα**» τη συνάρτηση g , η παράγωγος της $f \circ g$ είναι η παράγωγος της βασικής στην τιμή της δευτερεύουσας, επί την παράγωγο της δευτερεύουσας.

Η βασική συνάρτηση f στην $f \circ g$ είναι αυτή που χαρακτηρίζει τη σύνθετη. Έτσι για παράδειγμα η συνάρτηση $\eta\mu^2 x$ είναι μια σύνθετη συνάρτηση $f \circ g$ με $f(x) = x^2$ και $g(x) = \eta\mu x$ και επομένως είναι μια σύνθετη δύναμη (λόγω της f) και όχι ένα σύνθετο ημίτονο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

• $(f \circ v(x))' = v \cdot f'(v(x)) \cdot f'(x)$	Σύνθετη δύναμη
• $(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$	Σύνθετη ρίζα
• $(\eta\mu f(x))' = \sigma\upsilon\nu(f(x)) \cdot f'(x)$	Σύνθετο ημίτονο
• $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	Σύνθετη εκθετική
• $(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$	Σύνθετη λογαριθμική

Επίσης ισχύουν τα παρακάτω:

- α)** Αν g παραγωγίσιμη σε x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.
- β)** Άλλο είναι το $f'(g(x))$, που είναι η παράγωγος της f στην τιμή της g και άλλο το $(f(g(x)))'$, που είναι η παράγωγος της σύνθετης.
Επίσης το $(f \circ g)'(x_0)$ είναι η παράγωγος της σύνθετης στο x_0 και δεν μπορεί να γραφτεί $(f(g(x_0)))'$, καθώς $(f(g(x_0)))' = 0$, αφού είναι παράγωγος αριθμού.
- γ)** Θέτοντας $y=f(u)$ και $u=g(x)$ και χρησιμοποιώντας τα σύμβολα του Leibniz, αντί για τον παραπάνω κανόνα $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ παραγωγίσιμης της $f \circ g$, θα είχαμε την παρακάτω σχέση, που είναι γνωστή με το όνομα, **κανόνας της αλυσίδας**:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Τα $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{du}$ και $\frac{du}{dx}$ παρ' όλο που δεν είναι κλάσματα (αλλά παράγωγοι συναρτήσεων), συμπεριφέρονται «σαν κλάσματα».

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΕΙΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ▼

- 1. Όλες οι πράξεις των συναρτήσεων και οι συνθέσεις τους είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με εξαίρεση συναρτήσεις που έχουν ή περιέχουν μορφή $[g(x)]^a$, με $a \in (0, 1)$.** Αυτές οι τελευταίες **ίσως** δεν είναι παραγωγίσιμες στα x_0 που μηδενίζουν τη βάση της δύναμης (τη $g(x)$).

Δηλαδή ισχύει για τις σύνθετες αυτές, ότι ίσχυε για τις αντίστοιχες «απλές», μορφής x^a με $a \in (0, 1)$, με την προσθήκη του «ίσως».

Για να διαπιστώσουμε αν μια τέτοια συνάρτηση είναι ή όχι παραγωγίσιμη στο x_0 όπου μηδενίζεται η βάση $g(x)$, πρέπει να υπολογίσουμε το όριο του λόγου μεταβολής της σε αυτό το x_0 (δηλαδή στα σημεία αυτά μελετάμε την παραγωγισιμότητα με τον ορισμό).

Για παράδειγμα μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η $f(x) = (\sqrt[3]{x+1})^2$ είναι της

μορφής $[g(x)]^a$ με $a \in (0, 1)$ (γιατί γράφεται $(x+1)^{\frac{2}{3}}$) και ενώ είναι συνεχής στο $[-1, +\infty)$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1 (το διαπιστώνουμε μετά από μελέτη στο -1). Άρα είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$.

Αντίθετα η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\sqrt[3]{x+1})^4$, δεν ανήκει στην κατηγορία αυτή, καθώς η

δύναμη $(x+1)^{\frac{4}{3}}$ που περιέχει, έχει εκθέτη $\frac{4}{3} > 1$, άρα είναι παραγωγίσιμη και στο -1

2. Μια μορφή συνάρτησης που χρειάζεται προσοχή κατά την παραγωγή είναι η

$$f(x) = \sqrt[n]{[g(x)]^{2k}}, \text{ με } n, k \in \mathbb{N}^*.$$

Στην περίπτωση αυτή το $g(x)$ παίρνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή και δεν μπορούμε να γράψουμε την f ως δύναμη (σύνθετη) με τη μορφή $f(x) = [g(x)]^{\frac{2k}{n}}$, γιατί αυτό θα σήμαινε $f(x) = (\sqrt[n]{g(x)})^{2k}$, με $g(x) \geq 0$ (δηλαδή θα είχαμε άλλο πεδίο ορισμού, οπότε άλλη συνάρτηση).

Ας δούμε όμως πως παραγωγίζεται μια τέτοια συνάρτηση με ένα παράδειγμα:

Έστω $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ με $x \in \mathbb{R}$.

1ος τρόπος: Η f γράφεται διαδοχικά: $f(x) = \sqrt[3]{|x|^2} = \left(\sqrt[3]{|x|}\right)^2 = |x|^{\frac{2}{3}} =$

$$= \begin{cases} x^{\frac{2}{3}}, & \text{αν } x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{2}{3}}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}.$$

Ως γνωστόν η $x^{\frac{2}{3}}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 (x^a με $a \in (0, 1)$), οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

Για $x > 0$ είναι: $f'(x) = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

Για $x < 0$ είναι: $f'(x) = \left((-x)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot (-x)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (-x)' = -\frac{2}{3} \cdot (-x)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{-x}}.$

Άρα τελικά $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, & \text{αν } x > 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt[3]{-x}}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}.$

2ος τρόπος: Η f γράφεται $f(x) = (x^2)^{\frac{1}{3}}$. Στη συνέχεια και αφού δείξουμε, με τον ορισμό, ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, την παραγωγίζουμε στο $\mathbb{R}^*$, ως σύνθετη

δύναμη με $f'(x) = [(x^2)^{\frac{1}{3}}]' = \frac{1}{3} \cdot (x^2)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (x^2)' = \frac{1}{3} \cdot (x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3 \cdot (\sqrt[3]{x^2})^2}.$

Η παράγωγος αυτή αν διακρίνουμε περιπτώσεις για $x > 0$ και $x < 0$ καταλήγει σε αυτήν που προσδιορίσαμε με τον 1ο τρόπο.

3. Επίσης η παραγωγή της συνάρτησης $f(x) = [g(x)]^{h(x)}$ με $g(x) > 0$, μπορεί να μας προβληματίσει καθώς, με τη μορφή αυτή, δεν φαίνεται να είναι ούτε απλή συνάρτηση ούτε σύνθετη. Για να μετασχηματίσουμε τον τύπο της και να βρούμε την παράγωγό της, χρησιμοποιούμε το ακόλουθο τέχνασμα:

Από ιδιότητα εκθετικών για $x > 0$ είναι $x = e^{\ln x}$, οπότε

$$[g(x)]^{h(x)} = e^{\ln[g(x)]^{h(x)}} = e^{h(x) \cdot \ln g(x)} \quad (1).$$

Με τον τρόπο αυτό μετασχηματίσαμε την αρχική συνάρτηση σε σύνθετη εκθετική (σύνθεση των e^x και $h(x) \cdot \ln g(x)$). Άρα:

$$f'(x) = (e^{h(x) \cdot \ln g(x)})' = e^{h(x) \cdot \ln g(x)} \cdot (h(x) \cdot \ln g(x))' = [g(x)]^{h(x)} \cdot (h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot (\ln g(x))') =$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

το ξαναγράφουμε στην αρχική του μορφή

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = (x^2 + 1)^{\ln x}$, με $x > 0$.

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τα παραπάνω (σχέση (1)) είναι $f(x) = e^{\ln x \cdot \ln(x^2 + 1)}$ οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{\ln x \cdot \ln(x^2 + 1)} \right)' = e^{\ln x \cdot \ln(x^2 + 1)} \cdot [\ln x \cdot \ln(x^2 + 1)]' = \\ &= (x^2 + 1)^{\ln x} \cdot [(\ln x)' \cdot \ln(x^2 + 1) + \ln x \cdot (\ln(x^2 + 1))'] = \\ &= (x^2 + 1)^{\ln x} \cdot \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(x^2 + 1) + \ln x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)' \right] = \\ &= (x^2 + 1)^{\ln x} \cdot \left[\frac{\ln(x^2 + 1)}{x} + \ln x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \right] = (x^2 + 1)^{\ln x} \cdot \left[\frac{\ln(x^2 + 1)}{x} + \frac{2x \cdot \ln x}{x^2 + 1} \right]. \end{aligned}$$

ΕΤΣΙ ΤΕΛΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ, ΕΧΟΥΜΕ ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ

	Συναρτήσεις μονού τύπου	Απόλυτα συναρτήσεων μονού τύπου	Συναρτήσεις πολλαπλού τύπου
ΣΥΝΕΧΕΙΑ	Είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.	Είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους ως απόλυτα συνεχών.	Είναι συνεχείς στα υποδιαστήματα που ορίζεται κάθε τύπος, εκτός από τα πιθανά σημεία ασυνέχειας, όπου χρειάζεται μελέτη με τη βοήθεια του ορίου.
ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ	Είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με εξαίρεση συναρτήσεις που έχουν ή περιέχουν μορφή $[g(x)]^a$, με $a \in (0, 1)$, οι οποίες ίσως δεν είναι παραγωγίσιμες στις ρίζες του $g(x)$, όπου και χρειάζεται έλεγχος με το όριο του λόγου μεταβολής.	Τις αναλύουμε σε πολλαπλό τύπο, «βγάζοντας» τα απόλυτα και εργαζόμαστε όπως στις συναρτήσεις πολλαπλού τύπου.	Είναι παραγωγίσιμες στα υποδιαστήματα που ορίζεται κάθε τύπος, (εκτός αν ο τύπος έχει ή περιέχει τη μορφή $[g(x)]^a$, με $a \in (0, 1)$) με εξαίρεση τα πιθανά σημεία ασυνέχειας, όπου χρειάζεται μελέτη με τη βοήθεια του ορίου του λόγου μεταβολής.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

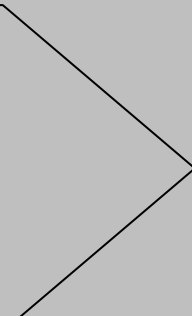
1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΟΠΟΙΕΣ ΖΗΤΑΜΕ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f

α) Αν ο τύπος της f δεν αναλύεται σε πολλαπλό και γενικά όταν μπορούμε να προσδιορίσουμε που είναι παραγωγίσμη η f χωρίς ιδιαίτερη μελέτη

- Πρέπει αρχικά να βρούμε σε ποιο σύνολο είναι παραγωγίσμη η f και να το δικαιολογήσουμε. Για να γίνει αυτό εύκολα πρέπει να χαρακτηρίσουμε τη συνάρτηση με έναν από τους παρακάτω χαρακτηρισμούς, χαρακτηρισμοί οι οποίοι θα μας βοηθήσουν επίσης να επιλέξουμε την κατάλληλη μέθοδο παραγωγίσης:

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Κάθε συνάρτηση που ο τύπος της δεν αναλύεται σε πολλαπλό θα είναι:

1. Σταθερή	ή		Απλή ή σύνθετη (*)
2. Άθροισμα (ή διαφορά) συναρτήσεων	ή		
3. Γινόμενο αριθμού επί συνάρτηση	ή		
4. Γινόμενο συναρτήσεων	ή		
5. Πηλίκο συναρτήσεων	ή		
6. Δύναμη ή ρίζα	ή		
7. Ημίτονο	ή		
8. Συνημίτονο	ή		
9. Εφαπτομένη	ή		
10. Συνεφαπτομένη	ή		
11. Εκθετική	ή		
12. Λογαριθμική	ή		

(*) δηλαδή για παράδειγμα μια ρίζα μπορεί να είναι $\sqrt{x}$, οπότε απλή ή $\sqrt{x+1}$, οπότε είναι σύνθετη ρίζα και κατά τον χαρακτηρισμό μπορούμε να γράψουμε «σύνθεση παραγωγισίμων».

Ειδικά για την εκθετική να μη λησμονούμε και τη μορφή $[g(x)]^{h(x)}$ με $g(x) > 0$, που είδαμε παραπάνω στην παρατήρηση 3.

- Στη συνέχεια παραγωγίζουμε την f με τη βοήθεια των παραγώγων των βασικών συναρτήσεων και των κανόνων παραγωγίσης και φυσικά σύμφωνα με τον χαρακτηρισμό που τις δώσαμε.

Η παραγωγή τελειώνει όταν δεν υπάρχουν άλλες παράγωγοι προς υπολογισμό και αφού γραφεί η f' στην καλύτερη μορφή της.

Εκτός από τους παραπάνω χαρακτηρισμούς, μπορούμε να θεωρούμε ότι και οι πολυωνυμικές και οι ρητές συναρτήσεις είναι παραγωγίσμες στα πεδία ορισμού τους.

Παράδειγμα 1

β) Αν η f έχει πολλαπλό τύπο

- Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα χωριστά στα διαστήματα όπου η f έχει συγκεκριμένο τύπο, **χωρίς τα πιθανά σημεία ασυνέχειας**, προσδιορίζοντας κάθε φορά την παράγωγο.
- Βρίσκουμε με τη βοήθεια του λόγου μεταβολής αν η f είναι παραγωγίσιμη στα πιθανά σημεία ασυνέχειας.
- Τέλος γράφουμε τον τύπο της f' , ανάλογα με τα αποτελέσματα της μελέτης.

Για παράδειγμα η μελέτη της παραγωγισιμότητας της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x < 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ \eta\mu x, & \text{αν } 0 < x < \pi \\ \sin(2x + \frac{\pi}{4}), & \text{αν } x \geq \pi \end{cases}$$

θα γινόταν χωριστά στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, \pi)$ και $(\pi, +\infty)$ (δικαιολογώντας με λόγια σε καθένα, γιατί είναι παραγωγίσιμη η f) και με τη βοήθεια του ορίου του λόγου μεταβολής στα σημεία 0 και π .

Παράδειγμα 2 γ), 2 δ), 2 ε)**γ) Αν η f δεν έχει πολλαπλό τύπο, αλλά υπάρχουν σημεία του D_f στα οποία δεν γνωρίζουμε αν είναι παραγωγίσιμη**

Όπως για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6} + 1$. Αν και το πεδίο ορισμού της είναι το $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$, δεν γνωρίζουμε αν είναι παραγωγίσιμη

στις ρίζες 2 και 3 του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$, λόγω της δύναμης $(x^2 - 5x + 6)^{\frac{1}{3}}$ που περιέχει (βλέπε «Σημαντική παρατήρηση 1», στα προηγούμενα).

Έτσι μελετάμε την παραγωγισιμότητα της f στο $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, βρίσκουμε εκεί την f' και στη συνέχεια με τη βοήθεια του λόγου μεταβολής, ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα στα 2 και 3. Τέλος γράφουμε τον τύπο της f' ανάλογα με τα συμπεράσματά μας. Αν η f αποδειχθεί παραγωγίσιμη στο 2 ή το 3, τότε θα γράψουμε την f' με πολλαπλό τύπο (ένας κλάδος για το $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ και χωριστός κλάδος για το 2 ή το 3).

Παραδείγματα 2 α), 2 β), 3**2. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΦΟΡΟΥΝ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΟ ΤΗΣ f ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ $x_0 \in D_f$** **α) Αν ζητάμε την παράγωγο $f'(x_0)$ και****i) γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0**

Προσδιορίζουμε την $f'(x)$ και στη συνέχεια θέτουμε όπου x το x_0 .

ii) δεν γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ή δεν γνωρίζουμε καν τον τύπο της

Βρίσκουμε την παράγωγο στο x_0 με τη βοήθεια του ορίου του λόγου μεταβολής.

Παράδειγμα 4

β) Παραμετρικές ασκήσεις που ζητούν την τιμή της παραμέτρου ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

Απαιτούμε αρχικά η f να είναι συνεχής στο x_0 $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \right)$ και

προσδιορίζουμε μια συνθήκη (1) για τις παραμέτρους.

Στη συνέχεια απαιτούμε η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , δηλαδή να είναι πεπερασμένο το όριο του λόγου μεταβολής στο x_0 και αν χρειαστούν πλευρικά όρια, αυτά να είναι ίσα και πεπερασμένα. Από την απαίτηση αυτή προκύπτει μια δεύτερη συνθήκη (2). Η χρήση των δύο αυτών συνθηκών θα μας δώσει τις τιμές των παραμέτρων.

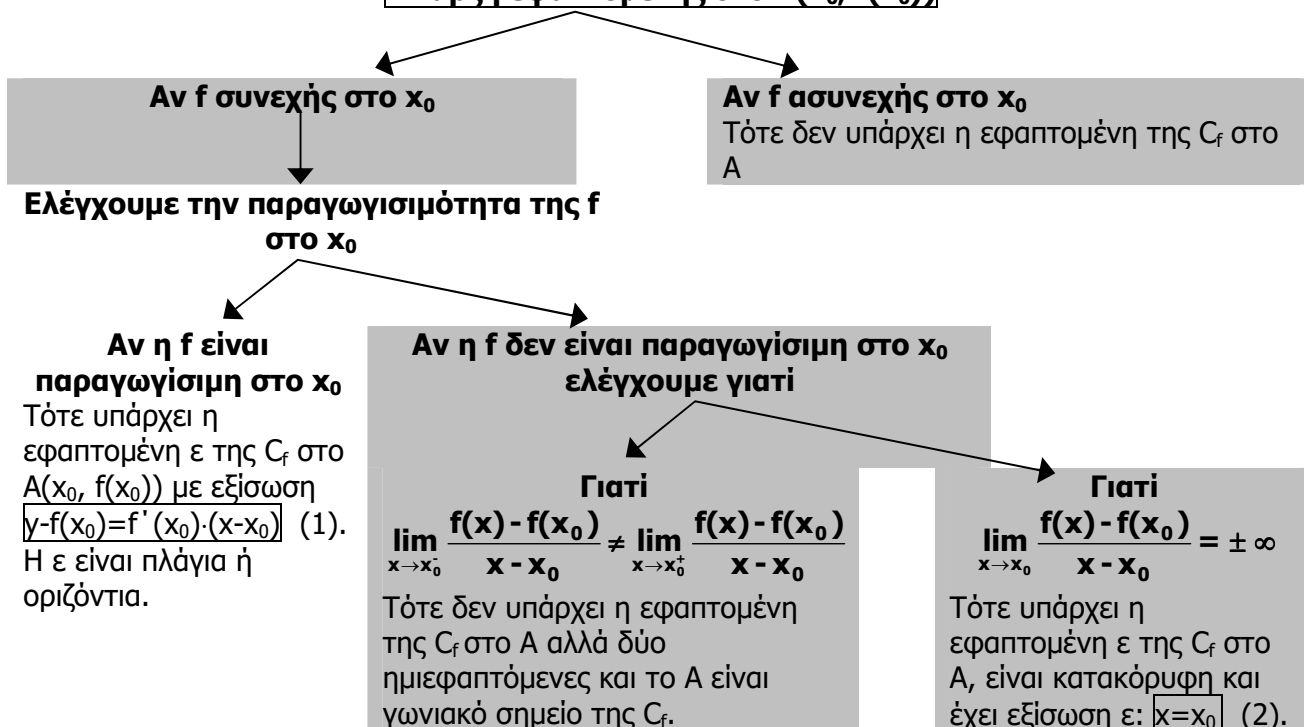
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Πολλές φορές η συνθήκη (1) που προκύπτει από τη συνέχεια, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί κατά την απαίτηση της παραγωγισιμότητας, ώστε να υπολογιστεί το όριο του λόγου μεταβολής και να βρεθεί η συνθήκη (2).

Παράδειγμα 5

3. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΦΕΡΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ ΤΗΣ $A(x_0, f(x_0))$

Έστω συνάρτηση f με γραφική παράσταση C_f . Όσον αφορά στην ύπαρξη εφαπτομένης σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ισχύουν τα εξής:

Ύπαρξη εφαπτομένης στο $A(x_0, f(x_0))$



ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Οι περιπτώσεις που έχουν την γκρι γραμμοσκίαση είναι εκτός ύλης.

Έτσι ο έλεγχος της παραγωγισιμότητας στο x_0 είναι τυπικός, αφού η f θα είναι σίγουρα παραγωγίσιμη στο x_0 .

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ▼

1. Σε κάθε άσκηση που αφορά σε εφαπτομένη γραφικής παράστασης συνάρτησης f , είναι καλό να ξεκινάμε αναφέροντας πού είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση.
2. Στη συνέχεια συνήθως βοηθά να γράφουμε τη φράση:
«Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ».
Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής που μας δίνει η άσκηση. Αν το σημείο επαφής δεν είναι δοσμένο, το συμβολίζουμε εμείς. Είναι σημαντικό να μην ξεκινήσουμε τη λύση χωρίς να ορίσουμε σημείο επαφής. Ουσιαστικά η παραγωγισιμότητα που αναφέραμε στο 1ο βήμα μας ενδιαφέρει για να ελέγξουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
3. Όταν μας λένε άμεσα ή έμμεσα ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ υπάρχει και δεν είναι κατακόρυφη, τότε γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η εφαπτομένη στο x_0 θα έχει την εξίσωση (1) του παραπάνω δένδροδιαγράμματος.
4. Συμβολίζουμε κάθε ευθεία που συμμετέχει στην άσκηση (π.χ. ε' , ε_1 , ζ κ.τ.λ.).
5. Σε πολλές ασκήσεις δεν χρειάζεται αυτή καθαυτή η εξίσωση της εφαπτομένης, αλλά μόνο ο συντελεστής διεύθυνσής της $f'(x_0)$. Αν δεν χρειαζόμαστε την εξίσωση της εφαπτομένης, δεν είναι ανάγκη να την προσδιορίσουμε.
6. α) Αν θέλουμε η εφαπτομένη αυτή ε να είναι παράλληλη προς τον $x'x$, λέμε ότι: «για να είναι $\varepsilon // x'x$ πρέπει και αρκεί $f'(x_0)=0$ ».
β) Αν θέλουμε η εφαπτομένη αυτή ε να είναι παράλληλη προς μια ευθεία $\varepsilon_1: y=\lambda x+\beta$, λέμε ότι: «για να είναι $\varepsilon // \varepsilon_1$ πρέπει και αρκεί $f'(x_0)=\lambda$ », ενώ αν πρέπει να είναι κάθετη στην ε_1 λέμε ότι: «για να είναι $\varepsilon \perp \varepsilon_1$ πρέπει και αρκεί $f'(x_0) \cdot \lambda = -1$ ».
γ) Αν πρέπει η εφαπτομένη ε να σχηματίζει γωνία ω με τον $x'x$, με $\omega \neq \frac{\pi}{2}$, λέμε ότι: «για να σχηματίζει η ε γωνία ω με τον $x'x$, πρέπει και αρκεί $f'(x_0)=\tan \omega$ ».
δ) Αν η ε είναι κάθετη στον $x'x$, τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσής της και η εξίσωσή της είναι η $x=x_0$.
7. Πληροφορίες όπως αυτές της παρατήρησης 6, μπορεί να αποδειχθούν πολύ χρήσιμες για τον προσδιορισμό της τετμημένης x_0 του σημείου επαφής. Έτσι αν για παράδειγμα είναι $f'(x_0)=2$, τότε αφού προσδιορίσουμε την $f'(x)$, λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=2$ ως προς x_0 .
8. Οι συντεταγμένες του σημείου επαφής $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης $y=f(x)$ μιας συνάρτησης και της ευθείας $y=\lambda x+\beta$, βρίσκονται ως πολλαπλή

(διπλή, τριπλή κ.τ.λ.) λύση του συστήματος $\begin{cases} y = f(x) \\ y = \lambda x + \beta \end{cases}$. Κάθε μονή λύση του

συστήματος αυτού, δίνει ένα σημείο τομής τους και όχι σημείο επαφής.

9. Αν $B(x_1, y_1)$ είναι σημείο της εφαπτομένης ε της C_f , μπορούμε να ελέγξουμε αν το B ανήκει στη C_f , ελέγχοντας αν ισχύει $y_1=f(x_1)$
10. Δύο γραφικές παραστάσεις C_f και C_g δέχονται **κοινή εφαπτομένη (μη κατακόρυφη) σε κοινό τους σημείο $A(x_0, y_0)$** , αν και μόνο αν ισχύει

$$\left. \begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0) \\ f'(x_0) &= g'(x_0) \end{aligned} \right\}.$$

Η πρώτη των εξισώσεων αυτών εξασφαλίζει ότι το A είναι κοινό σημείο των C_f και C_g και η δεύτερη ότι οι εφαπτόμενες στο σημείο αυτό έχουν ίδιους συντελεστές διεύθυνσης, οπότε ταυτίζονται.

11. Δύο γραφικές παραστάσεις C_f και C_g δέχονται **κοινή εφαπτομένη (μη κατακόρυφη) σε δύο διαφορετικά σημεία τους $A(x_0, y_0)$ και $B(x_1, y_1)$** αντίστοιχα, όταν $f'(x_0)=g'(x_1)$ και επιπλέον οι συντεταγμένες του ενός (π.χ. του B) επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης της αντίστοιχης γραφικής παράστασης στο άλλο (της εφαπτομένης της C_f στο A).

Η πρώτη σχέση εξασφαλίζει ότι οι εφαπτόμενες στα A και B έχουν ίδιους συντελεστές διεύθυνσης και η δεύτερη ότι έχουν κοινό σημείο, οπότε ταυτίζονται. Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο A δίνεται από τη σχέση $y-f(x_0)=f'(x_0) \cdot (x-x_0)$, για να επαληθεύεται από το $B(x_1, y_1)$ πρέπει και αρκεί να ισχύει $y_1-f(x_0)=f'(x_0) \cdot (x_1-x_0)$. Άρα οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες είναι οι:

$$\left. \begin{aligned} f'(x_0) &= g'(x_1) \\ g(x_1) - f(x_0) &= f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) \end{aligned} \right\}$$

Υπενθυμίσεις

α) Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f και g προσδιορίζονται ως λύσεις του συστήματος $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$.

β) Δεν ξεχνάμε ότι η εξίσωση μιας μη κατακόρυφης ευθείας που:

- διέρχεται από γνωστό σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει γνωστό λ είναι

$$y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0).$$

- διέρχεται από δύο γνωστά σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Παραδείγματα 6, 7, 8, 9, 10

4. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΠΟΥ ΖΗΤΑΜΕ ΤΟ ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΕΝΟΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ

Έστω ότι ζητάμε το ρυθμό μεταβολής (παράγωγο) ενός μεγέθους, έστω $V(t)$, όταν $t=t_0$, δηλαδή το $V'(t_0)$.

1ο βήμα: Μετατρέπουμε, αν χρειάζεται, τις μονάδες που δίνονται, ώστε να ανήκουν στο ίδιο σύστημα μέτρησης.

2ο βήμα: Ορίζουμε τις μεταβλητές με βάση τις οποίες θα μελετήσουμε το πρόβλημα και συμβολίζουμε τα δεδομένα και τα ζητούμενα με Μαθηματικό τρόπο (π.χ. την ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_0 με $x'(t_0)$ και όχι $u(t_0)$).

Αν χρειάζεται σχήμα αυτό θα πρέπει να αφορά σε μια τυχαία αποτύπωση του προβλήματος (και όχι κατά τις αρχικές συνθήκες ούτε για $t=t_0$).

3ο βήμα: Βρίσκουμε μια σχέση (**Σ**) που να δίνει ή να περιέχει το V από γνωστό τύπο ή το σχήμα (ίσως και με τη βοήθεια της Γεωμετρίας του σχήματος).

Στη συνέχεια:

- Αν μπορούμε να εκφράσουμε το V με τη βοήθεια μόνο της μεταβλητής t , τότε βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $V(t)$, δηλαδή βρίσκουμε τις επιτρεπτές τιμές του t , εξετάζοντας:

1) τους περιορισμούς του τύπου $V(t)$

2) τη φυσική σημασία του t (μήπως είναι μήκος, μήπως χρόνος κ.τ.λ.) και

3) τη σχέση του t με άλλες μεταβλητές. Έτσι αν για παράδειγμα $r=1-t^2$ τότε ίσως προκύψουν και άλλοι περιορισμοί για το t από τις επιτρεπτές τιμές του r .

Στη συνέχεια **παραγωγίζουμε τη (Σ)** και μετά **θέτουμε όπου t το t_0** .

Έτσι τελικά θα προσδιορίσουμε το $V'(t_0)$.

- Αν το V εξαρτάται από το t μέσω μιας άλλης μεταβλητής r (δηλαδή $r(t)$), τότε **παραγωγίζουμε τη (Σ)** που περιέχει σύνθετες συναρτήσεις.

Για παράδειγμα αν ζητάμε το ρυθμό μεταβολής του όγκου V μιας σφαίρας ως προς τον χρόνο t και η ακτίνα r της σφαίρας εξαρτάται από το χρόνο t , τότε

$$V'(t) = \left(\frac{4}{3}\pi \cdot r^3(t)\right)' = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2(t) \cdot r'(t) = 4\pi \cdot r^2(t) \cdot r'(t).$$

Τέλος **θέτουμε όπου t το t_0** .

ΠΡΟΣΟΧΗ

Αν ο ρυθμός μεταβολής για $t=t_0$ είναι θετικός, σημαίνει ότι το μέγεθος V τείνει να αυξηθεί για $t=t_0$, ενώ αν είναι αρνητικός, το V τείνει να ελαττωθεί.

Αν ένα μέγεθος $V(t)$ μας λένε π.χ. ότι μειώνεται με ρυθμό 4, τότε χρησιμοποιούμε το ρυθμό μεταβολής με αρνητικό πρόσημο, δηλαδή θέτουμε $V'(t) = -4$

Οι **μονάδες του ρυθμού μεταβολής** (εδώ) είναι «μονάδα V ανά μονάδα t ».

Παράδειγμα 11

5. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΙΝΗΣΗΣ

Εφαρμόζουμε όσα αναφέραμε στην υποπαράγραφο "ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΧΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ-ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ"

Παράδειγμα 12**6. ΑΛΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

Τέλος μπορούμε να συναντήσουμε άλλες ασκήσεις (αποδεικτικές κ.τ.λ.) οι οποίες λύνονται κατά περίπτωση, με τη βοήθεια της θεωρίας των παραγώγων.

Παράδειγμα 13, 14, 15**ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

1. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

α) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 1)$

β) $g(x) = (2x + 1)^2$

γ) $h(x) = x \cdot \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x$

δ) $\varphi(x) = \frac{1}{(x + 2)^{10}}$

ε) $f(t) = \frac{\ln t}{1 + \eta \mu t}$

ζ) $g(x) = (\eta \mu \sqrt{x})^2, x > 0$

η) $h(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

θ) $\varphi(x) = \ln x \cdot e^{2x-1}$

ι) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

κ) $g(x) = x^{\eta \mu x}, x > 0$

λ) $h(x) = x^{\sqrt{x}}, x > 0$

μ) $\varphi(x) = (\eta \mu x)^{\sigma \upsilon \nu x}, x \in (0, \pi)$

α) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 1)$

$D_f = \mathbb{R}$, f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγισίμων.

Η παραγωγή συμφέρει να γίνει αφού μετατρέψουμε την f από γινόμενο σε άθροισμα.

$$f(x) = \overset{\text{μετα τις πράξεις}}{\dots} = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2,$$

$$\text{οπότε } f'(x) = (x^4 + x^3 - x^2 + x - 2)' = (x^4)' + (x^3)' - (x^2)' + (x)' - (2)' = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στα επόμενα παραδείγματα οι παραγωγίσεις θα παρουσιάζονται συνοπτικότερα.

β) $g(x) = (2x + 1)^2$

$D_g = \mathbb{R}$, g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων.

1ος τρόπος: $g'(x) = [(2x + 1)^2]' = 2 \cdot (2x + 1) \cdot (2x + 1)' = 2 \cdot (2x + 1) \cdot 2 = 4 \cdot (2x + 1)$

2ος τρόπος: $g(x) = \dots = 4x^2 + 4x + 1$, οπότε $g'(x) = (4x^2 + 4x + 1)' = 8x + 4$.

3ος τρόπος: Με τον κανόνα της αλυσίδας αν θεωρήσουμε ως $y = u^2$ και $u = 2x + 1$ έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot 2 = 4u = 4 \cdot (2x + 1).$$

γ) $h(x) = x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

$D_h = \mathbb{R}$, h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων.

$$h'(x) = (x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' = (x \cdot \eta\mu x)' + (\sigma\upsilon\nu x)' = (x)' \cdot \eta\mu x + x \cdot (\eta\mu x)' - \eta\mu x = \eta\mu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = x \cdot \sigma\upsilon\nu x.$$

$$\delta) \varphi(x) = \frac{1}{(x+2)^{10}}$$

$D_\varphi = \mathbb{R} - \{-2\}$, φ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{-2\}$ ως πηλίκo παραγωγισίμων.

$$\begin{aligned} \text{1ος τρόπος: } \varphi(x) &= (x+2)^{-10} \text{ (σύνθετη δύναμη), άρα } \varphi'(x) = -10 \cdot (x+2)^{-10-1} \cdot (x+2)' = \\ &= -10 \cdot (x+2)^{-11} = -\frac{10}{(x+2)^{11}}. \end{aligned}$$

2ος τρόπος: Αν την παραγωγίσουμε σύμφωνα με την παραγωγή της $\frac{1}{g}$, (βλέπε πίνακα κανόνων παραγωγίσης) έχουμε:

$$\varphi'(x) = \left(\frac{1}{(x+2)^{10}} \right)' = -\frac{[(x+2)^{10}]'}{[(x+2)^{10}]^2} = -\frac{10 \cdot (x+2)^9 \cdot (x+2)'}{(x+2)^{20}} = -\frac{10 \cdot \cancel{(x+2)}^9}{(x+2)^{20-9}} = -\frac{10}{(x+2)^{11}}.$$

$$\epsilon) f(t) = \frac{\ln t}{1 + \eta\mu t}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{ t \in \mathbb{R} / \begin{matrix} t > 0 \\ \eta\mu t \neq -1 \end{matrix} \right\} = \left\{ t \in \mathbb{R} / \begin{matrix} t > 0 \\ \eta\mu t \neq \eta\mu \frac{3\pi}{2} \end{matrix} \right\} = \left\{ t \in \mathbb{R} / \begin{matrix} t > 0 \\ t \neq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ t \neq 2k\pi + \pi - \frac{3\pi}{2} \end{matrix} \right\} = \\ &= \left\{ t \in \mathbb{R} / \begin{matrix} t > 0 \\ t \neq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ t \neq 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right\}. \text{ Επειδή } 2k\pi + \frac{3\pi}{2} = 2k\pi + 2\pi - \frac{\pi}{2} = 2 \cdot (k+1) \cdot \pi - \frac{\pi}{2} = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2}, \text{ οι} \end{aligned}$$

δύο τελευταίες σχέσεις του πεδίου ορισμού είναι ίδιες.

$$\text{Άρα } D_f = (0, +\infty) - \left\{ 2k\pi - \frac{\pi}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty) - \left\{ 2k\pi - \frac{\pi}{2} \right\}$ ως πηλίκo παραγωγισίμων με:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(\frac{\ln t}{1 + \eta\mu t} \right)' = \frac{(\ln t)' \cdot (1 + \eta\mu t) - \ln t \cdot (1 + \eta\mu t)'}{(1 + \eta\mu t)^2} = \frac{\frac{1}{t} \cdot (1 + \eta\mu t) - \ln t \cdot \sigma\upsilon\nu t}{(1 + \eta\mu t)^2} = \\ &= \frac{\frac{1 + \eta\mu t - t \cdot \ln t \cdot \sigma\upsilon\nu t}{t}}{(1 + \eta\mu t)^2} = \frac{1 + \eta\mu t - t \cdot \ln t \cdot \sigma\upsilon\nu t}{t \cdot (1 + \eta\mu t)^2}. \end{aligned}$$

$$\zeta) g(x) = (\eta\mu\sqrt{x})^2, x > 0$$

$$D_g = (0, +\infty) \text{ (δίνεται)}$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων.

$$g'(x) = [(\eta\mu\sqrt{x})^2]' = 2\eta\mu\sqrt{x} \cdot (\eta\mu\sqrt{x})' = 2\eta\mu\sqrt{x} \cdot \text{συν}\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' = 2\eta\mu\sqrt{x} \cdot \text{συν}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$\boxed{\text{Σύνθεση των } u^2 \text{ και } u = \eta\mu\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\text{Σύνθεση των } \eta\mu \text{ και } u = \sqrt{x}}$$

$$= \eta\mu 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\eta\mu 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

$$\eta) h(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$$

Είναι προφανές ότι $D_h = (0, +\infty)$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως ηλίκιο παραγωγισίμων συναρτήσεων, αλλά για να γίνει ευκολότερη η παραγωγή μας συμφέρει να «σπάσουμε» το κλάσμα ώστε να παραγωγίσουμε την h ως άθροισμα. Έτσι:

$$h(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{2-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{1}{6}}.$$

Σε κάθε παρόμοια περίπτωση κατά την οποία η συνάρτηση περιέχει μόνο δυνάμεις και ρίζες της ίδιας παράστασης, συμφέρει να μετατρέπουμε τις ρίζες σε δυνάμεις, ώστε τελικά να έχουμε παραγωγή δυνάμεων.

$$h'(x) = (x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{1}{6}})' = \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}-1} + \frac{1}{6} \cdot x^{\frac{1}{6}-1} = \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{6} \cdot x^{-\frac{5}{6}} = \frac{5}{3} \cdot (\sqrt[3]{x})^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(\sqrt[6]{x})^5} =$$

$$= \frac{5 \cdot (\sqrt[3]{x})^2}{3} + \frac{1}{6 \cdot (\sqrt[6]{x})^5}$$

$$\theta) \varphi(x) = \ln x \cdot e^{2x-1}$$

$$D_\varphi = (0, +\infty).$$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων.

$$\varphi'(x) = (\ln x)' \cdot e^{2x-1} + \ln x \cdot (e^{2x-1})' = \frac{1}{x} \cdot e^{2x-1} + \ln x \cdot e^{2x-1} \cdot (2x-1)' = \frac{e^{2x-1}}{x} + 2 \cdot \ln x \cdot e^{2x-1} =$$

$$= e^{2x-1} \cdot \left(\frac{1}{x} + 2 \cdot \ln x \right).$$

$$\iota) f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^x - e^{-x} \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^x - \frac{1}{e^x} \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \neq 0 \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} / e^{2x} - 1 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^{2x} \neq 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / 2x \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \right\} = \mathbb{R}^*.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως ηλίκιο παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Κατά την παρακάτω παραγωγή χρησιμοποιείται, όπου χρειάζεται, απευθείας ότι $(e^x)' = e^x \cdot (-x)' = e^x \cdot (-1) = -e^x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right)' = \frac{(e^x + e^{-x})' \cdot (e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x})'}{(e^x - e^{-x})^2} = \\ &= \frac{(e^x - e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x \cdot e^{-x} - e^{2x} - e^{-2x} - 2e^x \cdot e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2} = -\frac{4e^x \cdot e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2} = -\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2}, \end{aligned}$$

καθώς $e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$.

κ) $g(x) = x^{\eta\mu x}$, $x > 0$ $D_g = (0, +\infty)$ (δίνεται)

Από την παρατήρηση 4 της θεωρίας έχουμε ότι $g(x) = e^{\eta\mu x \cdot \ln x}$, οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων.

$$\begin{aligned} g'(x) &= (e^{\eta\mu x \cdot \ln x})' = e^{\eta\mu x \cdot \ln x} \cdot (\eta\mu x \cdot \ln x)' = x^{\eta\mu x} \cdot [(\eta\mu x)' \cdot \ln x + \eta\mu x \cdot (\ln x)'] = \\ &= x^{\eta\mu x} \cdot (\sigma\upsilon\nu x \cdot \ln x + \eta\mu x \cdot \frac{1}{x}) = x^{\eta\mu x} \cdot (\sigma\upsilon\nu x \cdot \ln x + \frac{\eta\mu x}{x}). \end{aligned}$$

λ) $h(x) = x^{\sqrt{x}}$, $x > 0$ $D_h = (0, +\infty)$ (δίνεται)

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα είναι $h(x) = e^{\sqrt{x} \cdot \ln x}$, οπότε η παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων.

$$\begin{aligned} h'(x) &= (e^{\sqrt{x} \cdot \ln x})' = e^{\sqrt{x} \cdot \ln x} \cdot (\sqrt{x} \cdot \ln x)' = x^{\sqrt{x}} \cdot [(\sqrt{x})' \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot (\ln x)'] = \\ &= x^{\sqrt{x}} \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \right] = x^{\sqrt{x}} \cdot \left[\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right] = x^{\sqrt{x}} \cdot \left[\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} \right] = x^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

μ) $\varphi(x) = (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}$, $x \in (0, \pi)$

$D_\varphi = (0, \pi)$ (δίνεται)

Είναι $\varphi(x) = e^{\sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(\eta\mu x)}$, οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= (e^{\sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(\eta\mu x)})' = e^{\sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(\eta\mu x)} \cdot [\sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(\eta\mu x)]' = \\ &= (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x} \cdot [(\sigma\upsilon\nu x)' \cdot \ln(\eta\mu x) + \sigma\upsilon\nu x \cdot (\ln(\eta\mu x))'] = \\ &= (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x} \cdot [-\eta\mu x \cdot \ln(\eta\mu x) + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{1}{\eta\mu x} \cdot (\eta\mu x)'] = \\ &= (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x} \cdot [-\eta\mu x \cdot \ln(\eta\mu x) + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{1}{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x] = (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x} \cdot [-\eta\mu x \cdot \ln(\eta\mu x) + \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\phi x]. \end{aligned}$$

2. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x-1}$

β) $g(x) = \sqrt{\eta\mu x}$, $x \in [0, \pi]$

γ) $h(x) = \begin{cases} 2x-4, & x < -2 \\ x^2+6x, & x \geq -2 \end{cases}$

δ) $g(x) = |x^2-1| - x - 1$

ε) $f(t) = \begin{cases} t, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ \sqrt{t}, & t > 0 \end{cases}$

$$\alpha) f(x) = \sqrt{x-1}$$

$$D_f = [1, +\infty).$$

Επειδή $f(x) = \sqrt{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{2}}$, η f έχει τη μορφή $[g(x)]^a$ με $a \in (0, 1)$ (βλέπε παρατήρηση 2 της θεωρίας). Άρα πρέπει να ελέγξουμε την παραγωγισιμότητά της στο 1 με τη βοήθεια του λόγου μεταβολής.

Παραγωγισιμότητα στο $(1, +\infty)$: Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων με $f'(x) = (\sqrt{x-1})' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot (x-1)' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Παραγωγισιμότητα στο 1: Εκλέγοντας $x \in (1, +\infty)$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{\sqrt{x-1}}}{(\sqrt{x-1})^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty, \quad \text{καθώς η}$$

$\sqrt{x-1}$ τείνει στο 0 παραμένοντας πάντα θετική. Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

$$\beta) g(x) = \sqrt{\eta\mu x}, \quad x \in [0, \pi]$$

$$D_g = [0, \pi]$$

Καθώς η g γράφεται $(\eta\mu x)^{\frac{1}{2}}$ με $\frac{1}{2} \in (0, 1)$, από παρατήρηση 2 θεωρίας, χρειάζεται μελέτη παραγωγισιμότητας με το λόγο μεταβολής στα σημεία όπου $\eta\mu x = 0$, δηλαδή στα 0 και π . Έτσι:

Παραγωγισιμότητα στο $(0, \pi)$: Η g είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων

$$\text{συναρτήσεων με } g'(x) = (\sqrt{\eta\mu x})' = \frac{1}{2\sqrt{\eta\mu x}} \cdot (\eta\mu x)' = \frac{1}{2\sqrt{\eta\mu x}} \cdot \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{\eta\mu x}}.$$

Παραγωγισιμότητα στο 0: Εκλέγουμε $x \in (0, \pi)$. Τότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\eta\mu x} - \sqrt{\eta\mu 0}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\eta\mu x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\eta\mu x}}{(\sqrt{x})^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\eta\mu x}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{1} \cdot +\infty = +\infty$$

$x = (\sqrt{x})^2 \text{ καθώς } x > 0$

Άρα η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Παραγωγισιμότητα στο π : Εκλέγουμε $x \in (0, \pi)$. Τότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{g(x) - g(0)}{x - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{\eta\mu x} - \sqrt{\eta\mu \pi}}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{\eta\mu x}}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{\eta\mu x}}{-(\sqrt{\pi - x})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \left[-\sqrt{\frac{\eta\mu x}{\pi - x}} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\sqrt{\pi - x}} = -\sqrt{\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\eta\mu(\pi - x)}{\pi - x}} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\sqrt{\pi - x}}. \end{aligned}$$

γιατί $\eta\mu x = \eta\mu(\pi - x)$

Όμως $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\eta\mu(\pi - x)}{\pi - x} \stackrel{\text{θετώντας } \pi - x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{g(x) - g(0)}{x - \pi} = -\sqrt{1} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\sqrt{\pi - x}} = -1 \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Άρα η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο π .

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $g'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{\eta\mu x}}$.

$$\gamma) h(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x < -2 \\ x^2 + 6x, & x \geq -2 \end{cases}$$

$D_h = \mathbb{R}$. Πιθανό σημείο ασυνέχειας το -2 .

Παραγωγισιμότητα στο $(-\infty, -2)$: Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -2)$ ως πολυωνυμική με $h'(x) = (2x - 4)' = 2$.

Παραγωγισιμότητα στο $(-2, +\infty)$: Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, +\infty)$ ως πολυωνυμική με $h'(x) = (x^2 + 6x)' = 2x + 6$.

$$\begin{aligned} \text{Παραγωγισιμότητα στο } -2: \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{h(x) - h(-2)}{x - (-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x - 4 - (-8)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x + 4}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2 \cdot \cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = \lim_{x \rightarrow -2^-} 2 = 2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{h(x) - h(-2)}{x - (-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 6x - (-8)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 6x + 8}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x+4)}{\cancel{x+2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (x + 4) = 2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{h(x) - h(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{h(x) - h(-2)}{x - (-2)} = 2 \in \mathbb{R}$, η h είναι παραγωγίσιμη και στο -2 με $h'(-2) = 2$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν } x < -2 \\ 2x + 6, & \text{αν } x > -2 \text{ ή αλλιώς} \\ 2, & \text{αν } x = -2 \end{cases}$

$$h'(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν } x \leq -2 \\ 2x + 6, & \text{αν } x > -2 \end{cases}.$$

$$\delta) g(x) = |x^2 - 1| - x - 1$$

$$D_g = \mathbb{R}.$$

Ο πίνακας προσήμων του $x^2 - 1$ είναι

Άρα

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	$\emptyset$	$-$	$+$

$$g'(x) = \begin{cases} x^2 - 1 - x - 1, & \text{αν } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ -(x^2 - 1) - x - 1, & \text{αν } x \in (-1, 1) \end{cases} = \begin{cases} x^2 - x - 2, & \text{αν } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ -x^2 - x, & \text{αν } x \in (-1, 1) \end{cases}.$$

Πιθανά σημεία ασυνέχειας τα -1 και 1 .

Παραγωγισιμότητα στο $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$: Η g είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $g'(x) = (x^2 - x - 2)' = 2x - 1$.

Παραγωγισιμότητα στο $(-1, 1)$: Η g είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $g'(x) = (-x^2 - x)' = -2x - 1$.

Παραγωγισιμότητα στο -1 : Είναι $g(-1) = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - x - 2 - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-2) \cdot \cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x-2) = -3 \in \mathbb{R}$$

Όμοια βρίσκουμε ότι $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1 \in \mathbb{R}$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)}$ η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1 .

Παραγωγισιμότητα στο 1 : Είναι $g(1) = 0$ και με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = -3 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}. \text{ Άρα η } g \text{ δεν είναι παραγωγίσιμη στο } 1.$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ με

$$g'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{αν } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ -2x - 1, & \text{αν } x \in (-1, 1) \end{cases}.$$

$$\varepsilon) f(t) = \begin{cases} t, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ \sqrt{t}, & t > 0 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$. Πιθανό σημείο ασυνέχειας το 0 .

Παραγωγισιμότητα στο $(-\infty, 0)$: Η f είναι παραγωγίσιμη ως ταυτοτική με $f'(t) = 1$.

Παραγωγισιμότητα στο $(0, +\infty)$: Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρίζα (βασική) με

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Παραγωγισιμότητα στο 0 :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{\sqrt{t}}}{(\sqrt{t})^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} = +\infty \notin \mathbb{R}.$$

Άρα δεν χρειάζεται να προσδιορίσουμε το $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0}$ καθώς ήδη γνωρίζουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{t}}, & \text{αν } t > 0 \end{cases}$.

3. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^4, \quad \beta) g(x) = \sqrt[3]{(x-1)^4}$$

$$\alpha) f(x) = (\sqrt[3]{x-1})^4 = (x-1)^{\frac{4}{3}}.$$

$D_f = [1, +\infty)$ και επειδή $\frac{4}{3} \notin (0, 1)$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων, με $f'(x) = [(x-1)^{\frac{4}{3}}]' = \frac{4}{3} \cdot (x-1)^{\frac{4}{3}-1} \cdot (x-1)' = \frac{4}{3} \cdot (x-1)^{\frac{1}{3}} \cdot 1 = \frac{4\sqrt[3]{x-1}}{3}$.

$$\beta) g(x) = \sqrt[3]{(x-1)^4} = \sqrt[3]{|x-1|^4} = (\sqrt[3]{|x-1|})^4 = |x-1|^{\frac{4}{3}}.$$

$$D_g = \mathbb{R}. \quad \text{Είναι: } g(x) = \begin{cases} (x-1)^{\frac{4}{3}}, & \text{αν } x \geq 1 \\ [-(x-1)]^{\frac{4}{3}}, & \text{αν } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} (x-1)^{\frac{4}{3}}, & \text{αν } x \geq 1 \\ (1-x)^{\frac{4}{3}}, & \text{αν } x < 1 \end{cases}.$$

Στο $(1, +\infty)$ η g είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων με

$$g'(x) = [(x-1)^{\frac{4}{3}}]' \stackrel{\text{βλέπε α) ερώτημα}}{=} \frac{4\sqrt[3]{x-1}}{3}$$

Στο $(-\infty, 1)$ η g είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων με

$$g'(x) = \left[(1-x)^{\frac{4}{3}} \right]' = \frac{4}{3} \cdot (1-x)^{\frac{4}{3}-1} \cdot (1-x)' = \frac{4}{3} \cdot (1-x)^{\frac{1}{3}} \cdot (-1) = -\frac{4}{3} \sqrt[3]{1-x}$$

Παραγωγισιμότητα στο 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{\frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{x-1} = 0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^{\frac{4}{3}}}{x-1} = - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^{\frac{4}{3}}}{1-x} = - \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\frac{1}{3}} = - \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt[3]{1-x} = 0 \in \mathbb{R}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = 0$ η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1) = 0$.

$$\text{Άρα τελικά } g'(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} \sqrt[3]{x-1}, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \\ -\frac{4}{3} \sqrt[3]{1-x}, & x < 1 \end{cases} \quad \text{και επειδή ο πρώτος κλάδος αν θέσουμε όπου } x$$

το 1 δίνει τιμή 0, μπορούμε να συμπτύξουμε τους δύο πρώτους κλάδους γράφοντας:

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 1 \\ -\frac{4}{3} \sqrt[3]{1-x}, & x < 1 \end{cases}.$$

4. Να εξετάσετε αν υπάρχει η παράγωγος καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις στο αντίστοιχο x_0 και σε όποια περίπτωση υπάρχει, να την προσδιορίσετε.

$$\alpha) f(x) = e^{\eta \mu x} \quad \text{με } x_0 = \pi$$

$$\beta) g(x) = \sqrt{x-3} \quad \text{με } x_0 = 3$$

$$\gamma) h(x) = \begin{cases} \eta \mu x, & x \leq \pi \\ \pi - x, & x > \pi \end{cases} \quad \text{με } x_0 = \pi$$

$$\alpha) f(x) = e^{\eta \mu x} \quad \text{με } x_0 = \pi$$

$D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγισίμων, οπότε και στο π .

Έχουμε $f'(x) = (e^{\eta\mu x})' = e^{\eta\mu x} \cdot (\eta\mu x)' = e^{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x$. Άρα $f'(\pi) = e^{\eta\mu\pi} \cdot \sigma\upsilon\nu\pi = e^0 \cdot (-1) = -1$.

β) $g(x) = \sqrt{x-3}$ με $x_0 = 3$

$D_g = [3, +\infty)$.

Επειδή $g(x) = (x-3)^{\frac{1}{2}}$, η g είναι μορφής $[g(x)]^a$ με $a \in (0, 1)$, οπότε δεν γνωρίζουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο 3, όπου μηδενίζεται η βάση $x-3$. Για το λόγο αυτό θα εργαστούμε με το όριο του λόγου μεταβολής στο 3 και συγκεκριμένα (λόγω του πεδίου ορισμού) στο 3^+ . Έτσι:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-3} - 0}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\cancel{\sqrt{x-3}}}{(\sqrt{x-3})^2} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{\sqrt{x-3}} = +\infty \notin \mathbb{R}.$$

Άρα η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο 3.

γ) $h(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \leq \pi \\ \pi - x, & x > \pi \end{cases}$ με $x_0 = \pi$

$D_h = \mathbb{R}$.

Επειδή το π είναι πιθανό σημείο ασυνέχειας, δεν γνωρίζουμε αν εκεί η h είναι παραγωγίσιμη. Πρέπει να εργαστούμε με τα όρια του λόγου μεταβολής στα π^- και π^+ .

Είναι $h(\pi) = \eta\mu\pi = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{h(x) - h(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\eta\mu x - 0}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\eta\mu x}{x - \pi} \stackrel{\text{αμ}^0_0}{=} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\eta\mu(\pi - x)}{x - \pi} = - \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\eta\mu(\pi - x)}{\pi - x} = - \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu u}{u} = -1 \in \mathbb{R}$$

γιατί $\eta\mu x = \eta\mu(\pi - x)$

καθώς θέτοντας $\pi - x = u$, όταν $x \rightarrow \pi^-$ τότε $u \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{h(x) - h(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\pi - x - 0}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\cancel{-(\pi - x)}}{\cancel{\pi - x}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} (-1) = -1 \in \mathbb{R}.$$

Άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο π με $h'(\pi) = -1$.

5. Να υπολογιστούν οι τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2\kappa x + 3\lambda, & x \in [-2, 0) \\ x^2 + 2x + 4, & x \in [0, 2] \end{cases} \text{ να είναι παραγωγίσιμη στο } [-2, 2].$$

Αφού η f πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο $[-2, 2]$ πρέπει να είναι και συνεχής.

Στα $[-2, 0)$ και $(0, 2]$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε τιμή των κ και λ ως πολυωνυμική. Άρα πρέπει και αρκεί να είναι i) συνεχής στο 0 και ii) παραγωγίσιμη στο 0.

i) Συνέχεια στο 0: Για να είναι συνεχής στο 0 πρέπει και αρκεί:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= f(0) \end{aligned} \right\} (1).$$

Όμως $f(0)=0^2+2\cdot 0+4=4$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 2\kappa x + 3\lambda) = 3\lambda$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2x + 4) = 4. \text{ Άρα από (1) έχουμε } \left. \begin{matrix} 3\lambda = 4 \\ 4 = 4 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{3} \quad (2).$$

ii) Παραγωγισιμότητα στο 0: Για να είναι παραγωγίσιμη στο 0 πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2\kappa x + 3\lambda - 4}{x} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2\kappa x + \cancel{3} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2\kappa x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x} \cdot (x - 2\kappa)}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 2\kappa) = -2\kappa. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x + \cancel{4} - \cancel{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x} \cdot (x + 2)}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2) = 2.$$

Άρα $-2\kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = -1$.

6. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (αν υπάρχει) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(-1, f(-1))$, αν:

$$\alpha) f(x) = \sqrt{x^2 + 2}, \quad \beta) f(x) = \sqrt{x+1}, \quad \gamma) f(x) = \begin{cases} x, & x \geq -1 \\ -x, & x < -1 \end{cases}$$

α) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

$$D_f = \mathbb{R}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο -1 , οπότε υπάρχει η εφαπτομένη ε της C_f στο $A(-1, f(-1))$. Έστω ε η εφαπτομένη αυτή. Τότε $\varepsilon: y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x - (-1))$. Είναι:

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 2})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2}} \cdot (x^2 + 2)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}, \text{ οπότε}$$

$$f'(-1) = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + 2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ Επίσης είναι } f(-1) = \sqrt{(-1)^2 + 2} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Άρα: } \varepsilon: y - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x + 1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - 2).$$

β) $f(x) = \sqrt{x+1}$

$D_f = [-1, +\infty)$ και επειδή $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ με $\frac{1}{2} \in (0, 1)$, ελέγχουμε αν η f είναι

παραγωγίσιμη στο -1 .

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+1} - 0}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{\sqrt{x+1}}}{(\sqrt{x+1})\cancel{\sqrt{x+1}}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty \in \mathbb{R}.$$

Επιπλέον η f είναι συνεχής στο -1 ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Επομένως δέχεται κατακόρυφη εφαπτομένη με εξίσωση $\varepsilon: x = -1$.

$$y) f(x) = \begin{cases} x, & x \geq -1 \\ -x, & x < -1 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$.

Ελέγχουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο πιθανό σημείο ασυνέχειας -1 . Είναι $f(-1) = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x - (-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x + 1}{x + 1} \stackrel{\text{α.μ. } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x + 1) \cdot \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x + 1}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων του $x+1$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	Φ	$+$

Έτσι έχουμε $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = (-(-1) + 1) \cdot (-\infty) = 2 \cdot (-\infty) = -\infty \notin \mathbb{R}$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x - (-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 = 1 \in \mathbb{R}$.

Αφού $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$, δεν ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $A(-1, f(-1))$.

7. Να βρείτε τα σημεία της C_f με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x + 4}$ στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες προς τον άξονα $x'x$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 5x + 4 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1, -4\}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{-1, -4\}$ ως ρητή.

Έστω ε εφαπτομένη της C_f σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$. Για να είναι $\varepsilon // x'x$ πρέπει και αρκεί $\lambda_\varepsilon = \lambda_{x'x}$. Όμως $\lambda_{x'x} = 0$ οπότε πρέπει και αρκεί $\lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$ (1).

$$\begin{aligned} \text{Όμως } f'(x) &= \left(\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x + 4} \right)' = \frac{(x^2 - 5x + 4)' \cdot (x^2 + 5x + 4) - (x^2 - 5x + 4) \cdot (x^2 + 5x + 4)'}{(x^2 + 5x + 4)^2} = \\ &= \dots = \frac{10(x^2 - 4)}{(x^2 + 5x + 4)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα (1)} \Leftrightarrow \frac{10(x_0^2 - 4)}{(x_0^2 + 5x_0 + 4)^2} = 0 \Leftrightarrow 10(x_0^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2.$$

$$\text{Για } x_0 = 2 \text{ είναι } f(x_0) = f(2) = \frac{2^2 - 5 \cdot 2 + 4}{2^2 + 5 \cdot 2 + 4} = -\frac{2}{18} = -\frac{1}{9} \text{ και}$$

$$\text{για } x_0 = -2 \text{ είναι } f(x_0) = f(-2) = \frac{(-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 4}{(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 4} = \frac{18}{-2} = -9.$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $(2, -\frac{1}{9})$ και $(-2, -9)$.

8. Αν $f(x) = ax^3 + bx^2 + 9x - 12$, να προσδιοριστούν οι τιμές των πραγματικών παραμέτρων a και b , έτσι ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(2, -10)$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon: y = -3x + 12$.

$D_f = \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Παρατήρηση: Δίνονται δύο πληροφορίες: 1. $A(2, -10) \in C_f$ και 2. εφαπτομένη παράλληλη στην ε , για να προσδιορίσουμε τιμές δύο παραμέτρων.

Αφού $A(2, -10) \in C_f$ θα είναι $f(2) = -10 \Leftrightarrow a \cdot 2^3 + \beta \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 12 = -10 \Leftrightarrow 8a + 4\beta = -16 \Leftrightarrow 2a + \beta = -4$ (1).

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 2, η εφαπτομένη της C_f στο $A(2, -10)$ υπάρχει και έχει συντελεστή διεύθυνσεως $f'(2)$. Έστω ε_1 αυτή η εφαπτομένη. Για να είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon$ πρέπει και αρκεί $f'(2) = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow f'(2) = -3$ (2).

Όμως $f'(x) = (ax^3 + \beta x^2 + 9x - 12)' = 3ax^2 + 2\beta x + 9$.

Άρα (2) $\Leftrightarrow 3a \cdot 2^2 + 2\beta \cdot 2 + 9 = -3 \Leftrightarrow 12a + 4\beta = -12 \Leftrightarrow 3a + \beta = -3$ (3).

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (3) βρίσκουμε ότι **$a=1$ και $\beta=-6$** .

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax^2 + 2x - 1$ και $g(x) = \frac{\beta x + 1}{x}$. Να βρεθούν οι τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι εφαπτόμενες των γραφικών τους παραστάσεων στη θέση 1 να ταυτίζονται (κοινή εφαπτομένη).

$D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \mathbb{R}^*$.

Οι f και g είναι παραγωγίσιμες στα πεδία ορισμού τους, οπότε και στη θέση 1.

Για να δέχονται κοινή εφαπτομένη στη θέση 1 πρέπει και αρκεί:

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= g(1) \\ f'(1) &= g'(1) \end{aligned} \right\}.$$

Όμως $f(1) = g(1) \Leftrightarrow a \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = \frac{\beta \cdot 1 + 1}{1} \Leftrightarrow a = \beta$ (1).

Επίσης $f'(x) = (ax^2 + 2x - 1)' = 2ax + 2$, οπότε $f'(1) = 2a + 2$.

$g'(x) = \left(\frac{\beta x + 1}{x}\right)' = \frac{(\beta x + 1)' \cdot x - (\beta x + 1) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\beta x - (\beta x + 1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$, οπότε $g'(1) = -1$.

Άρα η σχέση $f'(1) = g'(1)$ δίνει $2a + 2 = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$, οπότε από (1) είναι **$\beta = -\frac{3}{2}$** .

10.α) Να βρεθεί το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - 1$ στο οποίο η κλίση της C_f είναι ίση με 2 αν ισχύει $x_0 \cdot f(x_0) < 0$.

β) Στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο M και τους άξονες.

α) $D_f = \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Αν ε η εφαπτομένη στο M τότε $\lambda_\varepsilon = f'(x_0) = 2$ (1) (θυμηθείτε ότι κλίση της C_f είναι η κλίση της εφαπτομένης της).

Είναι $f'(x) = 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ οπότε (1) $\Leftrightarrow 2x_0^2 - 2x_0 + \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow 4x_0^2 - 4x_0 - 3 = 0$.

$$\Delta=16+48=64 \text{ οπότε } x_0 = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 8}{8} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Για $x_0 = \frac{3}{2}$ βρίσκουμε με αντικατάσταση ότι $f(x_0) = f(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$, ενώ για $x_0 = -\frac{1}{2}$

βρίσκουμε ότι $f(x_0) = f(-\frac{1}{2}) = -\frac{19}{12}$.

Από τα σημεία που βρέθηκαν μόνο το πρώτο ικανοποιεί τη συνθήκη $x_0 \cdot f(x_0) < 0$. Άρα

$$\mathbf{M(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})}.$$

β) Είναι ε: $y - f(\frac{3}{2}) = f'(\frac{3}{2}) \cdot (x - \frac{3}{2})$. Όμως $f(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$ και $f'(\frac{3}{2}) = 2$ (από υπόθεση).

Άρα ε: $y + \frac{1}{4} = 2 \cdot (x - \frac{3}{2}) \Leftrightarrow y = 2x - 3 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = 2x - \frac{13}{4}$.

Σημείο τομής Α της ε με τον x'x: Θέτουμε στην ε όπου $y=0$ και έχουμε $0 = 2x - \frac{13}{4} \Leftrightarrow$

$$x = \frac{13}{8}. \text{ Άρα } A(\frac{13}{8}, 0).$$

Σημείο τομής Β της ε με τον y'y: Θέτουμε στην ε όπου $x=0$ και έχουμε $y = -\frac{13}{4}$. Άρα

$$B(0, -\frac{13}{4}).$$

Το ζητούμενο εμβαδόν Ε δίνεται από τη σχέση $E = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |OB|$, όπου Ο η αρχή των

αξόνων. Άρα $E = \frac{1}{2} \cdot |\frac{13}{8}| \cdot |-\frac{13}{4}| = \frac{169}{64} \text{ τ.μ.}$ (τ.μ. σημαίνει «τετραγωνικές μονάδες»).

11. Η πλευρά α κύβου μεταβάλλεται με ρυθμό 2 cm/sec. Να βρεθεί:

α) Ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειάς του.

β) Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειάς του τη χρονική στιγμή $t_0 = \frac{1}{15} \text{ min}$, αν η πλευρά του α δίνεται από τον τύπο $a=2t+1$, με το t σε sec.

α) Η εκφώνηση δίνει ότι $a'(t) = 2 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$. Αν $s(t)$ η επιφάνειά του τότε $s(t) = 6 \cdot a^2(t)$, γιατί ο

κύβος έχει ως έδρες έξι τετράγωνα πλευράς α. Άρα:

$$s'(t) = 6 \cdot 2a(t) \cdot a'(t) = 12 \cdot a(t) \cdot 2 = \mathbf{24 \cdot a(t) \cdot \frac{cm^2}{sec}}$$

β) Αν $V(t)$ ο όγκος του τότε $V(t) = a^3(t)$.

Άρα $V'(t) = 3a^2(t) \cdot a'(t) = 3a^2(t) \cdot 2 = 6a^2(t) \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$.

γ) Ζητάμε το $s'(4)$. Από το α) ερώτημα βρήκαμε ότι $s'(t) = 24a(t) \cdot \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$, οπότε

$$s'(4) = 24a(4) = 24 \cdot (2 \cdot 4 + 1) = 24 \cdot 9 = 216 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}.$$

12. Κινητό κινείται ευθύγραμμα πάνω σε άξονα και η θέση του δίνεται κάθε χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη σχέση $x(t) = t^2 - 6t + 2$ σε μέτρα. Να βρεθεί:

α) Η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή 3 sec, δίνοντας και την ερμηνεία του αποτελέσματος.

β) Να βρείτε πότε το κινητό κινείται προς τα θετικά και πότε προς τα αρνητικά

γ) Να βρείτε το συνολικό διάστημα που διάνυσε το κινητό από 0 έως 4 sec.

α) Είναι $u(t) = x'(t) = (t^2 - 6t + 2)' = 2t - 6$.

Άρα $u(3) = 6 - 6 = 0$ που σημαίνει ότι το κινητό τη χρονική στιγμή 3 sec ακινητοποιείται.

β) Επειδή $u(t) > 0 \Leftrightarrow 2t - 6 > 0 \Leftrightarrow t > 3$, το κινητό κινείται προς τα θετικά του άξονα μετά τα 3 sec, ενώ $u(t) < 0 \Leftrightarrow t < 3$, οπότε το κινητό κινείται προς τα αρνητικά το χρονικό διάστημα από 0 έως 3 sec.

γ) Ο πίνακας των προσήμων της ταχύτητας στο $[0, 4]$ έχει ως εξής:

t	0	3	4
u(t)	-	0	+

Άρα σύμφωνα με τη θεωρία είναι $s = |x(0) - x(3)| + |x(3) - x(4)| = |2 - (-7)| + |-7 - (-6)| = 10$ m.

13. Αν $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{4}$ με $2f^{(3)}(x) - f(x) + 3f''(x) = e^4$ (1), να υπολογιστεί ο $x \in \mathbb{R}$.

$D_f = \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{4} \right)' = \frac{(e^x + e^{-x})'}{4} = \frac{e^x + e^{-x} \cdot (-x)'}{4} = \frac{e^x - e^{-x}}{4}$$

Η f' είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{4} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{4} = f(x)$ (2).

Η f'' είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f^{(3)}(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{4} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{4} = f'(x)$ (3).

Έτσι η (1) με τη βοήθεια των (2) και (3) γράφεται ισοδύναμα:

$$2 \cdot f'(x) - f(x) + 3 \cdot f(x) = e^4 \Leftrightarrow 2 \cdot f'(x) + 2 \cdot f(x) = e^4 \Leftrightarrow 2 \frac{e^x - e^{-x}}{4} + 2 \frac{e^x + e^{-x}}{4} = e^4 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e^x = 2e^4 \Leftrightarrow e^x = e^4 \Leftrightarrow x = 4.$$

14. Αν η f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο a , να δείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(a) - a^2 f(x)}{x - a} = 2af(a) - a^2 \cdot f'(a).$$

Έχουμε κατά σειρά:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(a) - a^2 f(x)}{x - a} &\stackrel{\text{προσθαφαιρούμε το } a^2 f(a)}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(a) - a^2 f(x) + a^2 f(a) - a^2 f(a)}{x - a} = \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x^2 f(a) - a^2 f(a)}{x - a} - \frac{a^2 f(x) - a^2 f(a)}{x - a} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(f(a) \frac{x^2 - a^2}{x - a} - a^2 \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \left(f(a) \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} - a^2 \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(f(a) \cdot (x+a) - a^2 \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = 2af(a) - a^2 \cdot f'(a)
\end{aligned}$$

καθώς η f είναι παραγωγίσιμη στο a .

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αντί να προσθαφαιρέσουμε το $a^2 \cdot f(a)$, θα μπορούσαμε να προσθαφαιρέσουμε το $x^2 \cdot f(x)$.

15. Αν f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Προφανώς η μεταβλητή στο όριο είναι το h .

Θέτουμε $-h=u$ οπότε $\lim_{h \rightarrow 0} u = \lim_{h \rightarrow 0} (-h) = 0$ και επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+u)}{-u} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(- \frac{f(x) - f(x+u)}{u} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x+u) - f(x)}{u} = f'(x).$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Παρατηρείστε ότι για το παραπάνω όριο, το x λειτουργεί ως σταθερά ποσότητα, δηλαδή ως x_0 .

3.4 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ

1. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ (Θ.Μ.Τ.)

Αν f συνάρτηση

- συνεχής σε κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη (τουλάχιστον) στο ανοικτό (a, β)

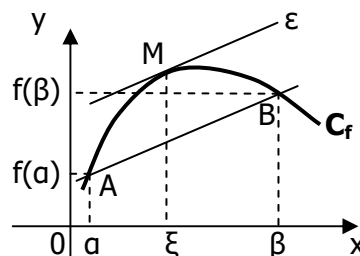
ΤΟΤΕ Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ Θ.Μ.Τ.

Η παράσταση $\frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$, με δεδομένο ότι $a \neq \beta$, εκφράζει

ως γνωστόν τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB (του φορέα της χορδής AB) με $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$, ενώ το $f'(\xi)$ εκφράζει το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης ευθείας ϵ της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, (αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ).



Αφού οι δύο αυτές παραστάσεις είναι ίσες, το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ. εξασφαλίζει ότι: «Υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f , με $\xi \in (a, \beta)$, έτσι ώστε η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο M να είναι παράλληλη προς το φορέα της χορδής AB με $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ ».

2. ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Αν f συνάρτηση

- συνεχής σε κλειστό διάστημα $[a, \beta]$
- παραγωγίσιμη (τουλάχιστον) στο ανοικτό (a, β) και
- $f(a) = f(\beta)$

ΤΟΤΕ Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

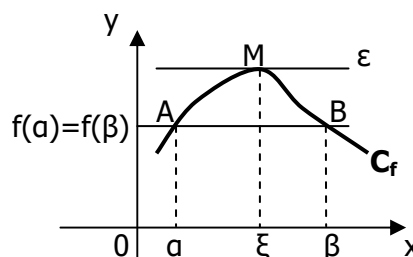
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ Θ. ROLLE

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ , ο $f'(\xi)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ευθείας ϵ της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$.

Η σχέση $f'(\xi) = 0$ δηλώνει ότι η ϵ είναι παράλληλη προς τον άξονα x 's (δηλαδή και πάλι παράλληλη προς τον φορέα της χορδής AB).

Άρα το συμπέρασμα του Θ. Rolle εξασφαλίζει ότι:

«Υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f , με $\xi \in (a, \beta)$, έτσι ώστε η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο M να είναι παράλληλη προς τον άξονα x 's».



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

- 1) Για να ισχύουν σίγουρα τα παραπάνω θεωρήματα, πρέπει να ικανοποιούνται οπωσδήποτε όλες οι προϋποθέσεις τους. Αν κάποια προϋπόθεση δεν ισχύει, δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει το ξ που αναφέρει το συμπέρασμα.
- 2) Το θεώρημα Rolle (όπως φαίνεται και από τη γεωμετρική του ερμηνεία) δεν είναι τίποτα άλλο, παρά μια ειδική περίπτωση του Θ.Μ.Τ. όταν $f(a)=f(b)$.
- 3) Το Θ.Μ.Τ. λέγεται και «**Θεώρημα του Lagrange**» και φυσικά δεν αλλάζει τίποτα αν η σχέση του συμπεράσματος γραφεί με τη μορφή $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- 4) Μπορούμε να προσδιορίσουμε ίσως τις τιμές των αντίστοιχων ξ των παραπάνω θεωρημάτων, λύνοντας την αντίστοιχη σχέση $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ή $f'(\xi) = 0$.
Φυσικά οι τιμές του ξ μπορεί να είναι περισσότερες από μία (δεχόμαστε όσες ανήκουν στο (a, b)).
- 5) Αν για κάποια συνάρτηση f δείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, τότε έχουμε καλύψει και τις δύο πρώτες προϋποθέσεις των παραπάνω θεωρημάτων, αφού θα είναι συνεχής στο $[a, b]$ (ως παραγωγίσιμη) και παραγωγίσιμη στο (a, b) .
- 6) Το **Θ. Rolle μας δίνει πληροφορίες για την ύπαρξη ριζών (ξ) της παραγώγου της f ($f'(\xi)=0$)**. Δεν πρέπει να συγχέεται με το Θ. Bolzano (βλέπε «Συνέχεια συνάρτησης»), γιατί αυτό μας δίνει πληροφορίες για την ύπαρξη ριζών της f (και όχι της f').
Θα δούμε όμως σε ασκήσεις (στα επόμενα), ότι τα δύο αυτά θεωρήματα που αφορούν σε ρίζες, μπορούν να συνεργαστούν αρμονικά, δίνοντάς μας χρήσιμα συμπεράσματα.
- 7) Δεν ξεχνάμε ότι αν σε κάποια άσκηση μας λένε πως το $f'(x)$ έχει κάποια ιδιότητα για κάθε $x \in (a, b)$ και το ξ ανήκει στο (a, b) , τότε η ίδια ιδιότητα ισχύει και για το $f'(\xi)$.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ Θ. ROLLE ΓΙΑ ΤΙΣ ΡΙΖΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θα αναφέρουμε δύο εφαρμογές του Θ. Rolle που αφορούν σε ρίζες συνάρτησης. Αυτές οι εφαρμογές αν και θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν «θεωρήματα», δεν αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο, οπότε αν τις χρειαστούμε θα πρέπει να τις αποδείξουμε μέσα στην άσκηση, όπως παρακάτω:

• **Εφαρμογή 1**

Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες μιας συνάρτησης f με $\rho_1 < \rho_2$ και η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη (τουλάχιστον) στο (ρ_1, ρ_2) , τότε υπάρχει **μία τουλάχιστον ρίζα της f'** στο (ρ_1, ρ_2) .

Απόδειξη

f συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$
 f παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2)
 $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ (αφού ρ_1, ρ_2 ρίζες της f)

Άρα από το Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$, δηλαδή μια τουλάχιστον ρίζα της f' στο (ρ_1, ρ_2) .

• Εφαρμογή 2

Έστω ρ_1, ρ_2 **δύο διαδοχικές ρίζες της f'** με $\rho_1 < \rho_2$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , τότε υπάρχει **μία το πολύ ρίζα της f** στο (ρ_1, ρ_2) .

Απόδειξη

Η απόδειξη θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι η f είχε δύο τουλάχιστον ρίζες x_1, x_2 στο (ρ_1, ρ_2) με $x_1 < x_2$. Τότε:

f συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, άρα και στο $[x_1, x_2]$ f παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , άρα και στο (x_1, x_2) $f(x_1)=f(x_2)=0$ (αφού x_1, x_2 ρίζες της f)	}	Άρα από το Θ. Rolle υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα ξ της f' στο (x_1, x_2) , οπότε και στο (ρ_1, ρ_2) .
---	---	---

Όμως οι ρ_1, ρ_2 είναι διαδοχικές ρίζες της f' και επομένως δεν είναι δυνατόν η f' να έχει ανάμεσά τους κι άλλη ρίζα ξ .

Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι η f είχε δύο τουλάχιστον ρίζες x_1, x_2 στο (ρ_1, ρ_2) . Άρα η f έχει το πολύ μια ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .

Αν και στα μαθηματικά η απλοποιημένη διατύπωση των προτάσεων οδηγεί πολλές φορές σε προτάσεις που δεν ισχύουν, θα κάνουμε εδώ μια υπέρβαση και θα διατυπώσουμε απλοποιημένες τις παραπάνω εφαρμογές, ώστε να είναι δυνατόν να απομνημονευτούν εύκολα.

Εφαρμογή 1: Μεταξύ δύο ριζών της f υπάρχει πάντα μια τουλάχιστον ρίζα της f' .

Εφαρμογή 2: Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' υπάρχει το πολύ μία ρίζα της f .

Φυσικά όλα αυτά κάτω από τις προϋποθέσεις που αναφέραμε στην αυστηρή διατύπωση των εφαρμογών.

3. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Αν f συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα Δ	}	ΤΟΤΕ	Η f είναι σταθερή στο Δ , δηλαδή $f(x)=c$, $c \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in \Delta$.
• συνεχής στο Δ και • $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ			

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το Δ μπορεί να είναι ανοικτό ή κλειστό, αλλά σε κάθε περίπτωση πρέπει να είναι «διάστημα». Το θεώρημα αυτό δεν ισχύει σε ένωση διαστημάτων.

Έτσι για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -3, & x > 0 \\ 5, & x < 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

και ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, όμως είναι προφανές ότι δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ δείξτε ότι ισχύει η ισοδυναμία $f=f' \Leftrightarrow f(x)=c \cdot e^x, x \in \mathbb{R}$, όπου c πραγματική σταθερά.

Μια άλλη εκφώνηση θα ήταν: «Δείξτε ότι η μοναδική συνάρτηση f που είναι ίση στο $\mathbb{R}$ με την παράγωγό της είναι η $f(x)=c \cdot e^x$ ».

Λύση

Ζητάμε να αποδείξουμε την ισοδυναμία $f'(x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=c \cdot e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΕΥΘΥ: Έστω $f'(x)=f(x)$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $f(x)=c \cdot e^x$, ή αλλιώς $\frac{f(x)}{e^x} = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ορίζουμε στο $\mathbb{R}$ τη συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η g είναι σταθερή (c).

Αφού οι f και e^x είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, θα είναι και η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ηλίκο παραγωγισίμων. Άρα θα είναι και συνεχής.

$$\text{Είναι } g'(x) = \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{f'(x) \cdot e^x - f(x) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} \stackrel{(1)}{=} \frac{f(x) \cdot e^x - f(x) \cdot e^x}{e^{2x}} = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα $g(x)=c$ στο $\mathbb{R}$, οπότε $\frac{f(x)}{e^x} = c$, δηλαδή $f(x)=c \cdot e^x$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ: Έστω ότι $f(x)=c \cdot e^x, x \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $f'(x)=f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=(c \cdot e^x)' = c \cdot (e^x)' = c \cdot e^x = f(x)$.

Άρα τελικά $f'(x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=c \cdot e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση: Η παραπάνω εφαρμογή μπορεί να χρησιμοποιείται σε ασκήσεις χωρίς απόδειξη (σαν θεώρημα).

4. ΠΟΡΙΣΜΑ (ΣΥΝΕΠΕΙΑ ΤΟΥ Θ.3)

Αν f, g συναρτήσεις ορισμένες σε διάστημα Δ

- συνεχείς στο Δ και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

TOTE

Οι f και g διαφέρουν κατά μια σταθερή ποσότητα c , δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, σταθερό, τέτοιο ώστε $f(x)=g(x)+c$, για κάθε $x \in \Delta$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Και εδώ το Δ μπορεί να είναι ανοικτό ή κλειστό, αλλά σε κάθε περίπτωση πρέπει να είναι «διάστημα». Το πόρισμα αυτό δεν ισχύει σε ένωση διαστημάτων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΟ Θ.Μ.Τ. ΚΑΙ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ

1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΖΗΤΑΜΕ ΝΑ ΕΞΕΤΑΣΟΥΜΕ ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ Θ.Μ.Τ. Ή ΤΟ Θ.ROLLE ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ $[a, \beta]$ ΚΑΙ ΝΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΟΥΜΕ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟ Ξ ΤΟΥ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ

- Εξετάζουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος στο διάστημα $[a, \beta]$ που μας δίνουν.
- Αν ισχύουν, τότε ισχύει το αντίστοιχο θεώρημα και μπορούμε να προσδιορίσουμε το ξ του συμπεράσματος, υπολογίζοντας το $f'(\xi)$ (από το $f'(x)$) και στη συνέχεια λύνοντας την εξίσωση $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$ ή $f'(\xi) = 0$, ανάλογα με το θεώρημα που ελέγχουμε (Θ.Μ.Τ. ή Rolle αντίστοιχα).
- Τέλος από τις τιμές του ξ που προκύπτουν, δεχόμαστε μόνο όσες ανήκουν στο (a, β) .
Φυσικά αν η τιμή είναι μόνο μία, είναι σίγουρα δεκτή (χωρίς έλεγχο).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν η f έχει πολλαπλό τύπο στο $[a, \beta]$, π.χ. $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, \gamma] \\ f_2(x), & x \in [\gamma, \beta] \end{cases}$, τότε αφού

αποδείξουμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος που ελέγχουμε στο $[a, \beta]$, για να προσδιορίσουμε το $\xi \in (a, \beta)$ του συμπεράσματος, πρέπει να λύσουμε δύο εξισώσεις: την $f'(\xi) = \dots$ στο (a, γ) και την $f'(\xi) = \dots$ στο $[\gamma, \beta)$.

Σε παραμετρικές ασκήσεις

Αφού διαπιστώσουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στα $[a, \gamma]$ και $(\gamma, \beta]$, άρα και συνεχής, για κάθε τιμή των παραμέτρων, απαιτούμε να είναι συνεχής και μετά παραγωγίσιμη και στο γ , γράφοντας τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται.

2. Ορισμένες ασκήσεις μπορούν να διατυπωθούν με περισσότερους από έναν τρόπους. Έτσι για παράδειγμα οι εκφωνήσεις:

1η: «Δείξτε ότι ισχύει το Θ.Rolle για την f στο $[a, \beta]$ »

2η: «Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (a, β) »

3η: «Δείξτε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f με $\xi \in (a, \beta)$, όπου η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη» και

4η: «Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f' τέμνει τον άξονα x' σε ένα σημείο τουλάχιστον με τετμημένη που ανήκει στο (a, β) ».

είναι τέσσερις διαφορετικές εκφωνήσεις της ίδιας (ουσιαστικά) άσκησης. Η αντιμετώπιση καθεμιάς διαφέρει ελαφρά μόνο στη διατύπωση της λύσης (και όχι στο μαθηματικό μέρος της).

Παραδείγματα 1, 2

2. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΦΟΡΟΥΝ ΣΕ ΡΙΖΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x)$ Ή ΕΞΙΣΩΣΗΣ $A(x)=B(x)$

Για τέτοιου είδους ασκήσεις μιλήσαμε και στη μεθοδολογία των θεωρημάτων συνέχειας (Θ. Bolzano). Εδώ θα συμπληρώσουμε τη μεθοδολογία αυτή και αργότερα, όταν θα έχουμε αναφέρει όλα τα θεωρήματα που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, θα την ολοκληρώσουμε.

Ήδη με τα θεωρήματα Bolzano και Rolle μπορούμε να δείξουμε ότι:

α) Η δοσμένη συνάρτηση f ή η εξίσωση $f(x)=0$ (ορίζοντας ως $f(x)=A(x)-B(x)$) έχει **τουλάχιστον μια ρίζα** στο (a, b) .

β) Η δοσμένη συνάρτηση f ή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει **το πολύ μια ρίζα** στο (a, b) .

γ) Η δοσμένη συνάρτηση f ή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει **μόνο μια ρίζα** στο (a, b) .

ΜΕΘΟΔΟΙ

α) Τουλάχιστον μια ρίζα στο (a, b)

Παράγουσα συνάρτηση

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ . Όπως θα δούμε αναλυτικά στο κεφάλαιο των ολοκληρωμάτων **παράγουσα** ή **αρχική συνάρτηση** ή **αντιπαράγωγος** μιας συνάρτησης f σε διάστημα Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο Δ , για την οποία ισχύει ότι: **$F'(x)=f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.**

Αποδεικνύεται ότι όλες οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν παράγουσα.

Η παράγουσα μιας συνάρτησης f στο Δ , αν υπάρχει, δεν είναι μοναδική, γιατί αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε υπάρχουν άπειρες παράγουσες και είναι όλες οι συναρτήσεις της μορφής $F+c$, $c \in \mathbb{R}$ και μόνο αυτές. Έτσι αν για παράδειγμα F είναι μια παράγουσα της f , τότε και οι συναρτήσεις με τύπους $F(x)+2$ και $F(x)-1$ είναι παράγουσες της f .

Έτσι για να αποδείξουμε ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a, b) μπορούμε εκτός από το να εφαρμόσουμε ως γνωστόν το Θ. Bolzano για την f στο $[a, b]$, **να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Rolle σε μια παράγουσα της f στο $[a, b]$.**

Εναλλακτικές λύσεις είναι (όπου είναι εφικτές):

- Να βρούμε μια προφανή ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$. **Προφανής ρίζα** εξίσωσης είναι ένας αριθμός που «φαίνεται» εύκολα ότι επαληθεύει την εξίσωση. Τέτοιες ρίζες είναι συνήθως «κλασσικοί» αριθμοί όπως το 0, το 1, το e κ.τ.λ. ή
- Να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=0$

β) Το πολύ μια ρίζα στο (α, β)

Εφαρμόζουμε απαγωγή σε άτοπο και Θ . Rolle. Συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι η f έχει δύο τουλάχιστον διαφορετικές ρίζες ρ_1, ρ_2 στο (α, β) , με $\rho_1 < \rho_2$, εφαρμόζουμε Θ . Rolle για την f στο $[\rho_1, \rho_2]$ και καταλήγουμε σε άτοπο (καθώς δεν θα υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$).

Άρα η f δεν έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (ρ_1, ρ_2) , οπότε έχει το πολύ μία.

Αργότερα θα δούμε και έναν άλλο τρόπο αντιμετώπισης τέτοιων προβλημάτων (βλέπε παράγραφο "ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ").

Όπως είπαμε για να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα με **απαγωγή σε άτοπο**, υποθέτουμε ότι έχει τουλάχιστον δύο και προσπαθούμε να καταλήξουμε σε άτοπο. Το ερώτημα είναι, **αν ήδη γνωρίζουμε πως έχει ως ρίζα τον αριθμό ρ , θα τον χρησιμοποιήσουμε ή όχι;** Δηλαδή θα υποθέσουμε ότι έχει τουλάχιστον δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ (ανεξάρτητα από τη γνωστή ρίζα ρ) ή θα υποθέσουμε ότι εκτός από τη γνωστή ρ υπάρχει και άλλη ρ' (οπότε τότε χρησιμοποιούμε την ύπαρξη της ρ).

Η πρώτη εκδοχή της λύσης συμφέρει περισσότερο, με την προϋπόθεση όμως ότι οδηγεί στο άτοπο που επιζητούμε. Με τη δεύτερη εκδοχή είμαστε υποχρεωμένοι να διακρίνουμε περιπτώσεις «αν $\rho' < \rho$ » και αν « $\rho' > \rho$ » και την ακολουθούμε μόνο εφόσον έχουμε πρόβλημα με την πρώτη (δηλαδή δεν προκύπτει κάτι άτοπο).

Παρόμοια παρατήρηση ισχύει και στην περίπτωση που θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση έχει το πολύ δύο ρίζες (ή τρεις κ.τ.λ.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x + x^2 - ex - 1 = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$, τις 0 και 1.

(Η απόδειξη ότι οι ρίζες είναι το πολύ δύο γίνεται με την πρώτη εκδοχή)

2. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x - x - 1 = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 0.

(Η απόδειξη ότι η ρίζα είναι το πολύ μία γίνεται με την δεύτερη εκδοχή)

γ) Μόνο μια ρίζα στο (α, β)

Αποδεικνύουμε με την χρήση των παραπάνω μεθόδων α) και β) ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα και μία το πολύ στο (α, β) . Άρα έχει μία ακριβώς.

Δηλαδή η περίπτωση γ) προκύπτει αν εφαρμόσουμε τις δύο προηγούμενες.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Όπως αναφέραμε και στη μεθοδολογία συνέχειας, αν μας ζητούν να δείξουμε ότι όσα αναφέραμε παραπάνω περί ριζών, ισχύουν για μια εξίσωση $A(x) = B(x)$, τότε φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $A(x) - B(x) = 0$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = A(x) - B(x)$ και εφαρμόζουμε γι αυτήν κάποια από τις μεθόδους που αναφέραμε παραπάνω (ανάλογα με το ζητούμενο).

Άλλη εκφώνηση για μια τέτοια άσκηση θα μπορούσε να είναι:

«Δείξτε ότι οι καμπύλες με εξισώσεις $y=A(x)$ και $y=B(x)$ έχουν ένα τουλάχιστον (ή ένα το πολύ ή ένα ακριβώς) κοινό σημείο $M(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (a, \beta)$ ».

Φυσικά αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $A(x)=B(x)$ έχει στο (a, β) , όσες ρίζες αναφέρει η άσκηση.

2. Σε περίπτωση που μια άσκηση μιλά για **περισσότερες από μία ρίζες**, εφαρμόζουμε το Θ. Rolle περισσότερες από μία φορές σε ξένα μεταξύ τους διαστήματα (βλέπε παραδείγματα 5 και 6).

Παραδείγματα 3, 4, 5, 6, 7

3. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΦΟΡΟΥΝ ΣΕ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ

α) Διπλή ανίσωση μορφής $h(x) \leq g(x) \leq t(x)$

Προσπαθούμε συνήθως να φέρουμε την ανίσωση σε μορφή $\kappa \leq \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} \leq \lambda$,

όπου f κατάλληλη συνάρτηση και $a, \beta, \kappa, \lambda$ κατάλληλοι αριθμοί ή παραστάσεις του x . Αν αυτό επιτευχθεί, εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[a, \beta]$.

Φυσικά η δυσκολία στην μέθοδο αυτή είναι να «υποψιαστούμε» ποια είναι η συνάρτηση f και το κατάλληλο διάστημα $[a, \beta]$.

Αργότερα θα δούμε και μια άλλη απλούστερη μέθοδο για την απόδειξη ανισώσεων (βλέπε παράγραφο "ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ").

β) Απλή ανίσωση μορφής $g(x) \geq h(x)$ (1), $x \in A$

- Προσπαθούμε να δημιουργήσουμε στο ένα μέλος το λόγο μεταβολής μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα $(\frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a})$ και εργαζόμαστε όπως στην

περίπτωση α) της διπλής ανίσωσης

ή

- γράφουμε την (1) στη μορφή $g(x)-h(x) \geq 0$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f(\omega)=g(\omega)-h(\omega)$ σε κατάλληλο διάστημα και εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα αυτό. Συνήθως το κατάλληλο διάστημα είναι το $[r, x]$ ή το $[x, r]$, με $x \in A$, όπου r ρίζα της f .

Παραδείγματα 8, 9

4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1) Πώς δείχνουμε ότι η f είναι σταθερή σε διάστημα Δ

- Υπολογίζουμε την f και προκύπτει ότι είναι σταθερή

ή

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα της σταθερής συνάρτησης

ή

- Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η f είναι **μηδενική** και έχουμε **σχέση που περιέχει f'' και f** , θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f^2(x) + (f'(x))^2$, εφαρμόζουμε το Θ. Σταθερής (δηλ. $h(x)=c$) και δείχνουμε ότι $c=0$. Έτσι $h(x)=0$, οπότε $f(x)=0$.

Παραδείγματα 10, 11

2) Πώς δείχνουμε ότι $f(x)=g(x)$ ή γενικότερα $f(x)=a \cdot g(x)$

για κάθε x σε διάστημα Δ ;

- Βρίσκουμε τους τύπους των f και g και δείχνουμε ότι $f(x)=a \cdot g(x)$, για κάθε $x \in \Delta$
ή
- Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)-a \cdot g(x)$, $x \in \Delta$, εφαρμόζουμε το Θ. Σταθερής (δηλ. $h(x)=c$) και δείχνουμε ότι $c=0$
ή
- Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ στο Δ και να δείξουμε ότι έχει σταθερή τιμή a , για κάθε $x \in \Delta$.
ή
- Αν έχουμε **σχέσεις που περιέχουν f'' και g''** , θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = [f(x)-a \cdot g(x)]^2 + [f'(x)-a \cdot g'(x)]^2$, $x \in \Delta$, εφαρμόζουμε το Θ. Σταθερής (δηλ. $h(x)=c$) και δείχνουμε ότι $c=0$. Έτσι $h(x)=0$, οπότε $f(x)=a \cdot g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Παραδείγματα 12, 13

3) Πώς δείχνουμε ταυτόχρονα ότι $f(x)=f_1(x)$ και $g(x)=g_1(x)$,

(όπου f_1 και g_1 συναρτήσεις που δίνονται) για κάθε x σε διάστημα Δ ;

- Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = [f(x)-f_1(x)]^2 + [g(x)-g_1(x)]^2$, $x \in \Delta$, εφαρμόζουμε το Θ. Σταθερής (δηλ. $h(x)=c$) και δείχνουμε ότι $c=0$. Έτσι $h(x)=0$, για κάθε $x \in \Delta$, οπότε $f(x)=f_1(x)$ και $g(x)=g_1(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Παράδειγμα 14

5. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΜΑΣ ΔΙΝΟΥΝ ΜΙΑ ΣΧΕΣΗ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f (ΚΑΙ ΙΣΩΣ ΚΑΙ ΤΗΝ f) ΚΑΙ ΖΗΤΑΜΕ ΤΗΝ f (διαφορικές εξισώσεις)

Διαφορική εξίσωση

Κάθε εξίσωση που περιέχει παραγώγους της f (και ίσως και την f) και ζητείται η συνάρτηση f , ονομάζεται **διαφορική εξίσωση**. Τότε συνήθως προσπαθούμε να φέρουμε την εξίσωση, ισοδύναμα, σε μία από τις μορφές $(A(f(x)))' = 0$ ή $(A(f(x)))' = (B(x))'$ ή $(A(f(x)))' = (A(f(x)))$, όπου $A(f(x))$ παράσταση που περιέχει την $f(x)$ και $B(x)$ παράσταση του x .

Συγκεκριμένα αν η διαφορική εξίσωση για κάθε x σε κάποιο **διάστημα** καταλήξει **ισοδύναμα** σε:

- $(A(f(x)))' = 0$, (1), τότε από το θεώρημα της σταθερής συνάρτησης είναι $A(f(x)) = c$, απ' όπου βρίσκουμε την $f(x)$ (*).
- $(A(f(x)))' = (B(x))'$, (2), τότε από πόρισμα που αναφέραμε παραπάνω είναι $A(f(x)) = B(x) + c$, απ' όπου βρίσκουμε την $f(x)$ (*).
- $(A(f(x)))' = (A(f(x)))$, (3), τότε από την εφαρμογή μετά το θεώρημα της σταθερής συνάρτησης ισχύει $A(f(x)) = c \cdot e^x$, απ' όπου βρίσκουμε την $f(x)$ (*).

(*) Σε κάθε περίπτωση τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τις σχέσεις (1), (2) και (3) είναι σωστά, **μόνο αν κάθε σχέση ισχύει σε ένα διάστημα**. Μπορούμε δε να προσδιορίσουμε το c , αν μας δίνουν άμεσα ή έμμεσα μια τιμή της f .

• Προσοχή κατά την εφαρμογή των παραπάνω σε ένωση διαστημάτων

Σε περίπτωση που κάποια από τις παραπάνω τρεις σχέσεις **δεν ισχύει σε ένα διάστημα, αλλά σε ένωση διαστημάτων** $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε εφαρμόζουμε τα συμπεράσματά τους χωριστά στο (a, x_0) και στο (x_0, β) . Οι σταθερές ποσότητες c_1 στο (a, x_0) και c_2 στο (x_0, β) καθώς και το $f(x_0)$ (αν η f ορίζεται στο x_0), προσδιορίζονται είτε από τιμές της f που δίνονται, είτε από τη συνέχεια ή την παραγωγισιμότητα της f στο x_0 .

Έτσι αν π.χ. η σχέση $(A(f(x)))' = (B(x))'$ ισχύει σε ένωση διαστημάτων $\Delta_1 \cup \Delta_2$, με τα Δ_1, Δ_2 να είναι ξένα μεταξύ τους, αναγκαστικά θα εργαστούμε χωριστά στα Δ_1 και

$$\Delta_2 \text{ παίρνοντας τελικά ότι } A(f(x)) = \begin{cases} B(x) + c_1, & \text{αν } x \in \Delta_1 \\ B(x) + c_2, & \text{αν } x \in \Delta_2 \end{cases}.$$

Ειδικές κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων και συγκεκριμένα τεχνάσματα

➤ Όταν έχουμε σχέση μορφής

$$f''(x) = g'(x)$$

τότε έχουμε κατά σειρά: $f'(x) = g'(x) + c \Leftrightarrow f'(x) = (g(x) + c \cdot x)' \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + c \cdot x + c_1, \quad c, c_1 \in \mathbb{R}.$$

➤ Όταν έχουμε σχέση μορφής

$$f'(g(x)) = \varphi(x),$$

πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $g'(x)$, αν $g'(x) \neq 0$ για κάθε x και έχουμε

$$g'(x) \cdot f'(g(x)) = g'(x) \cdot \varphi(x) \Leftrightarrow (f(g(x)))' = g'(x) \cdot \varphi(x) \text{ κ.τ.λ.}$$

Έτσι θα προσδιορίσουμε την $f(g(x))$ και ίσως μπορούμε να βρούμε τον τύπο της f ή τουλάχιστον κάποια τιμή της f που μας ζητείται.

- Όταν έχουμε σχέση της μορφής

$$f''(x) - f(x) = 0$$

την φέρνουμε στη μορφή $f''(x) = f(x)$, προσθέτουμε στα δύο μέλη την $f'(x)$,
οπότε έχουμε $f''(x) + f'(x) = f(x) + f'(x)$ (1) δηλαδή

$$(f'(x) + f(x))' = f'(x) + f(x) \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = c \cdot e^x \text{ κ.τ.λ.}$$

ή με άλλο τρόπο πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) με e^x , οπότε
καταλήγουμε στην εξίσωση $(f'(x) \cdot e^x)' = (f(x) \cdot e^x)'$ κ.τ.λ.

- Όταν έχουμε σχέση της μορφής

$$f'(x) + g'(x) \cdot f(x) = \varphi(x) \quad \text{ή} \quad f'(x) - g'(x) \cdot f(x) = \varphi(x),$$

για να εμφανίσουμε ίσες παραγώγους, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη με τον
παράγοντα $e^{g(x)}$ ή $e^{-g(x)}$ αντίστοιχα. Έτσι καταλήγουμε σε σχέση

$$e^{\pm g(x)} \cdot f'(x) \pm e^{\pm g(x)} \cdot g'(x) = e^{\pm g(x)} \cdot \varphi(x) \Leftrightarrow (e^{\pm g(x)} \cdot f(x))' = e^{\pm g(x)} \cdot \varphi(x)$$

κ.τ.λ.

Ειδικές περιπτώσεις των παραπάνω σχέσεων είναι σχέσεις μορφής

$$f'(x) + f(x) = \varphi(x) \quad \text{ή} \quad f'(x) - f(x) = \varphi(x)$$

οπότε πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με e^x ή e^{-x} αντίστοιχα και
καταλήγουμε στην εξίσωση $(f(x) \cdot e^x)' = \varphi(x) \cdot e^x$ ή $(f(x) \cdot e^{-x})' = \varphi(x) \cdot e^{-x}$ κ.τ.λ.

- Όταν έχουμε σχέση της μορφής

$$f''(x) \cdot f(x) + 2(f'(x))^2 = 0, \quad \text{με } f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x,$$

πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $f(x)$, οπότε η σχέση γίνεται

$$f''(x) \cdot f^2(x) + 2(f'(x))^2 \cdot f(x) = 0 \text{ που καταλήγει στην } (f'(x) \cdot f^2(x))' = 0 \text{ κ.τ.λ.}$$

Παραδείγματα 15, 16, 17

6. ΆΛΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τέλος υπάρχουν άλλες ασκήσεις και προβλήματα, που τα δεδομένα ή τα ζητούμενά τους μας οδηγούν να εφαρμόσουμε κάποια από τα θεωρήματα που αναφέραμε παραπάνω.

Για παράδειγμα αν η άσκηση αναφέρει:

- «Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) », θυμίζει Θ.Μ.Τ. ή Θ. Rolle.
- « $f'(x) \in R$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ », μπορεί να έχει σχέση με Θ.Μ.Τ. ή Θ. Rolle (καθώς η f τότε είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β)).
- «Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και ασχολείται με το $f(a)$ και $f(\beta)$ », θυμίζει Θ.Μ.Τ. (καθώς η f τότε είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β)).
- «Δείξτε ότι $\frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} \leq 5$ », θυμίζει Θ.Μ.Τ. λόγω του λόγου μεταβολής, κ.τ.λ.

Παραδείγματα 18, 19, 20, 21

7. ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Ορισμένες ασκήσεις χρειάζονται κάποια ειδική αντιμετώπιση. Συγκεκριμένα:

α) Σε ασκήσεις που ζητούν να δείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in (a, \beta)$, τέτοια ώστε να ισχύει μια σχέση μορφής

$$\kappa_1 \cdot f'(\xi_1) + \kappa_2 \cdot f'(\xi_2) + \dots + \kappa_n \cdot f'(\xi_n) = \kappa, \quad \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n \in \mathbb{N}^*, \kappa \in \mathbb{R},$$

εφαρμόζουμε ΘΜΤ στα n διαδοχικά διαστήματα μορφής $[a, \gamma_1], [\gamma_1, \gamma_2], \dots,$

$$[\gamma_{n-1}, \beta], \text{ όπου } \gamma_i = a + (\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_i) \cdot \frac{\beta - a}{\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_n}.$$

Έτσι χωρίζουμε το $[a, \beta]$ σε n διαστήματα με μήκη ανάλογα με τους συντελεστές ("βάρη") $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$.

Αν για παράδειγμα είχαμε να δείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (a, \beta)$ που ικανοποιούν τη σχέση $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 10$, θα χωρίζαμε το $[a, \beta]$ σε τρία διαδοχικά διαστήματα με μήκη $2 \cdot \frac{\beta - a}{6}$, $3 \cdot \frac{\beta - a}{6}$ και $\frac{\beta - a}{6}$ αντίστοιχα, δηλαδή τα $[a, a + 2 \cdot \frac{\beta - a}{6}]$, $[a + 2 \cdot \frac{\beta - a}{6}, a + 5 \cdot \frac{\beta - a}{6}]$ και $[a + 5 \cdot \frac{\beta - a}{6}, \beta]$.

Παράδειγμα 22

β) Σε ασκήσεις που ζητούν να δείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε να ισχύει μια σχέση μορφής $\frac{\kappa_1}{f'(\xi_1)} + \frac{\kappa_2}{f'(\xi_2)} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{f'(\xi)}$, εφαρμόζουμε ΘΜΤ

στα διαστήματα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$, όπου $f(\gamma) = \frac{\kappa_2 \cdot f(a) + \kappa_1 \cdot f(\beta)}{\kappa_1 + \kappa_2}$, απ' όπου

προκύπτουν τα ξ_1 και ξ_2 και στη συνέχεια ΘΜΤ στο $[a, \beta]$, απ' όπου προκύπτει το ξ .

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΟ Θ.Μ.Τ. ΚΑΙ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ

1. Να εξετάσετε αν για τις παρακάτω συναρτήσεις ισχύει το Θ.Μ.Τ. και αν ισχύει να βρείτε κάθε φορά τα ξ στα οποία αναφέρεται το συμπέρασμα:

α) $f(x) = 2 - \ln x$ στο $[1, e]$

β) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in [-2, 0) \\ 2x^3 - 1, & x \in [0, 2] \end{cases}$ στο $[-2, 2]$

γ) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in [-2, -1] \\ \ln|x+1|, & x \in (-1, 3] \end{cases}$ στο $[-2, 3]$

α) $f(x) = 2 - \ln x$ στο $[1, e]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων, οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει $\xi \in (1, e)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} \quad (1).$$

$$\text{Όμως } f'(x) = (2 - \ln x)' = -\frac{1}{x}, \text{ οπότε } f'(\xi) = -\frac{1}{\xi}.$$

$$f(e) = 2 - \ln e = 2 - 1 = 1 \text{ και } f(1) = 2 - \ln 1 = 2 - 0 = 2.$$

$$\text{Άρα } (1) \Leftrightarrow -\frac{1}{\xi} = \frac{1-2}{e-1} \Leftrightarrow \xi = -\frac{e-1}{-1} \Leftrightarrow \xi = e-1.$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in [-2, 0) \\ 2x^3 - 1, & x \in [0, 2] \end{cases} \text{ στο } [-2, 2]$$

Εδώ θα ελέγξουμε κατευθείαν την παραγωγισιμότητα της f στο $[-2, 2]$, ώστε αν είναι παραγωγίσιμη να καλύψουμε και τη συνέχειά της (αυτό το κάνουμε επειδή εύκολα «φαίνεται» ότι η f είναι συνεχής στα $[-2, 0)$, $(0, 2]$ και στο 0 , άρα σε όλο το $[-2, 2]$).

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-2, 0)$ και στο $(0, 2]$ ως πολυωνυμική.

$$\text{Παραγωγισιμότητα στο } 0: \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1 - (-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3 - 1 - (-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 = 0 \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη και στο 0 με $f'(0) = 0$.

Έτσι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-2, 2]$, οπότε ισχύει το Θ.Μ.Τ. Συνεπώς υπάρχει

$$\xi \in (-2, 2), \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} \quad (1).$$

$$\text{Όμως } f'(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)', & x \in [-2, 0) \\ (2x^3 - 1)', & x \in (0, 2] \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x, & x \in [-2, 0) \\ 6x^2, & x \in (0, 2] \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x, & x \in [-2, 0) \\ 6x^2, & x \in [0, 2] \end{cases}.$$

Παραπάνω τοποθετήσαμε την παράγωγο στο 0 στον δεύτερο κλάδο γιατί πραγματικά για $x=0$ ο δεύτερος κλάδος δίνει $f'(0)=0$.

$$\text{Άρα } f'(\xi) = \begin{cases} 2\xi, & \xi \in (-2, 0) \\ 6\xi^2, & \xi \in [0, 2] \end{cases} \text{ (ανοικτά στα } -2 \text{ και } 2 \text{ γιατί το } \xi \text{ ανήκει στο } (-2, 2)).$$

$$\text{Είναι } f(2) = 2 \cdot 2^3 - 1 = 15 \text{ και } f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3.$$

$$\text{Άρα } (1) \Leftrightarrow 2\xi = \frac{15-3}{4} \text{ αν } \xi \in (-2, 0) \text{ ή } 6\xi^2 = \frac{15-3}{4} \text{ αν } \xi \in [0, 2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \xi = \frac{3}{2} \text{ αν } \xi \in (-2, 0) \text{ ή } \xi = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ αν } \xi \in [0, 2].$$

$$\text{Όμως } \frac{3}{2} \notin (-2, 0) \text{ και } -\sqrt{\frac{1}{2}} \notin [0, 2].$$

Επομένως η τιμή του ξ που είναι δεκτή είναι η $\xi = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$γ) f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \in [-2, -1] \\ \ln|x+1|, & x \in (-1, 3] \end{cases} \text{ στο } [-2, 3]$$

Παρατηρούμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο -1 καθώς $f(-1)=2 \cdot (-1)-1=-3$ και $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln|x+1| = -\infty$, καθώς το $|x+1|$ τείνει στο 0 όταν $x \rightarrow -1^+$.

Άρα η f δεν είναι συνεχής σε όλο το $[-2, 3]$, οπότε **δεν ισχύει** γι αυτήν το **Θ.Μ.Τ.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΣΚΗΣΗ

Το ότι δεν ισχύει το Θ.Μ.Τ. δεν σημαίνει απαραίτητα ότι δεν υπάρχει κατάλληλο ξ που να ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ. Απλά η άσκηση δεν ζητά να ελέγξουμε κάτι τέτοιο.

2. α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει το Θ. Rolle για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^3 + \beta x^2 + 2x + \gamma, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

β) Στη συνέχεια για $\alpha=2, \beta=-4$ και $\gamma=1$ να βρείτε $x_0 \in (-1, 1)$, τέτοιο ώστε η C_f να δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$, παράλληλη προς τον άξονα x' .

α) Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στα $[-1, 0]$ και $(0, 1]$ ως πολυωνυμική. Για να είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ (προϋποθέσεις του Θ. Rolle), πρέπει και αρκεί να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και στο 0.

Συνέχεια στο 0: Πρέπει $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \end{cases}$. Όμως $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \gamma$.

Άρα πρέπει **$\gamma=1$ (1).**

Παραγωγισιμότητα στο 0: Πρέπει $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \in \mathbb{R}$ (2).

Όμως $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + \alpha x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + \alpha x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + \alpha) = \alpha \in \mathbb{R}$ (3) και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + \beta x^2 + 2x + \gamma - 1}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + \beta x^2 + 2x + 1 - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + \beta x^2 + 2x}{x} = 2 \in \mathbb{R} \quad (4). \end{aligned}$$

Από (2), (3) και (4) είναι **$\alpha=2$ (5).**

Το Θ. Rolle απαιτεί επίσης να ισχύει $f(-1)=f(1) \Leftrightarrow (-1)^1 + \alpha \cdot (-1) + 1 = 1^3 + \beta \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + \gamma \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 1 - 2 + 1 = 1 + \beta + 2 + 1 \Leftrightarrow \beta = -4$ (6).

β) Για $a=2$, $\beta=-4$ και $\gamma=1$ έχουμε $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^3-4x^2+2x+1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ οπότε

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2, & -1 \leq x \leq 0 \\ 3x^2-8x+2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

Από το συμπέρασμα του Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$, δηλαδή υπάρχει σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της C_f , όπου η C_f δέχεται εφαπτομένη παράλληλη προς τον $x'x$.

Το x_0 θα βρεθεί ως ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2=0, & -1 < x \leq 0 \\ 3x^2-8x+2=0, & 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, & -1 < x \leq 0 \\ x=\frac{4 \pm \sqrt{10}}{3}, & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Από αυτές τις λύσεις η μόνη που ανήκει στο αντίστοιχο διάστημα είναι η $\frac{4-\sqrt{10}}{3}$. Άρα

$$x_0 = \frac{4-\sqrt{10}}{3}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΣΚΗΣΗ

Στο β) ερώτημα η αναφορά μας στο Θ. Rolle είναι προαιρετική, καθώς θα μπορούσαμε να βρούμε το x_0 λύνοντας απλά την εξίσωση $f'(x)=0$. Απλά το Θ. Rolle μας εξασφαλίζει την ύπαρξη τέτοιου x_0 . Παρατηρείστε επίσης ότι η εύρεση του x_0 είναι αρκετή, καθώς η άσκηση δεν ζητά να βρούμε το σημείο επαφής M .

3. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3+a=3x$ (1), $a \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μια ρίζα στο $(-1, 1)$.

Είναι (1) $\Leftrightarrow x^3-3x+a=0$.

Ορίζουμε $f(x)=x^3-3x+a$ στο $[-1, 1]$, που είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) ως πολυωνυμική.

Έστω ότι η f είχε τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-1, 1)$ τις ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$.

– Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, 1]$ θα είναι και στο $[\rho_1, \rho_2]$.

– Επίσης, αφού ρ_1, ρ_2 ρίζες της f , θα ισχύει $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$.

Άρα ισχύει το Θ. Rolle και επομένως θα υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\xi^2-3=0 \Leftrightarrow \xi=\pm 1$. Όμως αυτές οι τιμές του ξ δεν ανήκουν στο (ρ_1, ρ_2) , καθώς $(\rho_1, \rho_2) \subset (-1, 1)$, ΑΤΟΠΟ.

Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι η f (άρα και η (1)) έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-1, 1)$. Επομένως η (1) έχει το πολύ μια ρίζα στο $(-1, 1)$.

4. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x=x+1$ (1) έχει μόνο μια πραγματική ρίζα.

1ο βήμα: Θα αποδείξουμε ότι η (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$

Η (1) έχει προφανή ρίζα το 0 καθώς $e^0=0+1 \Leftrightarrow 1=1$ αληθές.

2ο βήμα: Θα αποδείξουμε ότι η (1) έχει μία το πολύ ρίζα στο $\mathbb{R}$

Έστω ότι η (1) έχει και άλλη ρίζα $\rho \in \mathbb{R}$ με $\rho \neq 0$. Τότε και η συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$ θα είχε ως ρίζες το 0 και το ρ . Υποθέτουμε ότι $\rho > 0$ (όμοια είναι η απόδειξη αν $\rho < 0$). Τότε:

- f παραγωγίσιμη στο $[0, \rho]$ ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων
- $f(0) = f(\rho) = 0$

Άρα από Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \rho)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ (2).

$$f'(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1. \text{ Άρα } (2) \Leftrightarrow e^\xi - 1 = 0 \Leftrightarrow e^\xi = 1 \Leftrightarrow e^\xi = e^0 \Leftrightarrow \xi = 0.$$

Όμως το 0 δεν ανήκει στο $(0, \rho)$ ΑΤΟΠΟ.

Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι η (1) έχει και άλλη ρίζα στο $\mathbb{R}$ εκτός του 0.

Επομένως η (1) έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Από τα δύο παραπάνω βήματα συμπεραίνουμε ότι η (1) έχει μοναδική ρίζα το 0.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \beta^2 \cdot \gamma \cdot (x - \alpha) \cdot (x - \beta) \cdot (x - \gamma) \cdot (x - \delta)$, με $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ και $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε πόσες ρίζες έχει η f' και να εξετάσετε αν κάποια από αυτές είναι διπλή ρίζα.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, θα είναι παραγωγίσιμη και στα $[a, \beta]$, $[\beta, \gamma]$ και $[\gamma, \delta]$.

Επίσης είναι προφανές ότι οι αριθμοί α , β , γ και δ είναι ρίζες της f , οπότε $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = f(\delta) = 0$.

Εφαρμόζοντας το Θ. Rolle στα $[a, \beta]$, $[\beta, \gamma]$ και $[\gamma, \delta]$ έχουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$, $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ και $\xi_3 \in (\gamma, \delta)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$.

Άρα οι διαφορετικοί αριθμοί (αφού ανήκουν σε ξένα μεταξύ τους διαστήματα) ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 είναι ρίζες της f' .

Αφού η f είναι πολυωνυμική 4ου βαθμού, η f' είναι πολυωνυμική 3ου βαθμού, οπότε έχει το πολύ τρεις διαφορετικές ρίζες.

Άρα η f' έχει μόνο τις ρίζες ξ_1 , ξ_2 και ξ_3 που είναι διαφορετικές, οπότε δεν έχει διπλή ρίζα.

6. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 = x \cdot \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x$ (1) έχει στο $(-\pi, \pi)$ δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες.

Υπαρξη των ριζών

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - x \cdot \eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x$ στο $[-\pi, \pi]$.

Παρατηρούμε ότι $f(-\pi) = (-\pi)^2 - (-\pi) \cdot \eta \mu(-\pi) - \sigma \upsilon \nu(-\pi) = \pi^2 - 0 + 1 = \pi^2 + 1 > 0$

$$f(0) = 0^2 - 0 \cdot \eta \mu 0 - \sigma \upsilon \nu 0 = -1 < 0 \text{ και}$$

$$f(\pi) = \pi^2 - \pi \cdot \eta \mu \pi - \sigma \upsilon \nu \pi = \pi^2 - 0 + 1 = \pi^2 + 1 > 0$$

Έτσι χωρίζοντας το $[-\pi, \pi]$ στα $[-\pi, 0]$ και $[0, \pi]$ παρατηρούμε ότι:

- Η f είναι συνεχής στα $[-\pi, 0]$ και $[0, \pi]$ ως άθροισμα συνεχών
- $f(-\pi) \cdot f(0) < 0$ και $f(0) \cdot f(\pi) < 0$

Άρα εφαρμόζοντας το Θ. Bolzano στα παραπάνω διαστήματα έχουμε το συμπέρασμα ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον ρίζες x_1 και x_2 της f (άρα και της (1)), με $x_1 \in (-\pi, 0)$ και $x_2 \in (0, \pi)$.

Μοναδικότητα των ριζών

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι οι ρίζες αυτές είναι μοναδικές.

Έστω ότι η f έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 στο $(-\pi, \pi)$ με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Τότε:

- f παραγωγίσιμη στο $[-\pi, \pi]$ ως άθροισμα παραγωγισίμων, άρα και στα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$, οπότε και συνεχής.
- $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ και $f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$

Άρα από Θ. Rolle υπάρχουν τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2) \subset (-\pi, \pi)$ με $f'(\xi_1)=0$ και τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3) \subset (-\pi, \pi)$ με $f'(\xi_2)=0$.

Όμως $f'(x) = (x^2 - x \cdot \eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x)' = 2x - \eta \mu x - x \cdot \sigma \upsilon \nu x + \eta \mu x = 2x - x \cdot \eta \mu x = x \cdot (2 - \sigma \upsilon \nu x)$.

Άρα $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ (μία που $2 - \sigma \upsilon \nu x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$), ΑΤΟΠΟ καθώς σύμφωνα με τα παραπάνω η f' έχει δύο τουλάχιστον ρίζες, τις ξ_1 και ξ_2 .

Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι η f έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 στο $(-\pi, \pi)$. Άρα η f έχει το πολύ δύο ρίζες στο $(-\pi, \pi)$, τις x_1 και x_2 που αποδείξαμε ότι υπάρχουν.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το ότι οι ρίζες της f είναι το πολύ δύο, θα μπορούσε να αποδειχθεί πάλι με απαγωγή σε άτοπο, αποκλείοντας να έχει η f δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-\pi, 0)$ και στη συνέχεια αποκλείοντας επίσης την ύπαρξη δύο τουλάχιστον ριζών στο $(0, \pi)$.

7. Έστω f συνεχής στο $[1, e]$, παραγωγίσιμη στο $(1, e)$, για την οποία ισχύει ότι $f(e)-f(1)=e^2-2$. Να δείξετε ότι υπάρχει στο $(1, e)$ ρίζα της εξίσωσης $x \cdot f'(x) + 1 = 2x^2$

Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $x \cdot f'(x) - 2x^2 + 1 = 0$ (1) έχει ρίζα στο $(1, e)$, οπότε διαιρώντας και τα δύο μέλη με x (αφού $x \in (1, e)$) θα δείξουμε ότι η ισοδύναμη εξίσωσή της $f'(x) - 2x + \frac{1}{x} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, e)$. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα

Rolle σε μια παράγουσα της συνάρτησης $h(x) = f'(x) - 2x + \frac{1}{x}$, που είναι η

$H(x) = f(x) - x^2 + \ln x$. Έτσι:

Ορίζουμε τη συνάρτηση $H(x) = f(x) - x^2 + \ln x$ στο $[1, e]$, η οποία είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμη στο $(1, e)$ ως άθροισμα παραγωγισίμων.

Επιπλέον είναι $H(1) = f(1) - 1$ και $H(e) = f(e) - e^2 + 1$, άρα η σχέση $H(e) = H(1)$ καταλήγει ισοδύναμα στην $f(e) - f(1) = e^2 - 2$, που ισχύει από υπόθεση. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, οπότε υπάρχει $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε να είναι $H'(\xi) = 0$.

Όμως $H'(x) = f'(x) - 2x + \frac{1}{x}$, οπότε η εξίσωση $f'(x) - 2x + \frac{1}{x} = 0$, άρα και η ισοδύναμή της (1), έχει ρίζα στο $(1, e)$.

8. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq 1 + x$.

1ος τρόπος

Αρκεί να δείξουμε ότι $e^x - x - 1 \geq 0$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x)=e^x-x-1$, που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=e^x-1$ (1).

Η f έχει ως προφανή ρίζα το 0, καθώς $f(0)=e^0-0-1=1-1=0$.

- **Για $x>0$** , θεωρούμε διάστημα $[0, x]$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, x]$, από Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in (0, x), \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} e^\xi - 1 = \frac{e^x - x - 1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \cdot e^\xi - x = e^x - x - 1 \quad (2).$$

Άρα για να δείξουμε ότι $e^x - x - 1 \geq 0$ αρκεί να δείξουμε (λόγω της (2)) ότι $x \cdot e^\xi - x \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \cdot (e^\xi - 1) \geq 0, \text{ ΑΛΗΘΕΣ, αφού } x > 0 \text{ και } \xi > 0 \text{ οπότε } e^\xi > e^0 \Leftrightarrow e^\xi > 1.$$

- **Για $x<0$** , θεωρούμε διάστημα $[x, 0]$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[x, 0]$, από Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in (x, 0), \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} e^\xi - 1 = \frac{e^x - x - 1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \cdot e^\xi - x = e^x - x - 1 \quad (3).$$

Άρα για να δείξουμε ότι $e^x - x - 1 \geq 0$ αρκεί να δείξουμε (λόγω της (3)) ότι $x \cdot e^\xi - x \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \cdot (e^\xi - 1) \geq 0, \text{ ΑΛΗΘΕΣ, αφού } x < 0 \text{ και } \xi < 0 \text{ οπότε } e^\xi < e^0 \Leftrightarrow e^\xi < 1.$$

- **Για $x=0$** , προφανώς η ανίσωση $e^x - x - 1 \geq 0$ ισχύει ως ισότητα.

ΑΡΑ σε κάθε περίπτωση (για κάθε $x \in \mathbb{R}$) ισχύει $e^x \geq 1 + x$.

2ος τρόπος (καλύτερος)

Η προς απόδειξη σχέση γράφεται: $e^x - 1 \geq x \Leftrightarrow e^x - e^0 \geq x$ (1).

Εκλέγουμε περιπτώσεις:

- **Αν $x>0$** , (1) $\Leftrightarrow \frac{e^x - e^0}{x - 0} \geq 1$ (2). Ορίζουμε συνάρτηση $f(x)=e^x$ στο $[0, x]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, με παράγωγο $f'(x)=e^x$, οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^x - e^0}{x - 0}$. Άρα για να δείξουμε την (2) αρκεί να δείξουμε ότι $e^\xi \geq 1 \Leftrightarrow e^\xi \geq e^0 \Leftrightarrow \xi \geq 0$, που ισχύει αφού $\xi \in (0, x)$.

- **Αν $x<0$** , (1) $\Leftrightarrow \frac{e^x - e^0}{x - 0} \leq 1$ (3). Ορίζουμε συνάρτηση $f(x)=e^x$ στο $[x, 0]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, με παράγωγο $f'(x)=e^x$, οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x, 0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^x - e^0}{x - 0}$. Άρα για να δείξουμε την (3) αρκεί να δείξουμε ότι $e^\xi \leq 1 \Leftrightarrow e^\xi \leq e^0 \Leftrightarrow \xi \leq 0$, που ισχύει αφού $\xi \in (x, 0)$.

- **Τέλος αν $x=0$** , τότε προφανώς η (1) ισχύει ως ισότητα.

ΑΡΑ σε κάθε περίπτωση (για κάθε $x \in \mathbb{R}$) ισχύει $e^x \geq 1 + x$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΣΚΗΣΗ

1. Στα επόμενα θα δούμε την ίδια άσκηση να λύνεται πολύ ευκολότερα με τη βοήθεια της θεωρίας των ακροτάτων συνάρτησης (βλέπε "ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ"), καθώς επίσης και έναν ακόμα τρόπο με τη βοήθεια της κυρτότητας (βλέπε "ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ").
2. Με ανάλογους τρόπους μπορούμε να δείξουμε ότι

$$1+x \leq e^x \leq x \cdot e^x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (\text{με τις ισότητες να ισχύουν για } x=0)$$

της οποίας τμήμα αποτελεί η ανίσωση $e^x \geq 1+x$, καθώς ότι

$$\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1, \text{ για κάθε } x > 0 \quad (\text{με τις ισότητες να ισχύουν για } x=1).$$

Τις ανισώσεις $e^x \geq 1+x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

και $\ln x \leq x-1$, για κάθε $x > 0$,

καλό θα είναι να τις θυμόμαστε απέξω, γιατί είναι αρκετά χρήσιμες. Από αυτές η δεύτερη αποτελεί εφαρμογή του σχολικού βιβλίου.

ΠΕΠΩ Οι δύο παραπάνω διπλές ανισώσεις είναι ισοδύναμες, καθώς προκύπτει η μία από την άλλη, με αλλαγή μεταβλητής. Συγκεκριμένα:

θέτουμε $x = \ln u$
 $1\eta \rightarrow 2\eta$ ("σπάζοντας" τη διπλή σε δύο μονές και λύνοντάς τις ως προς $\ln u$).

θέτουμε $x = e^u$
 $2\eta \rightarrow 1\eta$ ("σπάζοντας" τη διπλή σε δύο μονές και λύνοντάς τις ως προς e^u).

$$9. \text{ Αν } 0 < \beta < a, \text{ δείξτε ότι } \frac{a-\beta}{a} < \ln \frac{a}{\beta} < \frac{a-\beta}{\beta} \quad (1)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων και αφού $a-\beta > 0$, η (1) γράφεται

$$\text{ισοδύναμα } \frac{a-\beta}{a} < \ln a - \ln \beta < \frac{a-\beta}{\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln \beta}{a-\beta} < \frac{1}{\beta} \quad (2).$$

Το πηλίκο $\frac{\ln a - \ln \beta}{a-\beta}$ είναι προφανές ότι αποτελεί το λόγο μεταβολής της συνάρτησης

$f(x) = \ln x$ μεταξύ των a και β .

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$ στο $[\beta, a]$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως βασική, θα είναι και στο $[\beta, a]$. Άρα από

$$\text{Θ.Μ.Τ. υπάρχει } \xi \in (\beta, a), \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(a) - f(\beta)}{a - \beta} \quad (3).$$

$$\text{Όμως } f'(x) = \frac{1}{x} \text{ οπότε } f'(\xi) = \frac{1}{\xi} \quad (4).$$

$$\text{Επίσης } \frac{f(a) - f(\beta)}{a - \beta} = \frac{\ln a - \ln \beta}{a - \beta} \quad (5).$$

$$(3) \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\xi} = \frac{\ln a - \ln \beta}{a - \beta} \quad (6).$$

$$\text{Άρα για να δείξουμε τη (2) αρκεί να δείξουμε (λόγω της (6)) ότι } \frac{1}{a} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad a, \beta, \xi > 0$$

$$\Leftrightarrow a > \xi > \beta, \text{ ΑΛΗΘΗΣ, αφού όπως είπαμε } \xi \in (\beta, a).$$

Άρα αποδείχθηκε η (2) οπότε και η ισοδυναμία της (1).

10. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x - \frac{3}{2}(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή της.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\eta\mu^6 x)' + (\sigma\upsilon\nu^6 x)' - \frac{3}{2}(\eta\mu^4 x)' - \frac{3}{2}(\sigma\upsilon\nu^4 x)' = \\ &= 6 \cdot \eta\mu^5 x \cdot (\eta\mu x)' + 6 \cdot \sigma\upsilon\nu^5 x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' - \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot \eta\mu^3 x \cdot (\eta\mu x)' - \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' = \\ &= 6 \cdot \eta\mu^5 x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 6 \cdot \sigma\upsilon\nu^5 x \cdot (-\eta\mu x) - 6 \cdot \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 6 \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x \cdot (-\eta\mu x) = \\ &= 6 \cdot \eta\mu^5 x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 6 \cdot \sigma\upsilon\nu^5 x \cdot \eta\mu x - 6 \cdot \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 6 \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x \cdot \eta\mu x = \\ &= 6 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot (\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x - \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) = 6 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot [(\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x) - (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x)] = \\ &= 6 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot [(\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x) \cdot (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) - (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x)] = \\ &= 6 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot [(\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x) \cdot 1 - (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x)] = 6 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot [(\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x) - (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x)] = \\ &= 6 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Άρα η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $f(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Για } x=0 \text{ έχουμε } f(0)=c \Leftrightarrow \eta\mu^6 0 + \sigma\upsilon\nu^6 0 - \frac{3}{2}(\eta\mu^4 0 + \sigma\upsilon\nu^4 0) = c \Leftrightarrow 0 + 1 - \frac{3}{2}(0 + 1) = c \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } f(x) = -\frac{1}{2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

11. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f''(x) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f'(0) = 0$. Να δείξετε ότι η f είναι μηδενική συνάρτηση.

Αρκεί σύμφωνα με τη μεθοδολογία να δείξουμε ότι η συνάρτηση $h(x) = (f'(x))^2 + f^2(x)$ είναι μηδενική. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με $h'(x) = 2f'(x) \cdot f''(x) + 2f(x) \cdot f'(x) = 2f'(x) \cdot (f''(x) + f(x)) = 0$ από υπόθεση. Άρα $h(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι $h(0) = c \Leftrightarrow (f'(0))^2 + f^2(0) = c \Leftrightarrow c = 0$. Άρα $h(x) = 0 \Leftrightarrow (f'(x))^2 + f^2(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f'(x) = 0$ και $f(x) = 0$, δηλαδή $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

12. Δείξτε ότι αν μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι αντίθετη της παραγώγου της, τότε έχει τύπο $f(x) = c \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, όπου c πραγματική σταθερά και αντιστρόφως.

Μια άλλη εκφώνηση για την άσκηση θα ήταν: «Δείξτε ότι η μοναδική συνάρτηση f που είναι αντίθετη στο $\mathbb{R}$ με την παράγωγό της είναι η $f(x) = c \cdot e^{-x}$ ».

Ζητάμε να αποδείξουμε την ισοδυναμία $f'(x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΕΥΘΥ: Έστω $f'(x) = -f(x)$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $f(x) = c \cdot e^{-x}$, ή αλλιώς $\frac{f(x)}{e^{-x}} = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ορίζουμε στο $\mathbb{R}$ τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^{-x}}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η g είναι σταθερή (c).

Αφού οι f και e^{-x} είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, θα είναι και η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ηλίκο παραγωγισίμων. Άρα θα είναι και συνεχής.

$$\text{Είναι } g'(x) = \left(\frac{f(x)}{e^{-x}}\right)' = \frac{f'(x) \cdot e^{-x} - f(x) \cdot (e^{-x})'}{(e^{-x})^2} \stackrel{(1)}{=} \frac{-f(x) \cdot e^{-x} + f(x) \cdot e^{-x}}{e^{-2x}} = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα $g(x)=c$ στο $\mathbb{R}$, οπότε $\frac{f(x)}{e^{-x}} = c$, δηλαδή $f(x)=c \cdot e^{-x}$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ: Έστω ότι $f(x)=c \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $f'(x)=-f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=(c \cdot e^{-x})' = c \cdot (e^{-x})' = -c \cdot e^{-x} = -f(x)$.

Άρα τελικά $f'(x)=-f(x) \Leftrightarrow f(x)=c \cdot e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

13. Έστω f συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{\pi}{2})$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x)=f(x) \cdot \sigma\phi x \quad (1), \text{ για κάθε } x \in (0, \frac{\pi}{2}). \text{ Αν } f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}, \text{ να δείξετε ότι } f(x)=2\eta\mu x,$$

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{f(x)}{\eta\mu x} = 2$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$$\text{Ορίζουμε } g(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{\pi}{2})$, ως ηλίκο παραγωγισίμων με

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot \eta\mu x - f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} = \frac{\eta\mu x \cdot (f'(x) - f(x) \cdot \sigma\phi x)}{\eta\mu^2 x} = \frac{f'(x) - f(x) \cdot \sigma\phi x}{\eta\mu x} = 0 \text{ από (1).}$$

$$\text{Άρα } g(x)=c, \text{ οπότε } g(\frac{\pi}{4})=c \Leftrightarrow \frac{f(\frac{\pi}{4})}{\eta\mu \frac{\pi}{4}} = c \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = c \Leftrightarrow c=2, \text{ δηλαδή } g(x)=2 \text{ για κάθε}$$

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ οπότε } \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 2 \Leftrightarrow f(x)=2\eta\mu x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το προηγούμενο παράδειγμα θα μπορούσε να αντιμετωπισθεί χωρίς να γνωρίζουμε την προς απόδειξη συνάρτηση, ξεκινώντας από τη σχέση (1), όπως συμβαίνει σε επόμενα παραδείγματα.

14. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν $f'(x)=g(x)$, $g'(x)=-f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0)=0$ και $g(0)=1$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) f^2(x)+g^2(x)=1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\beta) f(x)=\eta\mu x \text{ και } g(x)=\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\alpha) \text{ Έστω η συνάρτηση } \varphi(x)=f^2(x)+g^2(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με $\varphi'(x)=2f(x) \cdot f'(x)+2g(x) \cdot g'(x)=2f(x) \cdot g(x)-2g(x) \cdot f(x)=0$. Άρα από το θεώρημα της

σταθερής είναι $\varphi(x)=c$, $c \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε $\varphi(0)=c \Leftrightarrow f^2(0)+g^2(0)=c \Leftrightarrow 0+1=c \Leftrightarrow c=1$. Άρα $\varphi(x)=1$ δηλαδή $f^2(x)+g^2(x)=1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Έστω $h(x) = (f(x)-\eta\mu x)^2 + (g(x)-\sigma\upsilon\nu x)^2$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με $h'(x) = 2(f(x)-\eta\mu x) \cdot (f(x)-\eta\mu x)' + 2(g(x)-\sigma\upsilon\nu x) \cdot (g(x)-\sigma\upsilon\nu x)' = \dots = 0$.

Άρα $h(x)=c$, $c \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι $h(0)=c \Leftrightarrow (f(0)-\eta\mu 0)^2 + (g(0)-\sigma\upsilon\nu 0)^2 = c \Leftrightarrow 0^2 + 0^2 = c \Leftrightarrow c=0$. Άρα $h(x)=0 \Leftrightarrow (f(x)-\eta\mu x)^2 + (g(x)-\sigma\upsilon\nu x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15. Να προσδιορίσετε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο σύνολο που δίνεται κάθε φορά, αν ισχύει:

α) f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f(x) = -x \cdot f'(x)$ (1), για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $f(1)=1$

β) f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $(x^2+1)^2 \cdot f'(x) + 2x = 0$ (2), για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=0$

γ) f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) + x - 1 = f(x)$ (3), για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από το $(0, 1)$.

α) (1) $\Leftrightarrow f(x) + x \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x) \cdot f(x) + x \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x \cdot f(x))' = 0 \Leftrightarrow x \cdot f(x) = c$ (4), $c \in \mathbb{R}$, από το θεώρημα της σταθερής συνάρτησης.

Όμως $f(1)=1$, οπότε η τελευταία σχέση για $x=1$ δίνει $1 \cdot f(1) = c \Leftrightarrow 1 \cdot 1 = c \Leftrightarrow c=1$.

Αφού $c=1$ και $x > 0$ είναι (4) $\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x}$.

β) (2) $\Leftrightarrow (x^2+1)^2 \cdot f'(x) = -2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)'.$$

Σύμφωνα με θεώρημα που αναφέραμε στη θεωρία είναι $f(x) = \frac{1}{x^2+1} + c$, (5) $c \in \mathbb{R}$.

Όμως $f(0)=0$, οπότε η τελευταία σχέση για $x=0$ δίνει

$$f(0) = \frac{1}{0^2+1} + c \Leftrightarrow 0 = 1 + c \Leftrightarrow c = -1. \text{ Άρα (5) } \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2+1} - 1.$$

γ) (3) $\Leftrightarrow f'(x) - 1 = f(x) - x \Leftrightarrow (f(x) - x)' = f(x) - x \xrightarrow{\text{από εφαρμογή}} f(x) - x = c \cdot e^x$ (6), $c \in \mathbb{R}$.

Όμως $f(0)=1$, οπότε θέτοντας στην τελευταία σχέση όπου x το 0 έχουμε $f(0) - 0 = c \cdot e^0 \Leftrightarrow 1 = c \Leftrightarrow c=1$. Έτσι (6) $\Leftrightarrow f(x) - x = 1 \cdot e^x \Leftrightarrow f(x) = e^x + x$.

16. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(0)=2$ και $(x-1) \cdot f'(x) = 2x^2 - x - 1$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την f .

$$\text{Για } x \neq 1 \text{ η (1) } \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{(x-1) \cdot (2x+1)}{x-1} = 2x+1.$$

Άρα για $x \in (-\infty, 1)$ είναι $f'(x) = (x^2+x)'$ οπότε $f(x) = x^2+x+c_1$ (2) και

για $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) = (x^2+x)'$ οπότε $f(x) = x^2+x+c_2$.

Όμως $f(0)=2 \xrightarrow{(2)} c_1=2$, οπότε $f(x) = x^2+x+2$, $x \in (-\infty, 1)$.

Αφού f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής στο 1, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x + c_2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x + 2) \Leftrightarrow c_2 = 2 \text{ και}$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Leftrightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x + 2) \Leftrightarrow f(1) = 4.$$

$$\text{Άρα τελικά } f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ x^2 + x + 2, & x > 1 \end{cases}, \text{ δηλαδή } f(x) = x^2 + x + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

17. Έστω συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x) + 2f(x) = 0$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = 3$, να βρείτε τον τύπο της f .

Παρατηρούμε ότι η (1) έχει τη μορφή $f'(x) + g'(x) \cdot f(x) = 0$, με $g'(x) = 2$. Έτσι πολλαπλασιάζοντας τα δύο της μέλη με e^{2x} έχουμε:

(1) $\Leftrightarrow e^{2x} \cdot f'(x) + 2 \cdot e^{2x} \cdot f(x) = e^{2x} \cdot 0 \Leftrightarrow e^{2x} \cdot f'(x) + e^{2x} \cdot (2x)' \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{2x} \cdot f(x))' = 0$, οπότε από το θεώρημα της σταθερής είναι $e^{2x} \cdot f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η προηγούμενη σχέση για $x = 0$ δίνει $e^0 \cdot f(0) = c \Leftrightarrow 1 \cdot 3 = c \Leftrightarrow c = 3$. Άρα από (2) $\Leftrightarrow e^{2x} \cdot f(x) = 3 \Leftrightarrow f(x) = 3 \cdot e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

18. Αν f και g συναρτήσεις συνεχείς σε διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (a, β) , τέτοιες ώστε $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$ και $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(\beta)}{g(\beta)}$, δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$ (1).

Αν υπάρχει τέτοιο ξ , αφού θα ανήκει στο (a, β) θα ισχύει γι αυτό (σύμφωνα με την υπόθεση) ότι $g(\xi) \neq 0$ και $g'(\xi) \neq 0$. Άρα η (1) είναι ισοδύναμη με την $f'(\xi) \cdot g(\xi) = f(\xi) \cdot g'(\xi)$, δηλαδή την $f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi) = 0$ (2). Έτσι αντί να δείξουμε ότι υπάρχει τέτοιο ξ που να ικανοποιεί την (1), αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ξ που να ικανοποιεί την (2).

Η σχέση (2) μας θυμίζει την παράγωγο της $\frac{f}{g}$ στο ξ . Έτσι:

Ορίζουμε συνάρτηση $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ που είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο

(a, β) , λόγω των ιδιοτήτων των f και g .

Επίσης $F(a) = \frac{f(a)}{g(a)}$ και $F(\beta) = \frac{f(\beta)}{g(\beta)}$. Από υπόθεση όμως είναι $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(\beta)}{g(\beta)}$, οπότε

$$F(a) = F(\beta).$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ισχύει το Θ. Rolle για την F στο $[a, \beta]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $F'(\xi) = 0$ (3).

$$\text{Όμως } F'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad (4).$$

$$\text{Από (3) και (4) έπεται ότι } \frac{f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi)}{g^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi) = 0.$$

19. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση f αν $f'(x) = \sin x + 2x$ και $f(0) = 1$.

Μια συνάρτηση που έχει ως παράγωγο τη συνάρτηση με τύπο $\sin x + 2x$ είναι προφανώς η $g(x) = \eta \mu x + x^2$. Τότε ισχύει ότι $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε από το Θεώρημα 4 της θεωρίας, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f(x) = g(x) + c \Leftrightarrow f(x) = \eta \mu x + x^2 + c$ (1).

Όμως $f(0) = 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \eta \mu 0 + 0^2 + c = 1 \Leftrightarrow c = 1$.

Άρα η (1) δίνει $f(x) = \eta \mu x + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$.

20. Αν $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $[a, b]$ με $|f'(x)| < \kappa$ για κάθε $x \in (a, b)$ και $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$, δείξτε ότι για κάθε $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ με $\xi_1 < \xi_2$ ισχύει ότι $|f(\xi_2) - f(\xi_1)| < \kappa \cdot |\xi_2 - \xi_1|$ (1).

Η σχέση (1) θυμίζει Θ.Μ.Τ. στο $[\xi_1, \xi_2]$, λόγω των διαφορών που περιέχει.

Η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) (αφού από την υπόθεση υπάρχει η $f'(x)$ στο (a, b)).

Άρα στο $[\xi_1, \xi_2] \subseteq [a, b]$ πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., οπότε υπάρχει

$\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}$. Άρα $|f'(\xi)| = \frac{|f(\xi_2) - f(\xi_1)|}{|\xi_2 - \xi_1|}$ (2).

Όμως από υπόθεση $|f'(x)| < \kappa$ για κάθε $x \in (a, b)$ και αφού $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (a, b)$, θα ισχύει και για το ξ , δηλαδή $|f'(\xi)| < \kappa$ (3).

Από (2) και (3) είναι $\frac{|f(\xi_2) - f(\xi_1)|}{|\xi_2 - \xi_1|} < \kappa \Leftrightarrow |f(\xi_2) - f(\xi_1)| < \kappa \cdot |\xi_2 - \xi_1|$.

21. Δύο ποδηλάτες Π_A και Π_B διάνυσαν την ίδια απόσταση $(AB) = s$ σε 3 ώρες, ξεκινώντας ταυτόχρονα ο Π_A από το A και ο Π_B από το B . Να αποδείξετε ότι κάποια χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια της διαδρομής AB , είχαν και οι δύο την ίδια ταχύτητα.

Έστω $x_A(t)$ και $x_B(t)$ οι συναρτήσεις θέσεων από το A των ποδηλατών Π_A και Π_B αντίστοιχα, κάθε χρονική στιγμή t . Οι αντίστοιχες συναρτήσεις των ταχυτήτων τους θα δίνονται από τις σχέσεις $u_A(t) = x'_A(t)$ και $u_B(t) = x'_B(t)$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $t_0 \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε $u_A(t_0) = u_B(t_0) \Leftrightarrow u_A(t_0) - u_B(t_0) = 0 \Leftrightarrow x'_A(t_0) - x'_B(t_0) = 0$.

Ορίζουμε συνάρτηση $x(t) = x_A(t) - x_B(t)$ στο $[0, 3]$.

Η x είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$, οπότε από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει

$t_0 \in (0, 3)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $x'(t_0) = \frac{x_A(3) - x_B(3) - (x_A(0) - x_B(0))}{3 - 0}$ (1).

Όμως $x_A(0) = x_B(3) = 0$, γιατί ο ένας σε χρόνο 0 και ο άλλος σε χρόνο 3 βρίσκονται στο A και $x_A(3) = x_B(0) = s$ καθώς σε χρόνο 3 και 0 αντίστοιχα βρίσκονταν στο B .

Άρα (1) $\Leftrightarrow x'(t_0) = 0 \Leftrightarrow x'_A(t_0) - x'_B(t_0) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow u_A(t_0) = u_B(t_0)$.

Επομένως υπάρχει χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία έχουν την ίδια ταχύτητα.

22. Αν f συνάρτηση συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) και $f(a)=f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$, τέτοιοι ώστε $3f'(\xi_1)+2f'(\xi_2)=0$ (1).

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία θα εφαρμόσουμε ΘΜΤ στα $[a, \gamma_1]$ και $[\gamma_1, \beta]$, όπου το γ_1 επιλέγεται ως εξής: Χωρίζουμε το $[a, \beta]$ σε δύο διαδοχικά διαστήματα με μήκη ανάλογα με τους συντελεστές 3 και 2 της σχέσης (1). Αυτό επιτυγχάνεται χωρίζοντας το $[a, \beta]$ σε πέντε ίσα μέρη (3+2) με μήκος $\frac{\beta-a}{5}$ το καθένα, οπότε το $[a, \gamma_1]$ έχει

μήκος $3 \cdot \frac{\beta-a}{5}$ και το $[\gamma_1, \beta]$ έχει μήκος $2 \cdot \frac{\beta-a}{5}$. Άρα $\gamma_1 = a + 3 \cdot \frac{\beta-a}{5} = \frac{3\beta+2a}{5}$.

Η f είναι συνεχής στα $[a, \frac{3\beta+2a}{5}]$ και $[\frac{3\beta+2a}{5}, \beta]$ και παραγωγίσιμη στα $(a, \frac{3\beta+2a}{5})$

και $(\frac{3\beta+2a}{5}, \beta)$, οπότε από ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1 \in (a, \frac{3\beta+2a}{5})$ και $\xi_2 \in (\frac{3\beta+2a}{5}, \beta)$, τέτοια

$$\text{ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(\frac{3\beta+2a}{5}) - f(a)}{\frac{3\beta+2a}{5} - a} = \frac{f(\frac{3\beta+2a}{5}) - f(a)}{\frac{3\beta-3a}{5}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{f(\frac{3\beta+2a}{5}) - f(a)}{\beta - a}$$

$$\text{και } f'(\xi_2) = \frac{f(\frac{3\beta+2a}{5}) - f(\beta)}{\frac{3\beta+2a}{5} - \beta} \stackrel{f(a)=f(\beta)}{=} \frac{f(\frac{3\beta+2a}{5}) - f(a)}{\frac{2a-2\beta}{5}} = -\frac{5}{2} \cdot \frac{f(\frac{3\beta+2a}{5}) - f(a)}{\beta - a}.$$

$$\text{Έτσι } 3f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 3 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{f(\frac{3\beta+2a}{5}) - f(a)}{\beta - a} - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{f(\frac{3\beta+2a}{5}) - f(a)}{\beta - a} = 0.$$

3.5 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Πριν αναφέρουμε το θεώρημα με το οποίο ελέγχουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης, είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε τα παρακάτω:

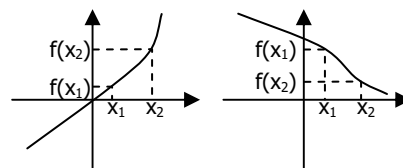
ΟΡΙΣΜΟΙ

Μια συνάρτηση f λέγεται

- **γνησίως αύξουσα** (για συντομία $f \uparrow$) σε ένα σύνολο Δ , όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ και
- **γνησίως φθίνουσα** (για συντομία $f \downarrow$) σε ένα σύνολο Δ , όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- **αύξουσα** (για συντομία $f \uparrow$) σε ένα σύνολο Δ , όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$ και
- **φθίνουσα** (για συντομία $f \downarrow$) σε ένα σύνολο Δ , όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$.

- **σταθερή** σε ένα σύνολο Δ , όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Γραφικά έχουμε ότι η C_f μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης από τα αριστερά προς τα δεξιά «ανεβαίνει», ενώ μιας γνησίως φθίνουσας από τα αριστερά προς τα δεξιά «κατεβαίνει».



Όταν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται γενικά **γνησίως μονότονη**.

Όταν η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα λέγεται απλά **μονότονη**.

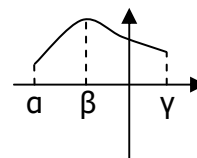
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- 1) Από τους παραπάνω ορισμούς αντιλαμβανόμαστε ότι:
«κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και μονότονη» και ότι
«η μόνη συνάρτηση που είναι ταυτόχρονα και αύξουσα και φθίνουσα είναι η σταθερή».

- 2) Μπορεί μία συνάρτηση να μην είναι γνησίως μονότονη σε όλο το πεδίο ορισμού της, γιατί ίσως σε κάποια διαστήματα έχει αντιφατικά είδη μονοτονίας.

Τότε λέμε ότι είναι **γνησίως μονότονη κατά διαστήματα**.

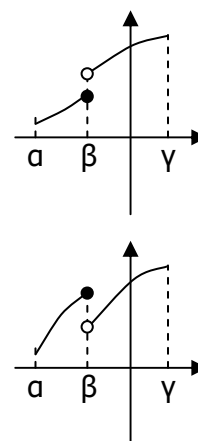
Για παράδειγμα η f του διπλανού σχήματος είναι $\nearrow$ στο $[a, \beta]$ και $\searrow$ στο $[\beta, \gamma]$. Δεν είναι όμως γνησίως μονότονη σε όλο το $[a, \gamma]$ καθώς παρουσιάζει αντιφατικά είδη μονοτονίας.



- 3) Αν για κάποιο λόγο αναγκαστούμε να μελετήσουμε τη μονοτονία της f σε διαδοχικά υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού της και προκύψει το ίδιο είδος μονοτονίας, είμαστε σίγουροι ότι η f είναι γνησίως μονότονη στην ένωση αυτών των υποδιαστημάτων και μάλιστα με το ίδιο είδος μονοτονίας, ΜΟΝΟ αν η f είναι συνεχής. Αν δεν γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής, το ότι έχει το ίδιο είδος μονοτονίας στα υποδιαστήματα αυτά, ΔΕΝ σημαίνει απαραίτητα ότι η f είναι γνησίως μονότονη στην ένωσή τους.

Για παράδειγμα, στο πρώτο από τα δύο διπλανά σχήματα η f είναι γνησίως αύξουσα τόσο στο $[a, \beta]$, όσο και στο $(\beta, \gamma]$ και τελικά είναι γνησίως αύξουσα και στο $[a, \gamma]$ (στην ένωση των $[a, \beta]$ και $(\beta, \gamma]$), ενώ στο δεύτερο σχήμα, παρ' όλο που η f είναι επίσης γνησίως αύξουσα στα $[a, \beta]$ και $(\beta, \gamma]$, δεν είναι μονότονη στο $[a, \gamma]$.

Από τα παραδείγματα αυτά αντιλαμβανόμαστε ότι αν δεν γνωρίζουμε τίποτα σχετικά με τη συνέχεια της f και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας στα $[a, \beta]$ και $(\beta, \gamma]$, χρειάζεται περαιτέρω έρευνα για να συμπεράνουμε τη μονοτονία της στο $[a, \gamma]$.



ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ▼

Επειδή, αφ' ενός, οι περισσότερες συναρτήσεις που θα μας απασχολήσουν είναι συνεχείς και αφ' ετέρου, η μελέτη των χαρακτηριστικών μιας συνεχούς συνάρτησης γίνεται με απλό και σαφή τρόπο, τα περισσότερα από τα θεωρήματα του κεφαλαίου αυτού, έχουν ως προϋπόθεση τη συνέχεια της συνάρτησης στην οποία αναφέρονται.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ

Έστω f συνάρτηση:

- συνεχής σε **διάστημα Δ** και
- παραγωγίσιμη στο **εσωτερικό** (τουλάχιστον) του Δ

– Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x **εσωτερικό** του Δ

TOTE f $\nearrow$ στο Δ

– Αν $f'(x) < 0$ για κάθε x **εσωτερικό** του Δ

TOTE f $\searrow$ στο Δ

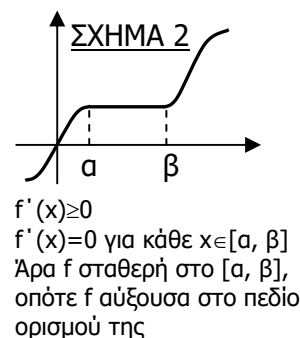
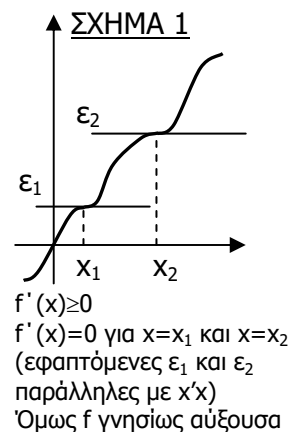
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Στο παραπάνω θεώρημα, η προϋπόθεση « f παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ », είναι πλεονασμός, καθώς καλύπτεται από την $f'(x) > 0$ (ή < 0) (δεν είναι δυνατόν να ισχύει $f'(x) > 0$ στο εσωτερικό του Δ , αν εκεί η f δεν είναι παραγωγίσιμη). Την αναφέρουμε όμως, για να τονίσουμε ότι πριν προσδιορίσουμε την f' θα πρέπει να ελέγξουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη και που.

2) Η φράση «για κάθε x εσωτερικό του Δ » σημαίνει ότι αν το Δ είναι κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, μας ενδιαφέρει το πρόσημο της f' στο (a, β) . Στα a και β όχι μόνο δεν μας ενδιαφέρει το πρόσημο της f' , αλλά ούτε καν αν είναι παραγωγίσιμη (αρκεί στα a και β να είναι συνεχής).

3) Όπως θα δούμε και στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν, αν η f είναι συνεχής στο Δ με $f'(x) \geq 0$ (ή ≤ 0) στο εσωτερικό του Δ , με την f' να μηδενίζεται μόνο σε μεμονωμένα σημεία του Δ (και όχι για όλα τα σημεία ενός διαστήματος), τότε και πάλι μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) στο Δ (βλέπε σχήμα 1).

Αν όμως $f'(x) \geq 0$ (ή ≤ 0) με την f' να μηδενίζεται σε ένα ολόκληρο υποδιάστημα του Δ , τότε η f δεν είναι γνησίως αύξουσα (ή φθίνουσα) στο Δ , αλλά απλά αύξουσα (ή φθίνουσα) (σχήμα 2).



- 4) Το αντίστροφο του θεωρήματος μονοτονίας δεν ισχύει πάντα.** Μπορεί για παράδειγμα μια συνάρτηση να είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ και όμως η παράγωγός της να μην είναι θετική στα εσωτερικά του Δ , αλλά ή να μην υπάρχει σε κάποια εσωτερικά σημεία του Δ ή να μηδενίζεται (όπως συμβαίνει στα x_1 και x_2 στο παραπάνω σχήμα 1). Ως **αντιπαράδειγμα** για τη μη ισχύ του αντίστροφου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3$, η οποία αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εν τούτοις στο 0 η παράγωγός της $f'(x)=3x^2$, μηδενίζεται. Μπορούμε όμως να δείξουμε ότι **αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ , τότε ισχύει ότι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$.**

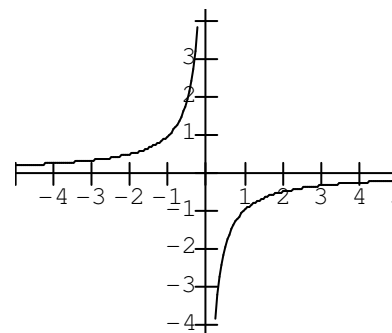
ΒΛΕΠΕ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ, ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

- 5) Το συμπέρασμα του θεωρήματος δεν ισχύει απαραίτητα αν ορίσουμε την f σε σύνολο και όχι διάστημα.** Έτσι η

$$f(x) = -\frac{1}{x} \text{ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο}$$

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}^* \text{ που δεν είναι διάστημα, έχει } f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

στο $\mathbb{R}^*$ και όμως δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$.



ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ▼

Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης, σε διάστημα Δ , συνάρτησης f , τέμνει το πολύ μια φορά τον άξονα $x'x$. Δηλαδή η f μηδενίζεται το πολύ για ένα x_0 , οπότε έχει το πολύ μια ρίζα στο Δ .

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΑΞΟΝΑ (ΦΥΣΙΚΗ)

Όπως αναφέραμε και στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου, όταν ένα υλικό σημείο κινείται ευθύγραμμα πάνω σε άξονα, η κίνησή του λέγεται **επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη** όταν το **μέτρο της ταχύτητας**, δηλαδή η $|u(t)|$ αυξάνεται ή μειώνεται αντίστοιχα.

Το $|u(t)|$ αυξάνεται, προφανώς όταν είναι $u(t) > 0$ και η συνάρτηση $u(t)$ είναι αύξουσα ή όταν $u(t) < 0$ και η συνάρτηση $u(t)$ είναι φθίνουσα. Επειδή η μονοτονία του $u(t)$ εξαρτάται από το πρόσημο της επιτάχυνσης $a(t)$, καταλαβαίνουμε ότι η κίνηση είναι **επιταχυνόμενη** όταν ισχύουν ταυτόχρονα $[u(t) > 0 \text{ και } a(t) \geq 0]$ ή $[u(t) < 0 \text{ και } a(t) \leq 0]$, δηλαδή **όταν $u(t) \cdot a(t) \geq 0$** .

Όμοια είναι επιβραδυνόμενη όταν $u(t) \cdot a(t) \leq 0$.

Βέβαια αξίζει να προσεχθεί το γεγονός ότι είναι τελείως διαφορετική η απάντηση στην ερώτηση "που είναι επιταχυνόμενη η κίνηση" από την ερώτηση "πότε η ταχύτητα αυξάνεται". Για την πρώτη περίπτωση ισχύουν τα παραπάνω, καθώς μας ενδιαφέρει το

μέτρο της ταχύτητας, ενώ για τη δεύτερη η απάντηση είναι "εκεί όπου η $u(t)$ είναι γνησίως αύξουσα". Άλλωστε και στην Αγγλική βιβλιογραφία υπάρχουν διαφορετικές λέξεις που εκφράζουν τις δύο παραπάνω έννοιες: η **speed** για το μέτρο της ταχύτητας και η **velocity** για την ταχύτητα.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ και είναι:

- συνεχής και
- γνησίως μονότονη

μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών της R_f , σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

	$f \uparrow$	$f \downarrow$
$\Delta=[\alpha, \beta]$	$R_f=[f(\alpha), f(\beta)]$	$R_f=[f(\beta), f(\alpha)]$
$\Delta=(\alpha, \beta)^*$	$R_f=(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x))$	$R_f=(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x))$
$\Delta=(\alpha, \beta]^*$	$R_f=(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), f(\beta))$	$R_f=[f(\beta), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x))$
$\Delta=[\alpha, \beta)^*$	$R_f=[f(\alpha), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x))$	$R_f=(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), f(\alpha))$

* Όπου στο πεδίο ορισμού Δ έχουμε «ανοικτό» α , μπορεί να είναι και το $-\infty$ και όπου έχουμε «ανοικτό» β , μπορεί να είναι και το $+\infty$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΕ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΖΗΤΑΜΕ ΝΑ ΜΕΛΕΤΗΣΟΥΜΕ ΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω ότι ζητάμε να προσδιορίσουμε τη μονοτονία συνάρτησης f που ορίζεται σε διάστημα Δ . Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής στο Δ
(δεν θα μας δώσουν μελέτη μη συνεχούς συνάρτησης, καθώς δεν γνωρίζουμε κάποιο αντίστοιχο θεώρημα για τέτοιες συναρτήσεις).
 - Εξετάζουμε που είναι παραγωγίσιμη η f .
 - Προσδιορίζουμε την f' , όπου ορίζεται.
 - Βρίσκουμε τα πρόσημα της f' (βλέπε παρακάτω «υπενθύμιση μεθόδων προσδιορισμού προσήμων παράστασης»).
- (Πολλές φορές, αν η f' έχει «εύκολο» τύπο π.χ. δευτεροβάθμιο τριώνυμο, βρίσκουμε στο βήμα αυτό μόνο τις ρίζες της και τοποθετούμε κατευθείαν τα πρόσημά της στον παρακάτω πίνακα).

- Κατασκευάζουμε τον **πίνακα μονοτονίας** της f , στον οποίο εμφανίζονται τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f και έχει την παρακάτω μορφή:

	x	(ρίζες της f')
Πρόσημα f'	$f'(x)$	
Μονοτονία $f(*)$	f	

(*) Η μονοτονία της f στον πίνακα, παρουσιάζεται με «βελάκια», ↗ στα διαστήματα όπου η f είναι γνησίως αύξουσα και ↘ στα διαστήματα όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- 1) Η παραπάνω διαδικασία μας δίνει σαφείς πληροφορίες για τη μονοτονία της f στο Δ , μόνο αν η f είναι συνεχής στο Δ , αλλιώς μας δίνει πληροφορίες για τη μονοτονία μόνο σε κείνα τα υποδιαστήματα του Δ που η f είναι συνεχής. Η μελέτη της μονοτονίας στη δεύτερη αυτή περίπτωση είναι ένα πιο σύνθετο πρόβλημα, που ξεφεύγει από τους σκοπούς του παρόντος συγγράμματος.
- 2) Αν η f' δεν ορίζεται σε κάποιο x_0 του Δ (γιατί η f εκεί δεν είναι παραγωγίσιμη), αλλά η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε στη γραμμή του πίνακα μονοτονίας που αναφέρεται στα πρόσημα της f' και στη θέση x_0 , θα έχουμε διπλή γραμμή (βλέπε πίνακα παρακάτω), που δείχνει ότι η f' δεν ορίζεται στο x_0 .

x	x_0
$f'(x)$	
f	

Το γεγονός αυτό δεν διαφοροποιεί καθόλου τα συμπεράσματά μας για τη μονοτονία της f , αφού η f είναι συνεχής στο x_0 (δηλαδή είτε η

f' έχει ρίζα το x_0 , είτε δεν ορίζεται σ' αυτό, δεν αλλάζει τίποτα).

Αυτό σημαίνει ότι **δεν μας ενδιαφέρει η παραγωγισιμότητα σε συγκεκριμένα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f , αρκεί να είναι συνεχής σε αυτά. Έτσι δεν χρειάζεται να χάσουμε χρόνο ελέγχοντας αν η f είναι παραγωγίσιμη σ' αυτά (βλέπε παράδειγμα 1γ).**

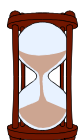
- 3) Αναφέραμε ήδη ότι αν η f' έχει απλό τύπο, μπορούμε να βρούμε μόνο τις ρίζες της και να παρουσιάσουμε τα πρόσημά της κατευθείαν στον πίνακα μονοτονίας. Αν η f' είναι γινόμενο ή πηλίκο πρωτοβάθμιων ή (και) δευτεροβάθμιων παραγόντων, μπορούμε να παρεμβάλλουμε στον πίνακα μονοτονίας και άλλες γραμμές (πριν τη γραμμή της $f'(x)$), οι οποίες να παρουσιάζουν τα πρόσημα αυτών των παραγόντων. Έτσι θα είναι ευκολότερο να προσδιορίσουμε τα πρόσημα της $f'(x)$, που είναι το γινόμενό τους ή το πηλίκό τους, όπως στο παρακάτω παράδειγμα (δηλαδή κατασκευάζουμε έναν επαυξημένο πίνακα μονοτονίας).

Έστω $f'(x) = \frac{(x-1)^2 \cdot (x-2)}{(4-x)}$ και f συνεχής στο 4. Τότε έχουμε τον πίνακα μονοτονίας:

x	0	1	2	4	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	○	+	+	+
$x-2$	-	-	○	+	+
$4-x$	+	+	+		-
$f'(x)$	-	○	-	○	+
f	↘	↘	↗	↘	

Αν η f' έχει πιο σύνθετο τύπο π.χ. $f'(x)=\ln x-1$, τότε λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0$ για να βρούμε τις ρίζες της και μια ανίσωση π.χ. $f'(x)>0$ για να βρούμε που γίνεται θετική. Στα υπόλοιπα διαστήματα του πεδίου ορισμού προφανώς είναι αρνητική. Τα πρόσημα αυτά τα καταχωρούμε στον πίνακα μονοτονίας.

Παραδείγματα 1, 2



ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΠΡΟΣΗΜΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Έστω ότι ζητάμε τα πρόσημα της παράστασης $A(x)$ (συνήθως μας ενδιαφέρουν τα πρόσημα της παραγώγου μιας συνάρτησης). Υπενθυμίζουμε ότι:

A. Αν η παράσταση $A(x)$ είναι πολυώνυμο 1ου ή 2ου βαθμού βρίσκουμε τις ρίζες (αν έχει) και προσδιορίζουμε τα πρόσημά της κατασκευάζοντας τον αντίστοιχο πίνακα προσήμων, σύμφωνα με τα παρακάτω:

α) Μια πρωτοβάθμια παράσταση μορφής $ax+b$ με $a \neq 0$, μηδενίζεται όταν το x πάρει την τιμή της ρίζας ρ , δεξιά από το ρ παίρνει το πρόσημο του a και αριστερά το αντίθετο, δηλαδή έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	ρ	$+\infty$
$ax+b$	ετερόσημο του a	○	ομόσημο του a

Τα ίδια ισχύουν και για παραστάσεις μορφής $(ax+b)^n$ με n περιττό.

Για παραστάσεις μορφής $(ax+b)^n$ με n άρτιο ο πίνακας προσήμων γίνεται:

x	$-\infty$	ρ	$+\infty$
$(ax+b)^n$, με n άρτιο	+	○	+

β) Σχετικά με το πρόσημο τριωνύμου μορφής $f(x)=ax^2+bx+c$ με $a \neq 0$, υπάρχουν τρεις πίνακες προσήμων ανάλογα με το πόσες ρίζες έχει το τριώνυμο (ανάλογα με το πρόσημο της Δ). Έτσι έχουμε:

ΠΡΟΣΗΜΟ Δ	ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ	ΠΡΟΣΗΜΟ $f(x)$		
$\Delta > 0$	Δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$ ρ_1, ρ_2 άνισες	x	$-\infty$	$+\infty$
		$f(x)$	τριώνυμο ομόσημο του a	τριώνυμο ετερόσημο του a
$\Delta = 0$	Δύο ρίζες ίσες στο $\mathbb{R}$ ή αλλιώς μία διπλή ρ	x	$-\infty$	$+\infty$
		$f(x)$	τριώνυμο ομόσημο του a	τριώνυμο ομόσημο του a
$\Delta < 0$	Δεν υπάρχουν ρίζες στο $\mathbb{R}$	x	$-\infty$	$+\infty$
		$f(x)$	τριώνυμο πάντα ομόσημο του a (δηλ. για κάθε x)	

Β. Αν η παράσταση είναι πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου του 2ου τότε παραγοντοποιούμε το $A(x)$ ως $A(x) = (\text{παρ}1) \cdot (\text{παρ}2) \cdot \dots \cdot (\text{παρ}n)$, όπου (παρ) είναι παράγοντες βαθμού το πολύ 2ου. Στη συνέχεια και αφού οι παράγοντες αυτοί έχουν γνωστά πρόσημα, κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων κάθε παράγοντα χωριστά αλλά και του γινομένου τους $A(x)$:

x	ρ_1	ρ_2		ρ_n
(παρ1)	+	-	-	-
(παρ2)	-	+	+	+
...	...	...	...	...
(παρn)	-	+	+	-
$A(x)$	...	...	...	...

Γ. Αν η παράσταση είναι ημίτιμο πολυωνύμων τότε παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή, καταλήγουμε σε μορφή $A(x) = \frac{(\text{παρ}) \cdot (\text{παρ}) \cdot \dots \cdot (\text{παρ})}{(\text{παρ}) \cdot \dots \cdot (\text{παρ})}$

και κατασκευάζουμε ένα πίνακα προσήμων παρόμοιο με τον παραπάνω, με τη μόνη διαφορά ότι στις ρίζες του παρονομαστή αντί για «μηδέν», θέτουμε διπλή γραμμή $\neq$ δηλαδή εξαιρούμε τις τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

Δ. Αν η παράσταση είναι άλλης μορφής π.χ. $A(x) = 2 \cdot \ln 2x - 1$ ή $A(x) = e^x + 2 - \eta \mu x$ κ.τ.λ. εξετάζουμε μήπως έχει για κάθε τιμή του x σταθερό πρόσημο λόγω της μορφής της (όπως η δεύτερη) ή αλλιώς λύνουμε εξίσωση και ανίσωση (όπως στην πρώτη όπου λέμε «έστω $A(x) = 0 \Leftrightarrow \dots$ και έστω $A(x) > 0 \Leftrightarrow \dots$).

2. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ

Είναι ασκήσεις παραμετρικών συναρτήσεων που ζητούν τις τιμές των παραμέτρων, ώστε η συνάρτηση να έχει συγκεκριμένη μονοτονία, για παράδειγμα γνησίως

αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε ικανή και αναγκαία συνθήκη που να εξασφαλίζει αυτή την απαίτηση, δηλαδή είναι λάθος να πούμε ότι "για να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ", καθώς το θεώρημα της μονοτονίας δεν ισχύει αντίστροφα. Έτσι η συνθήκη " $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ", είναι ικανή, αλλά όχι αναγκαία (δηλαδή ισχύει το "αρκεί", αλλά όχι το "πρέπει"). Δυστυχώς μια ικανή συνθήκη δεν είναι σίγουρο ότι θα μας δώσει όλες τις ζητούμενες τιμές της παραμέτρου, παρά μόνο ένα μέρος τους, οπότε μια τέτοια συνθήκη δεν μας είναι χρήσιμη.

Έτσι σε τέτοιου είδους ασκήσεις αντί να πούμε "για να είναι η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αρκεί $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ", κάτι που είναι σωστό, αλλά "άχρηστο", κάνουμε κανονικά μελέτη μονοτονίας της συνάρτησης, κρατώντας τελικά εκείνες τις τιμές των παραμέτρων, για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.

Παραδείγματα 3α, 3β

3. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού διάστημα Δ .

- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής στο Δ .
- Ελέγχουμε αν η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ και αν ναι, προσδιορίζουμε το R_f , σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε στη θεωρία.

Παρακάτω (βλέπε παράγραφο "ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ") θα δούμε μέθοδο με την οποία θα μπορούμε να προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών της f ακόμα και στην περίπτωση που έχει περισσότερα από ένα είδη μονοτονίας (είναι μονότονη κατά διαστήματα).

Παράδειγμα 4

4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΡΙΖΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f Η' ΕΞΙΣΩΣΗΣ $f(x)=0$

Συμπληρώνοντας τη μεθοδολογία που αναφέραμε στην παράγραφο του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, αναφέρουμε ΜΟΝΟ ΤΑ ΚΑΙΝΟΥΡΓΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ που προκύπτουν από τη μονοτονία και το σύνολο τιμών:

α) Όταν ζητάμε να δείξουμε ότι η f (ή η εξίσωση $f(x)=0$) έχει **τουλάχιστον μια ρίζα** στο Δ .

Προσδιορίζουμε το σύνολο τιμών της f , με $x \in \Delta$ και αν αυτό περιέχει το 0 (π.χ. $R_f = (-3, 2]$), τότε η f έχει οπωσδήποτε μία τουλάχιστον ρίζα στο Δ .

β) Όταν ζητάμε να δείξουμε ότι η f (ή η εξίσωση $f(x)=0$) έχει **το πολύ μια ρίζα** στο Δ .

Ελέγχουμε τη μονοτονία της f στο Δ και αν είναι γνησίως μονότονη τότε έχει το πολύ μια ρίζα στο Δ .

γ) Όταν ζητάμε να δείξουμε ότι η f (ή η εξίσωση $f(x)=0$) έχει **ακριβώς μια ρίζα** στο Δ .

Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ και το σύνολο τιμών της, με $x \in \Delta$, περιέχει το 0, τότε εξασφαλίζουμε ότι η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο Δ .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Αν ζητάμε να δείξουμε ότι η f έχει **το πολύ n διαφορετικές ρίζες** στο Δ , αρκεί να δείξουμε ότι εναλλάσσεται η μονοτονία της σε n διαδοχικά διαστήματα $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ του Δ , τέτοια ώστε $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_n = \Delta$.

Για παράδειγμα αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2, 4]$, γνησίως φθίνουσα στο $[4, 10]$ και γνησίως αύξουσα στο $[10, +\infty)$, τότε έχει τρεις το πολύ ρίζες στο $[-2, +\infty)$.

Αν ζητάμε να δείξουμε ειδικότερα ότι η f έχει **n ακριβώς διαφορετικές ρίζες** στο Δ , εκτός από την αλλαγή της μονοτονίας που αναφέραμε παραπάνω, θα πρέπει να δείξουμε ότι τα επιμέρους σύνολα τιμών της f , με πεδία ορισμού τα $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ (δηλαδή τα $f(\Delta_1), f(\Delta_2), \dots, f(\Delta_n)$) περιέχουν όλα την τιμή 0.

2) Προφανώς αν μας ζητούν να δείξουμε ότι όσα αναφέραμε παραπάνω περί ριζών, ισχύουν για μια εξίσωση $A(x)=B(x)$, τότε φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $A(x)-B(x)=0$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x)=A(x)-B(x)$ και εφαρμόζουμε γι αυτήν κάποια από τις προηγούμενες μεθόδους (ανάλογα με το ζητούμενο).

3) Η πλήρης μεθοδολογία για ασκήσεις περί ριζών προκύπτει συνδυάζοντας όσα αναφέραμε παραπάνω, με την αντίστοιχη μεθοδολογία της παραγράφου του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και την «ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ», για την οποία θα μιλήσουμε στο κεφάλαιο των ολοκληρωμάτων. Η πλήρης αυτή μεθοδολογία παρουσιάζεται στο φυλλάδιο «ΒΑΣΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ».

Παραδείγματα 5, 6

5. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΦΟΡΟΥΝ ΣΕ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ

Για να αποδείξουμε ότι $A(x) \leq B(x)$ (1), για κάθε $x \in \Delta$, όπου Δ ένα διάστημα και $A(x)$ και $B(x)$ παραστάσεις του x , φέρνουμε την (1) σε μορφή $A(x)-B(x) \leq 0$. Στη συνέχεια ορίζουμε συνάρτηση $f(x)=A(x)-B(x)$ στο Δ ή αν το Δ είναι ανοικτό διάστημα και η f μπορεί να οριστεί στο αντίστοιχο κλειστό, την ορίζουμε στο κλειστό. Βρίσκουμε τα πρόσημα της f' και τη μονοτονία της f στο διάστημα που την ορίσαμε, η οποία μπορεί να μας βοηθήσει να αποδείξουμε την ανίσωση.

Υπάρχει περίπτωση να μην είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε τα πρόσημα της f' , οπότε και τη μονοτονία της f . Τότε βρίσκουμε την f'' . Από τα πρόσημα της f'' , βρίσκουμε τη μονοτονία της f' , με τη βοήθειά της ίσως μπορούμε να βρούμε τα πρόσημα της f' και από εκεί τη μονοτονία της f .

Αν τα πρόσημα και της f'' δεν είναι γνωστά, συνεχίζουμε στην $f^{(3)}$ κ.τ.λ.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ▼

Με τη βοήθεια της μονοτονίας μπορούμε:

	ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
α) Να δείξουμε ανισώσεις μορφής $f(A(x)) > f(B(x))$	Αν f γνησίως φθίνουσα στο Δ και ζητάμε να δείξουμε ότι $f(A(x)) > f(B(x))$, μπορούμε να δείξουμε ότι • $A(x), B(x) \in \Delta$ και ότι • $A(x) < B(x)$.
β) Να λύσουμε ανισώσεις μορφής $f(A(x)) > f(B(x))$	Αν f γνησίως φθίνουσα στο Δ και ζητάμε να λύσουμε την $f(A(x)) > f(B(x))$, μπορούμε • να απαιτήσουμε $A(x), B(x) \in \Delta$ (ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ) και • να λύσουμε την ισοδύναμη ανίσωση $A(x) < B(x)$.
γ) Να δείξουμε σχέσεις "διάφορου" μορφής $f(A(x)) \neq f(B(x))$	Αν f γνησίως φθίνουσα στο Δ και ζητάμε να δείξουμε ότι $f(A(x)) \neq f(B(x))$, μπορούμε να δείξουμε ότι • $A(x), B(x) \in \Delta$ και ότι • $A(x) \neq B(x)$, (καθώς η f είναι και «1-1» ως γνησίως φθίνουσα).
δ) Να λύσουμε εξισώσεις μορφής $f(A(x)) = f(B(x))$	Αν f γνησίως φθίνουσα στο Δ και ζητάμε να λύσουμε την $f(A(x)) = f(B(x))$, μπορούμε • να απαιτήσουμε $A(x), B(x) \in \Delta$ (ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ) και • να λύσουμε την ισοδύναμη εξίσωση $A(x) = B(x)$ (καθώς η f είναι και «1-1» ως γνησίως φθίνουσα).

Παράδειγμα 7

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ – ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ

1. Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων με τύπους:

$$\alpha) f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$\beta) f(x) = e^x - x - 1$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1+x}, & \text{αν } x \geq 0 \\ x^2 + \frac{5}{2}x + 1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

α) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R}^*$

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στο $\mathbb{R}^*$, ως πηλίκo παραγωγισίμων

$$\begin{aligned} \text{συναρτήσεων με } f'(x) &= \frac{(x+1)' \cdot x^2 - (x+1) \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{x^2 - 2x \cdot (x+1)}{x^4} = \frac{-x^2 - 2x}{x^4} = \\ &= \frac{x \cdot (-x - 2)}{x^4} = \frac{-x - 2}{x^3}. \end{aligned}$$

Ο πίνακας μονοτονίας της f έχει ως εξής (επαυξημένος πίνακας):

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$-x-2$	+	$\ominus$	-	-
x^3	-	-	+	+
$f'(x)$	-	$\ominus$	+	-
f				

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-2, 0)$.

β) $f(x)=e^x-x-1$, $D_f=\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(x)=(e^x)'-(x)'-(1)'=e^x-1$.

Για να βρούμε τις ρίζες και τα πρόσημα της f' λύνουμε τις σχέσεις $f'(x)=0$ και $f'(x)>0$.

$$\text{Έστω } f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow e^x=e^0 \Leftrightarrow x=0$$

$$\text{Έστω } f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0.$$

Άρα ο πίνακας μονοτονίας έχει ως εξής:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\ominus$	+
f			

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

$$\gamma) f(x)=\begin{cases} \frac{1-x}{1+x}, & \text{αν } x \geq 0 \\ x^2 + \frac{5}{2}x + 1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}, D_f=\mathbb{R}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στο $(0, +\infty)$, ως ηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων και στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική.

$$\text{Συνέχεια στο 0: } f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + \frac{5}{2}x + 1) = 0^2 + \frac{5}{2} \cdot 0 + 1 = 1$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο 0.

ΑΠΟ ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΕΧΟΥΜΕ ΟΤΙ ΤΕΛΙΚΑ η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο $\mathbb{R}^*$.

Λέμε "τουλάχιστον" στο $\mathbb{R}^*$, γιατί δεν πρόκειται να μελετήσουμε την παραγωγισιμότητά της εκεί (βλέπε την παρακάτω υπενθύμιση), οπότε δεν γνωρίζουμε αν στο 0 είναι ή όχι παραγωγίσιμη.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: Για τη μελέτη της μονοτονίας δεν μας ενδιαφέρει η παραγωγισιμότητα σε μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού, αρκεί η f να είναι συνεχής εκεί, καθώς το θεώρημα της μονοτονίας αναφέρει «Αν f συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο **εσωτερικό** του $\Delta \dots$ ». Έτσι εδώ, θεωρώντας ως Δ κάθε φορά, το $(-\infty, 0]$ και το $[0, +\infty)$ μας ενδιαφέρει αν η f είναι συνεχής σε αυτά και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά τους σημεία. Άρα δεν μας ενδιαφέρει η παραγωγισιμότητα της f στο 0 .

Στο $\mathbb{R}^*$ είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)', & \text{αν } x > 0 \\ \left(x^2 + \frac{5}{2}x + 1\right)', & \text{αν } x < 0 \end{cases} = \dots = \begin{cases} -\frac{2}{(1+x)^2}, & \text{αν } x > 0 \\ 2x + \frac{5}{2}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}.$$

Προφανώς είναι $-\frac{2}{(1+x)^2} < 0$, οπότε για $x > 0$ έχουμε $f'(x) < 0$.

Επίσης η παράσταση $2x + \frac{5}{2}$ έχει ως ρίζα το $-\frac{5}{4}$ και αφού είναι πρωτοβάθμια, τα πρόσημά της είναι γνωστά, για $x < 0$.

Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	0	$+\infty$
$-\frac{2}{(1+x)^2}$				-
$2x + \frac{5}{2}$	-	○	+	
$f'(x)$	-	○	+	-
f				

Τα σκιασμένα μέρη του διπλανού πίνακα αφορούν σε διαστήματα στα οποία δεν μας ενδιαφέρουν τα πρόσημα των αντίστοιχων παραστάσεων, καθώς ο αντίστοιχος κλάδος της f' δεν ορίζεται εκεί.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -\frac{5}{4}]$ και $[0, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{5}{4}, 0]$.

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 - ax^2 + (2a^2 + 1)x - \beta$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$.

$D_f = \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(x) = 3x^2 - 2ax + (2a^2 + 1)$.

Αφού η f' είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο, για να βρούμε τα πρόσημά της, υπολογίζουμε τη διακρίνουσά της: $\Delta = (-2a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (2a^2 + 1) = -4 \cdot (5a^2 + 3) < 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

γιατί $5a^2+3>0$. Άρα η $f'(x)$ παίρνει πάντα το πρόσημο του 3 (συντελεστής του x^2), δηλαδή $f'(x)>0$, για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση

α) $f(x)=3x^3-3\lambda x^2+x+10$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) $f(x)=\frac{1+\lambda x^2}{1+x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1)$ και $(-1, +\infty)$.

α) $D_f = \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με $f'(x)=9x^2-6\lambda x+1$. (Δεν μπορούμε να πούμε "για να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί να είναι $f'(x)>0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ", καθώς δεν ισχύει το "πρέπει" και το "αρκεί", όπως είπαμε και στη μεθοδολογία, δεν είναι σίγουρο ότι θα μας δώσει όλες τις τιμές του λ . Έτσι κάνουμε μελέτη μονοτονίας).

Η f' είναι δευτεροβάθμιο πολυώνυμο με $\Delta=36\lambda^2-36=36(\lambda^2-1)=36(\lambda-1)(\lambda+1)$. Έτσι:

- Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda < -1$ ή $\lambda > 1$, τότε η f' έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$, τις ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ και ο πίνακας μονοτονίας της f θα είναι ο:

x	$-\infty$	ρ_1	ρ_2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
f					

οπότε η f δεν είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$, οπότε αυτές οι τιμές του λ δεν είναι δεκτές.

- Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$, τότε η f' έχει μία ρίζα ρ διπλή και ο πίνακας μονοτονίας της f θα είναι ο:

x	$-\infty$	ρ	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	+
f			

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε αυτές οι τιμές του λ είναι δεκτές.

- Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 1$, τότε η f' δεν έχει πραγματικές ρίζες και είναι πάντα ομόσημη "του λ της", δηλαδή θετική. Άρα σε αυτή την περίπτωση η f είναι πάλι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι τελικά η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αν $-1 \leq \lambda \leq 1$.

β) $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στο $\mathbb{R} - \{-1\}$, ως πηλίκο παραγωγισίμων

συναρτήσεων με $f'(x) = \frac{(1+\lambda x^2)' \cdot (1+x) - (1+\lambda x^2) \cdot (1+x)'}{(1+x)^2} =$

$$= \frac{2\lambda x \cdot (1+x) - (1+\lambda x^2)}{(1+x)^2} = \frac{\lambda x^2 + 2\lambda x - 1}{(1+x)^2}.$$

Επειδή $(1+x)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, τα πρόσημα της f' εξαρτώνται μόνο από τα πρόσημα του πολυωνύμου $\lambda x^2 + 2\lambda x - 1 = P(x)$. Έτσι:

1) Αν $\lambda = 0$ τότε $P(x) = -1 < 0$, οπότε $f'(x) < 0$ και επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1)$ και $(-1, +\infty)$.

2) Αν $\lambda \neq 0$ τότε το $P(x)$ είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο με διακρίνουσα

$$\Delta = (2\lambda)^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (-1) = 4\lambda^2 + 4\lambda = 4\lambda \cdot (\lambda + 1)$$

2α) Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\lambda \cdot (\lambda + 1) > 0 \Leftrightarrow \lambda < -1 \text{ ή } \lambda > 0$, τότε προφανώς το $P(x)$, επομένως και η $f'(x)$, δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο (αφού με βάση το πρόσημο τριωνύμου, το $P(x)$ είναι εντός του διαστήματος των ριζών ετερόσημο του λ και εκτός ομόσημο του λ). Άρα στην περίπτωση αυτή δεν μπορεί να είναι η f γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1)$ και $(-1, +\infty)$.

2β) Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -1 < \lambda < 0$, τότε το $P(x)$ είναι πάντα ομόσημο του λ , που είναι αρνητικό. Άρα $f'(x) < 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1)$ και $(-1, +\infty)$.

2γ) Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = -1 \Leftrightarrow \lambda = -1$, (γιατί εργαζόμαστε στην περίπτωση

$$\text{όπου } \lambda \neq 0), \text{ τότε } f'(x) = \frac{-x^2 - 2x - 1}{(1+x)^2} = \frac{-(x+1)^2}{(1+x)^2} = -1 < 0. \text{ Άρα η } f \text{ είναι γνησίως}$$

φθίνουσα στα $(-\infty, -1)$ και $(-1, +\infty)$.

ΤΕΛΙΚΑ η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1)$ και $(-1, +\infty)$ για $\lambda = 0$ ή $-1 < \lambda < 0$ ή $\lambda = -1$, δηλαδή για **$-1 \leq \lambda \leq 0$** .

4. Να προσδιορίσετε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, με $x \geq -1$

β) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}$, με $-\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq 0$

γ) $f(x) = e^x + x$

α) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, με $x \geq -1$

$D_f = [-1, +\infty)$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, +\infty)$, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(x) = 2x + 2$.

Ο πίνακας μονοτονίας της στο $[-1, +\infty)$ είναι:

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$\ominus$	$+$
f		

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$

Τότε θα είναι $R_f = [f(-1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$.

$$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty.$$

Άρα $R_f = [-4, +\infty)$.

β) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}$, με $-\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq 0$

$D_f = [-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0]$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0]$, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων.

(Επειδή η f περιέχει την παράσταση $\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, ίσως να μην είναι παραγωγίσιμη στις ρίζες -1 και 1 του $1-x^2$. Αυτό όμως δεν μας αφορά καθώς οι τιμές αυτές δεν ανήκουν στο D_f).

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' \cdot \sqrt{1-x^2} + x^2 \cdot (\sqrt{1-x^2})' = 2x \cdot \sqrt{1-x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (1-x^2)' = \\ &= 2x \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = 2x \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x \cdot (1-x^2) - x^3}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-3x^3 + 2x}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{-x \cdot (3x^2 - 2)}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Οι ρίζες της f' είναι οι 0 και $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, από τις οποίες στο πεδίο ορισμού ανήκουν οι $-\sqrt{\frac{2}{3}}$

και 0 . Ο πίνακας μονοτονίας στο $[-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0]$ έχει ως εξής:

x	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	0
$-x$	$+$	$\circ$
$3x^2-2$	$\circ$	$-$
$f'(x)$	$\circ$	$-$
f		

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ: Ο πίνακας προσημίων κάθε παράστασης αφορά φυσικά μόνο στο διάστημα $[-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0]$.

Ο παρονομαστής $\sqrt{1-x^2}$ της f' δεν επηρεάζει τα πρόσημά της καθώς είναι $\sqrt{1-x^2} > 0$ στο $[-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0]$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0]$, οπότε $R_f = [f(0), f(-\sqrt{\frac{2}{3}})]$.

$$\text{Όμως } f(0) = 0^2 \cdot \sqrt{1-0^2} = 0 \text{ και } f(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = (-\sqrt{\frac{2}{3}})^2 \cdot \sqrt{1-(-\sqrt{\frac{2}{3}})^2} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{1-\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}^2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{Άρα } R_f = \left[0, \frac{2\sqrt{3}}{9} \right].$$

$$\gamma) f(x) = e^x + x$$

$D_f = \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(x) = e^x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε

$$R_f = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right).$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + \lim_{x \rightarrow -\infty} x = 0 + (-\infty) = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + \lim_{x \rightarrow +\infty} x = (+\infty) + (+\infty) = +\infty. \text{ Άρα } R_f = \mathbb{R}.$$

5. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3 + a = 3x$, $a \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα στο $(-1, 1)$.

Την ίδια άσκηση αντιμετωπίσαμε σε παράδειγμα της παραγράφου του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και τη λύσαμε με απαγωγή σε άτοπο και Θ . Rolle. Θα δούμε εδώ μια άλλη προσέγγισή της, μέσα από το θεώρημα της μονοτονίας.

$$x^3 + a = 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x + a = 0.$$

Ορίζουμε συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + a$ στο $(-1, 1)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων, με $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3 \cdot (x^2 - 1)$.

Ο πίνακας μονοτονίας της στο $(-1, 1)$ δίνει:

x	-1	1
$3(x^2-1)$	—	—
$f'(x)$	—	—
f	↘	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 1)$ και κατά συνέπεια έχει το πολύ μια ρίζα στο $(-1, 1)$. Έτσι και η εξίσωση $x^3 - 3x + a = 0$, οπότε και η δοσμένη έχει το πολύ μια ρίζα στο $(-1, 1)$.

6. Δείξτε ότι η εξίσωση $2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 2x = 0$ (1) έχει μοναδική ρίζα στο $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$.

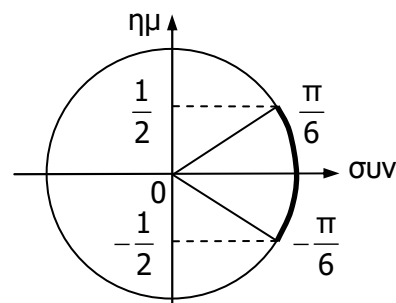
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η συγκεκριμένη άσκηση μπορεί να αντιμετωπιστεί και τριγωνομετρικά, δηλαδή να λύσουμε την εξίσωση.

Ορίζουμε συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 2x$ στο $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως

άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu 2x \cdot (2x)' = 2\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu 2x = 2\sigma\upsilon\nu x - 4\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 2\sigma\upsilon\nu x \cdot (1 - 2\eta\mu x)$.

Σύμφωνα με το διπλανό σχήμα για $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right)$ έχουμε ότι

$\sigma\upsilon\nu x > 0$ και $\eta\mu x < \frac{1}{2}$ οπότε $2\eta\mu x < 1 \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu x > 0$.



Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$.

Επίσης η f' μηδενίζεται μόνο για $x = \frac{\pi}{6}$, όπου $1 - 2\eta\mu x = 0$.

Έτσι ο πίνακας μονοτονίας της f στο $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ έχει ως εξής:

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
$f'(x)$	+	0
f		

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$.

Τότε $R_f = \left[f\left(-\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$. Όμως:

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sigma\upsilon\nu\left[2 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = -2\eta\mu\frac{\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2\eta\mu\frac{\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = -2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{και } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\eta\mu\frac{\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 2\eta\mu\frac{\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Άρα } R_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ και το R_f περιέχει το 0, η f , οπότε και

η (1), θα έχει μοναδική ρίζα στο $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$.

7. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x > x - \frac{x^3}{3}$ (1) για κάθε $x > 0$.

(Προσέξτε τα «παιχνίδια» με το «ανοικτό» και το «κλειστό» μηδέν)

(1) $\Leftrightarrow \eta\mu x - x + \frac{x^3}{3} > 0$. Ορίζουμε $f(x) = \eta\mu x - x + \frac{x^3}{3}$ στο $[0, +\infty)$ (Προσοχή στο

«κλειστό», αφού θα χρειαστούμε το $f(0)$).

f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + x^2$ (άγνωστα πρόσημα—συνεχίζουμε)

f' παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f''(x) = -\eta\mu x + 2x$ (άγνωστα πρόσημα—συνεχίζουμε)

f'' παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f^{(3)}(x) = -\sigma\upsilon\nu x + 2$. Όμως $\sigma\upsilon\nu x < 2 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu x + 2 > 0$ για κάθε $x \geq 0$, οπότε $f^{(3)}(x) > 0$ και επομένως $f'' \nearrow$ στο $[0, +\infty)$.

Έτσι για $x > 0$ θα είναι $f''(x) > f''(0) \Leftrightarrow f''(x) > -\eta\mu 0 + 2 \cdot 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$.

Αφού $f''(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ θα είναι $f' \nearrow$ στο $[0, +\infty)$.

Έτσι για $x > 0$ θα είναι $f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > \sigma\upsilon\nu 0 - 1 + 0^2 \Leftrightarrow f'(x) > 0$.

Αφού $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ θα είναι $f \nearrow$ στο $[0, +\infty)$.

Έτσι για κάθε $x > 0$ θα είναι $f(x) > f(0) \Leftrightarrow \eta\mu x - x + \frac{x^3}{3} > \eta\mu 0 - 0 + \frac{0}{3} \Leftrightarrow \eta\mu x - x + \frac{x^3}{3} > 0$.

Άρα η (1) είναι αληθής.

3.6 ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A . Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει:

- **Τοπικό μέγιστο** στο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
- **Τοπικό ελάχιστο** στο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 λέγεται **θέση τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου** αντίστοιχα, ενώ το $f(x_0)$ λέγεται **τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο της f** αντίστοιχα. Επίσης το $f(x_0)$ είναι και η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή της f στο $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (ανάλογα τη σχέση).

Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται με ένα όνομα **τοπικά ακρότατα** ή απλούστερα **ακρότατα** της f .

Θυμίζουμε ότι **ολικά ακρότατα** της f είναι το ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο της f , αν υπάρχουν, τα οποία ορίζονται ως εξής:

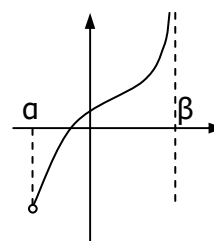
ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A . Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει:

- **Ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο** στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
- **Ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο** στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Παρ' όλο που το ολικό ελάχιστο και το ολικό μέγιστο της f λέγονται απλούστερα ελάχιστο και μέγιστο αντίστοιχα, όταν λέμε «ακρότατα» εννοούμε τα τοπικά. Έτσι **σε ασκήσεις που λένε «να γίνει μελέτη ακροτάτων» εννοείται να βρούμε τα τοπικά ακρότατα** (στα οποία περιέχονται και τα ολικά, αν υπάρχουν).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Μπορεί μια συνάρτηση να μην έχει ούτε ολικά ούτε τοπικά ακρότατα (διπλανό σχήμα).
2. Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ακρότατο σε ένα x_0 , τότε σε αυτό το x_0 παρουσιάζει και τοπικό ακρότατο (αν μέγιστο, τότε και τοπικό μέγιστο). Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή μια



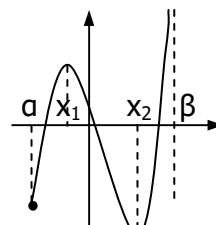
συνάρτηση που έχει τοπικό μέγιστο δεν είναι απαραίτητο να έχει εκεί και ολικό μέγιστο (μπορεί να μην έχει καν ολικό μέγιστο).

- 3. Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο**, τότε αυτό είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα και **αν παρουσιάζει ελάχιστο**, τότε αυτό είναι το μικρότερο από τα τοπικά της ελάχιστα.

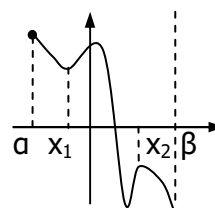
Η πρόταση «το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το ολικό μέγιστο» είναι λάθος, γιατί μπορεί η συνάρτηση να έχει τοπικά μέγιστα, αλλά όχι ολικό. Η σωστή διατύπωση είναι: «αν μια συνάρτηση έχει ολικό μέγιστο, τότε αυτό είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα».

Παρόμοια παρατήρηση ισχύει και για το ελάχιστο.

- 4.** Αν μια συνάρτηση δεν έχει τοπικά ακρότατα, τότε δεν μπορεί να έχει και ολικά.
- 5.** Κάθε συνάρτηση μπορεί να έχει το πολύ ένα ολικό μέγιστο, αλλά οι θέσεις ολικού μεγίστου μπορεί να είναι πολλές. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\sin x$ έχει μέγιστο το 1 στις θέσεις $\dots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ (άπειρες θέσεις). Αντίστοιχη παρατήρηση ισχύει και για το ολικό ελάχιστο.
- 6.** Ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο και το αντίθετο.
- 7.** Αν μια συνάρτηση έχει και μέγιστο και ελάχιστο, τότε το μέγιστο είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το ελάχιστο.

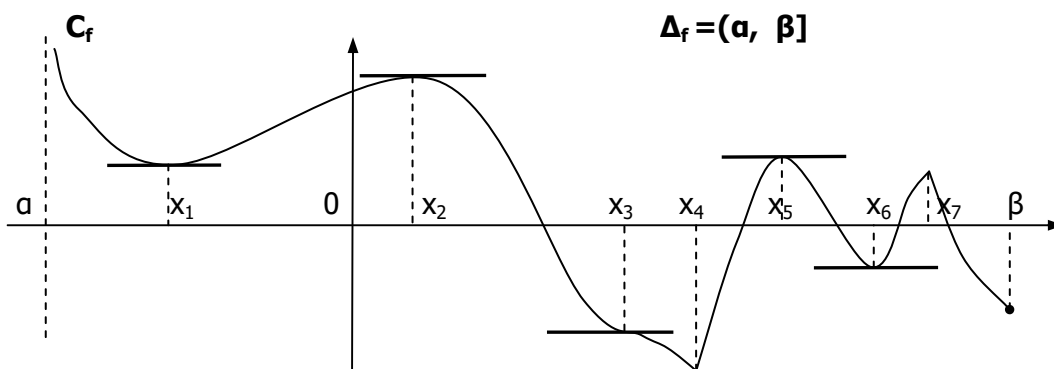


Η f παρουσιάζει τοπ. μέγιστο στο x_1 , αλλά δεν έχει ολικό μέγιστο. Από τα τοπικά ελάχιστα στα a και x_2 ολικό είναι το $f(x_2)$ (το μικρότερο).



Το τοπ. ελάχιστο στο x_1 είναι μεγαλύτερο από το τοπ. μέγιστο στο x_2 .

Παρατηρώντας το παρακάτω διάγραμμα που είναι γραφική παράσταση μιας **συνεχούς συνάρτησης**, διαπιστώνουμε τα εξής:



Η f παρουσιάζει τοπικά μέγιστα στα x_2, x_5, x_7 και τοπικά ελάχιστα στα x_1, x_4, x_6, β .

Από τα τοπικά μέγιστα κανένα δεν είναι ολικό, αφού η τιμή της f αυξάνει απεριόριστα όταν $x \rightarrow a^+$ ($\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$).

Από τα τοπικά ελάχιστα, ολικό είναι το $f(x_4)$.

Για τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων παρατηρούμε τα εξής:

- Τα x_1, x_2, x_5 και x_6 είναι εσωτερικά σημεία του $(a, \beta]$, στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Παρατηρούμε ότι η εφαπτομένη της C_f στις θέσεις αυτές είναι παράλληλη προς τον x' , οπότε εκεί ισχύει $f'(x)=0$.
- Τα x_4 και x_7 είναι εσωτερικά σημεία του $(a, \beta]$ στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη (εκεί έχουμε γωνιακά σημεία) και όμως είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.
- Το β είναι κλειστό άκρο του $(a, \beta]$, όπου η f παρουσιάζει ακρότατο, χωρίς η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη προς τον x' .
- Τέλος υπάρχει και το σημείο x_3 όπου αν και η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη προς τον x' , η f δεν παρουσιάζει εκεί ακρότατο.

Τα παραπάνω δίνουν αφορμή να διατυπώσουμε ορισμένα ερωτήματα, όπως:

α) Μήπως μια συνεχής συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατα στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της, όπου η παράγωγός της μηδενίζεται (x_1, x_2, x_5, x_6) ή η παράγωγός της δεν υπάρχει (x_4, x_7);

(Μάλλον όχι, καθώς η παράγωγος μηδενίζεται και στο x_3 χωρίς να έχουμε εκεί ακρότατο).

β) Μήπως μπορούμε να θεωρήσουμε τουλάχιστον τις παραπάνω θέσεις ($x_1, x_2, x_5, x_6, x_4, x_7$) ως «**πιθανές θέσεις ακροτάτων**»;

γ) Μήπως μια συνεχής συνάρτηση παρουσιάζει πάντα ακρότατα στα κλειστά άκρα του πεδίου ορισμού της, όπως το β στη συγκεκριμένη περίπτωση;

δ) Πώς μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ποιες από αυτές είναι πράγματι θέσεις ακροτάτων, χωρίς να έχουμε τη γραφική παράσταση;

Στη συνέχεια θα δοκιμάσουμε να δώσουμε απαντήσεις στις παραπάνω ερωτήσεις:

ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

Έστω f συνάρτηση που

- είναι ορισμένη σε διάστημα Δ .

Αν

- παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ και
- είναι παραγωγίσιμη στο x_0

TOTE $f'(x_0)=0$

δηλαδή η C_f δέχεται στο x_0 εφαπτομένη παράλληλη προς τον x'

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ▼

Αν στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ ισχύει $f'(x_0)=0$, αυτό από μόνο του δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη ακροτάτου στο x_0 (βλέπε σημείο x_3 στο προηγούμενο διάγραμμα).

Όμως, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ , τότε η συνθήκη $f'(x_0)=0$ είναι βασική προϋπόθεση (όχι η μόνη), για να παρουσιάζει η f τοπικό ακρότατο στο Δ . Δηλαδή η συνθήκη $f'(x_0)=0$ είναι αναγκαία, αλλά όχι ικανή.

Έστω **f συνάρτηση συνεχής** σε διάστημα Δ .

Ονομάζουμε **στάσιμα σημεία** της f , τα εσωτερικά σημεία x_0 του Δ όπου **$f'(x_0)=0$** , δηλαδή τα εσωτερικά σημεία του Δ που είναι ρίζες της παραγώγου της f .

Ονομάζουμε **κρίσιμα σημεία** της f , τα εσωτερικά σημεία x_0 του Δ όπου $f'(x_0)=0$ ή η f δεν είναι παραγωγίσιμη.

Προφανώς τα στάσιμα σημεία είναι και κρίσιμα.

1ο ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΠΙΚΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ (με τη βοήθεια της 1ης παραγώγου)

Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη σε διάστημα (a, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο είναι συνεχής.

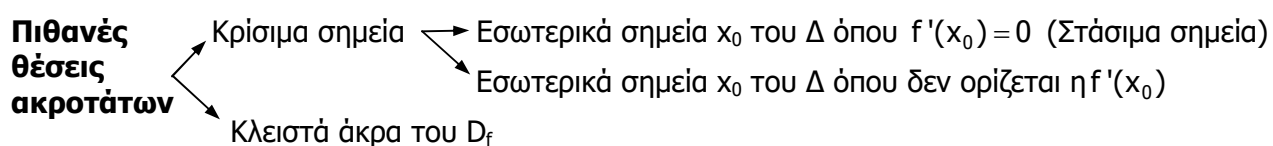
- Αν η $f'(x)$ έχει διαφορετικά πρόσημα στα (a, x_0) και (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο. Συγκεκριμένα:

$\alpha)$ Αν $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) (δηλαδή f γνησίως αύξουσα στο $(a, x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$)	}	TOTE	Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0
$\beta)$ Αν $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) (δηλαδή f γνησίως φθίνουσα στο $(a, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$)	}	TOTE	Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0
- Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ TOTE η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και μάλιστα η f είναι γνησίως μονότονη στο (a, β) .

Προφανώς το x_0 του παραπάνω θεωρήματος στις δύο πρώτες περιπτώσεις, είναι κρίσιμο σημείο της f .

Εκτός των κρίσιμων σημείων x_0 που αναφέρονται στο παραπάνω θεώρημα, **θέσεις τοπικών ακροτάτων** αποτελούν και **τα κλειστά άκρα του πεδίου ορισμού**, αν η συνάρτηση είναι συνεχής σε αυτά. Έτσι αν το πεδίο ορισμού είναι μορφής $[a, \beta]$ και η συνάρτηση είναι συνεχής στα a και β , τότε αυτά αποτελούν θέσεις ακροτάτων. Το είδος του ακροτάτου στο a και στο β εξαρτάται από τη μονοτονία της συνάρτησης σε διάστημα μορφής $[a, \gamma]$ και $(\delta, \beta]$ αντίστοιχα.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε τελικά ότι:



Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μερικούς **πίνακες μονοτονίας και ακροτάτων** και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτούς, όσον αφορά στα ακρότατα:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\ominus$	+
f			

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0 (που είναι και ολικό) με ελάχιστη τιμή $f(x_0)$.

x	a	x_0	x_1	β	
$f'(x)$	+	○	+	○	−
f					

$D_f = (a, \beta]$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο (που είναι και ολικό) στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο β , αν είναι συνεχής εκεί (που δεν γνωρίζουμε αν είναι ολικό παρά μόνο αν υπολογίσουμε το $f(\beta)$ και το $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$).

Αν $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \geq f(\beta)$, τότε στο β θα έχει ολικό ελάχιστο).

Στο x_0 δεν έχει ακρότατο, αφού η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο εκεί.

x	a	x_0	x_1	β
$f'(x)$	-	+	$\ominus$	-
f				

Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε παρουσιάζει εκεί τοπικό ελάχιστο. Επίσης παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο a και τοπικό ελάχιστο στο β , αν είναι συνεχής σε αυτά. Παρουσιάζει φυσικά τοπικό μέγιστο και στο x_1 .

Στην περίπτωση που είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παίρνει και ελάχιστη και μέγιστη τιμή (θεώρημα συνέχειας). Τότε το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα είναι το ολικό μέγιστο και το μικρότερο από τα τοπικά της ελάχιστα είναι το ολικό ελάχιστο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν εκτός της μονοτονίας, ζητάμε και τα ακρότατα της συνάρτησης, θέτουμε στον πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων, κάτω από κάθε τοπικό ακρότατο τα αρχικά **τ.ε.** ή **τ.μ.** ανάλογα αν πρόκειται για τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο. Επίσης κάτω από αυτά συνήθως, θέτουμε τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης (βλέπε λυμένα παραδείγματα).

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ▼

Αν η f' δεν ορίζεται σε κάποιο x_0 του Δ (γιατί η f εκεί δεν είναι παραγωγίσιμη), αλλά η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε στη γραμμή του πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων που

x	x_0
$f'(x)$	
f	

αναφέρεται στα πρόσημα της f' και στη θέση x_0 , θα έχουμε διπλή γραμμή (βλέπε διπλανό πίνακα), που δείχνει ότι η f' δεν ορίζεται στο x_0 .

Το γεγονός αυτό (όπως αναφέραμε και στη μονοτονία)

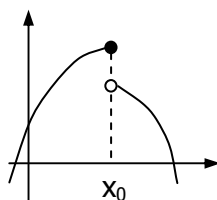
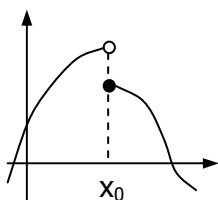
δεν διαφοροποιεί καθόλου τα συμπεράσματά μας για τα ακρότατα της f , αφού η f είναι

συνεχής στο x_0 (δηλαδή είτε η f' έχει ρίζα το x_0 , είτε δεν ορίζεται σ' αυτό, δεν αλλάζει τίποτα).

Αυτό σημαίνει ότι **δεν μας ενδιαφέρει η παραγωγισιμότητα σε συγκεκριμένα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f , αρκεί να είναι συνεχής σε αυτά. Έτσι δεν χρειάζεται να χάσουμε χρόνο ελέγχοντας αν η f είναι παραγωγίσιμη σ' αυτά (βλέπε παράδειγμα 1).**

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η απαίτηση του 1ου θεωρήματος ακροτάτων, να είναι η f συνεχής στο x_0 όπου αλλάζει η μονοτονία, είναι καθοριστική, γιατί αν δεν είναι συνεχής η f στο x_0 , δεν είμαστε σε θέση να βγάλουμε συμπέρασμα μόνο από τον πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων, για την ύπαρξη ακροτάτου στο x_0 .

Για παράδειγμα για τις δύο παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα είχαμε τον ίδιο πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων (η f είναι ασυνεχής στο x_0). Από αυτές όμως μόνο η δεύτερη παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 (μέγιστο).



x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	

~~2ο ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΠΙΚΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ (με τη βοήθεια της 2ης παραγώγου)~~

Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ για το οποίο είναι $f'(x_0)=0$ και υπάρχει η $f''(x_0)$.

- Αν $f''(x_0) < 0$ ΤΟΤΕ Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0
- Αν $f''(x_0) > 0$ ΤΟΤΕ Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το θεώρημα αυτό χρησιμοποιείται συνήθως αντί του 1ου θεωρήματος, όταν ο προσδιορισμός των προσήμων της f' γύρω από το x_0 είναι δύσκολος.
2. Αν στο x_0 του δευτέρου θεωρήματος, εκτός του μηδενισμού της 1ης παραγώγου, μηδενίζεται και η δεύτερη παράγωγος ($f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)=0$), τότε δεν έχουμε συμπέρασμα για την ύπαρξη ή μη του ακροτάτου στο x_0 . Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζουμε υποχρεωτικά το 1ο θεώρημα ακροτάτων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΜΕ ΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΦΟΡΟΥΝ ΣΤΟΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

Α) Μελέτη ακροτάτων (προσδιορισμός τοπικών ακροτάτων)

Έστω f συνεχής σε σύνολο Δ .

Ως γνωστόν οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων είναι:

- Τα κρίσιμα σημεία του Δ
- Τα κλειστά άκρα του Δ (αν υπάρχουν τέτοια είναι σίγουρα θέσεις τοπικών ακροτάτων).

Με βάση το 1ο θεώρημα ακροτάτων: Βρίσκουμε την f' , τις ρίζες της, τα πρόσημά της, κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων της f και έχουμε συμπέρασμα.

~~Με βάση το 2ο θεώρημα ακροτάτων: Βρίσκουμε την f' , τις ρίζες της, την f'' , τα πρόσημα της f'' στις ρίζες της f' και έχουμε συμπέρασμα.~~

Β) Προσδιορισμός ολικών ακροτάτων

Έστω f συνεχής σε σύνολο Δ .

- Αν το Δ είναι κλειστό διάστημα $[a, b]$: Τότε από γνωστό θεώρημα συνέχειας (μεγίστου-ελαχίστου) η συνάρτηση παίρνει και ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο $[a, b]$, οπότε το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το ολικό μέγιστο και το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα είναι το ολικό ελάχιστο.
- Αν το Δ είναι ανοικτό διάστημα (a, b) : Τότε εκτός από τα τοπικά ακρότατα υπολογίζουμε και τα $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$. Αν υπάρχει τοπικό μέγιστο μεγαλύτερο ή ίσο από το μεγαλύτερο από τα παραπάνω όρια, τότε αυτό είναι το ολικό μέγιστο, αλλιώς δεν υπάρχει ολικό μέγιστο. Αν υπάρχει τοπικό ελάχιστο μικρότερο ή ίσο από το μικρότερο από τα παραπάνω όρια, τότε αυτό είναι το ολικό ελάχιστο, αλλιώς δεν υπάρχει ολικό ελάχιστο.
- Αν $\Delta = [a, b)$: Τότε εκτός από τα τοπικά ακρότατα υπολογίζουμε και το $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$. Αν υπάρχει τοπικό μέγιστο μεγαλύτερο ή ίσο από το $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$, τότε αυτό το τοπικό μέγιστο είναι και το ολικό μέγιστο, αλλιώς δεν υπάρχει ολικό μέγιστο. Αν υπάρχει τοπικό ελάχιστο μικρότερο ή ίσο από το $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$, τότε αυτό το τοπικό ελάχιστο είναι και το ολικό ελάχιστο, αλλιώς δεν υπάρχει ολικό ελάχιστο.
- Αν $\Delta = (a, b]$: Αντιμετωπίζεται παρόμοια.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν το Δ είναι ένωση συνόλων π.χ. $\Delta = (-\infty, \alpha] \cup (\beta, \gamma]$, τότε βρίσκουμε τα τοπικά ακρότατα (τις τιμές) καθώς και τα όρια στα ανοικτά άκρα των υποδιαστημάτων του Δ (δηλαδή τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x)$).

Αν η μεγαλύτερη από όλες τις παραπάνω τιμές (τιμές ακροτάτων και τιμές ορίων), είναι τιμή ακροτάτου, τότε αυτό είναι και το ολικό μέγιστο. Αν η μεγαλύτερη είναι τιμή ορίου, τότε η f δεν έχει ολικό μέγιστο.

Αν η μικρότερη από όλες τις παραπάνω τιμές (τιμές ακροτάτων και τιμές ορίων), είναι τιμή ακροτάτου, τότε αυτό είναι και το ολικό ελάχιστο. Αν η μικρότερη είναι τιμή ορίου, τότε η f δεν έχει ολικό ελάχιστο.

2. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

Σε ασκήσεις που έχουν εκφώνηση της μορφής «να προσδιοριστεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο (ή ελάχιστο ή μέγιστο) στο x_0 » εργαζόμαστε ως εξής:

- Ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα της f (Η άσκηση σίγουρα θα αφορά σε συνάρτηση παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ , όπου το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του).
- Λέμε: «Για να έχει η f τοπικό ακρότατο στο x_0 ΠΡΕΠΕΙ* να ισχύει $f'(x_0)=0$ (1)».
- Βρίσκουμε την παράγωγο $f'(x)$ και απαιτούμε το x_0 να είναι ρίζα της (δηλαδή να ισχύει η (1)). Από τη σχέση αυτή υπολογίζουμε την ΠΙΘΑΝΗ ΤΙΜΗ* του λ .
- Στη συνέχεια και αφού αντικαταστήσουμε την τιμή του λ , κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων της f και ελέγχουμε αν πράγματι η f' έχει τα κατάλληλα πρόσημα γύρω από το x_0 , σε μια γειτονιά του x_0 .
~~Εναλλακτικά αν εργαστούμε με το 2ο θεώρημα ακροτάτων, ελέγχουμε αν το $f''(x_0)$ έχει το κατάλληλο πρόσημο.~~

- Αν συμβαίνουν τα απαιτούμενα, η τιμή του λ που προσδιορίσαμε είναι δεκτή, αλλιώς δεν υπάρχει κατάλληλη τιμή του λ .

* **ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Δεν μπορούμε να πούμε ότι «για να έχει η f τοπικό ακρότατο στο x_0 ΠΡΕΠΕΙ ΚΑΙ ΑΡΚΕΙ να ισχύει $f'(x_0)=0$ », γιατί η συνθήκη $f'(x_0)=0$, είναι βασική προϋπόθεση (αναγκαία συνθήκη) για να έχει η f ακρότατο στο x_0 (αφού είναι παραγωγίσιμη), αλλά δεν εξασφαλίζει από μόνη της την ύπαρξη του ακροτάτου (δεν είναι ικανή συνθήκη). Έτσι η τιμή του λ που προσδιορίζουμε είναι η ΠΙΘΑΝΗ τιμή. Για να τη δεχτούμε χρειάζεται επαλήθευση, δηλαδή να διαπιστώσουμε αν πράγματι για την τιμή αυτή η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 .

Παραδείγματα 1, 2

3. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ (Συμπληρωματικά)

Συμπληρώνοντας τη μεθοδολογία για το σύνολο τιμών που αναφέραμε στην παράγραφο της Μονοτονίας Συνάρτησης, μπορούμε πλέον να προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης, ακόμα και αν αυτή αλλάζει μονοτονία εντός του πεδίου ορισμού της, ως εξής:

Έστω f ορισμένη σε διάστημα Δ .

- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής στο Δ .
- Βρίσκουμε τα τοπικά ακρότατά της, έστω $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_v)$.
- Βρίσκουμε τα όρια ρ_1, ρ_2 της f στα ανοικτά άκρα του Δ (αν υπάρχουν τέτοια).
- Τότε το σύνολο τιμών θα είναι ένα διάστημα με άκρα τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή από τις $\rho_1, \rho_2, f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_v)$. Αν κάποιο άκρο προέρχεται από όριο (το ρ_1 ή το ρ_2), θα είναι ανοικτό, ενώ αν προέρχεται από τιμή (κάποια από τις $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_v)$ των ακροτάτων), θα είναι κλειστό.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Εναλλακτικά μπορούμε να βρούμε τις εικόνες των διαστημάτων στα οποία η f έχει ένα είδος μονοτονίας, όπως αναφέρεται στη μεθοδολογία της παραγράφου "ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ". Τότε το σύνολο τιμών θα είναι η ένωση αυτών των εικόνων. Αυτός ο τρόπος έχει το πλεονέκτημα ότι μπορούμε να γνωρίζουμε και το πλήθος των ριζών της f , ανάλογα με το σε πόσες από τις εικόνες περιέχεται το μηδέν.

Παράδειγμα 3

4. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΓΙΣΤΟΥ – ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ

Αυτά είναι πρακτικά προβλήματα, στα οποία ζητάμε να βρούμε την (ολικά) μέγιστη ή την (ολικά) ελάχιστη τιμή ενός μεγέθους ή τις θέσεις στις οποίες παίρνει αυτές τις τιμές. Τότε:

1ο Βήμα: Εντοπίζουμε το μέγεθος, έστω V , του οποίου μας ενδιαφέρει το ακρότατο. Ορίζουμε (αν δεν είναι ορισμένες από την άσκηση) τις μεταβλητές με βάση τις οποίες θα μελετήσουμε το πρόβλημα. Αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα για κάποια τυχαία τιμή των μεταβλητών (και όχι τη στιγμή που παρουσιάζεται το ακρότατο) και αν χρειάζεται σχήμα, αυτό θα πρέπει να γίνει ώστε να παριστάνει μια τυχαία απεικόνιση του προβλήματος.

2ο Βήμα: Προσδιορίζουμε ένα τύπο για το μέγεθος V , είτε από κάποια γνωστή σχέση είτε από το σχήμα. Αν ο τύπος αυτός περιέχει μια μεταβλητή τότε προχωράμε στο επόμενο βήμα. Αν ο τύπος περιέχει δύο μεταβλητές x και y προσπαθούμε να εκφράσουμε τη μια, π.χ. το y , ως συνάρτηση της άλλης (x) με τη βοήθεια των δεδομένων της άσκησης. Έστω (1) η σχέση που εκφράζει το y με τη βοήθεια του x . Αντικαθιστούμε το y στον τύπο του V και έτσι έχουμε τον τύπο $V(x)$ της συνάρτησης.

3ο Βήμα Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $V(x)$, δηλαδή βρίσκουμε τις επιτρεπτές τιμές του x , εξετάζοντας:

- 1) τους περιορισμούς του τύπου του $V(x)$
- 2) τη φυσική σημασία του x (μήπως είναι μήκος, μήπως χρόνος κ.τ.λ.)
- 3) τη σχέση του x με το y , δηλαδή την (1) (έτσι αν για παράδειγμα πρέπει $y > 1$ τότε ίσως προκύψουν και άλλοι περιορισμοί για το x από την (1)).

4ο Βήμα Βρίσκουμε την $V'(x)$, τα πρόσημά της, κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων της V και προσδιορίζουμε το **ολικό** ακρότατό της.

5ο Βήμα Τέλος δίνουμε απάντηση στο πρόβλημα αφού πρώτα ξεκαθαρίσουμε τι μας ζητά: «που παρουσιάζει ακρότατο;» (δηλαδή το x_0) ή το «ποια είναι η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή;» (δηλαδή το $V(x_0)$).

Παραδείγματα 4, 5, 6

5. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ Θ. FERMAT

- Αν μας δίνουν μια αληθή ανισοσύνη (δηλαδή που ισχύει για κάθε x) σε ένα διάστημα Δ και μας ζητούν να αποδείξουμε μια ισότητα ή
- μας δίνουν ότι ισχύει μια ανισοσύνη για κάθε $x \in \Delta$ (Δ διάστημα), η οποία περιέχει μια παράμετρο a και ζητάμε να υπολογίσουμε την τιμή της παραμέτρου, μπορούμε να εργαστούμε με τη βοήθεια του Θ. Fermat.

Για παράδειγμα έστω ότι ισχύει ότι $A(x) \geq B(x)$ (1), για κάθε $x \in \Delta$, με την (1) να περιέχει την παράμετρο a και ζητάμε την τιμή του a .

- Ορίζουμε συνάρτηση $f(x) = A(x) - B(x)$ στο Δ , οπότε η (1) γράφεται ισοδύναμα $f(x) \geq 0$ (2), για κάθε $x \in \Delta$.
- Βρίσκουμε x_0 **εσωτερικό** του Δ , τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, οπότε (2) $\Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in \Delta$, που σημαίνει ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0
- Δείχνουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο **εσωτερικό** σημείο x_0 του Δ .
- Αφού είναι παραγωγίσιμη στη θέση x_0 που παρουσιάζει ακρότατο, από Θ Fermat θα ισχύει $f'(x_0) = 0$.
- Η τελευταία αυτή σχέση θα μας δώσει τη ζητούμενη τιμή του a .

Παράδειγμα 7

6. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΦΟΡΟΥΝ ΣΕ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ (Συμπληρωματικά)

Συμπληρώνοντας την αντίστοιχη μεθοδολογία των παραγράφων του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και Μονοτονίας, μπορούμε να δείξουμε την ισχύ ανισώσεων και με τη βοήθεια των ακροτάτων (και μάλιστα πολλές φορές η μέθοδος αυτή είναι απλούστερη). Έτσι:

α) Απλή ανίσωση μορφής $g(x) \geq h(x)$ (1), $x \in A$

(1) $\Leftrightarrow g(x) - h(x) \geq 0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = g(x) - h(x)$ στο A και αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in A$.

Βρίσκουμε τα ολικά ακρότατα της f .

Αν η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 με τιμή $f(x_0)=0$, αποδείξαμε το ζητούμενο.

β) Διπλή ανίσωση μορφής $h(x) \leq g(x) \leq t(x)$, $x \in A$

Αρκεί να δείξουμε με τη βοήθεια της προηγούμενης μεθοδολογίας α), τις δύο ανισώσεις $h(x) \leq g(x)$ και $g(x) \leq t(x)$, ορίζοντας κατάλληλες συναρτήσεις στο A .

Παράδειγμα 8

**ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**

1. Να προσδιορίσετε τα τοπικά και τα ολικά ακρότατα (αν υπάρχουν) των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-2)^2}$

β) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{9-x^2} + 2$

γ) $f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^2, & \text{αν } x < 2 \\ -x^2 + 6x, & \text{αν } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

α) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-2)^2}$, $D_f = \mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αλλά παραγωγίσιμη τουλάχιστον* στο $\mathbb{R} - \{2\}$ (λόγω του

$\sqrt[3]{(x-2)^2} = [(x-2)^2]^{\frac{1}{3}}$ με $\frac{1}{3} \in (0, 1)$). Για $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [1 + \sqrt[3]{(x-2)^2}]' = [1 + [(x-2)^2]^{\frac{1}{3}}]' = \{[(x-2)^2]^{\frac{1}{3}}\}' = \frac{1}{3} \cdot [(x-2)^2]^{\frac{1}{3}-1} \cdot [(x-2)^2]' = \\ &= \frac{1}{3} \cdot [(x-2)^2]^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 \cdot (x-2) \cdot (x-2)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} \cdot (x-2) = \frac{2 \cdot (x-2)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-2)^2}}. \end{aligned}$$

Επειδή ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός (φυσικά για $x \neq 2$), τα πρόσημα της $f'(x)$ είναι ίδια με αυτά του $x-2$, μόνο που στο 2 η f' δεν ορίζεται. Έτσι:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f			

Τ.Ε.

$f(2)=1$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 2 με ελάχιστη τιμή $f(2)=1$. Το τοπικό αυτό ελάχιστο είναι και ολικό, ενώ δεν παρουσιάζει μέγιστο.

*** ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ:** Για τη μελέτη των ακροτάτων με τη βοήθεια του 1ου θεωρήματος, δεν μας ενδιαφέρει η παραγωγισιμότητα σε μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού, αρκεί η f να είναι συνεχής εκεί. Δεν χρειάζεται να χάσουμε χρόνο για να διαπιστώσουμε με τη βοήθεια του ορίου του λόγου μεταβολής, αν η f είναι ή όχι παραγωγίσιμη στο 2, αφού είναι συνεχής σ' αυτό. Έτσι στον παραπάνω πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 2 είτε αυτή είναι παραγωγίσιμη στο 2 είτε όχι.

$$\beta) f(x) = x^2 \cdot \sqrt{9-x^2} + 2, \quad D_f = [-3, 3]$$

Η f είναι συνεχής στο $[-3, 3]$ και παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο $(-3, 3)$ (λόγω του

$$\sqrt{9-x^2} = (9-x^2)^{\frac{1}{2}} \text{ με } \frac{1}{2} \in (0, 1)). \text{ Για } x \in (-3, 3) \text{ είναι:}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 \cdot \sqrt{9-x^2} + 2)' = (x^2 \cdot \sqrt{9-x^2})' = (x^2)' \cdot \sqrt{9-x^2} + x^2 \cdot (\sqrt{9-x^2})' = \\ &= 2x \cdot \sqrt{9-x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot (9-x^2)' = 2x \cdot \sqrt{9-x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot (-2x) = \\ &= 2x \cdot \sqrt{9-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{2x(\sqrt{9-x^2})^2 - x^3}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{18x - 2x^3 - x^3}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{-3x \cdot (x^2 - 6)}{\sqrt{9-x^2}} \end{aligned}$$

Επειδή $\sqrt{9-x^2} > 0$ για κάθε $x \in (-3, 3)$, ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της f είναι:

x	-3	$-\sqrt{6}$	0	$\sqrt{6}$	3			
-3x	+	+	○	-	-			
x^2-6	+	○	-	-	○	+		
$f'(x)$	+	○	-	○	+	○	-	
f								
	T.Ε.	T.μ.	T.Ε.	T.μ.	T.Ε.			
	$f(-3)=2$	$f(-\sqrt{6})=6\sqrt{3}+2$	$f(0)=2$	$f(\sqrt{6})=6\sqrt{3}+2$	$f(3)=2$			

Άρα η f παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα στα $-3, 0$ και 3 με τιμή 2 και τοπικά μέγιστα στα $-\sqrt{6}$ και $\sqrt{6}$ με τιμή $6\sqrt{3}+2$. Τα τοπικά αυτά ακρότατα είναι προφανώς και ολικά.

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^2, & \text{αν } x < 2 \\ -x^2 + 6x, & \text{αν } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}, \quad D_f = (-\infty, 4]$$

Η f είναι συνεχής στα $(-\infty, 2)$ και $(2, 4]$ ως πολυωνυμική.

Συνέχεια στο 2: Είναι $f(2) = -2^2 + 6 \cdot 2 = 8$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^4 - 2x^2) = 2^4 - 2 \cdot 2^2 = 8$,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 6x) = 8. \text{ Άρα } f \text{ συνεχής στο } 8, \text{ οπότε } f \text{ συνεχής στο } (-\infty, 4].$$

Η f είναι παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο $(-\infty, 2) \cup (2, 4]$ ως πολυωνυμική (υπενθυμίζουμε ότι δεν μας ενδιαφέρει η παραγωγισιμότητα της f στο μεμονωμένο σημείο 2).

Για $x \in (-\infty, 2) \cup (2, 4]$ είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} (x^4 - 2x^2)', & \text{αν } x < 2 \\ (-x^2 + 6x)', & \text{αν } 2 < x \leq 4 \end{cases} = \begin{cases} 4x^3 - 4x, & \text{αν } x < 2 \\ -2x + 6, & \text{αν } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Όμως: $4x^3 - 4x = 4x \cdot (x^2 - 1)$, με ρίζες $0, -1, 1$ και πρόσημα «γνωστά».

$-2x + 6 = -2 \cdot (x - 3)$, με ρίζα 3 και πρόσημα «γνωστά».

Έτσι κατασκευάζουμε τον παρακάτω επαυξημένο πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	4
4x	-	-	○	+	+		
x^2-1	+	○	-	-	○	+	
$4x \cdot (x^2-1)$	-	○	+	○	-	○	+
$-2 \cdot (x-3)$						+	○
$f'(x)$	-	○	+	○	-	○	+
f	↘	↗	↘	↗	↗	↘	↘
		Τ.Ε.	Τ.μ.	Τ.Ε.		Τ.μ.	Τ.Ε.
		$f(-1)=-1$	$f(0)=0$	$f(1)=-1$		$f(3)=9$	$f(4)=8$

Έτσι η f παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα στα $-1, 1, 4$ με τιμές αντίστοιχα $-1, -1, 8$ και τοπικά μέγιστα στα $0, 3$ με τιμές αντίστοιχα $0, 9$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στις θέσεις -1 και 1 το -1 , ενώ δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + ax + \beta}{x-2}$. Να βρεθούν οι $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 1 το 3 .

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$, η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{(x^2 + ax + \beta)' \cdot (x-2) - (x^2 + ax + \beta) \cdot (x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{(2x+a) \cdot (x-2) - (x^2 + ax + \beta)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - (2a + \beta)}{(x-2)^2}.$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 που είναι εσωτερικό σημείο του D_f για να παρουσιάζει εκεί ακρότατο, πρέπει (δεν αρκεί) $f'(1)=0$.

Αφού επίσης το τοπικό ακρότατο στο 1 είναι το 3 , θα ισχύει $f(1)=3$.

$$\text{Άρα πρέπει } \left. \begin{matrix} f'(1)=0 \\ f(1)=3 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \frac{1^2 - 4 \cdot 1 - (2a + \beta)}{(1-2)^2} = 0 \\ \frac{1^2 + a \cdot 1 + \beta}{1-2} = 3 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} 3 - 2a - \beta = 0 \\ -(1 + a + \beta) = 3 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} 2a + \beta = -3 \\ a + \beta = -4 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} a=1 \\ \beta=-5 \end{matrix} \right\}.$$

Επειδή η συνθήκη $f'(1)=0$ είναι αναγκαία για αν έχει η f ακρότατο στο 1 , αλλά όχι ικανή, θα πρέπει να διαπιστώσουμε αν πράγματι για $a=1$ και $\beta=-5$ συμβαίνει αυτό.

Έτσι για $a=1$ και $\beta=-5$ είναι $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$.

Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ έχει ρίζες 1 και 3 , ενώ το $(x-2)^2$ είναι θετικό στο $\mathbb{R} - \{2\}$, οπότε δεν επηρεάζει τα πρόσημα της f' . Άρα ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων είναι:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	-	○	+
f						

Τ.μ.

$$f(1)=3$$

Διαπιστώνουμε πράγματι ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο 1 το 3.

Άρα **$\alpha=1$ και $\beta=-5$** .

3. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων του 1ου παραδείγματος.

α) $f(x)=1+\sqrt[3]{(x-2)^2}$, $D_f=\mathbb{R}$

Από τη μελέτη των ακροτάτων και τον πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων βρήκαμε το κάτω άκρο του συνόλου τιμών, που είναι το ολικό ελάχιστο το 1.

Για το άνω άκρο έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \sqrt[3]{(x-2)^2}) = 1 + \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)^2} = 1 + (+\infty) = +\infty.$$

Αφού βρήκαμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, δεν χρειάζεται να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (βλέπε πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων).

Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, έχουμε ότι **$R_f=[1, +\infty)$** .

β) $f(x)=x^2 \cdot \sqrt{9-x^2} + 2$, $D_f=[-3, 3]$

Παρατηρώντας τον πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων του παραδείγματος 1 και αφού η f είναι συνεχής στο $[-3, 3]$, εύκολα βρίσκουμε ότι **$R_f=[2, 6\sqrt{3}+2]$** .

γ) $f(x)=\begin{cases} x^4-2x^2, & \text{αν } x < 2 \\ -x^2+6x, & \text{αν } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$, $D_f=(-\infty, 4]$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο το 8, ενώ δεν παρουσιάζει μέγιστο όπως διαπιστώσαμε στο 1ο παράδειγμα. Επειδή επιπλέον είναι f συνεχής και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, έχουμε

$R_f=[8, +\infty)$.

4. Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς με άθροισμα 4 και άθροισμα κύβων το ελάχιστο δυνατό.

Έστω δύο θετικοί αριθμοί x και y με άθροισμα 4. Τότε $x+y=4 \Leftrightarrow y=4-x$ (1).

$$\begin{aligned} \text{Το άθροισμα των κύβων τους είναι } x^3+y^3 &\stackrel{(1)}{=} x^3+(4-x)^3 = x^3+4^3-3 \cdot 4^2 \cdot x+3 \cdot 4 \cdot x^2-x^3= \\ &= 4 \cdot (3x^2-12x+16). \end{aligned}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x)=4 \cdot (3x^2-12x+16)$. Είναι $x>0$ και επειδή $y>0$, από (1) έχουμε ότι $4-x>0 \Leftrightarrow x<4$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, 4)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=4 \cdot (6x-12)=24 \cdot (x-2)$. Ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της είναι:

x	0	2	4
f'(x)	-	○	+
f			

Τ.Ε.

Άρα η f που εκφράζει το άθροισμα των κύβων γίνεται (ολικά) ελάχιστη για $x=2$, οπότε από (1) έχουμε ότι $y=2$.

Δηλαδή οι ζητούμενοι αριθμοί είναι το 2 και το 2.

- 5.** Σε ένα χάρτη έχουμε προσαρτήσει ένα σύστημα συντεταγμένων. Η πλατεία ενός μικρού χωριού βρίσκεται στη θέση $A(0, 1)$. Πρέπει να κατασκευάσουμε ένα υδραγωγείο που να παρέχει πόσιμο νερό στο χωριό. Τα δυνατά σημεία που μπορεί να κατασκευαστεί το υδραγωγείο είναι σημεία μιας παραβολικής καμπύλης με εξίσωση $y=x^2$. Να προσδιορίσετε τις καταλληλότερες συντεταγμένες του υδραγωγείου, ώστε να βρίσκεται πλησιέστερα στην πλατεία του χωριού. Αν οι μονάδες πάνω στο σύστημα συντεταγμένων δίνονται σε χιλιόμετρα, να υπολογίσετε την ελάχιστη αυτή απόσταση.

Αν $B(x, y)$ σημείο της παραβολής $y=x^2$, ζητάμε τα x και y ώστε η απόσταση $d(A, B)$ να είναι ελάχιστη. Είναι $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2}$. Για να γίνει ελάχιστη η $d(A, B)$, αρκεί να γίνει ελάχιστη η τιμή της παράστασης $x^2 + (y - 1)^2$, δηλαδή της $x^2 + (x^2 - 1)^2$, καθώς είναι $y = x^2$.

Ορίζουμε συνάρτηση $f(x) = x^2 + (x^2 - 1)^2 = x^4 - x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x \cdot (2x^2 - 1)$.

Ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
2x	-	-	+	+	
2x ² -1	+	-	-	+	
f'(x)	-	○	+	○	+
f					

Τ.Ε.

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4}$$

Τ.Ε.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4}$$

Άρα η f γίνεται ελάχιστη για $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ και $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και παρατηρούμε ότι στις θέσεις αυτές οι τιμές της είναι ίδιες (και είναι οι ολικά ελάχιστες).

Άρα τα καταλληλότερα σημεία για το υδραγωγείο είναι τα $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

ενώ η ελάχιστη απόσταση είναι $\frac{\sqrt{3}}{2}$ km.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΣΚΗΣΗ

Παρατηρείστε ότι ενώ η απόσταση ορίζεται με ρίζα, δεν μας συμφέρει να ορίσουμε αυτή την παράσταση ως συνάρτηση, καθώς θα έχει πολύπλοκη παράγωγο. Έτσι ορίζουμε ως συνάρτηση το υπόριζό της (χωρίς λάθος, καθώς όταν γίνεται ελάχιστο το υπόριζο, γίνεται και η ρίζα).

Επίσης χρειάζεται προσοχή στο ότι, ενώ το ελάχιστο της συνάρτησης είναι το $\frac{3}{4}$, η

ελάχιστη απόσταση είναι $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, καθώς η απόσταση είναι η $\sqrt{f(x)}$.

6. Σε κύκλο (O, R) να εγγράψετε ορθογώνιο με μέγιστο εμβαδόν.

Έστω $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο διαστάσεων x και y εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) (βλέπε σχήμα). Ζητάμε να βρούμε τα x και y (προφανώς συναρτήσει του R) ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να είναι μέγιστο.

Η διαγώνιος BD του ορθογωνίου είναι διάμετρος του κύκλου, δηλαδή $BD=2R$, αφού $\hat{A}B\Delta = 90^\circ$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔAB έχουμε: $x^2 + y^2 = 4R^2 \Leftrightarrow$

$$y^2 = 4R^2 - x^2 \stackrel{y>0}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{4R^2 - x^2} \quad (1) \text{ με } 4R^2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow (2R-x) \cdot (2R+x) > 0 \stackrel{2R+x>0}{\Leftrightarrow} 2R-x > 0 \Leftrightarrow x < 2R.$$

Αν E το εμβαδόν του ορθογωνίου, τότε $E = x \cdot y \stackrel{(1)}{=} x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}$.

Για να γίνει το E μέγιστο, αρκεί να γίνει μέγιστο το E^2 , δηλαδή το $x^2 \cdot (4R^2 - x^2) = 4R^2 x^2 - x^4$.

Ορίζουμε συνάρτηση $f(x) = 4R^2 x^2 - x^4$. Πρέπει $x > 0$ και $x < 2R$, οπότε τελικά $x \in (0, 2R)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγισίμων με $f'(x) = 4R^2 \cdot 2x - 4x^3 = 8R^2 x - 4x^3 = 4x \cdot (2R^2 - x^2)$ με ρίζες 0 και $\pm R\sqrt{2}$ (η $-R\sqrt{2}$ απορρίπτεται καθώς δεν ανήκει στο $(0, 2R)$).

Ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της στο $(0, 2R)$ είναι:

x	0	$R\sqrt{2}$	$2R$
$4x$	+		+
$4R^2 - x^2$	+		-
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-
f	$\nearrow$		$\searrow$

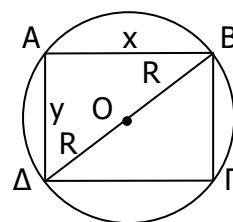
Τ.μ.

Άρα η f , οπότε και το εμβαδόν, παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο για $x = R\sqrt{2}$. Τότε από (1) είναι $y = \sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2} = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2} = x$.

Άρα από όλα τα ορθογώνια που είναι εγγεγραμμένα στον κύκλο, μέγιστο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΣΚΗΣΗ

Παρατηρείστε ότι ενώ το εμβαδόν ορίζεται με ρίζα, δεν μας συμφέρει να ορίσουμε αυτή την παράσταση ως συνάρτηση, καθώς θα έχει πολύπλοκη παράγωγο. Έτσι ορίζουμε ως συνάρτηση το τετράγωνό της (χωρίς λάθος, καθώς όταν γίνεται ελάχιστο το τετράγωνο, γίνεται και η παράσταση, αφού είναι θετική).



7. Αν $e^{2x} \geq 2ax+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $a=1$.

$$e^{2x} \geq 2ax+1 \Leftrightarrow e^{2x} - 2ax - 1 \geq 0 \quad (1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν ορίσουμε συνάρτηση $f(x)=e^{2x}-2ax-1$, $x \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι $f(0)=0$. Άρα η (1) γράφεται $f(x) \geq f(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 που είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$. Όμως η f είναι παραγωγίσιμη, οπότε από Θ. Fermat έχουμε ότι $f'(0)=0$ (2).

$$f'(x)=e^{2x} \cdot (2x)' - 2a = 2e^{2x} - 2a.$$

$$\text{Άρα } (2) \Leftrightarrow 2e^{2 \cdot 0} - 2a = 0 \Leftrightarrow 2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

8. Δείξτε ότι:

α) $e^x \geq 1+x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) $x^x \cdot (2-x)^{2-x} \geq 1$, για κάθε $x \in (0, 2)$

γ) $1+x \leq e^x \leq 1+x \cdot e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Θα δείξουμε ότι $e^x \geq 1+x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Σε παράδειγμα της παραγράφου του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, αποδείξαμε ότι η ανίσωση $e^x \geq 1+x$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ.

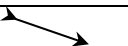
Εδώ θα την αποδείξουμε με τη βοήθεια της θεωρίας των ακροτάτων.

Έστω συνάρτηση $f(x)=e^x-x-1$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγισίμων με $f'(x)=e^x-1$.

$$\text{Έστω } f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow e^x=e^0 \Leftrightarrow x=0.$$

$$\text{Έστω } f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0.$$

Άρα ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της είναι:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

Τ.Ε.

$$f(0)=e^0-0-1=0$$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) στο 0 με τιμή 0.

$$\text{Έτσι } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ δηλαδή } e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1+x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β) Θα δείξουμε ότι $x^x \cdot (2-x)^{2-x} \geq 1$, για κάθε $x \in (0, 2)$

$$\text{Έστω } f(x)=x^x \cdot (2-x)^{2-x} - 1, \text{ με } x \in (0, 2).$$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=(x^x)' \cdot (2-x)^{2-x} + x^x \cdot [(2-x)^{2-x}]'.$$

$$\text{Όμως } (x^x)' = (e^{x \cdot \ln x})' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \cdot \ln x)' = x^x \cdot [(x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)'] = x^x \cdot (\ln x + 1) \text{ και}$$

$$[(2-x)^{2-x}]' = [e^{(2-x) \cdot \ln(2-x)}]' = e^{(2-x) \cdot \ln(2-x)} \cdot [(2-x)' \cdot \ln(2-x) + (2-x) \cdot (\ln(2-x))'] =$$

$$= (2-x)^{2-x} \cdot [-\ln(2-x) + (2-x) \cdot \frac{1}{2-x} \cdot (2-x)'] = (2-x)^{2-x} \cdot [-\ln(2-x) - 1].$$

$$\text{Άρα } f'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1) \cdot (2-x)^{2-x} + x^x \cdot (2-x)^{2-x} \cdot [-\ln(2-x) - 1] = x^x \cdot (2-x)^{2-x} \cdot (\ln x + 1 - \ln(2-x) - 1) =$$

$$= x^x \cdot (2-x)^{2-x} \cdot (\ln x - \ln(2-x)) = x^x \cdot (2-x)^{2-x} \cdot \ln \frac{x}{2-x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Έστω } f'(x) &= 0 \Leftrightarrow x^x \cdot (2-x)^{2-x} \cdot \ln \frac{x}{2-x} = 0 \quad \begin{matrix} x^x > 0 \\ (2-x)^{2-x} > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \ln \frac{x}{2-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2-x} = e^0 \Leftrightarrow \frac{x}{2-x} = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 2-x \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \in (0, 2). \end{aligned}$$

$$\text{Έστω } f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{x}{2-x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2-x} > e^0 \Leftrightarrow \frac{x}{2-x} > 1 \Leftrightarrow x > 2-x \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow x > 1.$$

Άρα ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της f στο $(0, 2)$ είναι:

x	0	1	2
f'(x)		⊖	+
f		↖	↗

Τ.Ε.

$$f(1) = 1^1 \cdot (2-1)^{2-1} - 1 = 0$$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) το 0, οπότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$, δηλαδή $x^x \cdot (2-x)^{2-x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^x \cdot (2-x)^{2-x} \geq 1$, για κάθε $x \in (0, 2)$.

γ) Θα δείξουμε ότι $1+x \leq e^x \leq 1+x \cdot e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$\left. \begin{aligned} 1+x &\leq e^x \\ e^x &\leq 1+x \cdot e^x \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} e^x &\geq 1+x \quad (1) \\ e^x - 1 - x \cdot e^x &\leq 0 \quad (2) \end{aligned} \right.$$

Απόδειξη της (1)

Η (1) αποδείχθηκε στο παρόν παράδειγμα στο α) ερώτημα.

Απόδειξη της (2)

Ορίζουμε συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - x \cdot e^x$ που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα παραγωγισίμων, με $f'(x) = e^x - (x) \cdot e^x - x \cdot (e^x)' = e^x - e^x - x \cdot e^x = -x \cdot e^x$.

$$\text{Έστω } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ αφού } e^x > 0 \text{ για κάθε } x.$$

$$\text{Έστω } f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x \cdot e^x > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Άρα ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της f στο $\mathbb{R}$ είναι:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)		⊖	+
f		↖	↗

Τ.Μ.

$$f(0) = e^0 - 1 - 0 \cdot e^0 = 0$$

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο (ολικό) το 0, οπότε $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $e^x - 1 - x \cdot e^x \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 1 + x \cdot e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αφού αποδείξαμε τις (1) και (2), ισχύει η αρχική διπλή ανίσωση.

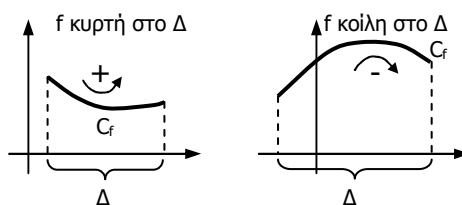
3.7 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ– ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

A. ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ: Έστω συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

- Η f στρέφει **τα κοίλα προς τα άνω** ή αλλιώς είναι **κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η f στρέφει **τα κοίλα προς τα κάτω** ή αλλιώς είναι **κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Εποπτικά το ότι η f είναι κυρτή (ή κοίλη) στο Δ σημαίνει ότι ένα κινητό για να κινηθεί πάνω στο τμήμα της C_f που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ (από τα αριστερά προς τα δεξιά) θα πρέπει να στραφεί κατά τη θετική (ή αρνητική αντίστοιχα) φορά.



ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Με βάση τον παραπάνω ορισμό όταν μας λένε ότι μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε διάστημα Δ , αυτόματα εννοείται ότι η f είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του.

Σε ασκήσεις, για να εξετάσουμε την κυρτότητα μιας συνάρτησης, ακολουθούμε συνήθως το παρακάτω θεώρημα:

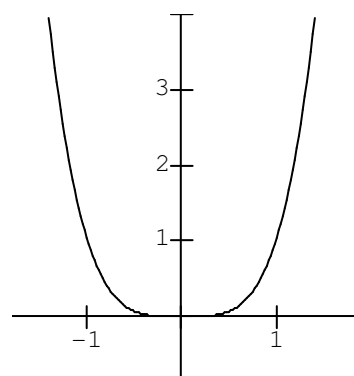
ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Έστω f συνάρτηση:

- συνεχής σε διάστημα Δ και
- δύο φορές παραγωγίσιμη στο **εσωτερικό** (τουλάχιστον) του Δ
 - Αν $f''(x) > 0$ για κάθε x **εσωτερικό** του Δ ΤΟΤΕ η f είναι **κυρτή** στο Δ
 - Αν $f''(x) < 0$ για κάθε x **εσωτερικό** του Δ ΤΟΤΕ η f είναι **κοίλη** στο Δ

Προφανώς το θεώρημα της κυρτότητας, οδηγεί στον ορισμό, καθώς αν για παράδειγμα είναι $f''(x) > 0$ στα εσωτερικά του Δ , τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ , οπότε τελικά η f είναι κυρτή.

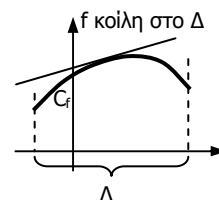
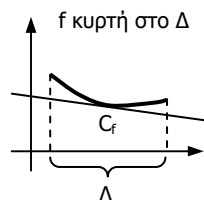
Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x^4$ έχει $f'(x)=4x^3$, που είναι γνησίως



αύξουσα στο R , οπότε στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο R . Παρ' όλα αυτά όμως η δεύτερη παράγωγός της μηδενίζεται στο 0 , καθώς $f''(x) = 12x^2$, οπότε δεν είναι παντού θετική.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ▼

- Αν η f είναι **κυρτή** στο Δ , τότε η **εφαπτομένη** της C_f σε κάθε σημείο που έχει τετμημένη στο Δ , βρίσκεται «**κάτω**» από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής



και

- αν η f είναι **κοίλη** στο Δ , τότε η **εφαπτομένη** της C_f σε κάθε σημείο που έχει τετμημένη στο Δ , βρίσκεται «**πάνω**» από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής.

B. ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΜΠΗΣ: Ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής της C_f** (για συντομία **Σ. Κ.**) όταν ισχύουν ταυτόχρονα τα παρακάτω:

1. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, b) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0
2. Η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ και
3. Η f είναι κυρτή στο (a, x_0) και κοίλη στο (x_0, b) ή αντίστροφα

Τότε το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**.

Χρησιμοποιώντας μια άλλη έκφραση, μπορούμε να πούμε ότι **η f παρουσιάζει καμπή στο x_0** .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Προσοχή στο ότι λέμε «η C_f έχει σημείο καμπής» και όχι η f .
2. Από τον ορισμό του σημείου καμπής και ειδικότερα από την προϋπόθεση της ύπαρξης εφαπτομένης στο $A(x_0, f(x_0))$, καταλαβαίνουμε ότι οπωσδήποτε η f πρέπει να είναι συνεχής στο x_0 .

ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΜΠΗΣ

Αν

- f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα (a, b) με εξαίρεση ίσως σημείο $x_0 \in (a, b)$ όπου η C_f δέχεται εφαπτομένη
- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0

TOTE η f παρουσιάζει καμπή στο x_0

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν

- το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και
- η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0

TOTE $f''(x_0) = 0$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το παραπάνω θεώρημα που αφορά στα σημεία καμπής και τον μηδενισμό της δεύτερης παραγώγου, μας θυμίζει ίσως το θεώρημα του Fermat, μόνο που εκείνο αφορά στα ακρότατα και τον μηδενισμό της πρώτης παραγώγου.

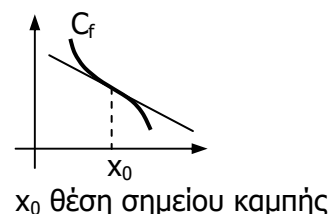
Για τις πιθανές θέσεις των σημείων καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ισχύει το παρακάτω:

Πιθανές θέσεις σημείων καμπής

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f'' μηδενίζεται
- Τα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f'' δεν υπάρχει

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ▼

1. Στα σημεία καμπής, η **εφαπτομένη** της C_f «διαπερνά» την γραφική παράσταση.

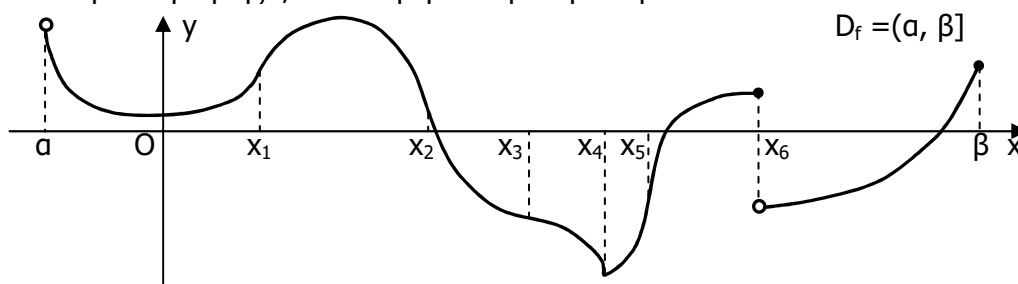


2. Είναι σημαντικό να προσέξουμε ότι τόσο από το θεώρημα της κυρτότητας, όσο και από τον ορισμό του σημείου καμπής, προκύπτει ότι δεν είναι απαραίτητο πάντα να ελέγχουμε αν υπάρχει η f'' σε συγκεκριμένα **σημεία** του πεδίου ορισμού. Έτσι αν x_0 σημείο του πεδίου ορισμού και **μελετάμε την κυρτότητα, δεν χρειάζεται να ελέγξουμε αν ορίζεται το $f''(x_0)$, αρκεί η f να είναι συνεχής στο x_0 .**

Αν **μελετάμε τα Σημεία Καμπής** πάλι **δεν χρειάζεται να ελέγξουμε αν ορίζεται το $f''(x_0)$, αρκεί η C_f να δέχεται εφαπτομένη στο $(x_0, f(x_0))$.**

Η παρατήρηση αυτή μας «γλιτώνει» από άσκοπες έρευνες (θυμηθείτε ότι κάτι παρόμοιο αναφέραμε για την f' κατά τη μελέτη μονοτονίας και ακροτάτων).

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τα παραπάνω, ας αναλύσουμε την παρακάτω γραφική παράσταση συνάρτησης f , όσον αφορά στην κυρτότητα και στα Σ.Κ.



Η f είναι κυρτή στα $(a, x_1]$, $[x_2, x_3]$, $[x_4, x_5]$ και $(x_6, \beta]$, ενώ είναι κοίλη στα $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$ και $[x_5, x_6]$. Η f παρουσιάζει καμπή στα x_1 , x_2 , x_3 και x_5 . Στα x_4 και x_6 δεν παρουσιάζει καμπή, παρ' όλο που αριστερά και δεξιά των θέσεων αυτών αλλάζουν τα κοίλα, καθώς δεν υπάρχει η εφαπτομένη της C_f στις θέσεις αυτές (στο x_4 έχει γωνιακό σημείο και στο x_6 είναι ασυνεχής).

Ένας πίνακας προσήμων της f'' για την παραπάνω συνάρτηση f , θα μας έδινε την κυρτότητα και τα Σ.Κ. ως εξής:

x	a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β
$f''(x)$	+	○	-	○	+	○	-	+
f	↷	↶	↷	↶	↷	↶	↷	↷
		Σ.Κ.		Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Επεξήγηση συμβόλων: ↷ «κοίλα άνω» – «κυρτή», ↶ «κοίλα κάτω» – «κοίλη»

Φυσικά αν είχαμε μόνο τον παραπάνω πίνακα και όχι τη γραφική παράσταση, δεν θα μπορούσαμε να έχουμε άμεσα συμπεράσματα για τις θέσεις x_4 και x_6 όπου δεν ορίζεται η f'' , καθώς δεν θα γνωρίζαμε αν υπάρχουν οι εφαπτόμενες της C_f στις θέσεις αυτές. Έτσι θα χρειαζόταν παραπέρα μελέτη για την ύπαρξη ή μη Σ.Κ. στις θέσεις αυτές.

Τέλος να αναφέρουμε ότι είμαστε σε θέση πλέον να κατασκευάζουμε πίνακες, οι οποίοι να παρουσιάζουν μια πληρέστερη εικόνα για τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, εμφανίζοντας σε αυτούς, όχι μόνο τη μονοτονία και τα ακρότατα, αλλά και την κυρτότητα και τα Σ.Κ. τους οποίους "καταχρηστικά" θα λέμε **πίνακες μεταβολών** (κανονικά **πίνακας μεταβολών της f** , είναι ο πίνακας που εκτός από τα παραπάνω παρουσιάζει και τα όρια της f στα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού της)

Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιούμε τα παρακάτω σύμβολα:

- ↷ που σημαίνει «γνησίως αύξουσα με τα κοίλα προς τα άνω»
- ↶ που σημαίνει «γνησίως αύξουσα με τα κοίλα προς τα κάτω»
- ↷ που σημαίνει «γνησίως φθίνουσα με τα κοίλα προς τα άνω»
- ↶ που σημαίνει «γνησίως φθίνουσα με τα κοίλα προς τα κάτω»

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στο εξής όταν μας λένε να κατασκευάσουμε τον πίνακα μεταβολών της f , είμαστε υποχρεωμένοι να παρουσιάζουμε πάνω σε αυτόν, όχι μόνο τη μονοτονία και τα ακρότατα αλλά και την κυρτότητα και τα σημεία καμψής. Κατά την παρουσίαση αυτή χρησιμοποιούμε τα παραπάνω σύμβολα.

Τέλος μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύουν οι προτάσεις:

- Μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε διάστημα (a, b) δεν είναι δυνατόν να παρουσιάζει καμψή και τοπικό ακρότατο στο ίδιο $x_0 \in (a, b)$.
- Μεταξύ δύο εσωτερικών ακροτάτων σε ένα διάστημα μιας συνάρτησης παραγωγίσιμης στο διάστημα αυτό, υπάρχει οπωσδήποτε τουλάχιστον ένα σημείο καμψής.

ΒΛΕΠΕ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ, ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – Σ.Κ.**1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ**

Έστω ότι ζητάμε να προσδιορίσουμε την κυρτότητα συνάρτησης f που ορίζεται σε διάστημα Δ . Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής στο Δ .
- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη τουλάχιστον στα εσωτερικά σημεία του Δ .
- Αποδεικνύουμε ότι η f' είναι παραγωγίσιμη τουλάχιστον στα εσωτερικά σημεία του Δ .
- Βρίσκουμε την f'' , τις ρίζες και τα πρόσημά της.
- Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα (πίνακας κυρτότητας), χρησιμοποιώντας για την κυρτότητα της f τα σύμβολα $\curvearrowright$ και $\curvearrowleft$:

Πρόσημα της $f''(x)$ $\longrightarrow$

Κυρτότητα της f $\longrightarrow$

x	
$f''(x)$	
f	

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Εναλλακτικά μπορούμε, αντί των προσήμων της $f''(x)$, να χρησιμοποιήσουμε τη μονοτονία της f' (βλέπε ορισμό κυρτότητας).

Παραδείγματα 1, 2, 5α**2. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ**

Είναι ασκήσεις παραμετρικών συναρτήσεων που ζητούν τις τιμές των παραμέτρων, ώστε η συνάρτηση να έχει συγκεκριμένη κυρτότητα, για παράδειγμα κυρτή στο $\mathbb{R}$. Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε ικανή και αναγκαία συνθήκη που να εξασφαλίζει αυτή την απαίτηση, δηλαδή είναι λάθος να πούμε ότι "για να είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ", καθώς το θεώρημα της κυρτότητας δεν ισχύει αντίστροφα. Έτσι η συνθήκη " $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ", είναι ικανή, αλλά όχι αναγκαία (δηλαδή ισχύει το "αρκεί", αλλά όχι το "πρέπει"). Δυστυχώς μια ικανή συνθήκη δεν είναι σίγουρο ότι θα μας δώσει όλες τις ζητούμενες τιμές της παραμέτρου, παρά μόνο ένα μέρος τους, οπότε μια τέτοια συνθήκη δεν μας είναι χρήσιμη.

Έτσι σε τέτοιου είδους ασκήσεις αντί να πούμε "για να είναι η f κυρτή στο $\mathbb{R}$ αρκεί $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ", κάτι που είναι σωστό, αλλά "άχρηστο", κάνουμε κανονικά μελέτη κυρτότητας της συνάρτησης, κρατώντας τελικά εκείνες τις τιμές των παραμέτρων, για τις οποίες η f είναι κυρτή.

Παράδειγμα 3**3. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕΛΕΤΗΣ Σ.Κ.**

Τα σημεία καμπής υπολογίζονται απ' ευθείας από τον παραπάνω πίνακα κυρτότητας, όπως περιγράψαμε στη θεωρία. Φυσικά στις πιθανές θέσεις σημείων

καμψής, όπου δεν υπάρχει η f'' , πρέπει να γίνει έλεγχος για το αν υπάρχει ή όχι η εφαπτομένη της C_f .

Παραδείγματα 1, 2

4. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Σ.Κ.

Σε παραμετρικές ασκήσεις που ζητούν την τιμή της παραμέτρου, ώστε η C_f να έχει συγκεκριμένο Σ.Κ. $(x_0, f(x_0))$, απαιτούμε:

- Η f να είναι συνεχής στο x_0
- Να ισχύει $f''(x_0) = 0$ (αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0).

Καθώς όμως οι παραπάνω δύο συνθήκες είναι αναγκαίες, αλλά όχι ικανές (δηλαδή δεν εξασφαλίζουν την ύπαρξη Σ.Κ. στη θέση x_0), αφού προσδιορίσουμε την πιθανή τιμή της παραμέτρου, πρέπει να ελέγχουμε αν για την τιμή αυτή υπάρχει η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ και αλλάζει κυρτότητα η f στο x_0 . Αν συμβαίνει αυτό, δεχόμαστε την τιμή της παραμέτρου. Αλλιώς απαντάμε ότι δεν υπάρχει κατάλληλη τιμή.

Προφανώς αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , απαιτούμε μόνο τη δεύτερη συνθήκη ($f''(x_0) = 0$) και ελέγχουμε μόνο αν για την τιμή της παραμέτρου που προσδιορίσαμε αλλάζει κυρτότητα η f στο x_0 , καθώς η ύπαρξη της εφαπτομένης εξασφαλίζεται από την παραγωγισιμότητα.

Παράδειγμα 4

5. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΦΟΡΟΥΝ ΣΤΗ ΘΕΣΗ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗ C_f **–ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ**

Πολλές φορές είναι σχετικά απλό να αποδείξουμε κάποιες ανισώσεις, αν προσέξουμε πως μεταβάλλεται η κυρτότητα μιας συνάρτησης f και θυμόμαστε τη θέση της εφαπτομένης της C_f στα διαστήματα όπου η f είναι κυρτή ή κοίλη ή στα σημεία όπου η f παρουσιάζει καμψή.

Έτσι για παράδειγμα αν μας ζητούν να αποδείξουμε την ανίσωση $e^x \geq x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, εκτός των αποδείξεων που παρουσιάσαμε σε προηγούμενες παραγράφους (ΘΜΤ και ΑΚΡΟΤΑΤΑ), θα μπορούσαμε να ενεργήσουμε και ως εξής:

- Αποδεικνύουμε εύκολα ότι η $f(x) = e^x$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- Αποδεικνύουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0, 1)$ είναι η ευθεία $y = x+1$.
- Τότε σύμφωνα με όσα αναφέραμε στη θεωρία, η εφαπτομένη της C_f βρίσκεται «κάτω» από τη γραφική παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής, οπότε ισχύει $e^x \geq x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η «ιδέα» να αποδείξουμε με αυτόν τον τρόπο μια ανίσωση, προέρχεται από την παρατήρηση, ότι η ανίσωση αυτή αποτελείται από τον τύπο μιας ευθείας (εδώ είναι η $y = x+1$) και τον τύπο μιας συνάρτησης που είναι κυρτή ή κοίλη (εδώ η $y = e^x$).

Παράδειγμα 5β, 6, 7**6. ΆΛΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

Λύνονται κατά περίπτωση, στηριζόμενοι στα όσα αναφέρθηκαν στη θεωρία.

Παραδείγματα 8, 9**ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ Σ.Κ.**

1. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ και να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει δύο συνευθειακά Σ.Κ.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad \eta \ f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ ως ρητή με } f'(x) = \dots = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$\text{Η } f' \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ ως ρητή με } f''(x) = \dots = \frac{2x \cdot (x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}. \text{ Οι ρίζες της } f''$$

είναι: $0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$. Καθώς ο παρονομαστής της f'' είναι πάντα θετικός, τα πρόσημά της εξαρτώνται μόνο από τον αριθμητή. Έτσι ο επαυξημένος πίνακας κυρτότητας είναι:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x		-	-	+	+
$x^2 - 3$	+	○	-	-	+
$f''(x)$	-	○	+	○	+
f	↪	↩	↪	↩	↪

Σ.Κ.

Σ.Κ.

Σ.Κ.

$$f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στα $[-\sqrt{3}, 0]$ και $[\sqrt{3}, +\infty)$ και τα κοίλα προς τα κάτω στα $(-\infty, -\sqrt{3}]$ και $[0, \sqrt{3}]$.

Επίσης η C_f έχει σημεία καμπής τα $A(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $B(0, 0)$ και $\Gamma(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

$$\text{Η ευθεία AB έχει εξίσωση } y - y_B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \cdot (x - x_B) \Leftrightarrow y - 0 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{4} - 0}{-\sqrt{3} - 0} \cdot (x - 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{4}.$$

Επειδή οι συντεταγμένες του Γ προφανώς επαληθεύουν την παραπάνω εξίσωση, τα σημεία καμπής A, B και Γ είναι συνευθειακά.

2. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. τις συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \frac{(x-1) \cdot |x-1|}{x}, \quad \beta) g(x) = x \cdot \ln(x^2+2) \text{ στο } \mathbb{R}_+$$

α) $f(x) = \frac{(x-1) \cdot |x-1|}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$. Είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1) \cdot (x-1)}{x}, & \text{av } x \geq 1 \\ \frac{(x-1) \cdot [-(x-1)]}{x}, & \text{av } 1 > x \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x}, & \text{av } x \in [1, +\infty) \\ -\frac{(x-1)^2}{x}, & \text{av } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \end{cases}$$

Παραγωγισιμότητα της f

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως ρητή με $f'(x) = \dots = \frac{(x-1) \cdot (3-x)}{x^2}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ ως ρητή με $f'(x) = \dots = -\frac{(x-1) \cdot (3-x)}{x^2}$.

Παραγωγισιμότητα στο 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{(x-1)^2}{x} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2}{x \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x} = 0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{(x-1)^2}{x} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)^2}{x \cdot (x-1)} = -\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x} = 0 \in \mathbb{R}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 0$.

Τελικά η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbb{R}^*$ με

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(x-1) \cdot (3-x)}{x^2}, & \text{av } x \in (1, +\infty) \\ 0, & \text{av } x = 1 \\ -\frac{(x-1) \cdot (3-x)}{x^2}, & \text{av } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \end{cases} . \text{ Επειδή παρατηρούμε ότι ο πρώτος}$$

κλάδος της f' (αλλά και ο δεύτερος), για $x=1$ δίνει αποτέλεσμα μηδέν, μπορούμε, αν θέλουμε, να γράψουμε την f' με δύο κλάδους, εντάσσοντας την τιμή 1 στις τιμές του που παίρνει το x στον πρώτο κλάδο. Έτσι:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(x-1) \cdot (3-x)}{x^2}, & \text{av } x \in [1, +\infty) \\ -\frac{(x-1) \cdot (3-x)}{x^2}, & \text{av } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \end{cases}$$

Παραγωγισιμότητα της f'

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως ρητή με $f''(x) = \dots = -\frac{2 \cdot (2x-3)}{x^3}$.

Όμοια είναι παραγωγίσιμη και στο $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ με $f''(x) = \dots = \frac{2 \cdot (2x - 3)}{x^3}$.

Άρα η f'' ορίζεται τουλάχιστον* στο $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ με

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2 \cdot (2x - 3)}{x^3}, & \text{αν } x \in (1, +\infty) \\ \frac{2 \cdot (2x - 3)}{x^3}, & \text{αν } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \end{cases}$$

*** ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ:** Για τη μελέτη της κυρτότητας και των Σ.Κ., δεν μας ενδιαφέρει η ύπαρξη της f'' σε μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού, αρκεί η f να είναι συνεχής εκεί (για την κυρτότητα) ή η C_f να δέχεται εφαπτομένη εκεί (για τα Σ.Κ.). Δεν χρειάζεται να χάσουμε χρόνο για να διαπιστώσουμε με τη βοήθεια του ορίου του λόγου μεταβολής, αν η f' είναι ή όχι παραγωγίσιμη στο 1, αφού είναι παραγωγίσιμη η f σ' αυτό, οπότε υπάρχει εκεί η εφαπτομένη της C_f .

Πρόσημα της f''

Στο $(1, +\infty)$: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-2 \cdot (2x - 3)}{x^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 3}{x^3} < 0 \stackrel{x^3 > 0 \text{ στο } (1, +\infty)}{\Leftrightarrow} 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}.$$

Στο $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \notin (-\infty, 0) \cup (0, 1)$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot (2x - 3)}{x^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 3}{x^3} > 0.$$

Με βάση τα παραπάνω κατασκευάζουμε τον παρακάτω επαυξημένο πίνακα κυρτότητας:

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$\frac{-2 \cdot (2x - 3)}{x^3}$				+	−
$2x - 3$	−	−			
x^3	−	+			
$\frac{2 \cdot (2x - 3)}{x^3}$	+	−			
$f''(x)$	+	−	+	○	−
f	↗	↘	↗		↘
			Σ.Κ. $f(1)=0$	Σ.Κ. $f(\frac{3}{2})=\frac{1}{6}$	

Άρα η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στα $(-\infty, 0)$ και $[1, \frac{3}{2}]$ και τα κοίλα προς τα κάτω στα $(0, 1]$ και $[\frac{3}{2}, +\infty)$. Τέλος η C_f έχει σημεία καμπής τα $(1, 0)$ και $(\frac{3}{2}, \frac{1}{6})$.

β) $g(x)=x \cdot \ln(x^2+2)$ στο $\mathbf{R}_+$, $D_f = \mathbf{R}_+$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}_+$, ως γινόμενο παραγωγισίμων με

$$f'(x) = (x)' \cdot \ln(x^2+2) + x \cdot [\ln(x^2+2)]' = \ln(x^2+2) + x \cdot \frac{1}{x^2+2} \cdot (x^2+2)' = \ln(x^2+2) + \frac{2x^2}{x^2+2}.$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}_+$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με

$$f''(x) = \dots = 2x \cdot \left(\frac{1}{x^2+2} + \frac{4}{(x^2+2)^2} \right).$$

Όμως $\frac{1}{x^2+2} + \frac{4}{(x^2+2)^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}_+$, ως άθροισμα θετικών αριθμών. Άρα το πρόσημο της $f''(x)$ στο $\mathbf{R}_+$ ταυτίζεται με το πρόσημο του $2x$. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα κυρτότητας:

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	0	+
f		↪

Άρα η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $[0, +\infty)$, ενώ δεν παρουσιάζει καμπή.

3. Να βρείτε τις τιμές του λ έτσι ώστε η συνάρτηση $f(x)=x^4+6x^3-3\lambda x^2+x+2016$ να είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbf{R}$, ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 4x^3 + 18x^2 - 6\lambda x + 1.$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική με $f''(x) = 12x^2 + 36x - 6\lambda = 6 \cdot (2x^2 + 6x - \lambda)$.

Τα πρόσημα της f'' εξαρτώνται από τα πρόσημα του τριωνύμου $2x^2 + 6x - \lambda$ που έχει $\Delta = 36 + 8\lambda$.

- Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 36 + 8\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda < -\frac{9}{2}$, τότε ο πίνακας προσήμων της f'' και ο πίνακας κυρτότητας της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f''(x)$		+
f		↪

Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

- Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 36 + 8\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda > -\frac{9}{2}$, τότε η f'' έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbf{R}$, τις $\rho_1 < \rho_2$ και ο πίνακας κυρτότητας της f είναι:

x	$-\infty$	ρ_1	ρ_2	$+\infty$
$f''(x)$	+	$\bigcirc$	-	+
f				

Άρα η f δεν είναι κυρτή σε όλο το R.

- Αν $\Delta=0 \Leftrightarrow 36+8\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{9}{2}$, τότε η f'' έχει μια ρίζα ρ στο R και ο πίνακας κυρτότητας της f είναι:

x	$-\infty$	ρ	$+\infty$
$f''(x)$	+	$\bigcirc$	+
f			

Άρα η f είναι κυρτή στο R.

Έτσι τελικά μετά την παραπάνω μελέτη συμπεραίνουμε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν $\lambda \leq -\frac{9}{2}$

4. Έστω η συνάρτηση $f(x)=(a-\frac{2}{3})x^3-(a+\frac{1}{2})x^2-10x+7$. Να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $\frac{3}{2}$. Για την τιμή αυτή του a να γίνει ο πίνακας μεταβολών της f.

ΘΕΜΑ ΓΕΝΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΔΕΣΜΗΣ

$D_f = \mathbb{R}$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με

$$f'(x)=(3a-2) \cdot x^2-(2a+1) \cdot x-10 \text{ και } f''(x)=2 \cdot (3a-2) \cdot x-(2a+1).$$

Για να παρουσιάζει καμπή στο $\frac{3}{2}$ αναγκαία (όχι ικανή) συνθήκη είναι

$$f''(\frac{3}{2})=0 \Leftrightarrow 2 \cdot (3a-2) \cdot \frac{3}{2}-(2a+1)=0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a=1.$$

Για $a=1$ είναι $f'(x)=x^2-3x-10$ με ρίζες -2 και 5 και $f''(x)=2x-3$. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών και ελέγχουμε αν η τιμή του a που προσδιορίστηκε είναι δεκτή.

x	$-\infty$	-2	$\frac{3}{2}$	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	-	○	+
$f''(x)$	-	-	○	+	+	
f						

T.M.

Σ.Κ.

T.E.

$$f(-2)=\frac{55}{3}$$

$$f(\frac{3}{2})=-\frac{41}{4}$$

$$f(5)=-\frac{233}{6}$$

Άρα η τιμή $a=1$ είναι δεκτή γιατί η f παρουσιάζει καμπή στο $\frac{3}{2}$.

5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2x^2}$, ορισμένη στο $\Delta = [\frac{3}{4}, +\infty)$.

α) Να δείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο Δ .

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(1, f(1))$ και να δείξετε ότι

$$e^{x-2x^2} \geq -\frac{3x}{e} + \frac{4}{e}, \text{ για κάθε } x \geq \frac{3}{4}.$$

α) Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο Δ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(x) = e^{x-2x^2} \cdot (x-2x^2)' = e^{x-2x^2} \cdot (1-4x)$.

Η f' είναι επίσης παραγωγίσιμη στο Δ ως σύνθεση παραγωγισίμων με

$$\begin{aligned} f''(x) &= (e^{x-2x^2})' \cdot (1-4x) + e^{x-2x^2} \cdot (1-4x)' = e^{x-2x^2} \cdot (1-4x) \cdot (1-4x) + e^{x-2x^2} \cdot (-4) = \\ &= e^{x-2x^2} \cdot [(1-4x)^2 - 4] = e^{x-2x^2} \cdot (1-4x-2) \cdot (1-4x+2) = e^{x-2x^2} \cdot (-4x-1) \cdot (-4x+3) = \\ &= e^{x-2x^2} \cdot (4x+1) \cdot (4x-3). \end{aligned}$$

Επειδή $e^{x-2x^2} > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τα πρόσημα και οι ρίζες της f'' είναι αυτά του τριωνύμου $(4x+1) \cdot (4x-3)$. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα κυρτότητας:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$(4x+1) \cdot (4x-3)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$	$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$

(Χρειαζόμαστε μόνο την τελευταία στήλη του παραπάνω πίνακα. Κανονικά δεν πρέπει να σχεδιάζουμε τις υπόλοιπες). Άρα η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $[\frac{3}{4}, +\infty)$.

β) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ , θα είναι και στο 1, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο $(1, f(1))$ θα είναι: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$.

$$\text{Όμως } f(1) = e^{1-2 \cdot 1^2} = e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ και } f'(1) = e^{1-2 \cdot 1^2} \cdot (1-4 \cdot 1) = -\frac{3}{e}.$$

$$\text{Άρα } \varepsilon: y - \frac{1}{e} = -\frac{3}{e} \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{3x}{e} + \frac{3}{e} + \frac{1}{e} \Leftrightarrow y = -\frac{3x}{e} + \frac{4}{e}.$$

Αφού η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $[\frac{3}{4}, +\infty)$, η C_f θα βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη ε στο $(1, f(1))$, με εξαίρεση το σημείο επαφής όπου οι τιμές της f και της ε θα είναι ίσες. Άρα $e^{x-2x^2} \geq -\frac{3x}{e} + \frac{4}{e}$, για κάθε $x \geq \frac{3}{4}$.

6. Δείξτε ότι ισχύει η ανίσωση $\ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$.

Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως βασική με $f'(x) = \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$. Η f' ως γνωστόν είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε η f είναι

κοίλη στο $(0, +\infty)$. Άρα κάθε εφαπτομένη ε της C_f , βρίσκεται πάντα «πάνω» από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής, όπου η f και η ε έχουν ίδια τιμή.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, 0)$, εύκολα βρίσκουμε ότι έχει εξίσωση $\varepsilon: y=x-1$, οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω είναι $\ln x \leq x-1$, για κάθε $x>0$, με την ισότητα μάλιστα να ισχύει μόνο αν $x=1$.

7. Δείξτε ότι ισχύει η ανίσωση $e^x \geq x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θα αποδείξουμε τη γνωστή ταυτότητα που έχουμε δείξει ήδη δύο φορές με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. και των ακροτάτων, αλλά αυτή τη φορά χρησιμοποιώντας την κυρτότητα και τη θέση της εφαπτομένης.

Η συνάρτηση $f(x)=e^x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως βασική με $f'(x)=e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η f' ως γνωστόν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Άρα κάθε εφαπτομένη ε της C_f , βρίσκεται πάντα «κάτω» από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής, όπου η f και η ε έχουν ίδια τιμή.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0, 1)$, εύκολα βρίσκουμε ότι έχει εξίσωση $\varepsilon: y=x+1$, οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω είναι $e^x \geq x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα μάλιστα να ισχύει μόνο αν $x=0$.

8. Αν το διάγραμμα της συνάρτησης $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$, $a \in \mathbb{R}^*$, παρουσιάζει δύο σημεία καμπής, δείξτε ότι $a^2 > \frac{8}{3}\beta$.

Η f ως πολυωνυμική είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ και $f''(x)=12x^2+6ax+2b$. Αφού η C_f έχει δύο σημεία καμπής συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ θα έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες. Επειδή όμως η εξίσωση αυτή είναι δευτεροβάθμια πολυωνυμική, θα είναι $\Delta > 0 \Leftrightarrow (6a)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 2b > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a^2 > \frac{8}{3}\beta$.

9. Αν f συνάρτηση τρεις φορές παραγωγίσιμη σε ανοικτό διάστημα Δ και υπάρχει $x_0 \in \Delta$, τέτοιο ώστε $f^{(3)}(x_0) \neq f''(x_0)=0$ (1), δείξτε ότι η f παρουσιάζει καμπή στο x_0 .

Αφού $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, υποθέτουμε ότι $f^{(3)}(x_0) > 0$ (παρόμοια ισχύουν αν $f^{(3)}(x_0) < 0$).

Ισχύει όμως $f^{(3)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0}$.

Γνωρίζουμε όμως ότι σε κάποια γειτονιά του x_0 η συνάρτηση παίρνει το πρόσημο του ορίου της στο x_0 . Άρα θα υπάρχει γειτονιά του x_0 , εντός του Δ , όπου η συνάρτηση $\frac{f''(x)}{x - x_0}$ θα έχει θετικό πρόσημο (αφού το όριό της είναι το $f^{(3)}(x_0) > 0$).

Αφού τώρα $\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$ (2), έχουμε ότι:

- Για $x < x_0$ είναι $x - x_0 < 0$ οπότε $f''(x) < 0$ (από (2))

- Για $x > x_0$ είναι $x - x_0 > 0$ οπότε $f''(x) > 0$ (από (2)).

Άρα $f''(x_0) = 0$, $f''(x) < 0$ για $x < x_0$ και $f''(x) > 0$ για $x > x_0$, οπότε η f παρουσιάζει καμπή στο x_0 .

3.8 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Έχοντας τη γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ και παρατηρώντας το ρόλο των ευθειών ε_1 , ε_2 και ε_3 , έχουμε ότι:

Όταν $x \rightarrow -\infty$ η C_f τείνει να συμπίψει με την ευθεία $\varepsilon_3: y=1$, δηλαδή ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

Όταν $x \rightarrow -1^-$ η C_f «ανεβαίνει» από τα αριστερά προς τα δεξιά και τείνει να συμπίσει με την ευθεία $\varepsilon_1: x=-1$, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$.

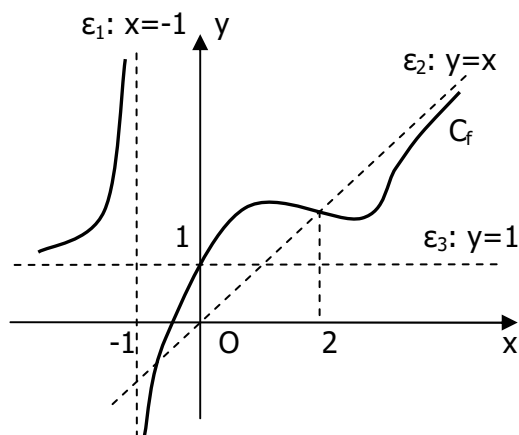
Όταν $x \rightarrow -1^+$ η C_f «κατεβαίνει» από τα δεξιά προς τα αριστερά και τείνει να συμπίσει με την ευθεία $\varepsilon_1: x=-1$, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$.

Όταν $x \rightarrow +\infty$ η C_f τείνει να συμπίσει με την ευθεία $\varepsilon_2: y=x$, οπότε η διαφορά $f(x)-x$ τείνει να γίνει 0, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$.

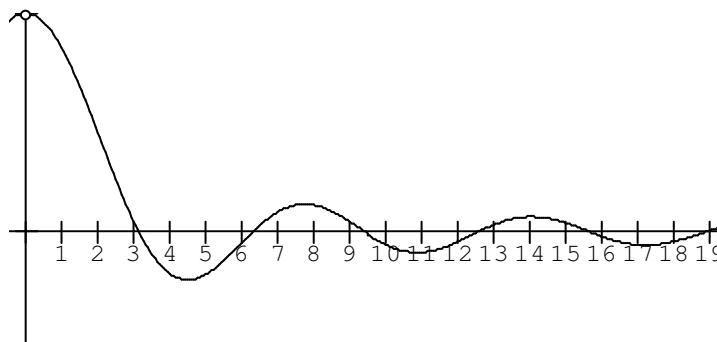
Ευθείες σαν τις ε_1 , ε_2 , ε_3 με τις οποίες τείνει να συμπίσει η C_f προς κάποια κατεύθυνση, λέγονται **ασύμπτωτες ευθείες της γραφικής παράστασης**.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Δεν είναι σωστό να πούμε ότι «ασύμπτωτη της C_f είναι η ευθεία την οποία πλησιάζει συνεχώς η γραφική παράσταση προς κάποια κατεύθυνση, χωρίς ποτέ να την τέμνει», καθώς η γραφική παράσταση μπορεί να τέμνει την ασύμπτωτη, όπως στο παραπάνω σχήμα που η C_f τέμνει την $y=x$ στο $(2, f(2))$.

Επίσης θα μπορούσε να τέμνει η C_f την ασύμπτωτη σε άπειρα σημεία, όπως στο παρακάτω σχήμα που έχουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ και στο οποίο



παρατηρούμε ότι η ευθεία $y=0$ (άξονας x') είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης στο $+\infty$, παρ' ότι η C_f την τέμνει στην κατεύθυνση του $+\infty$ άπειρες φορές.



Ασύμπτωτες ευθείες υπάρχουν τριών ειδών (βλέπε το 1ο σχήμα της παραγράφου):

- Πλάγιες, όπως η ε_2 : $y=x$,
- Οριζόντιες, όπως η ε_3 : $y=1$ και
- Κατακόρυφες, όπως η ε_1 : $x=-1$

Θα μπορούσαμε φυσικά να ορίσουμε μόνο δύο είδη ασυμπτώτων, πλάγιες- οριζόντιες (ένα είδος) και κατακόρυφες, μια που ως γνωστόν μια οριζόντια ευθεία $y=\beta$, είναι μερική περίπτωση μιας πλάγιας $y=\lambda x+\beta$, για $\lambda=0$.

Το γεγονός ότι μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε σε δύο είδη τις ασύμπτωτες ενισχύεται και από το ότι οι οριζόντιες και οι πλάγιες ασύμπτωτες αναζητούνται στην κατεύθυνση του $-\infty$ και του $+\infty$ και μπορούν να υπολογιστούν με την ίδια, ουσιαστικά, μέθοδο. Οι κατακόρυφες αναζητούνται στα σημεία ασυνέχειας x_0 μιας συνάρτησης και στα πεπερασμένα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού της. Για τον προσδιορισμό τους χρησιμοποιούμε διαφορετική μέθοδο.

A. ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ $y=\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$

Αναζητείται στο $-\infty$ και στο $+\infty$

Ορισμός: Μια ευθεία $y=\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης συνάρτησης f αν

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \beta \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \beta$$

Μέθοδος προσδιορισμού οριζόντιας ασύμπτωτης

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για να υπάρχει πιθανότητα η C_f να έχει οριζόντια ασύμπτωτη, βασική προϋπόθεση είναι να έχει το πεδίο ορισμού της ανοικτό άκρο $-\infty$ ή $+\infty$.

- Αν το πεδίο ορισμού της f έχει ανοικτό άκρο $-\infty$, υπολογίζουμε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Αν

αυτό είναι $\left\{ \begin{array}{l} \beta \in \mathbb{R}, \text{ τότε η } C_f \text{ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο } -\infty \text{ την } y=\beta \\ \text{αλλιώς, η } C_f \text{ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο } -\infty \end{array} \right.$

Ανάλογη εργασία εφαρμόζουμε και στο $+\infty$, αν το πεδίο ορισμού της f έχει ανοικτό άκρο $+\infty$.

Β. ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ $y=\lambda x+\beta$ (γενικά), $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ Αναζητείται στο $-\infty$ και στο $+\infty$

Ορισμός: Μια ευθεία $y=\lambda x+\beta$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης συνάρτησης f αν

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Μια ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f **αν και μόνο αν**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$$

ή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$$

Μέθοδος προσδιορισμού ασύμπτωτης $y=\lambda x+\beta$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για να υπάρχει πιθανότητα η C_f να έχει τέτοια ασύμπτωτη, βασική προϋπόθεση είναι να έχει το πεδίο ορισμού της ανοικτό άκρο $-\infty$ ή $+\infty$.

ΒΗΜΑ 1

Αν το πεδίο ορισμού της f έχει ανοικτό άκρο $-\infty$, υπολογίζουμε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Αν αυτό είναι

- $\lambda \neq 0$, υπάρχει περίπτωση η C_f να έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα
- $\lambda = 0$, τότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ (αλλά υπάρχει περίπτωση να έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$) και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα
- $\pm \infty$ ή **δεν υπάρχει**, τότε η C_f δεν έχει πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ (γενικά ασύμπτωτη μορφής $y=\lambda x+\beta$)

ΒΗΜΑ 2

Με την προϋπόθεση ότι στο προηγούμενο βήμα βρήκαμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$,

υπολογίζουμε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x]$. Αν αυτό είναι

- $\beta \in \mathbb{R}$, τότε η C_f **έχει ασύμπτωτη** στο $-\infty$ την ευθεία $y=\lambda x+\beta$
- αλλιώς**, η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$

Ανάλογη εργασία εφαρμόζουμε και στο $+\infty$, αν το πεδίο ορισμού της f έχει ανοικτό άκρο $+\infty$.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ▼

- Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι η αναζήτηση των πλαγίων ασυμπτώτων γίνεται χωριστά στο $-\infty$ και στο $+\infty$. Η πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ υπάρχει μόνο αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}^*$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$ (όμοια και για το $+\infty$). Η πλάγια ασύμπτωτη (αν υπάρχει) είναι μοναδική σε κάθε κατεύθυνση.
- Κατά την αναζήτηση των πλαγίων ασυμπτώτων στα $\pm \infty$, θα προκύψει κάποια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
 - Η C_f να μην έχει πλάγιες ασύμπτωτες ούτε στο $-\infty$ ούτε στο $+\infty$.
 - Η C_f να έχει πλάγια ασύμπτωτη στη μία από τις δύο αυτές κατευθύνσεις, αλλά όχι στην άλλη.
 - Η C_f να έχει διαφορετικές πλάγιες ασύμπτωτες στα $-\infty$ και $+\infty$.
 - Η C_f να έχει την ίδια πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$.
- Η αναζήτηση της οριζόντιας ασύμπτωτης είναι μερική περίπτωση της μεθόδου αναζήτησης της πλάγιας ασύμπτωτης. Παρατηρείστε ότι αν κατά την αναζήτηση της πλάγιας ασύμπτωτης π.χ. στο $-\infty$, προκύψει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ και συνεχίσουμε στο επόμενο βήμα που αναφέραμε στη μεθοδολογία των πλαγίων ασυμπτώτων, θα πρέπει να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 0 \cdot x]$, δηλαδή το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, οπότε προχωρώντας, αναζητούμε στην ουσία οριζόντια ασύμπτωτη.
- Η οριζόντια ασύμπτωτη (αν υπάρχει) είναι μοναδική σε κάθε κατεύθυνση. Μπορεί φυσικά στα $-\infty$ και $+\infty$ να προκύψουν δύο διαφορετικές οριζόντιες ασύμπτωτες.
- Δεν είναι δυνατόν στην ίδια κατεύθυνση ($-\infty$ ή $+\infty$), να υπάρχει και οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη.** Έτσι αν π.χ. στο $+\infty$ η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη, δεν αναζητάμε στο $+\infty$ οριζόντια. Άρα οι πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες είναι συνολικά το πολύ δύο.

Γ. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ $x=x_0$

Ορισμός: Μια ευθεία $x=x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης συνάρτησης f αν

ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ είναι $-\infty$ ή $+\infty$.

Αναζητείται μόνο στα σημεία ασυνέχειας x_0 και στα πεπερασμένα ανοικτά άκρα **των διαστημάτων** του πεδίου ορισμού της

Μέθοδος προσδιορισμού κατακόρυφης ασύμπτωτης

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για να υπάρχει πιθανότητα η C_f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, βασική προϋπόθεση είναι να έχει σημείο ασυνέχειας x_0 ή το πεδίο ορισμού της να έχει διάστημα με πεπερασμένο ανοικτό άκρο, καθώς αν είναι συνεχής και το πεδίο ορισμού

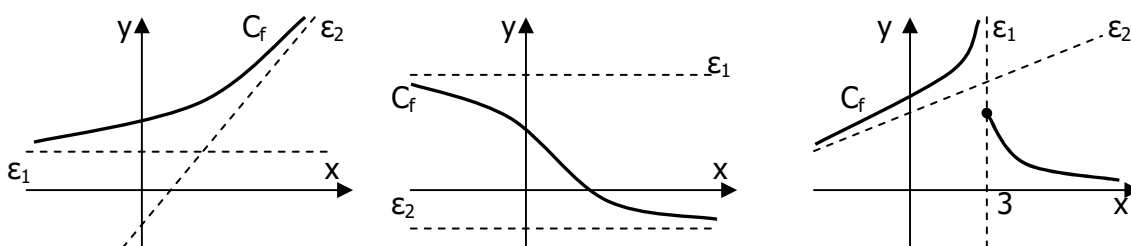
της δεν έχει διάστημα με πεπερασμένο ανοικτό άκρο, τότε σε κάθε x_0 θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$, οπότε το όριο αυτό δεν μπορεί να είναι $-\infty$ ή $+\infty$.

- Αναζητούμε τα σημεία ασυνέχειας και τα πεπερασμένα ανοικτά άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της. Έστω x_0 ένα τέτοιο.
- Υπολογίζουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ή τουλάχιστον ένα από τα $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, σε κάθε τέτοιο x_0 . Αν κάποιο από αυτά είναι $-\infty$ ή $+\infty$, τότε η αντίστοιχη ευθεία $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ▽

- Όπως αναφέραμε και παραπάνω δεν είναι υποχρεωτικό τα πλευρικά όρια στο x_0 να είναι ίσα μεταξύ τους (και τα δύο $-\infty$ ή και τα δύο $+\infty$) για να υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Το αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$, το μόνο που επηρεάζει είναι την «κατεύθυνση» της γραφικής παράστασης «κοντά» στο x_0 .
- Η αναζήτηση της κατακόρυφης ασύμπτωτης δεν είναι απαραίτητη αν η συνάρτηση είναι συνεχής και το πεδίο ορισμού της δεν έχει διαστήματα με πεπερασμένα ανοικτά άκρα (αφού δικαιολογήσουμε τη συνέχεια).
- Τέλος, όπως είναι προφανές, η αναζήτηση κατακόρυφης ασύμπτωτης δεν έχει καμία σχέση με την αναζήτηση πλαγίων ή οριζοντίων ασυμπτώτων.
- Μια γραφική παράσταση μπορεί να έχει από καμία (όπως στην $f(x)=x^2-1$) έως άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες (όπως στην $f(x)=\epsilon\phi x$).

ΣΧΗΜΑΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΩΝ



Οριζόντια ασύμπτωτη η ϵ_1 στο $-\infty$. Πλάγια ασύμπτωτη η ϵ_2 στο $+\infty$.	Οριζόντιες ασύμπτωτες οι ϵ_1 στο $-\infty$ και ϵ_2 στο $+\infty$.	Πλάγια ασύμπτωτη η ϵ_2 στο $-\infty$. Οριζόντια ασύμπτωτη ο x' στο $+\infty$. Κατακόρυφη ασύμπτωτη η $\epsilon_1: x=3$ (από αριστερά του 3).
---	--	---

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΩΝ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Για να προσδιορίσουμε τις ασύμπτωτες μιας γραφικής παράστασης συνάρτησης f ακολουθούμε **συνήθως** την παρακάτω πορεία (χωρίς αυτή να είναι δεσμευτική):

- Αν μας ενδιαφέρουν οι **κατακόρυφες ασύμπτωτες**:

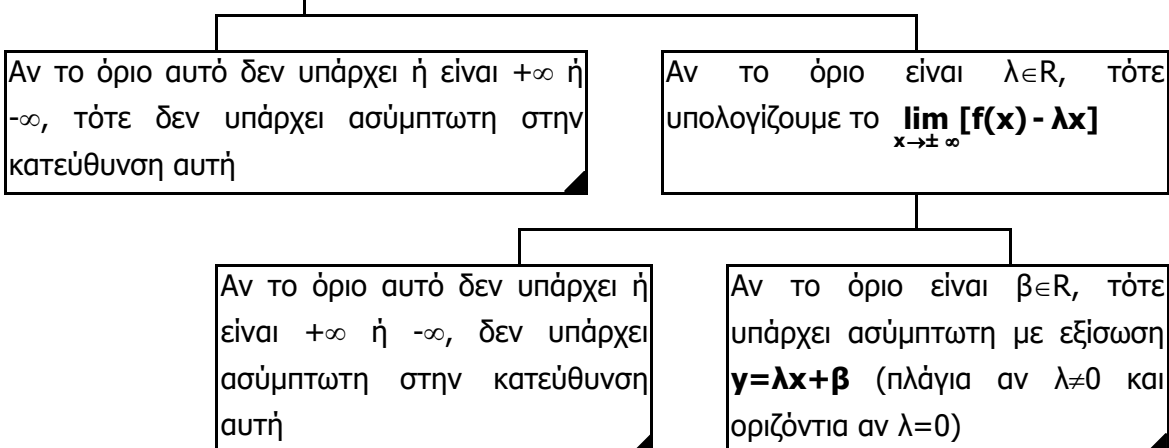
Προσδιορίζουμε τα σημεία ασυνέχειας της f (αν υπάρχουν) και τα ανοικτά πεπερασμένα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (αν μας ενδιαφέρουν οι κατακόρυφες ασύμπτωτες). Έστω x_0 ένα τέτοιο.

Προσδιορίζουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ή τουλάχιστον ένα από τα $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, σε

κάθε x_0 σημείο ασυνέχειας ή πεπερασμένο ανοικτό άκρο διαστήματος του πεδίου ορισμού (αν υπάρχει). Αν κάποιο από αυτά είναι $-\infty$ ή $+\infty$, τότε η $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη. Αλλιώς δεν υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

- Αν μας ενδιαφέρουν οι **ασύμπτωτες μορφής $y=\lambda x+\beta$** :

Βρίσκουμε το $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}$ (η εργασία που περιγράφεται γίνεται χωριστά στα $-\infty, +\infty$)



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ (από τις παρατηρήσεις αυτές στο σχολικό βιβλίο υπάρχουν μόνο η 1. και η 2.γ) όσον αφορά στην πλάγια)

1. Αν f **πολυωνυμική βαθμού ≥ 2** , η C_f δεν έχει κανενός είδους ασύμπτωτες.

2. Αν f **ρητή συνάρτηση** μορφής $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ τότε:

α) Αν **βαθμ $A(x)$ -βαθμ $B(x)$ < 1**, τότε η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη (γιατί $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$) και μάλιστα την ίδια στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

β) Αν **βαθμ $A(x)$ -βαθμ $B(x)$ = 1**, τότε η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη.

γ) Αν **βαθμ $A(x)$ -βαθμ $B(x)$ > 1**, τότε η C_f δεν έχει ούτε οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη.

δ) Η C_f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες μόνο στις ρίζες του $B(x)$, εφόσον το $B(x)$ δεν απλοποιείται με το $A(x)$.

3. Τέλος υπενθυμίζουμε ότι:

- Οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες αναζητούμε στα $-\infty$ και $+\infty$, εφόσον το πεδίο ορισμού έχει τέτοιο ανοικτό άκρο
- Κατακόρυφες ασύμπτωτες αναζητούμε στα σημεία ασυνέχειας και στα πεπερασμένα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού (εφόσον υπάρχουν).

ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

Σε πολλά όρια που καταλήγουν σε α.μ. $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$ δεν είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε

την κλασσική μεθοδολογία που περιγράψαμε στο κεφάλαιο των ορίων. ίσως όμως μπορούμε να εφαρμόσουμε ένα από τα δύο παρακάτω θεωρήματα που είναι γνωστά με το όνομα **κανόνες De l' Hospital** (αν φυσικά ισχύουν οι προϋποθέσεις τους):

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (α.μ. $\frac{0}{0}$)

Αν $\xi \in \bar{R}$ και Δ_ξ γειτονιά του ξ και

- f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο Δ_ξ
- $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0$ και
- υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ πεπερασμένο ή άπειρο

$$\text{TOTE } \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (α.μ. $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$)

Αν $\xi \in \bar{R}$ και Δ_ξ γειτονιά του ξ και

- f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο Δ_ξ
- $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και
- υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ πεπερασμένο ή άπειρο

$$\text{TOTE } \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ▽

1. Οι παραπάνω κανόνες εφαρμόζονται και σε πλευρικά όρια.
2. Οι f και g πρέπει να είναι παραγωγίσιμες σε γειτονιά του ξ και όχι μόνο στο ξ .

3. Αν το $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει, αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι δεν υπάρχει και το αρχικό όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)}$. Απλά θα χρειαστεί να το υπολογίσουμε χωρίς τους κανόνες του De l'Hospital, μια που δεν μπορούμε στην περίπτωση αυτή να τους εφαρμόσουμε.
4. Αν το $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ καταλήξει πάλι σε α.μ. $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$ και οι f', g' ικανοποιούν τις προϋποθέσεις κάποιου από τα δύο παραπάνω θεωρήματα, μπορούμε να εφαρμόσουμε πάλι κανόνα De l'Hospital για τον υπολογισμό του $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ κ.τ.λ. Έτσι μπορεί να χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε διαδοχικές ισότητες $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots$, έως ότου προσδιορίσουμε το όριο.
5. Άλλες α.μ. όπως οι $0 \cdot (\pm \infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$ κ.τ.λ. μπορούν να αντιμετωπισθούν ίσως με τους κανόνες De l'Hospital, αν καταφέρουμε να φέρουμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις σε κατάλληλες μορφές, ώστε να προκύπτουν α.μ. $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$ (βλέπε παράδειγμα 3 παρακάτω).
6. Τέλος να τονίσουμε ότι οι κανόνες De l'Hospital, δεν μας λύνουν όλα τα προβλήματα με τα όρια, καθώς αφορούν συγκεκριμένες α.μ. (για παράδειγμα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε όριο που καταλήγει σε α.μ. $\frac{a}{0}$) και επιπλέον μπορεί ένα όριο να υπολογίζεται ευκολότερα με την κλασσική μεθοδολογία παρά με τους κανόνες De l'Hospital.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

- 1.** Να προσδιοριστούν οι ασύμπτωτες ευθείες (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{|x|^3}{(x-1)^2}$.

$$D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ως πηλίκo συνεχών, οπότε δεν έχει σημείο ασυνέχειας.

Όμως το πεδίο ορισμού της έχει διάστημα με πεπερασμένο ανοικτό άκρο, οπότε εκεί θα ερευνήσουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες.

- Έρευνα για κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|^3}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} |x|^3 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}.$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 1} |x|^3 = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0 \text{ με } (x-1)^2 > 0 \text{ για } x \neq 1.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$, οπότε η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

- Έρευνα για ασύμπτωτες μορφής $y=\lambda x+\beta$

$$\begin{aligned} \underline{\text{ΣΤΟ } +\infty}: \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{|x|^3}{(x-1)^2}}{x} \stackrel{\text{θεωρούμε } x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x \cdot (x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x \cdot (x^2 - 2x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = \mathbf{1} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{|x|^3}{(x-1)^2} - x \right] \stackrel{\text{θεωρούμε } x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x \cdot (x-1)^2}{(x-1)^2} = \dots =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \mathbf{2} \in \mathbb{R}.$$

Άρα η ευθεία $y=1 \cdot x+2$, δηλαδή $y=x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\begin{aligned} \underline{\text{ΣΤΟ } -\infty}: \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{|x|^3}{(x-1)^2}}{x} \stackrel{\text{θεωρούμε } x<0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x \cdot (x-1)^2} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x \cdot (x^2 - 2x + 1)} = \dots = \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = \mathbf{-1} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-1) \cdot x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{|x|^3}{(x-1)^2} + x \right] \stackrel{\text{θεωρούμε } x<0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + x \cdot (x-1)^2}{(x-1)^2} = \dots =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = -2 \in \mathbb{R}$$

Άρα η ευθεία $y = -1 \cdot x - 2$, δηλαδή $y = -x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

2. Να προσδιοριστούν οι ασύμπτωτες ευθείες (αν υπάρχουν) των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων: α) $f(x) = \frac{x}{e^x}$ και β) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

α) $f(x) = \frac{x}{e^x}$, $D_f = \mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως ηλίκο συνεχών και το πεδίο ορισμού της δεν έχει διάστημα με ανοικτό πεπερασμένο άκρο, οπότε η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

- Έρευνα για ασύμπτωτες μορφής $y = \lambda x + \beta$

Στο $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ με } e^x > 0. \text{ Άρα η } C_f \text{ δεν έχει ασύμπτωτη μορφής } y = \lambda x + \beta \text{ στο } -\infty.$$

Στο $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ (άρα μπορεί να έχει οριζόντια ασύμπτωτη)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\text{α.μ. } \frac{+\infty}{+\infty} \text{ D.I. (*)}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \in \mathbb{R}$$

Άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ στο $+\infty$.

(*) ΣΗΜΕΙΩΣΗ: D.I. στο εξής θα σημαίνει ότι εφαρμόζουμε κάποιον από τους κανόνες του De l'Hospital.

β) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$. Η f είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της το οποίο έχει

ανοικτό πεπερασμένο άκρο το 0, όπου θα ερευνήσουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες..

- Έρευνα για κατακόρυφες ασύμπτωτες (στο 0)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\text{α.μ. } \frac{0}{0} \text{ D.I.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1 \in \mathbb{R}, \text{ οπότε η } C_f \text{ δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.}$$

- Έρευνα για ασύμπτωτες μορφής $y = \lambda x + \beta$

Στο $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = (0 - 1) \cdot 0 = 0 \in \mathbb{R}$

(άρα μπορεί να έχει οριζόντια ασύμπτωτη)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = (0 - 1) \cdot 0 = 0 \in \mathbb{R}$$

άρα η C_f δέχεται στο $-\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την $y=0$.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Στο } +\infty: \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} \stackrel{\text{α.μ. } \frac{+\infty}{+\infty} \text{ D.I.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\text{α.μ. } \frac{+\infty}{+\infty} \text{ D.I.}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty \text{ οπότε η } C_f \text{ δεν έχει ασύμπτωτη μορφής } y=\lambda x + \beta \text{ στο } +\infty. \end{aligned}$$

3. Να υπολογιστούν τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x \cdot \ln x)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\eta \mu x}), x > 0$

δ) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}, x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

ε) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{7x^7 - 8x^5 - x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

ζ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\eta \mu^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$

α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x \cdot \ln x)$

Μορφή $0 \cdot (-\infty)$

Έστω $f(x) = \eta \mu x \cdot \ln x$. $D_f = (0, +\infty)$

Το όριο αυτό, όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε καταλήγει σε α.μ. $0 \cdot (-\infty)$, μορφή που δεν αντιμετωπίζεται απ' ευθείας με De l' Hospital. Για το λόγο αυτό θα προσπαθήσουμε να μετασχηματίσουμε τον τύπο της f , ώστε το όριό της να καταλήξει σε α.μ. $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$.

Για $x \in (0, \pi)$ έχουμε $f(x) = \frac{\ln x}{\frac{1}{\eta \mu x}}$.

Έτσι έχουμε:

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Όταν πρόκειται να μετασχηματίσουμε τον τύπο της f και αυτός περιέχει $\ln x$ όπως εδώ, συνήθως «κρατάμε» το $\ln x$ στον αριθμητή, μια που έχει «εύκολη» παράγωγο $\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\eta \mu x}} \stackrel{\text{α.μ. } \frac{-\infty}{+\infty} \text{ D.I.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\eta \mu x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\sigma \upsilon \nu x}{\eta \mu^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\eta \mu^2 x}{x \cdot \sigma \upsilon \nu x} \right) \stackrel{\text{πολ / ζουμε και δαιρούμε με } x}{=} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x \cdot \eta \mu^2 x}{x^2 \cdot \sigma \upsilon \nu x} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma \upsilon \nu x} = -0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sigma \upsilon \nu 0} = -0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = 0. \end{aligned}$$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$

Μορφή $(+\infty) - (+\infty)$

Έστω $f(x) = x - \ln x$. $D_f = (0, +\infty)$.

Επειδή το όριο καταλήγει σε α.μ. $(+\infty) - (+\infty)$, μετασχηματίζουμε τον τύπο της f .

1ος τρόπος

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε τον τύπο της f με x . Έτσι

$$f(x) = x \cdot \frac{x - \ln x}{x} = x \cdot \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right), \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) \right] = (+\infty) \cdot \left(1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}\right).$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{α.μ. } \frac{+\infty}{+\infty} \text{ D.I.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot (1 - 0) = +\infty.$$

2ος τρόπος

$$\text{Είναι } f(x) = \ln e^x - \ln x = \ln \frac{e^x}{x} = \ln u \text{ με } u = \frac{e^x}{x}.$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\text{α.μ. } \frac{+\infty}{+\infty} \text{ D.I.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty.$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\eta \mu x}), x > 0$$

Μορφή 0^0

$$\text{Έστω } f(x) = x^{\eta \mu x}. D_f = (0, +\infty).$$

Επειδή το όριο καταλήγει σε α.μ. 0^0 , μετασχηματίζουμε τον τύπο της f με βάση την ιδιότητα $x = e^{\ln x}$.

$$f(x) = x^{\eta \mu x} = e^{\ln x^{\eta \mu x}} = e^{\eta \mu x \cdot \ln x} = e^u, \text{ όπου } u = \eta \mu x \cdot \ln x. \text{ Όμως } \lim_{x \rightarrow 0^+} u = 0 \text{ από α) ερώτημα.}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = e^0 = 1.$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}, -1 < x \neq 0$$

Μορφή 1^∞

$$\text{Έστω } f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}. D_f = (-1, 0) \cup (0, +\infty).$$

Επειδή το όριο καταλήγει σε α.μ. 1^∞ , μετασχηματίζουμε τον τύπο της f με βάση την ιδιότητα $x = e^{\ln x}$.

$$f(x) = e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^u, \text{ όπου } u = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{\text{α.μ. } \frac{0}{0} \text{ D.I.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} \cdot (1+x)'}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{u \rightarrow 1} e^u = e^1 = e.$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{7x^7 - 8x^5 - x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

Έστω $f(x) = \frac{7x^7 - 8x^5 - x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$. Με τη βοήθεια των πιθανών ακεραίων ριζών, βρίσκουμε

ότι ο παρονομαστής έχει ρίζες -1 και 1 . Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) & \stackrel{\text{α.μ. } \frac{0}{0} \text{ D.I.}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(7x^7 - 8x^5 - x + 2)'}{(x^3 - x^2 - x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{49x^6 - 40x^4 - 1}{3x^2 - 2x - 1} \stackrel{\text{α.μ. } \frac{0}{0}}{=} \\ & = \lim_{x \rightarrow 1^+} (49x^6 - 40x^4 - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{3x^2 - 2x - 1}. \end{aligned}$$

Το $3x^2 - 2x - 1$ έχει ρίζες $-\frac{1}{3}$ και 1 και ο πίνακας προσήμων του στο $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ είναι:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$3x^2 - 2x - 1$	+	+	ϕ	-	+

Άρα για $x > 1$ είναι $3x^2 - 2x - 1 > 0$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{3x^2 - 2x - 1} = +\infty$.

Επομένως είναι τελικά

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (49x^6 - 40x^4 - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{3x^2 - 2x - 1} = 8 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η παραπάνω άσκηση επειδή αφορά στο όριο ρητής συνάρτησης και καταλήγει σε α.μ. $\frac{0}{0}$, θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί και με την κλασσική μεθοδολογία που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο των ορίων (να παραγοντοποιήσουμε αριθμητή και παρονομαστή, ώστε να προκύψει κοινός παράγοντας το $x-1$ κ.τ.λ.).

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\eta \mu^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\text{Έστω } f(x) = \frac{1}{\eta \mu^2 x} - \frac{1}{x^2}.$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} \eta \mu x \neq 0 \\ x \neq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \neq k\pi \\ x \neq 0 \end{matrix} \right\} = \{ x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi \} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}, \text{ γιατί το } 0$$

συμπεριλαμβάνεται στους αριθμούς $k\pi$, όταν $k=0$.

Επειδή το όριο καταλήγει σε α.μ. $(+\infty) - (+\infty)$, μετασχηματίζουμε τον τύπο της f .

$$f(x) = \frac{1}{\eta \mu^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \eta \mu^2 x}{x^2 \cdot \eta \mu^2 x} = \frac{x^2 - \eta \mu^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\eta \mu^2 x}$$

Επειδή αν πάρουμε το όριο στο 0 της f με τη συγκεκριμένη μορφή, καταλήγουμε πάλι σε α.μ., συνεχίζουμε να μετασχηματίζουμε τον τύπο της, πολλαπλασιάζοντας και αριθμητή και παρονομαστή με x^2 . Έτσι:

$$f(x) = \frac{x^2 - \eta\mu^2 x}{x^4} \cdot \frac{x^2}{\eta\mu^2 x} \quad (1).$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\eta\mu^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2} = \frac{1}{1^2} = 1 \quad (2) \text{ και}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \eta\mu^2 x}{x^4} &\stackrel{\text{α.μ. } \frac{0}{0} \text{ D.I.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - \eta\mu^2 x)'}{(x^4)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \eta\mu 2x}{4x^3} \stackrel{\text{α.μ. } \frac{0}{0} \text{ D.I.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - \eta\mu 2x)'}{(4x^3)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\sigma\upsilon\nu 2x}{12x^2} \stackrel{\text{α.μ. } \frac{0}{0} \text{ D.I.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - 2\sigma\upsilon\nu 2x)'}{(12x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\eta\mu 2x}{24x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{6x} \stackrel{\text{α.μ. } \frac{0}{0} \text{ D.I.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu 2x)'}{(6x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sigma\upsilon\nu 2x}{6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{3} = \frac{\sigma\upsilon\nu 0}{3} = \frac{1}{3} \quad (3). \end{aligned}$$

Από (1), (2) και (3) έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$.

3.9 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ένας από τους βασικούς στόχους των γνώσεων που αποκτήσαμε μέχρι τώρα στην ανάλυση, είναι η μελέτη και η χάραξη οποιασδήποτε συνάρτησης f . Η μελέτη της f επιτυγχάνεται με τα 5 πρώτα από τα βήματα που περιγράφονται παρακάτω. Το 6ο βήμα είναι η σχεδίαση της γραφικής παράστασης:

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- 1ο βήμα** Προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της, το σύνολο όπου είναι συνεχής και το σύνολο όπου είναι παραγωγίσιμη.
Εντοπίζουμε (συνήθως νοητά) τα σημεία ασυνέχειας (αν υπάρχουν) και τα πεπερασμένα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού (αν υπάρχουν), μια που εκεί θα ερευνήσουμε για την ύπαρξη κατακόρυφων ασυμπτωτών.
- 2ο βήμα** Αναζητούμε συμμετρίες του διαγράμματος της f , δηλαδή εξετάζουμε αν η f είναι άρτια, περιττή ή περιοδική.
Το βήμα αυτό δεν είναι πάντα απαραίτητο, ακόμα και αν το διάγραμμα της f έχει τέτοιες συμμετρίες.
- 3ο βήμα** Προσδιορίζουμε τις δύο πρώτες παραγώγους της f , f' και f'' και βρίσκουμε τις ρίζες και τα πρόσημά τους.
Ο προσδιορισμός των ριζών και των προσήμων αυτών μπορεί στο βήμα αυτό να παραλειφθεί και να παρουσιάσουμε τις ρίζες και τα πρόσημά τους κατευθείαν στον πίνακα μεταβολών που θα κατασκευάσουμε στη συνέχεια, χωρίς ιδιαίτερες επεξηγήσεις, αν ο προσδιορισμός των ριζών και των προσήμων κρίνεται «εύκολος».
- 4ο βήμα** Προσδιορίζουμε τις ασύμπτωτες ευθείες της γραφικής παράστασης (αν υπάρχουν) και τα όριά της στα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού.
- 5ο βήμα** Κατασκευάζουμε τον **πίνακα μεταβολών** της f , στον οποίο παρουσιάζονται:
- Η μονοτονία και τα ακρότατα της f (από τα πρόσημα της f' , προσδιορίζοντας και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων).
 - Η κυρτότητα και τα σημεία καμπής (από τα πρόσημα της f'' , προσδιορίζοντας και τις συντεταγμένες των σημείων καμπής).
 - Τα όρια της f στα ανοικτά άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού και στα σημεία ασυνέχειας.
- Γράφουμε τα συμπεράσματά μας σχετικά με μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμπής.

x	$\longleftarrow D_f \longrightarrow$
$f'(x)$	
$f''(x)$	
f	

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ**6ο βήμα**

- Κατασκευάζουμε, αν είναι απαραίτητο, έναν πίνακα τιμών για κάθε ασύμπτωτη, ο οποίος θα βοηθήσει στη χάραξή της.
- Κατασκευάζουμε, αν είναι απαραίτητο, έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης.
- Τέλος χαράσσουμε τη γραφική παράσταση C_f , ακολουθώντας την εξής σειρά:
 - Οριοθετούμε (αν χρειάζεται) στον άξονα x το πεδίο ορισμού, χαράσσοντας διακεκομμένες κατακόρυφες ευθείες στα πεπερασμένα ανοικτά άκρα των διαστημάτων του.
 - Θέτουμε στους άξονες όλες τις τιμές των x και y που προσδιορίστηκαν κατά τη μελέτη, καθώς και αυτές που χρησιμοποιήσαμε στους πίνακες τιμών που αναφέραμε παραπάνω και προσδιορίζουμε τα αντίστοιχα σημεία.
 - Χαράσσουμε τις ασύμπτωτες ευθείες (αν υπάρχουν).
 - Τέλος χαράσσουμε τη C_f , προσέχοντας να συμφωνεί η χάραξη με τα αποτελέσματα της μελέτης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν μας ζητήσουν μόνο τη μελέτη της συνάρτησης (και όχι τη γραφική παράσταση), τότε εκτελούμε μόνο τα 5 πρώτα βήματα.
2. Η έρευνα για συμμετρίες βοηθά, γιατί μας επιτρέπει να περιορίσουμε τη μελέτη μας μόνο σε ένα κατάλληλο υποσύνολο του D_f , αλλά παρ' όλα αυτά να είμαστε σε θέση να χαράξουμε ολόκληρη τη γραφική παράσταση. Έτσι αν για παράδειγμα μια συνάρτηση ορισμένη στο $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ είναι άρτια, μπορούμε να κάνουμε τη μελέτη μόνο στο $(2, +\infty)$, να χαράξουμε εκεί τη γραφική παράσταση και στη συνέχεια τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $y'y$, καθώς όπως γνωρίζουμε μια άρτια συνάρτηση έχει γραφική παράσταση με άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν, θα αριθμούμε τα βήματα της μελέτης με την αρίθμηση που αναφέραμε παραπάνω, για την καλύτερη κατανόησή τους. Εάν υπερπηδήσουμε κάποιο βήμα, θα σημαίνει ότι στη συγκεκριμένη άσκηση δεν χρειάζεται (π.χ. μπορεί να είναι προφανές ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν έχει συμμετρίες). Επίσης αν δεν αναφερόμαστε σε κάποιο είδος ασυμπτώτων, αυτό θα σημαίνει ότι δεν υπάρχουν τέτοιες.

Πέραν πάντως των λυμένων παραδειγμάτων, καλό θα είναι να αποφεύγεται η αρίθμηση των βημάτων που ακολουθούμε.

1. Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=x^3-x^2$.

1. $D_f = \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική (οπότε δεν θα αναζητήσουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες)

3. $f'(x)=3x^2-2x$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x \cdot (3x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\frac{2}{3}$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f''(x)=6x-2$. Ρίζα το $\frac{1}{3}$

4. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \end{array} \right\}$ (Άρα δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες)

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \end{array} \right\}$ (Άρα δεν υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες)

5. Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
f'(x)	+	○	−	−	○	+
f''(x)	−		−	○	+	+
f						
	$-\infty$	T.μ.	Σ.Κ.	T.Ε.	$+\infty$	
		0	$-\frac{2}{27}$	$-\frac{4}{27}$		

$$f(0) = \dots = 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \dots = -\frac{2}{27}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \dots = -\frac{4}{27}$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, 0]$ και $[\frac{2}{3}, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο

$$[0, \frac{2}{3}].$$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 0 το 0 και τοπικό ελάχιστο στο $\frac{2}{3}$ το $-\frac{4}{27}$.

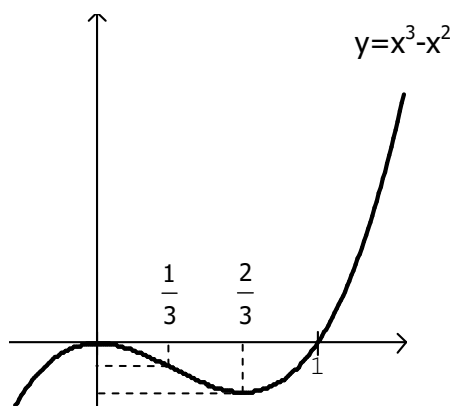
Η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, \frac{1}{3}]$ και τα κοίλα άνω στο $[\frac{1}{3}, +\infty)$.

Η C_f έχει σημείο καμπής το $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27})$.

6. Ένας πίνακας τιμών για την f είναι ο

x	-1	1
y	-2	0

Η γραφική παράσταση της f είναι (στη χάραξή της εκτός των σημείων του παραπάνω πίνακα τιμών βοηθούν και τα ακρότατα και σημεία καμπής):



(Για να μπορέσουμε να μεγεθύνουμε τη γραφική παράσταση, το σημείο $(-1, -2)$ δεν τοποθετήθηκε σ' αυτήν, καθώς και οι τιμές στα $1/3$ και $2/3$).

2. Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$.

1. $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$. Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbb{R} - \{2\}$ ως πηλίκο παραγωγισίμων. (Πεπερασμένο ανοικτό άκρο διαστήματος του D_f είναι το 2).

3. $f'(x) = \dots = -\frac{5}{(x-2)^2}$, προφανώς $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2\}$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{2\}$ ως ρητή με $f''(x) = \dots = \frac{10 \cdot (x-2)}{(x-2)^4} = \frac{10}{(x-2)^3}$.

Επειδή ο αριθμητής είναι θετικός η $f''(x)$ δεν μηδενίζεται και τα πρόσημά της είναι τα πρόσημα του $(x-2)^3$, δηλαδή του $x-2$.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$

Άρα η C_f δέχεται οριζόντια ασύμπτωτη με εξίσωση $y=2$ (οπότε δεν υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες).

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x+1) \cdot \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = 5 \cdot (-\infty) = -\infty \text{ γιατί } x-2 < 0 \text{ για } x < 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+1) \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = 5 \cdot (+\infty) = +\infty \text{ γιατί } x-2 > 0 \text{ για } x > 2.$$

Άρα η C_f δέχεται κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=2$.

5. Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

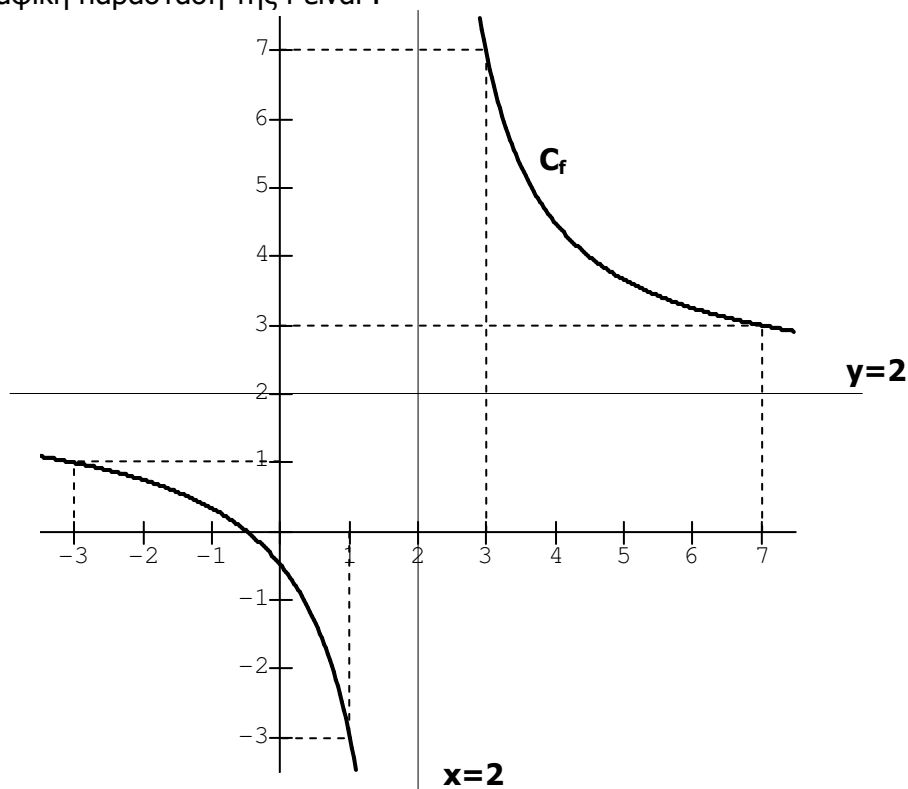
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f''(x)$	-		+
f			
	2	$-\infty$ $+\infty$	2

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, 2)$ και στο $(2, +\infty)$, δεν παρουσιάζει ακρότατα, είναι κοίλη στο $(-\infty, 2)$ και κυρτή στο $(2, +\infty)$ ενώ η C_f δεν έχει σημεία καμψής.

6. Ένας πίνακας τιμών για την f είναι ο

x	-3	$-\frac{1}{2}$	0	1	3	7
y	1	0	$-\frac{1}{2}$	-3	7	3

Η γραφική παράσταση της f είναι :



3. Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

1. $D_f = [0, +\infty)$.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Συνέχεια στο 0: $f(0)=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{α.μ. } \frac{-\infty}{+\infty} \text{ D.I.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής και στο 0.

Έτσι η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Παραγωγισιμότητα στο 0: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \notin \mathbb{R}.$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, οπότε **είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.**

3. Στο $(0, +\infty)$ είναι $f'(x) = (x \cdot \ln x)' = \ln x + 1$

$$\text{Έστω } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

$$\text{Έστω } f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}.$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων με

$$f''(x) = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x}.$$

Προφανώς $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$

Άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

(Φυσικά δεν αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες μια που η f δεν έχει σημείο ασυνέχειας, ούτε το πεδίο ορισμού της έχει διάστημα με πεπερασμένο ανοικτό άκρο).

5. Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\bigcirc$	+
$f''(x)$	+		+
f			
	Τ.μ.	Τ.ε.	$+\infty$
	0	$-\frac{1}{e}$	

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot \ln e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $[0, \frac{1}{e}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{e}, +\infty)$,

παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο (που είναι και ολικό) στο $\frac{1}{e}$ με τιμή $-\frac{1}{e}$ και τοπικό

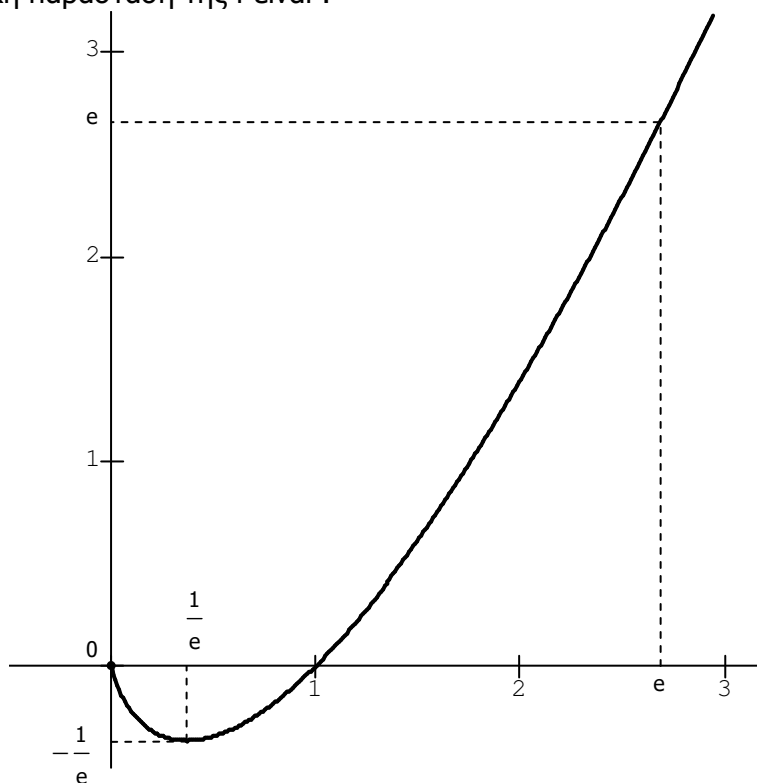
μέγιστο στο 0 με τιμή 0.

Επίσης είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, ενώ η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

6. Ένας πίνακας τιμών για την f είναι ο

x	1	e
y	0	e

Η γραφική παράσταση της f είναι :



4. α) Δείξτε ότι $(x-1) \cdot e^x + 1 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x-2) \cdot e^x + x + 2$.

α) Έστω $g(x) = (x-1) \cdot e^x + 1$, με $D_g = \mathbb{R}$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = \dots = x \cdot e^x.$$

Ο πίνακας μονοτονίας της g έχει ως εξής:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+
g			

Τ.Ε.

0

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο στο 0 με τιμή $g(0) = (0-1) \cdot e^0 + 1 = -1 + 1 = 0$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow (x-1) \cdot e^x + 1 \geq 0$.

β) $f(x) = (x-2) \cdot e^x + x + 2$

1. $D_f = \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων.

3. $f'(x) = [(x-2) \cdot e^x + x + 2]' = \dots = (x-1) \cdot e^x + 1$.

Όπως διαπιστώσαμε στο α) ερώτημα η παράσταση αυτή μηδενίζεται μόνο στο 0, ενώ για $x \neq 0$ είναι θετική.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με

$$f''(x) = \dots = x \cdot e^x.$$

Η $f''(x)$ μηδενίζεται στο 0, ενώ είναι θετική για $x > 0$.

4. ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

$$\underline{\text{Στο } -\infty} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-2) \cdot e^x + x + 2].$$

Όμως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-2) \cdot e^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{\frac{1}{e^x}} \stackrel{\text{α.μ. } \frac{-\infty}{+\infty} \text{ D.L.}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-2)'}{(\frac{1}{e^x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0 \quad (1)$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) = -\infty.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-2) \cdot e^x] + \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) = 0 + (-\infty) = -\infty$$

$$\underline{\text{Στο } +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-2) \cdot e^x + x + 2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-2) \cdot e^x] + \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

Άρα η C_f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

ΠΛΑΓΙΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

$$\begin{aligned} \underline{\text{ΣΤΟ } -\infty} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-2}{x} \cdot e^x + \frac{x}{x} + \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} \cdot 0 + 1 + 0 = 1 \cdot 0 + 1 + 0 = 1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-2) \cdot e^x + \cancel{x} + 2 - \cancel{x}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-2) \cdot e^x] + \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = \\ &= 0 + 2 = 2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\underline{\text{ΣΤΟ } +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x} \cdot e^x + \frac{x}{x} + \frac{2}{x} \right) = 1 \cdot (+\infty) + 1 + 0 = +\infty \notin \mathbb{R}.$$

Άρα τελικά η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη μόνο στο $-\infty$ την $y=x+2$.

5. Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\ominus$	+
$f''(x)$	-	$\ominus$	+
f			

$$f(0)=0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, δεν παρουσιάζει ακρότατα, είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$ ενώ η C_f έχει σημείο καμπής το $(0, 0)$.

$-\infty$ Σ.Κ. $+\infty$
0

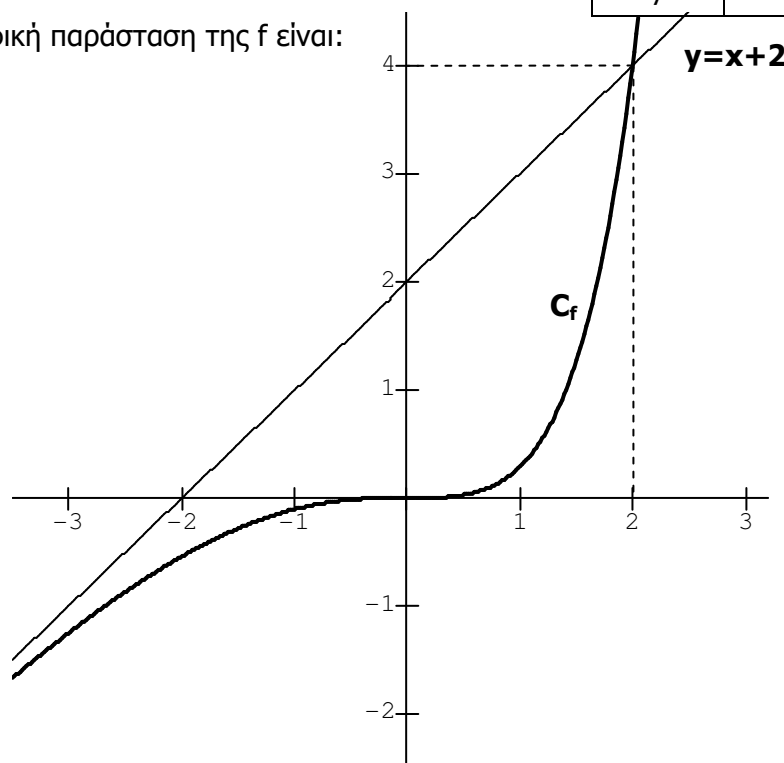
6. Ένας πίνακας τιμών για την f είναι ο

x	-1	1	2
y	$-\frac{3}{e}+1$	$-e+3$	4

Ένας πίνακας τιμών της ασύμπτωτης είναι ο:

x	0	-2
y	2	0

Η γραφική παράσταση της f είναι:



4. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

4.1 ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ – ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ . **Παράγουσα** ή **αρχική συνάρτηση** της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο Δ , για την οποία ισχύει ότι:

$$F'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αποδεικνύεται ότι:

- Όλες οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν παράγουσα.
- Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν έχουν παράγουσα όπως η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Η παράγουσα μιας συνάρτησης f στο Δ , αν υπάρχει, δεν είναι μοναδική, γιατί αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε υπάρχουν άπειρες παράγουσες και είναι όλες οι συναρτήσεις της μορφής $F+c$, $c \in \mathbb{R}$ και μόνο αυτές. Έτσι αν για παράδειγμα F είναι μια παράγουσα της f , τότε και οι συναρτήσεις με τύπους $F(x)+2$ και $F(x)-1$ είναι παράγουσες της f .

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν F, G παράγουσες των f, g αντίστοιχα, τότε:

Η $a \cdot F$ είναι μια παράγουσα της $a \cdot f$, $a \in \mathbb{R}$

Η $F+G$ είναι μια παράγουσα της $f+g$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ		
A/A	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$f(x)=0$	$F(x)=c, \quad c \in \mathbb{R}$
2	$f(x)=1$	$F(x)=x+c, \quad c \in \mathbb{R}$
3	$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln x +c, \quad c \in \mathbb{R}$
4	$f(x)=x^a, \quad a \neq -1$	$F(x)=\frac{x^{a+1}}{a+1}+c, \quad c \in \mathbb{R}$

A/A	Συνάρτηση	Παράγουσες
5	$f(x)=\sin x$	$F(x)=\eta\mu x+c, \quad c\in\mathbb{R}$
6	$f(x)=\eta\mu x$	$F(x)=-\sin x+c, \quad c\in\mathbb{R}$
7	$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x)=\epsilon\phi x+c, \quad c\in\mathbb{R}$
8	$f(x)=\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$F(x)=-\sigma\phi x+c, \quad c\in\mathbb{R}$
9	$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+c, \quad c\in\mathbb{R}$
10	$f(x)=a^x, \quad a>0, a\neq 1$	$F(x)=\frac{a^x}{\ln a}+c, \quad c\in\mathbb{R}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ονομάζουμε **αόριστο ολοκλήρωμα** της συνάρτησης f σε διάστημα Δ , το σύνολο των παραγουσών της στο Δ και συμβολίζεται με $\int f(x) \, dx$.

Έτσι

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Η διαδικασία υπολογισμού του αόριστου ολοκληρώματος λέγεται **ολοκλήρωση** και είναι η αντίστροφη πορεία της παραγώγισης.

Η σταθερά c λέγεται **σταθερά της ολοκλήρωσης**.

Με βάση την παραπάνω σχέση και τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων μπορούμε να καταρτίσουμε τον παρακάτω πίνακα που δίνει τα αόριστα ολοκληρώματα κάποιων βασικών συναρτήσεων σε κάθε διάστημα στο οποίο έχουν νόημα οι παραστάσεις που εμφανίζονται:

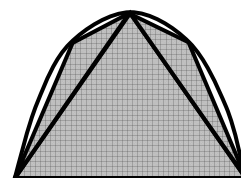
ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ	
$\int 0 \, dx = c, \quad c \in \mathbb{R}$	$\int \sin x \, dx = \eta\mu x + c, \quad c \in \mathbb{R}$
$\int k \, dx = kx + c, \quad k \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \epsilon\phi x + c, \quad c \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c, \quad c \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x} \, dx = -\sigma\phi x + c, \quad c \in \mathbb{R}$
$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1, c \in \mathbb{R}$	$\int e^x \, dx = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$
$\int \eta\mu x \, dx = -\sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}$	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a>0, a\neq 1, c \in \mathbb{R}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

1. $\int \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int f(x) dx, \lambda \in \mathbb{R}^*.$
2. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$
3. $\int f'(x) dx = f(x) + c, c \in \mathbb{R},$ καθώς μια παράγουσα της f' είναι η $f.$

4.2 ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΧΩΡΙΟΥ-ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΟΥ

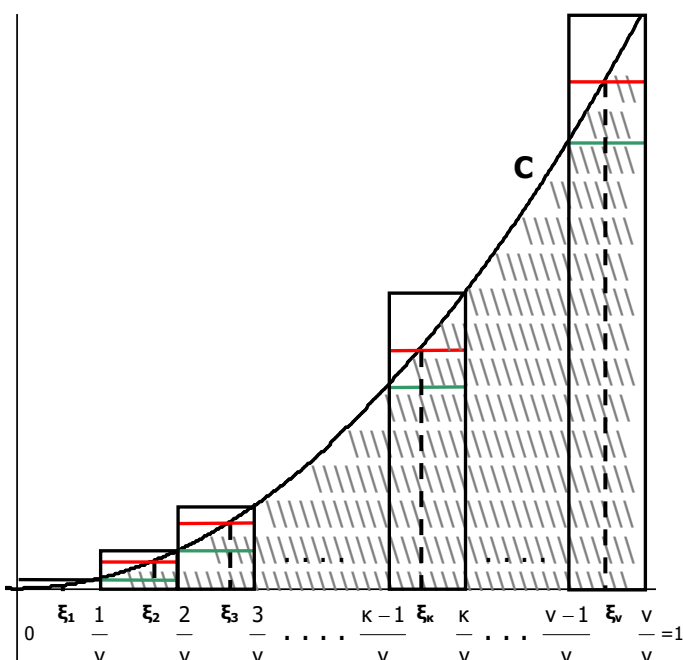
Από την αρχαιότητα οι άνθρωποι προσπάθησαν να υπολογίσουν εμβαδά διαφόρων χωρίων (πεπερασμένων επιπέδων επιφανειών) και τα κατάφεραν με επιτυχία στην περίπτωση επιφανειών που ορίζονται από ευθύγραμμα τμήματα, χωρίζοντας τις επιφάνειες αυτές σε πεπερασμένο πλήθος επιπέδων σχημάτων με γνωστό εμβαδόν (τρίγωνα, ορθογώνια και τραπέζια). Δεν ήταν όμως το ίδιο απλό, για τα χωρία εκείνα που περικλείονταν από καμπύλες. Καθοριστική στο ζήτημα αυτό ήταν η συμβολή του Αρχιμήδη, που μπόρεσε να υπολογίσει το εμβαδόν χωρίου που περικλειόταν από μια παραβολή και ένα ευθύγραμμο τμήμα (παραβολικό χωρίο), με τη βοήθεια εγγεγραμμένων τριγώνων, με μια μέθοδο που ονομάστηκε «μέθοδος της εξάντλησης» (βλέπε σχήμα).



Πολύ αργότερα (αφού πέρασαν 2000 χρόνια από την εποχή του Αρχιμήδη), μόλις στα τέλη του 17ου αιώνα, κατέστη εφικτό να ολοκληρωθεί μια μέθοδος για τον υπολογισμό των εμβαδών διαφόρων χωρίων που περικλείονταν από καμπύλες, μέσα από τις εργασίες των Newton και Leibniz.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^2$, της οποίας η γραφική παράσταση είναι η παραβολή C του διπλανού σχήματος με εξίσωση $y=x^2$. Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου (παραβολικό χωρίο) που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της παραβολής, τον άξονα x και τις κατακόρυφες ευθείες $x=0$ και $x=1$.



Διαιρούμε το διάστημα $[0, 1]$ σε v ίσα υποδιαστήματα πλάτους $\frac{1}{v}$, τα $[0, \frac{1}{v}]$, $[\frac{1}{v}, \frac{2}{v}]$, ..., $[\frac{k-1}{v}, \frac{k}{v}]$, ..., $[\frac{v-1}{v}, 1]$, όπου το k παίρνει τιμές $1, 2, \dots, v$. Σε κάθε υποδιάστημα σχηματίζουμε τρία ορθογώνια με βάση το υποδιάστημα αυτό και ύψη:

- την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης στο υποδιάστημα αυτό, που την παίρνει στο αριστερό άκρο του υποδιαστήματος (ορθογώνια με πράσινες άνω βάσεις ή για συντομία «**κάτω ορθογώνια**»),
- τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο υποδιάστημα αυτό, που την παίρνει στο δεξιό άκρο του υποδιαστήματος (ορθογώνια με μαύρες άνω βάσεις ή για συντομία «**άνω ορθογώνια**») και
- μια τυχαία τιμή της συνάρτησης στο υποδιάστημα αυτό (τιμές στα σημεία $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots, \xi_v$ - ορθογώνια με κόκκινες άνω βάσεις ή για συντομία «**ενδιάμεσα ορθογώνια**»).

Έτσι για παράδειγμα τα ορθογώνια του υποδιαστήματος $[\frac{k-1}{v}, \frac{k}{v}]$ έχουν ως ύψη την

ελάχιστη τιμή $f\left(\frac{k-1}{v}\right) = \left(\frac{k-1}{v}\right)^2$, τη μέγιστη τιμή $f\left(\frac{k}{v}\right) = \left(\frac{k}{v}\right)^2$ και μια τυχαία τιμή

$f(\xi_k) = \xi_k^2$ της συνάρτησης στο υποδιάστημα αυτό.

Αν ϵ_v το άθροισμα των εμβαδών των «κάτω ορθογωνίων» είναι:

$$\begin{aligned} \epsilon_v &= f(0) \cdot \frac{1}{v} + f\left(\frac{1}{v}\right) \cdot \frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right) \cdot \frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v-1}{v}\right) \cdot \frac{1}{v} = \\ &= \frac{1}{v} \cdot [f(0) + f\left(\frac{1}{v}\right) + f\left(\frac{2}{v}\right) + \dots + f\left(\frac{v-1}{v}\right)] = \frac{1}{v} \cdot [0^2 + \left(\frac{1}{v}\right)^2 + \left(\frac{2}{v}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v-1}{v}\right)^2]. \end{aligned}$$

Το άθροισμα αυτό αποδεικνύεται ότι δίνει αποτέλεσμα $\epsilon_v = \frac{2v^2 - 3v + 1}{6v^2}$ (1).

Αν E_v το άθροισμα των εμβαδών των «άνω ορθογωνίων» έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E_v &= f\left(\frac{1}{v}\right) \cdot \frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right) \cdot \frac{1}{v} + f\left(\frac{3}{v}\right) \cdot \frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right) \cdot \frac{1}{v} = \frac{1}{v} \cdot [f\left(\frac{1}{v}\right) + f\left(\frac{2}{v}\right) + f\left(\frac{3}{v}\right) + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right)] = \\ &= \frac{1}{v} \cdot \left[\left(\frac{1}{v}\right)^2 + \left(\frac{2}{v}\right)^2 + \left(\frac{3}{v}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v}{v}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Το άθροισμα αυτό αποδεικνύεται ότι δίνει αποτέλεσμα $E_v = \frac{2v^2 + 3v + 1}{6v^2}$ (2).

Αν R_v το άθροισμα των εμβαδών των «ενδιάμεσων ορθογωνίων» έχουμε ότι:

$$R_v = f(\xi_1) \cdot \frac{1}{v} + f(\xi_2) \cdot \frac{1}{v} + f(\xi_3) \cdot \frac{1}{v} + \dots + f(\xi_v) \cdot \frac{1}{v} \quad (3).$$

Τα παραπάνω αθροίσματα εμβαδών είναι και τα τρία προσεγγίσεις του ζητούμενου εμβαδού του παραβολικού χωρίου. Ισχύει δε σε κάθε υποδιάστημα ότι:

$f(\frac{\kappa-1}{v}) \leq f(\xi_\kappa) \leq f(\frac{\kappa}{v})$, οπότε και $f(\frac{\kappa-1}{v}) \cdot \frac{1}{v} \leq f(\xi_\kappa) \cdot \frac{1}{v} \leq f(\frac{\kappa}{v}) \cdot \frac{1}{v}$, για κάθε $\kappa=1, 2, \dots, v$.

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση όπου κ το $1, 2, \dots, v$ και προσθέτοντας τις σχέσεις που προκύπτουν, έχουμε ότι $\varepsilon_v \leq R_v \leq E_v$ **(4)**.

Όμως $\lim_{v \rightarrow +\infty} \varepsilon_v = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{2v^2 - 3v + 1}{6v^2} = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{2v^2}{6v^2} = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ και

$\lim_{v \rightarrow +\infty} E_v = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{2v^2 + 3v + 1}{6v^2} = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{2v^2}{6v^2} = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, οπότε από τη σχέση (4) και το

κριτήριο παρεμβολής, έχουμε ότι $\lim_{v \rightarrow +\infty} R_v = \frac{1}{3}$.

Το κοινό αυτό όριο των ακολουθιών ε_v , E_v και R_v , δίνει το ζητούμενο εμβαδόν E του παραβολικού χωρίου, που έχει τιμή $\frac{1}{3}$, καθώς μπορείτε να παρατηρήσετε ότι όσο περισσότερο αυξάνει το v , τόσο το διάστημα $[0, 1]$ χωρίζεται σε περισσότερα υποδιαστήματα, τα οποία προσεγγίζουν ολοένα και ακριβέστερα την τιμή του ζητούμενου E .

Αποδεικνύεται επίσης ότι η τιμή του εμβαδού E δεν εξαρτάται από το πλήθος v των υποδιαστημάτων στα οποία θα χωρίσουμε το διάστημα $[0, 1]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΟΥ

Έστω **συνεχής** συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα $[a, \beta]$, με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και έστω Ω το χωρίο που ορίζεται από τη C_f , τον άξονα x' και τις κατακόρυφες ευθείες $x=a$ και $x=\beta$.

Για να ορίσουμε το εμβαδόν Ω εργαζόμαστε όπως προηγουμένως και συγκεκριμένα:

- Ορίζουμε μια ακολουθία $x_0, x_1, \dots, x_v$ σημείων του $[a, \beta]$ με

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_v = \beta$, τα οποία χωρίζουν το $[a, \beta]$ σε v ίσα

υποδιαστήματα με μήκος $\Delta x = \frac{\beta - a}{v}$

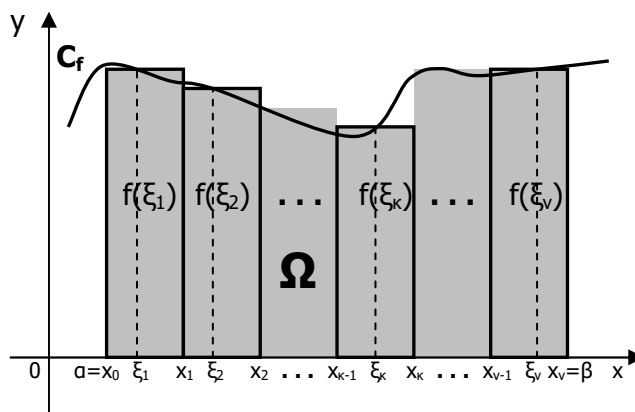
(η ακολουθία $x_0, x_1, \dots, x_v$, όπως ορίστηκε, ονομάζεται **διαμέριση** του $[a, \beta]$).

- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ

και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\kappa)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι το

$$R_v = f(\xi_1) \cdot \Delta x + f(\xi_2) \cdot \Delta x + \dots + f(\xi_v) \cdot \Delta x = [f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_v)] \cdot \Delta x$$

το οποίο ονομάζεται **άθροισμα Riemann**.



- Ως **εμβαδόν $E(\Omega)$** του χωρίου Ω ορίζουμε το $\lim_{v \rightarrow +\infty} R_v$, το οποίο αποδεικνύεται ότι υπάρχει στο $\mathbb{R}$, είναι μη αρνητικό και μάλιστα είναι ανεξάρτητο από την εκλογή των σημείων $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Ένα άθροισμα n αριθμών (πεπερασμένου πλήθους) $a_1, a_2, \dots, a_n$ μπορούμε να το συμβολίσουμε πιο συνοπτικά χρησιμοποιώντας **το σύμβολο $\sum$** ως εξής:

Ορίζουμε $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ και διαβάζουμε "άθροισμα των a_k με k από 1 έως n ".

Το σύμβολο $\sum_{k=1}^n$ δηλώνει ότι έχουμε ένα άθροισμα n προσθετέων, το σύμβολο $\sum_{k=2}^n$ ότι

έχουμε άθροισμα $n-1$ προσθετέων και γενικότερα το σύμβολο $\sum_{k=\mu}^{\lambda}$ με $\mu, \lambda \in \mathbb{N}$, $\mu \leq \lambda$, ότι

έχουμε ένα άθροισμα $\lambda - \mu + 1$ προσθετέων. Προφανώς είναι $\sum_{k=1}^1 a_k = a_1$.

Τα αθροίσματα $\sum_{k=1}^n a_k$, $\sum_{\mu=1}^n a_{\mu}$ και $\sum_{\lambda=1}^n a_{\lambda}$ παριστάνουν το ίδιο ακριβώς άθροισμα.

Το σύμβολο $\sum$ έχει τις παρακάτω προφανείς ιδιότητες:

- $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$
- $\sum_{k=1}^n \lambda \cdot a_k = \lambda \cdot \sum_{k=1}^n a_k$
- $\sum_{k=1}^n c = n \cdot c$, καθώς $\sum_{k=1}^n c = c + c + \dots + c$, άθροισμα με n προσθετέους

Επομένως σύμφωνα με τα παραπάνω το άθροισμα του Riemann μπορεί να γραφεί ως:

$$R_v = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x$$

4.3 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα $[a, b]$ και $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ μια διαμέριση του $[a, b]$, που χωρίζει το $[a, b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, \dots, n$, μήκους $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, για κάθε

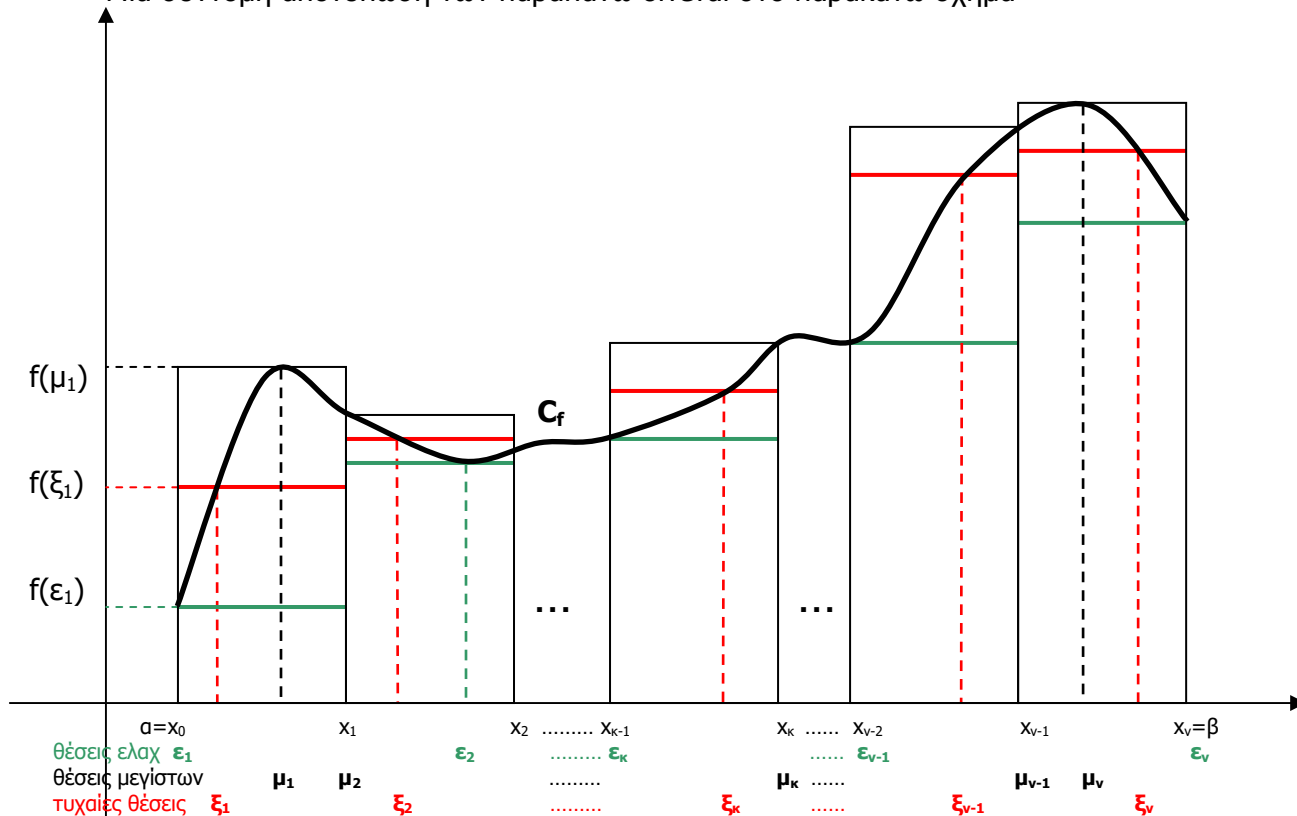
$k=1, 2, \dots, n$ και ορίζουμε το άθροισμα του Riemann $R_v = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x$.

Ονομάζουμε **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f στο $[a, \beta]$ τον αριθμό I που προκύπτει ως αποτέλεσμα του $\lim_{v \rightarrow +\infty} R_v$ και συμβολίζεται με $\int_a^\beta f(x) dx$.

Έτσι έχουμε ότι
$$\int_a^\beta f(x) dx = \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^v f(\xi_k) \cdot \Delta x \right) = \lim_{v \rightarrow +\infty} R_v$$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα της **συνεχούς** f στο $[a, \beta]$ διαβάζεται «**ολοκλήρωμα από το a έως το β** » και αποδεικνύεται ότι υπάρχει πάντα στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την εκλογή της διαμέρισης του $[a, \beta]$ και την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_k .

Μια σύντομη αποτύπωση των παραπάνω δίνεται στο παρακάτω σχήμα



όπου f συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$

$x_0, x_1, \dots, x_v$ διαμέριση του $[a, \beta]$

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_v - x_{v-1} = \Delta x = \frac{\beta - a}{v}$$

Ανώτερο άθροισμα της f στο $[a, \beta]$:

$$E_v = f(\mu_1) \cdot \Delta x + f(\mu_2) \cdot \Delta x + \dots + f(\mu_v) \cdot \Delta x$$

Κατώτερο άθροισμα της f στο $[a, \beta]$:

$$\epsilon_v = f(\xi_1) \cdot \Delta x + f(\xi_2) \cdot \Delta x + \dots + f(\xi_v) \cdot \Delta x$$

Άθροισμα Riemann της f στο $[a, \beta]$:

$$R_v = f(\xi_1) \cdot \Delta x + f(\xi_2) \cdot \Delta x + \dots + f(\xi_v) \cdot \Delta x$$

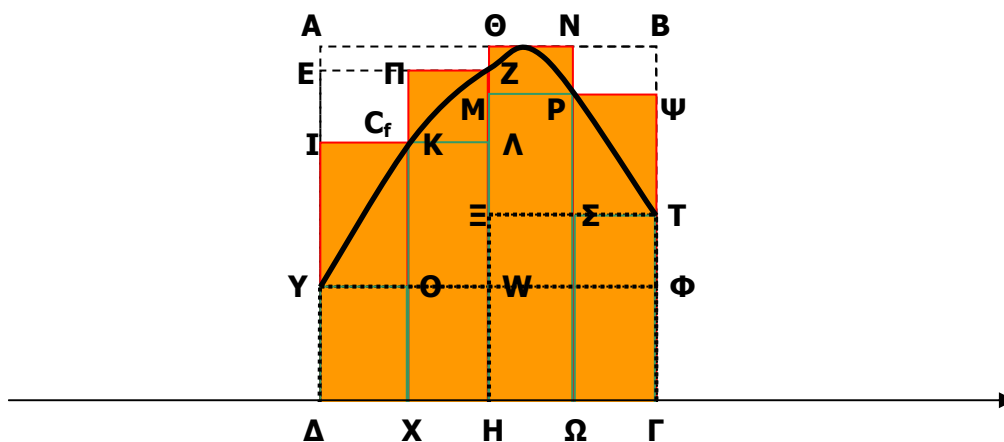
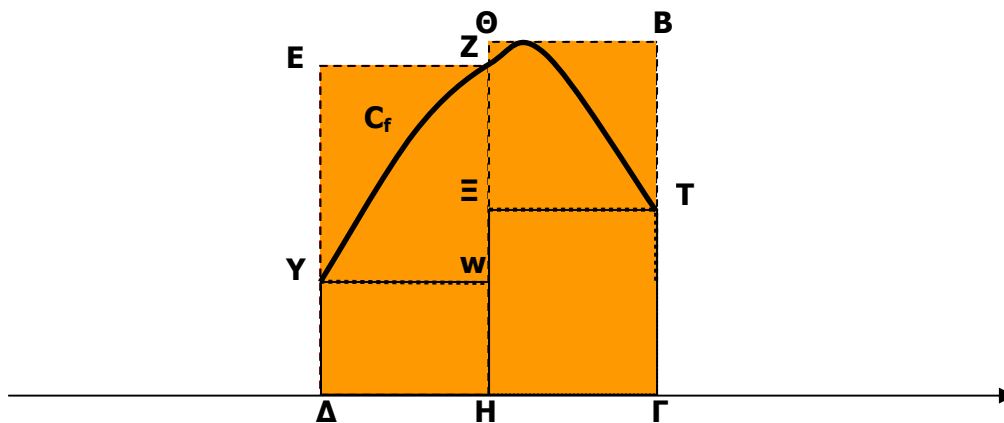
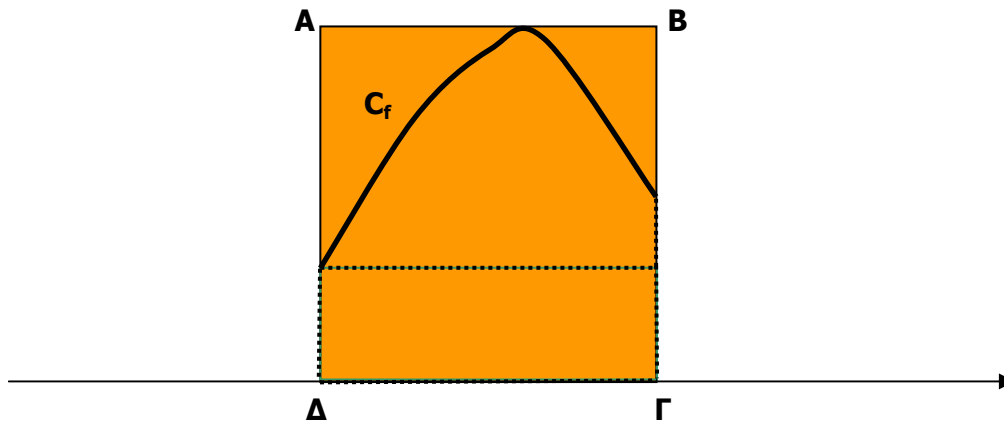
Ισχύουν οι σχέσεις: $\epsilon_v \leq R_v \leq E_v$

και $\lim_{v \rightarrow +\infty} E_v = \lim_{v \rightarrow +\infty} \epsilon_v = I$

Τότε:

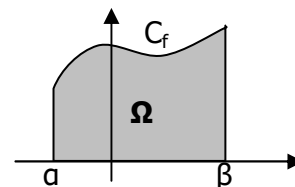
$$\int_a^\beta f(x) dx = \lim_{v \rightarrow +\infty} R_v = \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^v f(\xi_k) \cdot \Delta x \right) = I$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε απομονώσει ένα διάστημα $\Delta\Gamma$ της διαμέρισης και καθώς το διαιρούμε συνεχώς παρατηρούμε ότι τα εμβαδά των **άνω** και **κάτω** ορθογωνίων τείνουν προς το ζητούμενο εμβαδόν, καθώς το πλήθος n των στοιχείων της διαμέρισης τείνει στο άπειρο



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- 1)** Όταν υπάρχει το $\int_a^b f(x) dx$, τότε η συνάρτηση **f** λέγεται **ολοκληρώσιμη** στο $[a, \beta]$. Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$ είναι και ολοκληρώσιμη σ' αυτό.
- 2)** Στο $\int_a^b f(x) dx$ οι αριθμοί **a** και **β** λέγονται **όρια της ολοκλήρωσης** (χωρίς η λέξη «όρια» να έχει καμία σχέση με τη γνωστή έννοια του ορίου συνάρτησης).
- 3)** Το αποτέλεσμα του $\int_a^b f(x) dx$, αν **a** και **β** σταθεροί αριθμοί, είναι ένας σταθερός αριθμός και δεν εξαρτάται από την επιλογή της μεταβλητής, σε αντίθεση με το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x) dx$, που δίνει ένα σύνολο συναρτήσεων. Έτσι η μεταβλητή **x** μπορεί να αντικατασταθεί με οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή. Για παράδειγμα οι παραστάσεις $\int_a^b f(x) dx$ και $\int_a^b f(t) dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα. Αν τουλάχιστον ένα από τα όρια **a** και **β** του $\int_a^b f(x) dx$ είναι μεταβλητό και εξαρτάται από μια μεταβλητή **ω**, τότε το αποτέλεσμα του ορισμένου ολοκληρώματος, αν δεν είναι σταθερό, θα εξαρτάται από το **ω** (και όχι από το **x**).
- 4)** Αν για τη συνεχή συνάρτηση **f** στο $[a, \beta]$ ισχύει **f(x) ≥ 0**, για κάθε **x ∈ [a, β]**, τότε όπως ήδη αναφέραμε, το $\int_a^b f(x) dx$ δίνει το εμβαδόν **E(Ω)** του χωρίου **Ω** που ορίζεται από τη **C_f**, τον άξονα **x'x** και τις κατακόρυφες ευθείες **x=a** και **x=β**.

**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ**

Οι δύο πρώτες από τις παρακάτω σχέσεις δεν είναι ιδιότητες αλλά ορισμοί και με τη βοήθειά τους επεκτείνουμε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος και για τις περιπτώσεις όπου $a=\beta$ ή $a>\beta$.

Στο εξής συναντώντας το σύμβολο $\int_a^b f(x) dx$ θα εννοείται ότι τα **a** και **β** είναι δύο αριθμοί με οποιαδήποτε σχέση μεταξύ τους ($a<\beta$ ή $a=\beta$ ή $a>\beta$), εκτός και αν αναφέρεται η σχέση τους (ή το διάστημα π.χ. $[a, \beta]$, που σημαίνει ότι $a<\beta$) και ότι **η f είναι συνεχής** στο κλειστό διάστημα που ορίζουν οι **a** και **β**.

1. Ορίζουμε ότι $\int_a^a f(x) dx = 0$.
2. Ορίζουμε ότι $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

3. $\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ και γενικότερα

$\int_a^b [\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)] dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx + \mu \cdot \int_a^b g(x) dx$, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

5. Αν f συνεχής σε διάστημα Δ και $a, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε $\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\beta f(x) dx$.

Η σχέση αυτή ονομάζεται **Σχέση του Chasles (ή σχέση διάσπασης του ολοκληρώματος)**.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν είναι απαραίτητο το γ να βρίσκεται μεταξύ των a και β και δεν πρέπει η παραπάνω σχέση να δημιουργεί αυτή την εντύπωση. Έτσι θα μπορούσαμε να γράψουμε ότι $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^5 f(x) dx + \int_5^2 f(x) dx$.

6. α) Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x) dx \geq 0$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Ισχύει μόνο αν $a \leq \beta$.

β) Ειδικά στην περίπτωση που $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, **αλλά δεν είναι παντού ίση με μηδέν**, ισχύει ότι

$\int_a^\beta f(x) dx > 0$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Ισχύει μόνο αν $a < \beta$.

7. Μπορούμε να χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη και τις παρακάτω ιδιότητες, παρ' όλο που δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο:

α) Αν f, g συνεχείς σε διάστημα $[a, \beta]$ και $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε ισχύει ότι $\int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta g(x) dx$

β) Αν επιπλέον οι f και g **δεν είναι ίσες** στο $[a, \beta]$, ισχύει ότι

$\int_a^\beta f(x) dx < \int_a^\beta g(x) dx$

8. Ορισμένο ολοκλήρωμα σταθερής συνάρτησης

Αν c πραγματική σταθερά ισχύει ότι $\int_a^\beta c dx = c \cdot (\beta - a)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ 6α) ΚΑΙ 6β)

Αν $a > \beta$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\beta, a]$, οι ιδιότητες αυτές δίνουν συμπεράσματα

$\int_a^\beta f(x) dx \leq 0$ και $\int_a^\beta f(x) dx < 0$ αντίστοιχα (καθώς για παράδειγμα αν $f(x) \geq 0$ και

συνεχής στο $[\beta, a]$, τότε $\int_\beta^a f(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow -\int_a^\beta f(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx \leq 0$).

4.4 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΟΡΙΣΜΕΝΗ ΑΠΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω συνάρτηση f συνεχής σε **διάστημα Δ** και $a \in \Delta$. Τότε η συνάρτηση

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in \Delta$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , δηλαδή **η F είναι**

παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$.

Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ λέγεται **συνάρτηση ορισμένη από ολοκλήρωμα**.

Παραδείγματα

- $(\int_1^x \ln t dt)' = \ln x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, καθώς η $\ln t$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $1 \in (0, +\infty)$.
- $(\int_0^x y \cdot \sin y dy)' = x \cdot \sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, καθώς η $y \cdot \sin y$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $0 \in \mathbb{R}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ:

1. Το σύνολο παραγωγισιμότητας της F **είναι και το πεδίο ορισμού της**.
2. Αν f συνεχής σε **ένωση διαστημάτων** $A_1 \cup A_2$, η συνάρτηση ορισμένη από ολοκλήρωμα είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα εκείνο από τα A_1, A_2 που ανήκει το a (βλέπε λυμένο παράδειγμα 41, παρακάτω).

ΜΕΘΟΔΟΣ

α) Παραγωγή της συνάρτησης μορφής $\int_a^x f(t) dt$

Σε περίπτωση που έχουμε να παραγωγίσουμε συνάρτηση ορισμένη από ολοκλήρωμα της παραπάνω μορφής $\int_a^x f(t) dt$, τότε:

- Δείχνουμε ότι f συνεχής σε διάστημα Δ
- $a \in \Delta$
- Τότε έχουμε το συμπέρασμα ότι $\int_a^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ με

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

β) Παραγωγή της συνάρτησης μορφής $\int_x^a f(t) dt$

Με τις προϋποθέσεις που αναφέραμε στην α) περίπτωση έχουμε

$$\left(\int_x^a f(t) dt \right)' = \left(- \int_a^x f(t) dt \right)' = - \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = -f(x)$$

γ) Παραγωγή της συνάρτησης μορφής $\int_a^{g(x)} f(t) dt$

Η συνάρτηση αυτή είναι σύνθετη, αποτελούμενη από τη βασική $F(u) = \int_a^u f(t) dt$ και τη $u=g(x)$ και παραγωγίζεται σύμφωνα με τον κανόνα παραγωγίσιμης της σύνθετης συνάρτησης. Συγκεκριμένα:

– Δείχνουμε ότι f συνεχής σε διάστημα Δ και $a \in \Delta$, οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω η $F(u) = \int_a^u f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ .

– Δείχνουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα A .

– Τότε έχουμε το συμπέρασμα ότι η $\int_a^{g(x)} f(t) dt$ είναι

παραγωγίσιμη στο $\{x \in A / g(x) \in \Delta\}$, ως σύνθεση (Fou) παραγωγισίμων με $(\int_a^{g(x)} f(t) dt)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

**(ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ
ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑΣ
ΤΗΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ)**

δ) Παραγωγή της συνάρτησης μορφής $\int_{g(x)}^a f(t) dt$

Σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα είναι $\int_{g(x)}^a f(t) dt = -\int_a^{g(x)} f(t) dt$, οπότε για την

παράγωγο της εργαζόμαστε όπως στην περίπτωση γ) και τελικά έχουμε ότι

$$(\int_{g(x)}^a f(t) dt)' = -f(g(x)) \cdot g'(x).$$

ε) Παραγωγή της συνάρτησης μορφής $\int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(t) dt$

– Δείχνουμε ότι f συνεχής σε διάστημα Δ

– Δείχνουμε ότι g παραγωγίσιμη στο A και φ παραγωγίσιμη στο B

– Επιλέγουμε κάποιο $a \in \Delta$ και γράφουμε κατά σειρά με τη βοήθεια της σχέσης του

$$\text{Chasles: } \int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(t) dt = \int_{\varphi(x)}^a f(t) dt + \int_a^{g(x)} f(t) dt = -\int_a^{\varphi(x)} f(t) dt + \int_a^{g(x)} f(t) dt,$$

οπότε για την παράγωγο της εργαζόμαστε όπως στην περίπτωση γ) και τελικά έχουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στα $\{x \in A / g(x) \in \Delta\} \cap \{x \in B / \varphi(x) \in \Delta\}$ με

$$(\int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(t) dt)' = -f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) + f(g(x)) \cdot g'(x).$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Έστω συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα $[a, \beta]$. Αν F μια τυχαία παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε:

$$\int_a^\beta f(t) dt = F(\beta) - F(a)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Πολλές φορές για να απλοποιήσουμε τις παραστάσεις κατά τον υπολογισμό ενός ορισμένου ολοκληρώματος, γράφουμε τη διαφορά $F(\beta)-F(\alpha)$ ως $[F(x)]_a^\beta$. Άρα τελικά

είναι
$$\int_a^\beta f(t) dt = F(\beta) - F(\alpha) = [F(x)]_a^\beta$$

Με στόχο να ξεκαθαρίσουμε τις έννοιες αόριστο και ορισμένο ολοκλήρωμα, καθώς και τη σχέση τους, παραθέτουμε τον παρακάτω πίνακα σχέσεων που προκύπτουν από όσα έχουν αναφερθεί έως τώρα:

ΕΣΤΩ f ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ Δ , $a, x, \beta \in \Delta$ ΚΑΙ F ΜΙΑ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΤΗΣ f ΣΤΟ Δ , ΤΟΤΕ (ΣΕ ΟΠΟΙΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΜΦΑΝΙΖΕΤΑΙ Η f' ΥΠΟΘΕΤΟΥΜΕ ΟΤΙ ΥΠΑΡΧΕΙ):		
ΣΧΕΣΕΙΣ	ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ	
1. $\int f(x) dx = F(x) + c$	c οποιαδήποτε σταθερά	
2. $\int f'(x) dx = f(x) + c$		
3. $\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + c$		
4. $\int_a^x f(t) dt = F(x) + c_0$	c_0 συγκεκριμένη σταθερά	
5. $\int_a^x f'(t) dt = f(x) + c_0$		
6. $(\int_a^x f(t) dt)' = f(x)$		
7. $\int_a^\beta f(x) dx = [\int_a^x f(x) dx]_a^\beta$		

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ , τότε αμέσως γνωρίζω μια παράγουσά της, η οποία είναι η $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $a \in \Delta$ και μπορώ να θεωρώ το $\int_a^\beta f(t) dt$, ως τιμή της F στο β , δηλαδή $\int_a^\beta f(t) dt = F(\beta)$.

Επίσης αν, για παράδειγμα, θέλω να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο Δ και δεν μπορώ να εφαρμόσω θεώρημα Bolzano στην $g(x)=f(x)-x$, έχω άμεσα μια παράγουσα G της g , την $G(x) = \int_a^x f(t) dt - \frac{x^2}{2}$, για να εφαρμόσω θεώρημα Rolle σ' αυτήν.

4.5 ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Θα παραθέσουμε εδώ τις γενικές μεθόδους υπολογισμού ολοκληρωμάτων που, πέρα από επιμέρους διαφορές, είναι ίδιες, τόσο στα αόριστα, όσο και στα ορισμένα ολοκληρώματα (όπου αναφέρεται $[a, \beta]$ θα μπορούσε να είναι $[\beta, a]$, αν $\beta < a$).

ΜΕΘΟΔΟΣ	ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ
1. ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ (για συντομία Π)	
ΑΟΡΙΣΤΟ $\int f(x) dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$	
ΟΡΙΣΜΕΝΟ $\int_a^\beta f(x) dx = [F(x)]_a^\beta = F(\beta) - F(a)$	f συνεχής στο $[a, \beta]$
2. ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ Ή ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ (ΠΟ)	
ΑΟΡΙΣΤΟ $\int f(x) \cdot g(x) dx = \int F'(x) \cdot g(x) dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) dx$	
ΟΡΙΣΜΕΝΟ $\int_a^\beta f(x) \cdot g(x) dx = \int_a^\beta F'(x) \cdot g(x) dx = [F(x) \cdot g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta F(x) \cdot g'(x) dx$	f συνεχής στο $[a, \beta]$ g παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ g' συνεχής στο $[a, \beta]$
3. ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ $\varphi(x)=u$ (για συντομία ΑΜ)	
ΑΟΡΙΣΤΟ $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(u) du$ καθώς θέτοντας $\varphi(x)=u$ είναι $du = \varphi'(x) dx$	
ΟΡΙΣΜΕΝΟ $\int_a^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du$ καθώς θέτοντας $\varphi(x)=u$ είναι $du = \varphi'(x) dx$, $u_1 = \varphi(a)$ και $u_2 = \varphi(\beta)$	f συνεχής στα $[a, \beta]$ και $[u_1, u_2]$ (ή $[u_2, u_1]$) φ παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ φ' συνεχής στο $[a, \beta]$
4. ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ $x=\varphi(u)$ (για συντομία ΑΜ)	
ΑΟΡΙΣΤΟ $\int f(x) dx = \int f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) du$ καθώς θέτοντας $x=\varphi(u)$ είναι $dx = \varphi'(u) du$	
ΟΡΙΣΜΕΝΟ $\int_a^\beta f(x) dx = \int_\kappa^\lambda f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) du$ καθώς θέτοντας $x=\varphi(u)$ είναι $dx = \varphi'(u) du$, $a=\varphi(\kappa)$ οπότε $\kappa=\varphi^{-1}(a)$ και $\beta=\varphi(\lambda)$ οπότε $\lambda=\varphi^{-1}(\beta)$	f συνεχής στο $[a, \beta]$ φ συνάρτηση «1-1» φ παραγωγίσιμη και φ' συνεχής στο $[\kappa, \lambda]$ (ή $[\lambda, \kappa]$)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- 1) Παρατηρείστε ότι προϋποθέσεις για την εφαρμογή κάποιας μεθόδου υπάρχουν μόνο κατά τον υπολογισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων.
- 2) Ο στόχος των μεθόδων 2. 3. και 4. είναι να καταλήξουμε σε ολοκληρώματα που δεν θα είναι πιο σύνθετα από τα αρχικά (και αν γίνεται μάλιστα να είναι απλούστερα).
- 3) Πέραν των παραπάνω μεθόδων, κατά τον υπολογισμό κάποιου ολοκληρώματος, μπορούμε να εφαρμόσουμε και κάποιο «τέχνασμα» (για συντομία **T**) ή κάποιο γνωστό τύπο με στόχο να μετασχηματίσουμε τον τύπο της συνάρτησης εντός του ολοκληρώματος, καταλήγοντας σε απλούστερο ολοκλήρωμα.

ΧΡΗΣΙΜΑ

Πριν περάσουμε να δούμε παραδείγματα υπολογισμού ολοκληρωμάτων, είναι απαραίτητο να έχουμε υπ' όψιν μας τα εξής:

A. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ

Πολλές φορές μπορούμε να «υποψιαστούμε» μια παράγουσα μιας παράστασης (συνάρτησης), αν η παράσταση έχει κατάλληλη μορφή, κάτι που φυσικά είναι καθοριστικό για τον υπολογισμό του ολοκληρώματός της.

Έτσι για παράδειγμα αν η παράσταση έχει μορφή $2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$, τότε μια παράγουσά της είναι η $f^2(x)$. Προφανές είναι ότι, αν η παράσταση έχει μορφή $f(x) \cdot f'(x)$, τότε

μια παράγουσά της είναι η $\frac{f^2(x)}{2}$. Έτσι είναι σημαντικό να μπορούμε να

«υποψιαστούμε» από ποια παραγωγή προέρχεται κάποια συγκεκριμένη παράσταση.

Είναι επίσης σημαντικό να θυμόμαστε ότι:

Ένα άθροισμα μπορεί να προέρχεται από την παραγωγή αθροίσματος ή γινομένου, ένα γινόμενο από την παραγωγή σύνθετης συνάρτησης και ένα πηλίκο από την παραγωγή πηλίκου ή σύνθετης, δηλαδή σχηματικά ότι:

Άθροισμα ← (Άθροισμα)' ή (Γινόμενο)' Γινόμενο συναρτήσεων (όχι αριθμός επί συνάρτηση) ← (Σύνθετη)' Πηλίκο συναρτήσεων (με παρονομαστή όχι αριθμό) ← (Πηλίκο)' ή (Σύνθετη)'
--

Παρακάτω δίνονται κάποια τέτοια γενικά παραδείγματα:

- $f(x) \cdot f'(x) = \left(\frac{f^2(x)}{2} \right)'$
- $f^v(x) \cdot f'(x) = \left(\frac{f^{v+1}(x)}{v+1} \right)'$
- $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = (\sqrt{f(x)})'$

- $\eta\mu f(x) \cdot f'(x) = (-\sigma\upsilon\nu f(x))'$
- $\sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x) = (\eta\mu f(x))'$
- $\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} = (\epsilon\phi f(x))'$
- $\frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)} = (-\sigma\phi f(x))'$
- $e^{f(x)} \cdot f'(x) = (e^{f(x)})'$
- $\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln|f(x)|)'$

Επίσης για τον προσδιορισμό μιας παράγουσας είναι σημαντικό πάντα να ελέγχουμε:

➤ **σε ένα κλάσμα αν ο αριθμητής είναι η παράγωγος του παρονομαστή**

(σχηματικά **Αριθμητής = (Παρονομαστής)'**), οπότε $\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln|f(x)|)'$ και

➤ **σε ένα γινόμενο ή πηλίκο, αν η "έξω" παράσταση είναι η παράγωγος της "μέσα"** (σχηματικά **Έξω=(Μέσα)'**),

καθώς τότε θα είναι απλούστερο να προσδιορίσουμε την παράγουσα, όπως στα παρακάτω παραδείγματα:

$$1. (x^3+x) \cdot (3x^2+1) = (x^3+x) \cdot (x^3+x)' = \left[\frac{(x^3+x)^2}{2} \right]'$$

$$2. \frac{3x^2+1}{x^3+x} = \frac{(x^3+x)'}{x^3+x} = (\ln|x^3+x|)', \quad x \neq 0. \quad \text{Αριθμητής} = (\text{Παρονομαστής})'$$

$$3. 2 \cdot e^{2x} = e^{2x} \cdot (2x)' = (e^{2x})' \quad \text{'Έξω} = (\text{Μέσα})' \text{ δηλ. } 2 = (2x)'$$

$$4. \sigma\upsilon\nu(x^3+x) \cdot (3x^2+1) = \sigma\upsilon\nu(x^3+x) \cdot (x^3+x)' = [\eta\mu(x^3+x)]' \quad \text{'Έξω} = (\text{Μέσα})' \text{ δηλ. } 3x^2+1 = (x^3+x)'$$

$$5. \frac{e^x+2}{(e^x+2x+1)^2} = \frac{(e^x+2x+1)'}{(e^x+2x+1)^2} = \left(-\frac{1}{e^x+2x+1} \right)' \quad \text{'Έξω} = (\text{Μέσα})' \text{ δηλ. } e^x+2 = (e^x+2x+1)'$$

B. ΕΠΙΛΟΓΗ ΡΟΛΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Να αναφέρουμε εδώ ότι παραγοντική ολοκλήρωση εφαρμόζουμε συνήθως όταν έχουμε **γινόμενα συναρτήσεων διαφορετικών μορφών**, όπως π.χ. πολυωνυμική επί εκθετική, τριγωνομετρική επί εκθετική, πολυωνυμική επί λογαριθμική κ.τ.λ.

Ξεκινώντας μια παραγοντική ολοκλήρωση σε ένα ολοκλήρωμα μορφής

$\int_a^b h(x) \cdot \phi(x) dx$, πρέπει να επιλέξουμε ρόλους για τις ϕ και h και συγκεκριμένα

ποιας θα χρησιμοποιήσουμε την παράγουσα. Αυτή θα παίζει τον ρόλο της f και η άλλη το ρόλο της g στον τύπο της ΠΟ (βλέπε τύπο). Τον ρόλο της f τον παίζει αυτή που έχει "εμφανή" παράγουσα.

Αν και οι δύο έχουν εμφανή παράγουσα, τότε συνήθως τον ρόλο της f τον παίζει η συνάρτηση η οποία προηγείται της άλλης στη σειρά

ΕΚ.ΤΡΙ.ΠΟ.ΛΟ.

που σημαίνει ΕΚθετική, ΤΡΙγωνομετρική, ΠΟλυωνυμική, ΛΟγαριθμική.

Έτσι αν έχουμε το $\int_a^b (x^2 + 1) \cdot \eta\mu x \, dx$, θα θεωρήσουμε ότι παίζει τον ρόλο της f η

$y = \eta\mu x$ και θα ξεκινούσαμε την παραγοντική από το $\int_a^b (x^2 + 1) \cdot (-\sigma\upsilon\nu x)' \, dx$.

Γ. ΧΡΗΣΙΜΑ ΤΕΧΝΑΣΜΑΤΑ

1. Είναι πολύ χρήσιμη η τριγωνομετρική ταυτότητα $\boxed{\epsilon\phi^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1}$ (η οποία

προκύπτει ως εξής $\epsilon\phi^2 x = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1$), καθώς μπορεί να

δώσει $\boxed{\epsilon\phi^2 x = (\epsilon\phi x)' - 1}$ ή $\boxed{1 + \epsilon\phi^2 x = (\epsilon\phi x)'}$ ή $\boxed{\frac{1}{1 + \epsilon\phi^2 x} = \sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Πολλές φορές επίσης χρειάζεται να μετατρέψουμε μια τριγωνομετρική παράσταση με βάση **τύπους τριγωνομετρίας**, όπως:

$$\eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2} \quad \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$$

$$\eta\mu 2x = \frac{2\epsilon\phi x}{1 + \epsilon\phi^2 x} \quad \sigma\upsilon\nu 2x = \frac{1 - \epsilon\phi^2 x}{1 + \epsilon\phi^2 x} \quad \eta\mu^2 x = \frac{\epsilon\phi^2 x}{1 + \epsilon\phi^2 x}$$

$$2 \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta)$$

$$2 \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$$

$$2 \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

Προφανώς όσοι από τους τύπους τριγωνομετρίας είναι απαραίτητοι και δεν έχουν διδαχθεί στις Α' ή Β' Λυκείου, **θα δίνονται**.

2. **Μετατροπή ρητής παράστασης με παρονομαστή γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων σε άθροισμα ρητών παραστάσεων**

α) Αν ο αριθμητής είναι πολυώνυμο βαθμού μικρότερου από το βαθμό του παρονομαστή

Αποδεικνύεται ότι κάθε ρητή παράσταση μορφής $\frac{u(x)}{\delta_1(x) \cdot \delta_2(x) \cdot \dots \cdot \delta_v(x)}$, όπου

$\delta_1(x), \delta_2(x), \dots, \delta_v(x)$ πρωτοβάθμια πολυώνυμα και $u(x)$ πολυώνυμο με βαθμό

μικρότερο από το βαθμό του $\delta_1(x) \cdot \delta_2(x) \cdot \dots \cdot \delta_v(x)$, μπορεί με κατάλληλο τρόπο να έρθει στη μορφή $\frac{A_1}{\delta_1(x)} + \frac{A_2}{\delta_2(x)} + \dots + \frac{A_v}{\delta_v(x)}$, όπου $A_1, A_2, \dots, A_v$ πραγματικοί αριθμοί, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα

Ζητάμε να προσδιορίσουμε πραγματικούς αριθμούς A, B ώστε η παράσταση

$$\frac{3x+2}{(x-1) \cdot (x-2)} \text{ να γράφεται με τη μορφή } \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}. \text{ Λέμε:}$$

$$\text{Έστω ότι υπάρχουν αριθμοί } A, B \in \mathbb{R}, \text{ τέτοιοι ώστε } \frac{3x+2}{(x-1) \cdot (x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq 2$. Με απαλοιφή παρονομαστών έχουμε:

$$3x+2=A \cdot (x-2)+B \cdot (x-1) \Leftrightarrow 3x+2=A \cdot x-2A+B \cdot x-B \Leftrightarrow 3x+2=(A+B) \cdot x-(2A+B).$$

Επειδή η τελευταία αυτή ισότητα ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$, θα πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} A+B=3 \\ -(2A+B)=2 \end{array} \right\} \text{ Λύνοντας το σύστημα έχουμε ότι } A=-5 \text{ και } B=8.$$

$$\text{Άρα } \frac{3x+2}{(x-1) \cdot (x-2)} = -\frac{5}{x-1} + \frac{8}{x-2}.$$

Η μετατροπή αυτή όπως θα δούμε στα παραδείγματα υπολογισμού ολοκληρωμάτων είναι πολύ χρήσιμη για τον υπολογισμό του

$$\int_a^b \frac{3x+2}{(x-1) \cdot (x-2)} dx.$$

β) Αν ο αριθμητής είναι πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του βαθμού του παρονομαστή

Αν έχουμε ρητή παράσταση μορφής $\frac{\Delta(x)}{\delta_1(x) \cdot \delta_2(x) \cdot \dots \cdot \delta_v(x)}$, όπου $\delta_1(x),$

$\delta_2(x), \dots, \delta_v(x)$ πρωτοβάθμια πολυώνυμα και $\Delta(x)$ πολυώνυμο με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του βαθμού του $\delta_1(x) \cdot \delta_2(x) \cdot \dots \cdot \delta_v(x)$, τότε αρχικά εκτελούμε τη διαίρεση των πολυωνύμων $\Delta(x) : (\delta_1(x) \cdot \delta_2(x) \cdot \dots \cdot \delta_v(x))$ και βρίσκουμε ένα πηλίκο $\pi(x)$ και ένα υπόλοιπο $u(x)$. Στη συνέχεια έχουμε κατά σειρά:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(x)}{\delta_1(x) \cdot \delta_2(x) \cdot \dots \cdot \delta_v(x)} &\stackrel{\text{απο την ταυτότητα της διαίρεσης}}{=} \frac{[\delta_1(x) \cdot \delta_2(x) \cdot \dots \cdot \delta_v(x)] \cdot \pi(x) + u(x)}{\delta_1(x) \cdot \delta_2(x) \cdot \dots \cdot \delta_v(x)} = \\ &= \frac{\cancel{\delta_1(x) \cdot \delta_2(x) \cdot \dots \cdot \delta_v(x)} \cdot \pi(x)}{\cancel{\delta_1(x) \cdot \delta_2(x) \cdot \dots \cdot \delta_v(x)}} + \frac{u(x)}{\delta_1(x) \cdot \delta_2(x) \cdot \dots \cdot \delta_v(x)} = \pi(x) + \frac{u(x)}{\delta_1(x) \cdot \delta_2(x) \cdot \dots \cdot \delta_v(x)} \end{aligned}$$

όπου το $u(x)$ έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta_1(x) \cdot \delta_2(x) \cdot \dots \cdot \delta_v(x)$, οπότε το μετασχηματίζουμε στη συνέχεια όπως περιγράψαμε στην α) περίπτωση.

Δ. ΓΕΝΙΚΑ ΔΕΝ ΙΣΧΥΟΥΝ

- $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$ δηλαδή $\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ δηλαδή $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$
- $(\int_a^b f(x)dx)^2 = \int_a^b f^2(x)dx$ δηλαδή $(\int_a^b f(x)dx)^2 \neq \int_a^b f^2(x)dx$
- $|\int_a^b f(x)dx| = \int_a^b |f(x)|dx$ δηλαδή $|\int_a^b f(x)dx| \neq \int_a^b |f(x)|dx$

και μάλιστα **αν** $a \leq b$ μπορούμε **να δείξουμε** ότι $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

(βλέπε απόδειξη παρακάτω στη μεθοδολογία στην § ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ)

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \lim_{x \rightarrow x_0} f(t)dt$ δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^x f(t)dt \neq \int_a^x \lim_{x \rightarrow x_0} f(t)dt$

ΙΣΧΥΟΥΝ

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt$ με προϋποθέσεις f συνεχής στο Δ και $a, x_0 \in \Delta$
(αφού η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι τότε παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο Δ)
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^t f(\omega)d\omega = \int_a^t f(\omega)d\omega$ με προϋπόθεση ότι t ανεξάρτητο του x
μια που η συνάρτηση $\int_a^t f(\omega)d\omega$ είναι συνάρτηση του t και δεν περιέχει x (ακόμα και αν είχε τη μορφή $\int_a^t f(x)dx$, πάλι θα ήταν συνάρτηση του t).

Ε. Όταν έχουμε μια ισότητα συνεχών συναρτήσεων σε διάστημα $[a, b]$, τότε θα είναι ίσα και τα ορισμένα ολοκληρώματά τους με όρια τα a και b . Έτσι:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η αντίστροφη της παραπάνω συνεπαγωγής δεν ισχύει.

Ζ. Από την ισότητα $\int_a^b f(x)dx = \int_\gamma^\delta f(x)dx$ **δεν συμπεραίνουμε** ότι $a=\gamma$ και $b=\delta$

Από την ισότητα $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ **δεν συμπεραίνουμε** ότι $f(x)=g(x)$

Η. Όταν ζητάμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα μορφής $\int_a^b g(x) \cdot f'(x)dx$ ή $\int_a^b g(x) \cdot f''(x)dx$ κ.τ.λ. συνήθως η κατάλληλη μέθοδος είναι η ολοκλήρωση κατά παράγοντες (αν φυσικά η g είναι παραγωγίσιμη).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε παραδείγματα κάποιων βασικών ολοκληρωμάτων, αναφέροντας δίπλα σε καθένα τη μέθοδο που ακολουθούμε για τον υπολογισμό του. Τα ολοκληρώματα που θα αναφέρουμε ομαδοποιούνται σε ομάδες, ανάλογα με τη μορφή της προς ολοκλήρωση συνάρτησης. Οι παρακάτω ομάδες ολοκληρωμάτων είναι απλά ενδεικτικές και η μεθοδολογία που παρουσιάζεται σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να θεωρηθεί πλήρης, καθώς στα ολοκληρώματα, πολύ μικρές αλλαγές στον τύπο της συνάρτησης, μπορεί να επιφέρουν τεράστιες διαφορές στη μέθοδο που θα εφαρμοστεί.

Άλλα ολοκληρώματα θα είναι αόριστα και άλλα ορισμένα, μια που οι μέθοδοι υπολογισμού παραμένουν ίδιες και στους δύο αυτούς τύπους ολοκληρωμάτων.

Σε κάθε ολοκλήρωμα θα δίνουμε μια ειδική μορφή του (ένα παράδειγμα) και δίπλα τη γενική μορφή στην οποία αναφέρεται η μέθοδος.

Για την εφαρμοζόμενη μέθοδο θα χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω συντομογραφίες:

(Π) θα σημαίνει «με τη βοήθεια της παράγουσας»

(ΠΟ) θα σημαίνει «με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες» (παραγοντικής ολοκλήρωσης)

(ΑΜ) θα σημαίνει «με τη βοήθεια της αλλαγής μεταβλητής»

(Τ) θα σημαίνει «με τη βοήθεια κάποιου τεχνάσματος»

Σε κάποιες περιπτώσεις θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε συνδυασμό των παραπάνω μεθόδων.

Η πορεία του υπολογισμού των παρακάτω ολοκληρωμάτων περιγράφεται αναλυτικά, μετά το τέλος της μεθοδολογίας (βλέπε παρακάτω λυμένα παραδείγματα).

ΟΜΑΔΑ 1: ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ Ή ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ		
<i>ΕΙΔΙΚΗ ΜΟΡΦΗ</i>	<i>ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ</i>	<i>ΜΕΘΟΔΟΣ-ΥΠΟΔΕΙΞΗ</i>
$I_1 = \int (2x^5 - 3x^3 + x^2 - 3x + 2) dx$	$\int (a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0) dx,$ $a_v \neq 0$	(Π)
$I_2 = \int (2x + 3)^4 dx$	$\int (ax + \beta)^v dx, v > 0, a \neq 0$	(Π) προκύπτει από δύναμη
$I_3 = \int_1^e \frac{2}{2x-1} dx$	$\int \frac{a}{\beta x + \gamma} dx, a, \beta \neq 0$	(Π) προκύπτει από λογάριθμο

ΕΙΔΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	ΜΕΘΟΔΟΣ-ΥΠΟΔΕΙΞΗ
$I_4 = \int_0^1 \frac{3}{(2x+1)^3} dx$	$\int \frac{a}{(\beta x + \gamma)^v} dx, \quad v > 0, v \neq 1, a, \beta \neq 0$	(Π) είναι σαν το I_2
$I_5 = \int \frac{3x^3 - 2x + \sqrt{x} - 3(\sqrt[3]{x})^2}{x\sqrt{x}} dx, \quad x > 0$	$\int \frac{a_1 x^{v_1} + a_2 x^{v_2} + \dots + a_k x^{v_k}}{\lambda \cdot x^\rho} dx, \quad v_1, v_2, \dots, v_k, \rho \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^*$	(Τ)-(Π) "σπάμε" το κλάσμα
$I_6 = \int_0^1 \frac{4x+1}{2x^2+x+1} dx$	$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \quad \text{όπου } P(x), Q(x) \text{ πολυώνυμα με την } \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ να έχει «προφανή» παράγουσα}$	(Π) ή (ΑΜ) (Αριθμ)=(Παρονομ)'
$I_7 = \int \frac{3x+2}{x^3-2x^2-x+2} dx$	$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \quad \text{όπου } P(x), Q(x) \text{ πολυώνυμα με βαθμ}P(x) < \text{βαθμ}Q(x) \text{ και το } Q(x) \text{ να αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων}$	(Τ)-(Π) "σπάσιμο" με Α και Β
$I_8 = \int \frac{x^4-2x+3}{x^2+2x} dx$	$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \quad \text{όπου } P(x), Q(x) \text{ πολυώνυμα με βαθμ}P(x) \geq \text{βαθμ}Q(x) \text{ και το } Q(x) \text{ να αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων}$	(Τ)-(Π) διαίρεση και μετά "σπάσιμο" με Α και Β
$I_9 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$		(ΑΜ) $x = \varphi(u) = \tan u$

ΟΜΑΔΑ 2: ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΕΙΔΙΚΕΣ**ΜΟΡΦΕΣ ΑΡΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ x ΟΠΩΣ $\sqrt{p^2 - x^2}$ ή $\sqrt{x^2 - p^2}$**

ΕΙΔΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	ΜΕΘΟΔΟΣ-ΥΠΟΔΕΙΞΗ
$I_{10} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{a}{\sqrt{p^2 - x^2}} dx, \quad a \neq 0$	(ΑΜ) $x = \varphi(u) = p \cdot \eta \mu u$
$I_{11} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$	$\int \sqrt{p^2 - x^2} dx$	(ΑΜ) $x = \varphi(u) = p \cdot \eta \mu u$
$I_{12} = \int_{2\sqrt{3}}^6 \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} dx$	$\int \frac{a}{\sqrt{x^2 - p^2}} dx$	(ΑΜ) $x = \varphi(u) = \frac{p}{\eta \mu u}$
$I_{13} = \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx$	$\int \frac{\sqrt{x^2 - p^2}}{x^4} dx$	(ΑΜ) $x = \varphi(u) = \frac{p}{\eta \mu u}$

ΟΜΑΔΑ 3: ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥ		
<i>ΕΙΔΙΚΗ ΜΟΡΦΗ</i>	<i>ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ</i>	<i>ΜΕΘΟΔΟΣ-ΥΠΟΔΕΙΞΗ</i>
$I_{14} = \int \eta\mu(2x + \pi) dx$	$\int \eta\mu(ax + \beta) dx,$ $a \neq 0$	(Π)
$I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu(4x) dx$	$\int \sigma\upsilon\nu(ax + \beta) dx,$ $a \neq 0$	(Π)
$I_{16} = \int \epsilon\phi 2x dx$	$\int \epsilon\phi(ax + \beta) dx,$ $a \neq 0$	(Τ)-(Π) Γράφουμε την εφαπτ = $\frac{\eta\mu\iota\tau}{\sigma\upsilon\nu\eta\mu}$ και στη συνέχεια (Αριθμ)=(Παρονομ) '
$I_{17} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \epsilon\phi^2 x dx$	$\int \epsilon\phi^2(ax + \beta) dx,$ $a \neq 0$	(Τ)-(Π) Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\epsilon\phi^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1$
$I_{18} = \int \epsilon\phi^4 x dx$	$\int \epsilon\phi^v(ax + \beta) dx,$ $a \neq 0, v \in \mathbb{N}^*, v > 2$	(Τ)-(Π) "Σπάμε" τη δύναμη της εφαπτομένης σε γινόμενο δύο δυνάμεων εμφανίζοντας το τετράγωνο, το οποίο στη συνέχεια το γράφουμε όπως στο I_{17} . Τελικά για να υπολογίσουμε το $\int \epsilon\phi^v x dx$, θα καταλήξουμε να ζητάμε το $\int \epsilon\phi^{v-2} x dx$
$I_{19} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^3 x - \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} dx$	$\int f(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x) dx$ όπου f ρητή συνάρτηση ως προς $\eta\mu x$ ή (και) $\sigma\upsilon\nu x$	(ΑΜ)-(Τ) • Αν f περιττή ως προς $\eta\mu x$, (δηλαδή αν θέτοντας στην f όπου $\eta\mu x$ το $-\eta\mu x$, προκύπτει το αντίθετο αποτέλεσμα), θέτουμε $u = \phi(x) = \sigma\upsilon\nu x$ (βλέπε και I_{22}) • Αν f περιττή ως προς $\sigma\upsilon\nu x$, θέτουμε $u = \phi(x) = \eta\mu x$ (βλέπε και I_{23}) • Αν f άρτια και ως προς $\eta\mu x$ και ως προς $\sigma\upsilon\nu x$, (δηλαδή αν θέτοντας στην f όπου $\eta\mu x$ το $-\eta\mu x$ και όπου $\sigma\upsilon\nu x$ το $-\sigma\upsilon\nu x$, το αποτέλεσμα δεν αλλάζει), χρησιμοποιούμε τους τύπους $\eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ (βλέπε και $I_{20} - I_{21}$)

		Σε άλλες περιπτώσεις ή εμφανίζουμε την εφχ στον τύπο της f και θέτουμε $u=\varphi(x)=\varepsilon\varphi x$ ή εκφράζουμε τα $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$ με τη βοήθεια της $\varepsilon\varphi \frac{x}{2}$ με τις σχέσεις: $\eta\mu x = \frac{2\varepsilon\varphi \frac{x}{2}}{1 + \varepsilon\varphi^2 \frac{x}{2}}, \quad \sigma\upsilon\nu x = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2 \frac{x}{2}}{1 + \varepsilon\varphi^2 \frac{x}{2}}$ και θέτουμε $u=\varphi(x)=\varepsilon\varphi \frac{x}{2}$ (οι οποίες θα δίνονται)
$I_{20} = \int \eta\mu^2 x \, dx$	$\int \eta\mu^{2v}(ax + \beta) \, dx,$ $v \in \mathbb{N}^*, a \neq 0$	(Τ)-(Π) Επειδή η συνάρτηση είναι άρτια ως προς ημίτονο, χρησιμοποιούμε τη σχέση $\eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$
$I_{21} = \int \sigma\upsilon\nu^4 \frac{x}{2} \, dx$	$\int \sigma\upsilon\nu^{2v}(ax + \beta) \, dx,$ $v \in \mathbb{N}^*, a \neq 0$	(Τ)-(Π) Επειδή η συνάρτηση είναι άρτια ως προς συνημίτονο, χρησιμοποιούμε τη σχέση $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$
$I_{22} = \int \eta\mu^3 x \, dx$	$\int \eta\mu^{2v+1}(ax + \beta) \, dx,$ $v \in \mathbb{N}, a \neq 0$	(Τ)-(ΑΜ) Επειδή η συνάρτηση είναι περιττή ως προς ημίτονο, θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu(ax + \beta)$
$I_{23} = \int \sigma\upsilon\nu^5 x \, dx$	$\int \sigma\upsilon\nu^{2v+1}(ax + \beta) \, dx,$ $v \in \mathbb{N}, a \neq 0$	(Τ)-(ΑΜ) Επειδή η συνάρτηση είναι περιττή ως προς συνημίτονο, θέτουμε $u = \eta\mu(ax + \beta)$
$I_{24} = \int x^2 \cdot \eta\mu 2x \, dx$	$\int f(x) \cdot \eta\mu(ax + \beta) \, dx$ ή $\int f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu(ax + \beta) \, dx$ $a \neq 0$, όπου $f(x)$ πολυώνυμο του x	(ΠΟ)
$I_{25} = \int_0^\pi \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu(2x + \frac{\pi}{3}) \, dx$	$\int \eta\mu(ax + \beta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta) \, dx$ ή $\int \eta\mu(ax + \beta) \cdot \eta\mu(\gamma x + \delta) \, dx$ ή $\int \sigma\upsilon\nu(ax + \beta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta) \, dx$ $a \neq 0, \gamma \neq 0$	(Τ)-(Π) Μετατρέπουμε τα γινόμενα σε αθροίσματα με βάση τους τύπους $2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta)$, $2\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$, $2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$, οι οποίοι θα δίνονται.

ΟΜΑΔΑ 4: ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ		
<i>ΕΙΔΙΚΗ ΜΟΡΦΗ</i>	<i>ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ</i>	<i>ΜΕΘΟΔΟΣ-ΥΠΟΔΕΙΞΗ</i>
$I_{26} = \int_0^1 e^{2x+3} dx$	$\int e^{ax+\beta} dx, a \neq 0$	(Π)
$I_{27} = \int 2^{3x} dx$	$\int a^{\beta x+\gamma} dx, \beta \neq 0$	(Π)
$I_{28} = \int_0^1 (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{2x} dx$	$\int f(x) \cdot e^{ax+\beta} dx, a \neq 0$ και $f(x)$ πολυώνυμο του x	(ΠΟ)
$I_{29} = \int_1^e \frac{e^{2x} - 3e^x}{e^{3x} - e^x} dx$	$\int f(e^{ax}) dx, a \neq 0$	(ΑΜ) $u = \varphi(x) = e^{ax}$
$I_{30} = \int e^{2x} \cdot \eta\mu x dx$	$\int e^{ax+\beta} \cdot \eta\mu(\gamma x + \delta) dx$ ή $\int e^{ax+\beta} \cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta) dx, a \neq 0, \gamma \neq 0$	(ΠΟ) "Κλασικό ολοκλήρωμα" Δύο φορές ΠΟ και "Ξαναγυρνάει" στο αρχικό
$I_{31} = \int e^x \cdot x \cdot \eta\mu x dx$	$\int f(x) \cdot e^{ax+\beta} \cdot \eta\mu(\gamma x + \delta) dx$ ή $\int f(x) \cdot e^{ax+\beta} \cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta) dx, a \neq 0, \gamma \neq 0$, όπου f πολυώνυμο του x	(ΠΟ) θεωρώντας συνήθως ως g την $f(x) \cdot \eta\mu(\gamma x + \delta)$ ή $f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta)$ αντίστοιχα

ΟΜΑΔΑ 5: ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ		
<i>ΕΙΔΙΚΗ ΜΟΡΦΗ</i>	<i>ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ</i>	<i>ΜΕΘΟΔΟΣ-ΥΠΟΔΕΙΞΗ</i>
$I_{32} = \int_1^e \ln(x+1) dx$	$\int \ln g(x) dx$	(ΠΟ) "Κλασικό ολοκλήρωμα" χρησιμοποιώντας τον "άγνωστο φάντασμα" $(x)'$
$I_{33} = \int (x^2 + 1) \cdot \ln x dx$	$\int f(x) \cdot \ln g(x) dx, \text{ όπου } f(x)$ πολυώνυμο του x	(ΠΟ)
$I_{34} = \int_1^e \frac{x}{x^2 + 5} \cdot \ln(x^2 + 5) dx$	$\int \frac{f(x)}{h(x)} \cdot [\ln g(x)]^k dx, k \neq 0, h(x) \neq 0, f, h$ πολυώνυμα του x	(Π) (ίσως μορφής $[\ln g(x)]^{k+1}$) ή (ΑΜ) ή (ΠΟ)

ΟΜΑΔΑ 6: ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ

Έστω ότι ζητάμε το $\int_a^b f(x) dx$ συνάρτησης f ορισμένης στο $[a, \beta]$ με

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{αν } x \in [a, a_1] \\ f_2(x), & \text{αν } x \in (a_1, a_2] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_v(x), & \text{αν } x \in (a_{v-1}, \beta] \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(τα υποδιαστήματα μπορεί να διαφοροποιούνται} \\ \text{όσον αφορά στο «ανοικτό» και «κλειστό», με τα} \\ \text{άκρα όμως } a \text{ και } \beta \text{ πάντα κλειστά)} \end{array}$$

Τότε:

- Δείχνουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$
- Υπολογίζουμε με τη σχέση του Chasles το ολοκλήρωμα, γράφοντας

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f_1(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f_2(x) dx + \dots + \int_{a_{v-1}}^{\beta} f_v(x) dx.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

- Αν μας δίνουν ή γνωρίζουμε την παράγουσα F της f στο $[a, \beta]$, η οποία προφανώς θα είναι πολλαπλού τύπου, τότε μπορούμε απ' ευθείας να γράψουμε

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b.$$

- Αν δεν μας δίνουν την παράγουσα της f , αλλά «υποψιαζόμαστε» ότι είναι κάποια

$$\text{συνάρτηση } F \text{ της μορφής } F(x) = \begin{cases} F_1(x), & \text{αν } x \in [a, a_1] \\ F_2(x), & \text{αν } x \in (a_1, a_2] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_v(x), & \text{αν } x \in (a_{v-1}, \beta] \end{cases},$$

πριν ισχυριστούμε κάτι τέτοιο, θα πρέπει να δείξουμε ότι:

- Η F είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και ότι
- $F'_1 = f_1, F'_2 = f_2, \dots, F'_v = f_v.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 35: $I_{35} = \int_{-1}^2 f(x) dx$ με $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 2x^2 - x, & 0 < x \leq 2 \end{cases}.$

ΟΜΑΔΑ 7: ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Αναλύουμε τον τύπο της συνάρτησης σε πολλαπλό, χρησιμοποιώντας πίνακα προσήμων των παραστάσεων που βρίσκονται εντός των απολύτων και στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως στην ομάδα 6.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 36: $I_{36} = \int_{-1}^3 (|2x+1| - x^2) dx$

2. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Όταν μας ζητούν να αποδείξουμε μια σχέση με ολοκληρώματα ή να υπολογίσουμε κάποια πολύπλοκα ολοκληρώματα, **πρώτα** ελέγχουμε αν η λύση επιτυγχάνεται μέσα από τη χρήση κατάλληλων ιδιοτήτων, από αυτές που αναφέραμε στη θεωρία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 37, 38

3. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΟΡΙΣΜΕΝΗ ΑΠΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Συνήθως ζητάμε να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας τέτοιας συνάρτησης. Πέρα από την κλασσική μορφή $\int_a^x f(t) dt$, όπου f συνεχής σε διάστημα Δ , $a \in \Delta$, που έχει παράγωγο $f(x)$, $x \in \Delta$, δεν λησμονούμε και τις μορφές $\int_x^a f(t) dt$, $\int_a^{g(x)} f(t) dt$, $\int_{g(x)}^a f(t) dt$, $\int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(t) dt$, οι οποίες παραγωγίζονται με τους τρόπους που αναφέραμε στη θεωρία (βλέπε παράγραφο "ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΟΡΙΣΜΕΝΗ ΑΠΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ"). Επίσης **δεν ξεχνάμε, πριν παραγωγίσουμε, να αναφέρουμε αναλυτικά που είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση, σύνολο που είναι και το πεδίο ορισμού της.**

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ▼

- Άλλο είναι το $\int_a^x f(t) dt$ και άλλο το $\int_a^x f(t) d\omega$.

Για το πρώτο έχουμε $\int_a^x f(t) dt = [F(t)]_a^x$, ενώ για το δεύτερο, αν το t είναι ανεξάρτητο του ω , έχουμε $\int_a^x f(t) d\omega = f(t) \cdot \int_a^x d\omega = f(t) \cdot (x - a)$, καθώς τότε το $f(t)$ θεωρείται (για το ολοκλήρωμα) σταθερή ποσότητα (δεν εξαρτάται από το ω).

- Στο ολοκλήρωμα $\int_a^x f(x) \cdot g(t) dt$, αν η ποσότητα $f(x)$ είναι ανεξάρτητη του t , μπορεί να "περάσει" έξω από το ολοκλήρωμα (καθώς η ολοκλήρωση γίνεται ως προς t).

Έτσι αν ζητάμε την παράγωγο του ολοκληρώματος ως προς x (και ισχύουν οι γνωστές προϋποθέσεις g συνεχής σε Δ και $a \in \Delta$) έχουμε:

$$\begin{aligned} \left(\int_a^x f(x) \cdot g(t) dt \right)' &= \left(f(x) \cdot \int_a^x g(t) dt \right)' \stackrel{\text{παραγωγός}}{\underset{\text{γινόμενου}}{=}} f'(x) \cdot \int_a^x g(t) dt + f(x) \cdot \left(\int_a^x g(t) dt \right)' = \\ &= f'(x) \cdot \int_a^x g(t) dt + f(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$

Αντίθετα στο $I = \int_a^x f(x-t) dt$ όταν θέλουμε να παραγωγίσουμε, δεν είναι εύκολο να «απομονωθεί» το x από το t . Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μόνο με αλλαγή μεταβλητής. Έτσι θέτουμε $u = x - t$, οπότε $du = (x-t)' dt = -dt$,

παραγωγίζουμε ως προς t

$u_1 = x - a$ και $u_2 = 0$. Έτσι $I = \int_{x-a}^0 -f(u) du = \dots$

- Άλλο είναι το $\int_a^x f'(t) dt$ και άλλο το $(\int_a^x f(t) dt)'$.

Το πρώτο είναι το ολοκλήρωμα της παραγώγου της f ως προς t και ισούται με $f(x) - f(a)$, όπου c συγκεκριμένο εξαρτώμενο από το a , ενώ το δεύτερο είναι η παράγωγος ως προς x του ολοκληρώματος και ισούται με $f(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 39, 40, 41, 42, 43, 44

4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΖΗΤΟΥΝ ΤΟΝ ΤΥΠΟ ΤΗΣ f

Στις ασκήσεις αυτές δίνεται συνήθως ή η f' ή μια σχέση που περιέχει παραγώγους της f (ίσως και την f) και ζητείται να υπολογίσουμε τον τύπο της f . Επίσης μπορεί να δίνεται άμεσα ή έμμεσα μια τιμή της f .

α) Αν μας δίνουν τον τύπο της f' και ζητάμε την f

Βρίσκουμε το σύνολο $f(x) + c$ των παραγουσών της f' ή

υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της f' , καθώς ισχύει ότι $\int f'(x) dx = f(x) + c$.

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και ως $f(x) = \int f'(x) dx + c$, μια που το c είναι απλά μια σταθερά.

Έτσι προσδιορίζουμε τον τύπο της f , ο οποίος περιέχει και το c . Αν επιπλέον μας δίνουν άμεσα ή έμμεσα και μια τιμή της f (π.χ. $f(1)=5$), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το c , οπότε και τον ακριβή τύπο της f .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν δεν ζητάμε τον τύπο της f , αλλά την διαφορά $f(\beta) - f(a)$ δύο τιμών της, τότε:

- ή βρίσκουμε τον τύπο της f (με το c) όπως περιγράψαμε και στη συνέχεια τη διαφορά $f(\beta) - f(a)$ (τα c , αφαιρούμενα «φεύγουν»)
- ή εναλλακτικά, υπολογίζουμε το $\int_a^\beta f'(x) dx$, καθώς αυτό μας δίνει απ' ευθείας το

$f(\beta) - f(a)$ (μην ξεχνάτε ότι $\int_a^\beta f'(x) dx = [f(x)]_a^\beta$).

β) Αν μας δίνουν μια σχέση που περιέχει παραγώγους της f (ίσως και την f) και ζητάμε την f (διαφορικές εξισώσεις)

Η περίπτωση αυτή εξετάστηκε μερικώς και στις παραγώγους και συγκεκριμένα κατά τη μεθοδολογία μετά το θεώρημα της σταθερής συνάρτησης. Συμπληρώνοντας εδώ τη μεθοδολογία αυτή, έχουμε επιπροσθέτως ότι: αν η εξίσωσή μας έρχεται στη μορφή $(A(f(x)))' = B(x)$, όπου $A(f(x))$ παράσταση της $f(x)$ και $B(x)$ παράσταση του x , τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $A(f(x)) = \int B(x) dx + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Έτσι τελικά η πλήρης μεθοδολογία έχει ως εξής:

Αν η εξίσωση καταλήγει σε:

- $(A(f(x)))' = 0$, τότε από το θεώρημα της σταθερής συνάρτησης είναι $A(f(x)) = c$, απ' όπου βρίσκουμε την $f(x)$ (*).
- $(A(f(x)))' = (B(x))'$, τότε από γνωστό θεώρημα των παραγώγων είναι $A(f(x)) = B(x) + c$, απ' όπου βρίσκουμε την $f(x)$ (*).
- $(A(f(x)))' = (A(f(x)))$, τότε από γνωστή εφαρμογή ισχύει $A(f(x)) = c \cdot e^x$, απ' όπου βρίσκουμε την $f(x)$ (*).
- ~~$(A(f(x)))' = B(x)$, τότε $A(f(x)) = \int B(x) dx + c$, απ' όπου βρίσκουμε την $f(x)$ (*).~~

(*) Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να προσδιορίσουμε το c , αν μας δίνουν άμεσα ή έμμεσα μια τιμή της f .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 45, 46, 47, 48, 49, 50

5. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ (Ή ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ)

Από τη θεωρία ισχύουν οι ιδιότητες:

- A.** Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x) dx \geq 0$.
- B.** Ειδικά στην περίπτωση που $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, **αλλά δεν είναι παντού ίση με μηδέν**, ισχύει ότι $\int_a^\beta f(x) dx > 0$.

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι ισχύουν και οι παρακάτω ιδιότητες (την ιδιότητα **Γ** μπορούμε να την χρησιμοποιούμε **χωρίς απόδειξη**):

- Γ. ■** Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε ισχύει $\int_a^\beta f(x) dx \geq \int_a^\beta g(x) dx$.
- Ειδικά αν $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [a, \beta]$, αλλά οι f και g δεν είναι ίσες στο $[a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x) dx > \int_a^\beta g(x) dx$.
- Δ.** Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$ με ελάχιστη τιμή m και μέγιστη M στο $[a, \beta]$, τότε $m \cdot (\beta - a) \leq \int_a^\beta f(x) dx \leq M \cdot (\beta - a)$.
- Ε.** Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$, τότε ισχύει $\left| \int_a^\beta f(x) dx \right| \leq \int_a^\beta |f(x)| dx$

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ Γ, Δ, Ε

Γ. ■ Είναι $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Άρα από την ιδιότητα A είναι

$$\int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx \geq \int_a^\beta g(x) dx.$$

■ Αν $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $f(x) - g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, χωρίς όμως η $f - g$ να είναι παντού ίση με 0. Άρα από την ιδιότητα Β είναι

$$\int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx > 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx > \int_a^\beta g(x) dx.$$

Δ. Αφού η f έχει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη M στο $[a, \beta]$ θα ισχύει $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [a, \beta]$. Άρα από την ιδιότητα Γ θα είναι:

$$\int_a^\beta m dx \leq \int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta M dx \Leftrightarrow m \cdot (\beta - a) \leq \int_a^\beta f(x) dx \leq M \cdot (\beta - a).$$

Ε. Για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει ως γνωστόν ότι $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ (ιδιότητα των απολύτων τιμών). Αφού οι συναρτήσεις f , $|f|$ και $-|f|$ είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$, από την ιδιότητα Γ θα ισχύει

$$-\int_a^\beta |f(x)| dx \leq \int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta |f(x)| dx \Leftrightarrow \left| \int_a^\beta f(x) dx \right| \leq \int_a^\beta |f(x)| dx \quad (\text{σχέση που προκύπτει}$$

από την ιδιότητα $-\theta \leq x \leq \theta \Leftrightarrow |x| \leq \theta$ των απολύτων τιμών).

Έχοντας γνώση των παραπάνω ιδιοτήτων μπορούμε να δώσουμε την παρακάτω γενική μεθοδολογία, όταν συναντάμε ολοκληρώματα και ανισώσεις:

α) Απόδειξη ανίσωσης που περιέχει ολοκληρώματα

Έστω, για παράδειγμα, ότι ζητάμε να δείξουμε πως

$$\boxed{A(x) \leq \int_x^{x+1} f(t) dt \leq B(x)}, \text{ για κάθε } x \in \Delta \quad (1)$$

όπου $A(x)$ και $B(x)$ παραστάσεις του x (ή αριθμοί) και Δ διάστημα.

Επιλέγουμε συνήθως έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1. Φράσσοντας την f στο $[x, x+1]$ δηλαδή $g(t) \leq f(t) \leq h(t)$ για κάθε $t \in [x, x+1]$.

Έτσι "φράσσουμε" την f από πάνω και κάτω από δύο άλλες συναρτήσεις, δηλαδή καταλήγουμε σε σχέση μορφής $g(t) \leq f(t) \leq h(t)$ για κάθε $t \in [x, x+1]$ με $x \in \Delta$, οπότε

με βάση την ιδιότητα Γ θα είναι $\int_x^{x+1} g(t) dt \leq \int_x^{x+1} f(t) dt \leq \int_x^{x+1} h(t) dt$ κ.τ.λ.

2. Με τη βοήθεια της ιδιότητας Δ παραπάνω.

«**Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$ με ελάχιστη τιμή m και μέγιστη M**

στο $[a, \beta]$, τότε $m \cdot (\beta - a) \leq \int_a^\beta f(x) dx \leq M \cdot (\beta - a)$ » που την αποδεικνύουμε μέσα

στην άσκηση. Έτσι ορίζουμε τη συνάρτηση $y=f(t)$ στο $[x, x+1]$, $x \in \Delta$, μελετάμε τη μονοτονία της, προσδιορίζουμε τα ακρότατά της m και M κ.τ.λ.

3. Ξεκινώντας από την ανισότητα $x \leq t \leq x+1$, $x \in \Delta$.

Με αφετηρία την ανισότητα $x \leq t \leq x+1$, $x \in \Delta$, προσπαθούμε να **κατασκευάσουμε** στο μεσαίο μέλος την $f(t)$, καταλήγοντας σε ανισότητα μορφής $\varphi(x) \leq f(t) \leq \varphi(x+1)$.

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε τα μέλη ως προς t , εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα Γ κ.τ.λ.

4. Ορίζοντας συνάρτηση και κάνοντας μελέτη μονοτονίας-ακροτάτων.

Αποδεικνύουμε **χωριστά** τις ανισώσεις $A(x) \leq \int_x^{x+1} f(t) dt$ και $\int_x^{x+1} f(t) dt \leq B(x)$.

Έτσι γράφουμε την πρώτη ισοδύναμα ως $A(x) - \int_x^{x+1} f(t) dt \leq 0$, ορίζουμε συνάρτηση

$h(x) = A(x) - \int_x^{x+1} f(t) dt$ στο Δ και με τη βοήθεια μονοτονίας και ακροτάτων,

προσπαθούμε να δείξουμε ότι $h(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

Όμοια αποδεικνύουμε και τη δεύτερη.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στην προσπάθειά μας να αποδείξουμε μια απλή

ανίσωση π.χ. της μορφής $A(x) \leq \int_x^{x+1} f(t) dt$ μπορούμε να εκμεταλλευτούμε ίσως

την κυρτότητα της f και τη θέση της εφαπτομένης ευθείας. Έτσι ξεκινάμε από μια ανίσωση μορφής $f(x) \geq ax + \beta$ και ολοκληρώνοντας κατάλληλα τα μέλη, καταλήγουμε στο ζητούμενο.

5. Εφαρμόζουμε ΘΜΤ σε κατάλληλη συνάρτηση στο $[x, x+1]$.

Θεωρώντας $a \in \Delta$, γράφουμε την προς απόδειξη σχέση (1) με τη βοήθεια της σχέσης του Chasles, διαδοχικά ως εξής:

$$A(x) \leq \int_x^{x+1} f(t) dt \leq B(x) \Leftrightarrow A(x) \leq \int_x^a f(t) dt + \int_a^{x+1} f(t) dt \leq B(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x) \leq \int_a^{x+1} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \leq B(x) \Leftrightarrow A(x) \leq \frac{\int_a^{x+1} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{(x+1) - x} \leq B(x) \quad (2)$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $F(\omega) = \int_a^\omega f(t) dt$, $\omega \in \Delta$.

Για την F ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $[x, x+1]$, $x \in \Delta$,
οπότε υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$, τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(x+1) - F(x)}{(x+1) - x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{\int_a^{x+1} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{(x+1) - x}.$$

Άρα αντί να δείξουμε την (2) αρκεί να δείξουμε ότι $A(x) \leq f(\xi) \leq B(x)$, την οποία αποδεικνύουμε καταλήγοντας με ισοδυναμίες σε κάτι αληθές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 51, 52

β) Αν η υπόθεση περιέχει ανίσωση με ολοκληρώματα

Τότε:

- Αν το ζητούμενο είναι μια ισότητα, συνήθως χρησιμοποιούμε το θεώρημα του Fermat, με αφετηρία την ανισότητα που μας δίνουν.
- Αν το ζητούμενο είναι η «ύπαρξη κάποιου $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιου ώστε ...», συνήθως χρησιμοποιούμε θεώρημα Bolzano ή θεώρημα Rolle ή θεώρημα Μέσης Τιμής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 53, 54

6. ΟΡΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

• Όριο στο x_0

Αν μας ζητήσουν **όριο στο x_0 συνάρτησης ορισμένης από ολοκλήρωμα**

$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^x f(t) dt$, τότε το πιθανότερο είναι ότι το όριο θα προκύψει με βάση τη

συνέχεια της συνάρτησης αυτής (π.χ. $\lim_{x \rightarrow \pi} \int_{\pi}^x \eta \mu^3 t dt = \int_{\pi}^{\pi} \eta \mu^3 t dt = 0$ αφού η

$\int_{\pi}^x \eta \mu^3 t dt$ είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο π)

ή σπανιότερα

αφού πρώτα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα.

• Όριο στο ∞

Αν μας ζητήσουν το **όριο στο $+\infty$ (ή $-\infty$)** ($\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$) τότε:

θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα και στη συνέχεια το όριο της συνάρτησης που θα προκύψει από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

ή

θα εργαστούμε με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής με την εξής πορεία:

Βρίσκουμε δύο συναρτήσεις g και h ώστε $h(t) \leq f(t) \leq g(t)$ σε μια γειτονιά του $+\infty$,

οπότε (αφού πρώτα το αποδείξουμε) θα είναι $\int_a^x h(t) dt \leq \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt$ με

x, a να ανήκουν στη γειτονιά αυτή του $+\infty$ και $x \geq a$. Αν τα ακραία ολοκληρώματα υπολογίζονται εύκολα και έχουν ίδιο όριο στο $+\infty$, τότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε το ζητούμενο όριο. Τη θέση των h και g μπορούν να πάρουν οι ακραίες τιμές της f , δηλαδή το ελάχιστο m και το μέγιστο M , αν αυτές υπάρχουν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 55, 56

7. ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Σε ασκήσεις που έχουμε διπλά ολοκληρώματα όπως $f(x) = \int_a^x \left(\int_{\beta}^t f(u) du \right) dt$, καλό

είναι να θέσουμε ως συνάρτηση το ολοκλήρωμα που βρίσκεται μέσα στο άλλο π.χ.

$g(t) = \int_{\beta}^t f(u) du$, ώστε να έχουμε μια μορφή απλούστερη ($f(x) = \int_a^x g(t) dt$) και να

αντιμετωπίσουμε τις g και f ως συναρτήσεις ορισμένες από ολοκλήρωμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 57

8. ΑΛΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τέλος υπάρχουν άλλες ασκήσεις που λύνονται κατά περίπτωση, με βάση όλα όσα έχουμε ήδη αναφέρει, δίνοντας ιδιαίτερη προσοχή στις παρατηρήσεις που προηγήθηκαν, στο μέρος της θεωρίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 58, 59, 60, 61, 62

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Τα πλάγια γράμματα στα παρακάτω παραδείγματα, αποτελούν τη σκέψη μας.

1. Να υπολογίσετε το $I_1 = \int (2x^5 - 3x^3 + x^2 - 3x + 2) dx$.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int (2x^5 - 3x^3 + x^2 - 3x + 2) dx = 2 \int x^5 dx - 3 \int x^3 dx + \int x^2 dx - 3 \int x dx + 2 \int dx = \\ &= 2 \frac{x^6}{6} - 3 \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^2}{2} + 2x + c = \frac{x^6}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \text{ διότι ως γνωστόν} \\ &\text{μια παράγουσα της δύναμης } x^v, \quad v \neq -1, \text{ είναι η } \frac{x^{v+1}}{v+1}. \end{aligned}$$

2. Να υπολογίσετε το $I_2 = \int (2x+3)^4 dx$.

Η $f(x) = (2x+3)^5$ προέρχεται πιθανώς από παραγωγή της $(2x+3)^5$. Δοκιμάζουμε:

$$[(2x+3)^5]' = 5 \cdot (2x+3)^4 \cdot (2x+3)' = 5 \cdot (2x+3)^4 \cdot 2 = 10 \cdot (2x+3)^4. \text{ Άρα}$$

$$[(2x+3)^5]' = 10 \cdot (2x+3)^4 \Leftrightarrow \frac{[(2x+3)^5]'}{10} = (2x+3)^4 \Leftrightarrow (2x+3)^4 = \left[\frac{(2x+3)^5}{10} \right]'. \text{ Άρα}$$

Έτσι μια παράγουσα της $(2x+3)^4$ είναι η $\frac{(2x+3)^5}{10}$.

$$I_2 = \int (2x+3)^4 dx = \frac{(2x+3)^5}{10} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. Να υπολογίσετε το $I_3 = \int_1^e \frac{2}{2x-1} dx$.

Η f προέρχεται πιθανώς από παραγωγή της $\ln|2x-1|$. Δοκιμάζουμε:

$$(\ln|2x-1|)' = \frac{1}{2x-1} \cdot (2x-1)' = \frac{2}{2x-1}. \text{ Άρα μια παράγουσα της } \frac{2}{2x-1} \text{ είναι η } \ln|2x-1|$$

$$\text{οπότε: } I_3 = [\ln|2x-1|]_1^e = \ln|2e-1| - \ln|2 \cdot 1 - 1| \stackrel{\text{γιατι } 2e-1 > 0}{=} \ln(2e-1) - \ln 1 = \ln(2e-1).$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Κάθε παράσταση μορφής $\frac{1}{ax+\beta}$, $a \neq 0$, έχει μία παράγουσα την $\frac{\ln|ax+\beta|}{a}$.

4. Να υπολογίσετε το $I_4 = \int_0^1 \frac{3}{(2x+1)^3} dx$.

Η $f(x) = 3 \cdot (2x+1)^{-3}$, πιθανώς να προέρχεται από την παραγωγή της $(2x+1)^{-3+1} = (2x+1)^{-2}$. Δοκιμάζουμε:

$$[(2x+1)^{-2}]' = -2 \cdot (2x+1)^{-2-1} \cdot (2x+1)' = -2 \cdot (2x+1)^{-3} \cdot 2 = -4 \cdot (2x+1)^{-3}. \text{ Άρα } (2x+1)^{-3} = \frac{[(2x+1)^{-2}]'}{-4} = \left[-\frac{(2x+1)^{-2}}{4}\right]'$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } I_4 &= 3 \cdot \int_0^1 (2x+1)^{-3} dx = 3 \cdot \left[-\frac{(2x+1)^{-2}}{4}\right]_0^1 = -\frac{3}{4} \cdot \left[\frac{1}{(2x+1)^2}\right]_0^1 \\ &= -\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{(2 \cdot 1 + 1)^2} - \frac{1}{(2 \cdot 0 + 1)^2}\right) = -\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{9} - 1\right) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

5. Να υπολογίσετε το $I_5 = \int \frac{3x^3 - 2x + \sqrt{x} - 3(\sqrt[3]{x})^2}{x\sqrt{x}} dx, x > 0.$

$$\begin{aligned} I_5 &= \int \frac{3x^3 - 2x + \sqrt{x} - 3(\sqrt[3]{x})^2}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{3x^3 - 2x + x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}}}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} dx = \\ &= \int \left(3 \frac{x^3}{x^{\frac{3}{2}}} - 2 \frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}} \right) dx = \int \left(3 \cdot x^{3-\frac{3}{2}} - 2 \cdot x^{1-\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} - 3 \cdot x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}} \right) dx = \\ &= \int \left(3x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} - 3x^{-\frac{5}{6}} \right) dx = 3 \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 2 \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \ln|x| - 3 \frac{x^{-\frac{5}{6}+1}}{-\frac{5}{6}+1} + c = \\ &= 3 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \ln x - 3 \frac{x^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}} + c = \frac{6}{5} \cdot (\sqrt{x})^5 - 4\sqrt{x} + \ln x - 18 \cdot \sqrt[6]{x} + c = \\ &= \frac{6}{5} \cdot x^2 \cdot \sqrt{x} - 4\sqrt{x} + \ln x - 18 \cdot \sqrt[6]{x} + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

6. Να υπολογίσετε το $I_6 = \int_0^1 \frac{4x+1}{2x^2+x+1} dx.$

1ος τρόπος (Π)

Επειδή $(2x^2+x+1)' = 4x+1$, η συνάρτηση έχει «προφανή» παράγουσα και έχουμε:

$$I_6 = \int_0^1 \frac{(2x^2+x+1)'}{2x^2+x+1} dx = [\ln|2x^2+x+1|]_0^1 =$$

$$= \ln|2 \cdot 1^2 + 1 + 1| - \ln|2 \cdot 0^2 + 0 + 1| = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2.$$

2ος τρόπος (ΑΜ)

Θέτουμε $u = 2x^2 + x + 1$, οπότε $du = (2x^2 + x + 1)' dx = (4x + 1) dx$. Επίσης $u_1 = 2 \cdot 0^2 + 0 + 1 = 1$ και $u_2 = 2 \cdot 1^2 + 1 + 1 = 4$.

$$\text{Άρα } I_6 = \int_1^4 \frac{du}{u} = \int_1^4 \frac{1}{u} du = [\ln|u|]_1^4 = \ln|4| - \ln|1| = \ln 4 = 2 \ln 2.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος με αλλαγή μεταβλητής πληρούνται οι **προϋποθέσεις** (βλέπε ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ 4.5-ΜΕΘΟΔΟΣ 3) που

απαιτούνται, δηλαδή η $\frac{1}{u}$ να είναι συνεχής στο $[1, 4]$ και η συνάρτηση $\varphi(x)=2x^2+x+1$ που χρησιμοποιήσαμε στην αλλαγή μεταβλητής, να είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με συνεχή παράγωγο. **Στα επόμενα δεν θα αναφέρουμε ξανά τον έλεγχο αυτών των προϋποθέσεων, εάν ικανοποιούνται.**

7. Να υπολογίσετε το $I_7 = \int \frac{3x+2}{x^3-2x^2-x+2} dx$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση δεν έχει «προφανή» παράγουσα, ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή και ο παρονομαστής παραγοντοποιείται.

Έχουμε ότι $x^3-2x^2-x+2=x^2 \cdot (x-2)-(x-2)=(x-2) \cdot (x^2-1)=(x-2) \cdot (x-1) \cdot (x+1)$.

Έστω ότι υπάρχουν $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε $\frac{3x+2}{x^3-2x^2-x+2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{x+1}$, για

κάθε $x \neq 2, -1, 1$. Τότε κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών έχουμε:

$$3x+2 = A \cdot (x-1) \cdot (x+1) + B \cdot (x-2) \cdot (x+1) + \Gamma \cdot (x-2) \cdot (x-1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x+2 = (A+B+\Gamma) \cdot x^2 - (B+3\Gamma) \cdot x - (A+2B-2\Gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+\Gamma=0 \\ -(B+3\Gamma)=3 \\ -(A+2B-2\Gamma)=2 \end{cases}, \text{ με βάση την ισότητα}$$

των δύο πολυωνύμων των δύο μελών. Λύνοντας το σύστημα έχουμε $A = \frac{8}{3}$, $B = -\frac{5}{2}$,

$$\Gamma = -\frac{1}{6}.$$

$$\begin{aligned} \text{Έτσι } I_7 &= \int \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{8}{3} \cdot \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{5}{2} \cdot \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{6} \cdot \int \frac{1}{x+1} dx = \\ &= \frac{8}{3} \cdot \ln|x-2| - \frac{5}{2} \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{6} \cdot \ln|x+1| + c. \end{aligned}$$

Το τελικό αποτέλεσμα θα μπορούσε να έχει διαφορετική «εμφάνιση», αν εφαρμόζαμε ιδιότητες λογαρίθμων.

8. Να υπολογίσετε το $I_8 = \int \frac{x^4-2x+3}{x^2+2x} dx$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση δεν έχει «προφανή» παράγουσα, ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή και ο παρονομαστής παραγοντοποιείται. Κάνουμε τη διαίρεση $(x^4-2x+3):(x^2+2x)$.

$x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 3$	$x^2 + 2x$
$-x^4 - 2x^3$	$x^2 - 2x + 4$
$-2x^3 + 0x^2 - 2x + 3$	
$2x^3 + 4x^2$	
$4x^2 - 2x + 3$	
$-4x^2 - 8x$	
$-10x + 3$	

Η ταυτότητα της διαίρεσης δίνει:
 $x^4-2x+3 = (x^2+2x) \cdot (x^2-2x+4) + (-10x+3)$

Έτσι

$$I_8 = \int \frac{(x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 2x + 4) + (-10x + 3)}{x^2 + 2x} dx = \int \left[\frac{\cancel{(x^2 + 2x)} \cdot (x^2 - 2x + 4)}{\cancel{x^2 + 2x}} + \frac{-10x + 3}{x^2 + 2x} \right] dx =$$

$$= \int (x^2 - 2x + 4) dx + \int \frac{-10x + 3}{x^2 + 2x} dx = J_1 + J_2, \text{ όπου } J_1, J_2 \text{ τα δύο αυτά ολοκληρώματα.}$$

$$\text{Είναι: } J_1 = \int (x^2 - 2x + 4) dx = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 4x + c_1 = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Όσον αφορά στο J_2 επειδή είναι της μορφής I_7 , με τον παρονομαστή να αναλύεται σε γινόμενο $x \cdot (x+2)$, εργαζόμενοι με τους συντελεστές Α και Β (όπως στο I_7 -ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7), καταλήγουμε ότι $J_2 = \frac{3}{2} \cdot \ln|x| - \frac{23}{2} \cdot \ln|x+2| + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$

$$\text{Άρα τελικά } I_8 = J_1 + J_2 = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 4x + \frac{3}{2} \cdot \ln|x| - \frac{23}{2} \cdot \ln|x+2| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στο προηγούμενο αποτέλεσμα αντικαταστήσαμε το άθροισμα $c_1 + c_2$ με c .

$$\mathbf{9.} \text{ Να υπολογίσετε το } I_9 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Η f δεν έχει «προφανή» παράγουσα και ο παρονομαστής της δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων. Άρα δεν είναι δυνατόν να εργαστούμε όπως στα I_6 και I_7 .

Εφαρμόζουμε αλλαγή μεταβλητής $x = \varphi(u) = \tan u$ με $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (καθώς η $\tan u$ είναι περιοδική με περίοδο π , οπότε παίρνει όλες τις τιμές στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

Προφανώς η φ είναι «1-1» (γνωστή ιδιότητα της εφαπτομένης) και τα νέα όρια ολοκλήρωσης κ, λ βρίσκονται ως εξής:

$$0 = \tan \kappa \Leftrightarrow \kappa = 0 \quad \text{και} \quad 1 = \tan \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{\pi}{4}.$$

Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \frac{\pi}{4}]$ με συνεχή παράγωγο και $dx = \varphi'(u)$

$$du = (\tan u)' du = \frac{1}{\sin^2 u} du.$$

$$\text{Έτσι } I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 u} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 u} \cdot \frac{1}{\sin^2 u} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cancel{\sin^2 u} \cdot \cancel{\sin^2 u}} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} du = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\frac{1}{1 + \tan^2 u} = \cos^2 u$, την οποία

υπενθυμίσαμε και στη θεωρία.

10. Να υπολογίσετε το $I_{10} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Εφαρμόζουμε αλλαγή μεταβλητής $x = \varphi(u) = \eta\mu u$ με $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (ώστε το ημίτονο να παίρνει όλες τις δυνατές τιμές).

Η φ είναι «1-1» στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και τα νέα όρια της ολοκλήρωσης κ, λ υπολογίζονται ως εξής:

$$0 = \eta\mu\kappa \Leftrightarrow \kappa = 0 \quad \text{και} \quad \frac{1}{2} = \eta\mu\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{\pi}{6}$$

Επίσης η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \frac{\pi}{6}]$ με συνεχή παράγωγο και

$dx = \varphi'(u) du = (\eta\mu u)' du = \sigma\upsilon\nu u du$. Έτσι:

$$I_{10} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sigma\upsilon\nu u du}{\sqrt{1-\eta\mu^2 u}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sigma\upsilon\nu u}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 u}} du = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sigma\upsilon\nu u}{\sigma\upsilon\nu u} du = \int_0^{\frac{\pi}{6}} du = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: $\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 u} = \sigma\upsilon\nu u$, γιατί $\sigma\upsilon\nu u > 0$ στο $[0, \frac{\pi}{6}]$.

11. Να υπολογίσετε το $I_{11} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Εφαρμόζουμε αλλαγή μεταβλητής $x = \varphi(u) = \eta\mu u$ με $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (ώστε το ημίτονο να παίρνει όλες τις δυνατές τιμές).

Η φ είναι «1-1» στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και τα νέα όρια της ολοκλήρωσης κ, λ υπολογίζονται ως εξής:

$$0 = \eta\mu\kappa \Leftrightarrow \kappa = 0 \quad \text{και} \quad 1 = \eta\mu\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{\pi}{2}$$

Επίσης η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ με συνεχή παράγωγο και

$dx = \varphi'(u) du = (\eta\mu u)' du = \sigma\upsilon\nu u du$. Έτσι:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\eta\mu^2 u} \cdot \sigma\upsilon\nu u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 u} \cdot \sigma\upsilon\nu u du \stackrel{\substack{\sigma\upsilon\nu u \geq 0 \\ \text{στο } [0, \frac{\pi}{2}]}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu u \cdot \sigma\upsilon\nu u du = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2u}{2} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu 2u}{2} du = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \left[\frac{\eta\mu 2u}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\eta\mu\pi}{4} - \frac{\eta\mu 0}{4} = \frac{\pi}{4} + 0 - 0 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Μια παράγουσα της $\frac{\sin 2u}{2}$ είναι η $\frac{\eta\mu 2u}{4}$ γιατί

$$\left(\frac{\eta\mu 2u}{4}\right)' = \frac{\sin 2u \cdot (2u)'}{4} = \frac{2\sin 2u}{4} = \frac{\sin 2u}{2}.$$

12. Να υπολογίσετε το $I_{12} = \int_{2\sqrt{3}}^6 \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} dx$.

Εφαρμόζουμε αλλαγή μεταβλητής $x = \varphi(u) = \frac{3}{\eta\mu u}$, με $u \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$. Η φ είναι

«1-1» στο $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$.

Τα νέα όρια ολοκλήρωσης κ, λ υπολογίζονται ως εξής:

$$2\sqrt{3} = \frac{3}{\eta\mu \kappa} \Leftrightarrow \eta\mu \kappa = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \stackrel{\kappa \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]}{\Leftrightarrow} \kappa = \frac{\pi}{3}$$

$$6 = \frac{3}{\eta\mu \lambda} \Leftrightarrow \eta\mu \lambda = \frac{1}{2} \stackrel{\lambda \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]}{\Leftrightarrow} \lambda = \frac{\pi}{6}.$$

Επίσης η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ με συνεχή παράγωγο.

$$dx = \varphi'(u) du = \left(\frac{3}{\eta\mu u}\right)' du = -3 \cdot \frac{(\eta\mu u)'}{\eta\mu^2 u} du = -\frac{3\sigma\upsilon\nu u}{\eta\mu^2 u} du. \text{ Έτσι:}$$

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{\eta\mu u}\right)^2 - 9}} \cdot \frac{-3\sigma\upsilon\nu u}{\eta\mu^2 u} du = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{\frac{9-9\eta\mu^2 u}{\eta\mu^2 u}}} \cdot \frac{-3\sigma\upsilon\nu u}{\eta\mu^2 u} du = \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{3}{\eta\mu u} \sqrt{1-\eta\mu^2 u}} \cdot \frac{-3\sigma\upsilon\nu u}{\eta\mu^2 u} du = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu u}{3\sigma\upsilon\nu u} \cdot \frac{-3\sigma\upsilon\nu u}{\eta\mu^2 u} du = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} -\frac{1}{\eta\mu u} du. \end{aligned}$$

Θεωρώντας $g(u) = -\frac{1}{\eta\mu u}$, αυτή είναι περιττή ως προς $\eta\mu u$, καθώς $g(-\eta\mu u) = -g(\eta\mu u)$.

Τότε, καθώς αναφέραμε στη μεθοδολογία του I_{23} , θέτουμε $\omega = t(u) = \sigma\upsilon\nu u$, οπότε

$$d\omega = (\sigma\upsilon\nu u)' du = -\eta\mu u du \Leftrightarrow du = -\frac{d\omega}{\eta\mu u}.$$

$$\text{Άρα } -\frac{1}{\eta\mu u} du = -\frac{1}{\eta\mu u} \cdot \left(-\frac{d\omega}{\eta\mu u}\right) = \frac{d\omega}{\eta\mu^2 u} = \frac{d\omega}{1-\sigma\upsilon\nu^2 u} = \frac{d\omega}{1-\omega^2}.$$

Τα νέα όρια της ολοκλήρωσης είναι $\omega_1 = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ και $\omega_2 = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Άρα $I_{12} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{d\omega}{1-\omega^2} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(1-\omega) \cdot (1+\omega)} d\omega$, το οποίο υπολογίζεται με τη διάσπαση του κλάσματος σε άθροισμα κλασμάτων (με τα A και B), όπως το ολοκλήρωμα I_7 .

13. Να υπολογίσετε το $I_{13} = \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx$.

Εφαρμόζουμε αλλαγή μεταβλητής $x = \varphi(u) = \frac{3}{\eta\mu u}$, με $u \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$. Η φ είναι

«1-1» στο $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$.

Τα νέα όρια ολοκλήρωσης κ, λ υπολογίζονται ως εξής:

$$3 = \frac{3}{\eta\mu\kappa} \Leftrightarrow \eta\mu\kappa = 1 \quad \kappa \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow \kappa = \frac{\pi}{2}$$

$$6 = \frac{3}{\eta\mu\lambda} \Leftrightarrow \eta\mu\lambda = \frac{1}{2} \quad \lambda \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow \lambda = \frac{\pi}{6}.$$

Επίσης η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ με συνεχή παράγωγο.

$$dx = \varphi'(u) du = \left(\frac{3}{\eta\mu u}\right)' du = -3 \cdot \frac{(\eta\mu u)'}{\eta\mu^2 u} du = -\frac{3\sigma\upsilon\nu u}{\eta\mu^2 u} du. \text{ Έτσι:}$$

$$\begin{aligned} I_{13} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\frac{9}{\eta\mu^2 u} - 9}}{\left(\frac{3}{\eta\mu u}\right)^4} \cdot \left(-\frac{3\sigma\upsilon\nu u}{\eta\mu^2 u}\right) du = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{9 \cdot (1 - \eta\mu^2 u)}}{\frac{81}{\eta\mu^4 u}} \cdot \frac{-3\sigma\upsilon\nu u}{\eta\mu^2 u} du = \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sigma\upsilon\nu u}{\frac{81}{\eta\mu^4 u}} \cdot \frac{-3\sigma\upsilon\nu u}{\eta\mu^2 u} du = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-9\sigma\upsilon\nu^2 u \cdot \eta\mu^4 u}{81 \cdot \eta\mu^3 u} du = \frac{1}{9} \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 u \cdot (-\eta\mu u) du = \\ &= \frac{1}{9} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 u \cdot (\sigma\upsilon\nu u)' du = \frac{1}{9} \left[\frac{\sigma\upsilon\nu^3 u}{3} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{27} \left[\sigma\upsilon\nu^3 u \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{27} \cdot \left(\sigma\upsilon\nu^3 \frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu^3 \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \frac{1}{27} \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 0^3 \right) = \frac{3\sqrt{3}}{27} = \frac{\sqrt{3}}{18}. \end{aligned}$$

14. Να υπολογίσετε το $I_{14} = \int \eta\mu(2x + \pi) dx$.

Η συνάρτηση $\eta\mu(2x + \pi)$ προέρχεται πιθανώς από παραγωγή της $\sigma\upsilon\nu(2x + \pi)$. Δοκιμάζουμε:

$$[\sigma\upsilon\nu(2x + \pi)]' = -\eta\mu(2x + \pi) \cdot (2x + \pi)' = -\eta\mu(2x + \pi) \cdot 2.$$

Άρα $\eta\mu(2x + \pi) = -\frac{[\sin(2x + \pi)]'}{2} = \left[-\frac{\sin(2x + \pi)}{2}\right]',$ οπότε $I_{14} = -\frac{\sin(2x + \pi)}{2} + c,$
 $c \in \mathbb{R}.$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Γενικά μια παράγουσα της $\eta\mu(ax + \beta), a \neq 0,$ είναι πάντα η $-\frac{\sin(ax + \beta)}{a}.$

15. Να υπολογίσετε το $I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(4x) dx.$

Η $\sin 4x$ προέρχεται πιθανώς από παραγώγιση της $\eta\mu 4x$. Δοκιμάζουμε:

$$(\eta\mu 4x)' = \sin 4x \cdot (4x)' = 4 \cdot \sin 4x. \text{ Άρα } \sin 4x = \left(\frac{\eta\mu 4x}{4}\right)'.$$

$$\text{Έτσι } I_{15} = \left[\frac{\eta\mu 4x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \cdot (\eta\mu 4 \cdot \frac{\pi}{2} - \eta\mu 4 \cdot 0) = \frac{1}{4} \cdot (0 - 0) = 0.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Γενικά μια παράγουσα της $\sin(ax + \beta), a \neq 0,$ είναι πάντα η $\frac{\eta\mu(ax + \beta)}{a}.$

16. Να υπολογίσετε το $I_{16} = \int \epsilon\varphi 2x dx.$

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } I_{16} = \int \epsilon\varphi 2x dx &= \int \frac{\eta\mu 2x}{\sin 2x} dx \stackrel{\substack{\text{βλέπε} \\ \text{παρατήρηση} \\ \text{στο παραδ. 14}}}{=} \int \frac{\left(-\frac{\sin 2x}{2}\right)'}{\sin 2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{(\sin 2x)'}{\sin 2x} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \ln |\sin 2x| + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

17. Να υπολογίσετε το $I_{17} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \epsilon\varphi^2 x dx.$

Από τύπο της τριγωνομετρίας γνωρίζουμε ότι

$$1 + \epsilon\varphi^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \epsilon\varphi^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \Leftrightarrow \epsilon\varphi^2 x = (\epsilon\varphi x)' - 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } I_{17} &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [(\epsilon\varphi x)' - 1] dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\epsilon\varphi x)' dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dx = [\epsilon\varphi x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \\ &= \epsilon\varphi \frac{\pi}{4} - \epsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2\pi}{4} = \epsilon\varphi \frac{\pi}{4} + \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2} = 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

18. Να υπολογίσετε το $I_{18} = \int \epsilon\varphi^4 x dx.$

Έχουμε κατά σειρά (βλέπε και παραδ. 17):

$$\epsilon\varphi^4 x = \epsilon\varphi^2 x \cdot \epsilon\varphi^2 x = \epsilon\varphi^2 x \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) = \epsilon\varphi^2 x \cdot ((\epsilon\varphi x)' - 1) = \epsilon\varphi^2 x \cdot (\epsilon\varphi x)' - \epsilon\varphi^2 x =$$

$$= \varepsilon\varphi^2x \cdot (\varepsilon\varphi x)' - \frac{1}{\sin^2x} + 1 = \varepsilon\varphi^2x \cdot (\varepsilon\varphi x)' - (\varepsilon\varphi x)' + 1.$$

$$\text{Άρα } I_{18} = \int \varepsilon\varphi^2x \cdot (\varepsilon\varphi x)' dx - \int (\varepsilon\varphi x)' dx + \int dx = \frac{\varepsilon\varphi^3x}{3} - \varepsilon\varphi x + x + c, c \in \mathbb{R}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το γινόμενο $\varepsilon\varphi^2x \cdot (\varepsilon\varphi x)'$ είναι μορφής $f^2(x) \cdot f'(x)$ που έχει μία παράγουσα την $\frac{f^3(x)}{3}$.

$$\mathbf{19.} \text{ Να υπολογίσετε το } I_{19} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^3x - \eta\mu x}{1 + \sin x} dx.$$

Αν την θεωρήσουμε ως συνάρτηση του $\eta\mu x$ (δηλαδή $g(\eta\mu x)$), είναι περιττή (αφού

$$g(-\eta\mu x) = \frac{(-\eta\mu x)^3 - (-\eta\mu x)}{1 + \sin x} = \frac{-\eta\mu^3x + \eta\mu x}{1 + \sin x} = \frac{-(\eta\mu^3x - \eta\mu x)}{1 + \sin x} = -\frac{\eta\mu^3x - \eta\mu x}{1 + \sin x} = -g(\eta\mu x),$$

οπότε σύμφωνα με τη μεθοδολογία:

Εφαρμόζουμε αλλαγή μεταβλητής $u = \varphi(x) = \sin x$. Τότε $du = \varphi'(x) dx = \cos x dx$,

$$u_1 = \sin 0 = 0 \text{ και } u_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και η φ παραγωγίσιμη στο $[0, \frac{\pi}{2}]$, με συνεχή παράγωγο.

$$\begin{aligned} \text{Έτσι } I_{19} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x \cdot (\eta\mu^2x - 1)}{1 + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\eta\mu x \cdot (1 - \eta\mu^2x)}{1 + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2x}{1 + \sin x} \cdot (-\eta\mu x) dx = \\ &= \int_1^0 \frac{u^2}{u+1} du. \end{aligned}$$

Κάνουμε τη διαίρεση $u^2:(u+1)$

$$\begin{array}{r|l} u^2+0u+0 & u+1 \\ -u^2-u & u-1 \\ \hline -u+0 & \\ u+1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\text{Άρα } u^2 = (u+1) \cdot (u-1) + 1$$

$$\begin{aligned} \text{Έτσι } I_{19} &= \int_1^0 \frac{(u+1) \cdot (u-1) + 1}{u+1} du = \int_1^0 (u-1) du + \int_1^0 \frac{1}{u+1} du = \\ &= \int_1^0 u du - \int_1^0 du + \int_1^0 \frac{1}{u+1} du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^0 - (0-1) + [\ln|u+1|]_1^0 = 0 - \frac{1}{2} + 1 + \ln 1 - \ln 2 = \frac{1}{2} - \ln 2. \end{aligned}$$

$$\mathbf{20.} \text{ Να υπολογίσετε το } I_{20} = \int \eta\mu^2x dx.$$

Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\eta\mu^2x = \frac{1 - \sin 2x}{2}$ (βλέπε "ΧΡΗΣΙΜΑ" στη θεωρία) και έχουμε κατά σειρά:

$$\begin{aligned}
 I_{20} &= \int \eta\mu^2 x \, dx = \int \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \int \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu 2x \, dx = \\
 &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta\mu 2x}{2} + c = \frac{x}{2} - \frac{\eta\mu 2x}{4} + c, \, c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

21. Να υπολογίσετε το $I_{21} = \int \sigma\upsilon\nu^4 \frac{x}{2} \, dx$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ (βλέπε "ΧΡΗΣΙΜΑ" στη θεωρία),

$$\begin{aligned}
 I_{21} &= \int \sigma\upsilon\nu^4 \frac{x}{2} \, dx = \int (\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2})^2 \, dx = \int (\frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{2})^2 \, dx = \int \frac{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x}{4} \, dx = \\
 &= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx + \frac{2}{4} \int \sigma\upsilon\nu x \, dx = \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2} \, dx + \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu x \, dx = \\
 &= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \sigma\upsilon\nu 2x \, dx + \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu x \, dx = \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{8} \cdot \frac{\eta\mu 2x}{2} + \frac{1}{2} \eta\mu x + c = \\
 &= \frac{3x}{8} + \frac{\eta\mu 2x}{16} + \frac{\eta\mu x}{2} + c, \, c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

22. Να υπολογίσετε το $I_{22} = \int \eta\mu^3 x \, dx$.

1ος τρόπος

$$\begin{aligned}
 I_{22} &= \int \eta\mu^3 x \, dx = \int \eta\mu^2 x \cdot \eta\mu x \, dx = \int (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) \cdot \eta\mu x \, dx = \int (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu x) \, dx = \\
 &= \int \eta\mu x \, dx - \int \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu x \, dx = \int \eta\mu x \, dx - \int \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot (-\sigma\upsilon\nu x)' \, dx = \\
 &= \int \eta\mu x \, dx + \int \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' \, dx = -\sigma\upsilon\nu x + \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{3} + c, \, c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

2ος τρόπος

Επειδή η $f(x) = \eta\mu^3 x$ είναι περιττή ως προς $\eta\mu x$, μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό με αλλαγή μεταβλητής $u = \varphi(x) = \sigma\upsilon\nu x$, ως εξής:

$$I_{22} = \dots \stackrel{\text{οπως κατα τον 1ο τροπο}}{=} \int (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) \cdot \eta\mu x \, dx.$$

Θέτουμε $u = \varphi(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

Τότε $du = \varphi'(x) \, dx = -\eta\mu x \, dx$.

$$\text{Άρα } I_{22} = -\int (1 - u^2) \, du = -\int du + \int u^2 \, du = -u + \frac{u^3}{3} + c = -\sigma\upsilon\nu x + \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{3} + c, \, c \in \mathbb{R}.$$

23. Να υπολογίσετε το $I_{23} = \int \sigma\upsilon\nu^5 x \, dx$.

Επειδή η $f(x) = \sigma\upsilon\nu^5 x$ είναι περιττή ως προς $\sigma\upsilon\nu x$, μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό με αλλαγή μεταβλητής $u = \varphi(x) = \eta\mu x$, ως εξής:

$$I_{23} = \int \sigma\upsilon\nu^5 x \, dx = \int \sigma\upsilon\nu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = \int (\sigma\upsilon\nu^2 x)^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = \int (1 - \eta\mu^2 x)^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx.$$

Θέτουμε $u = \varphi(x) = \eta\mu x$, οπότε $du = \varphi'(x) \, dx = (\eta\mu x)' \, dx = \sigma\upsilon\nu x \, dx$. Άρα

$$I_{23} = \int (1-u^2)^2 du = \int (1+u^4-2u^2) du = u + \frac{u^5}{5} - 2\frac{u^3}{3} + c =$$

$$= \eta\mu x + \frac{\eta\mu^5 x}{5} - \frac{2\eta\mu^3 x}{3} + c, c \in \mathbb{R}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ο υπολογισμός του I_{23} μπορεί να γίνει επίσης όπως τον πρώτο τρόπο που εφαρμόσαμε στο I_{22} , αλλά είναι πιο χρονοβόρος.

24. Να υπολογίσετε το $I_{24} = \int x^2 \cdot \eta\mu 2x \, dx$.

Θα εφαρμόσουμε **ολοκλήρωση κατά παράγοντες**. Πρέπει να επιλέξουμε ρόλους: Ποια από τις δύο συναρτήσεις θα επιλέξουμε ως f και ποια ως g . Ως f επιλέγουμε εκείνη που έχει «προφανή» παράγουσα. Εδώ έχουν και οι δύο παράγουσα. Τότε επιλέγουμε ως g εκείνη τη συνάρτηση, έτσι ώστε το τελικό ολοκλήρωμα $\int F(x) \cdot g'(x) \, dx$ να είναι όσο το δυνατόν απλούστερο. Εδώ τέτοια είναι η x^2 , καθώς η παράγωγός της $2x$ είναι απλούστερη από την αρχική (x^2), λόγω της μείωσης του βαθμού.

Εναλλακτικά και απλούστερα μπορούμε να επιλέγουμε από τις δύο, ως f , εκείνη που προηγείται στη σειρά ΕΚ.ΤΡΙ.ΠΟ.ΛΟ. δηλαδή εδώ την τριγωνομετρική. Έτσι επιλέγουμε ως $f(x)=\eta\mu 2x$ και $g(x)=x^2$, και έχουμε:

$$I_{24} = \int x^2 \cdot \eta\mu 2x \, dx = \int x^2 \cdot \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)' \, dx = x^2 \cdot \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right) - \int (x^2)' \cdot \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right) \, dx =$$

$$= -\frac{x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x}{2} + \frac{1}{2} \int 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \, dx = -\frac{x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x}{2} + \int x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \, dx =$$

$$= -\frac{x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x}{2} + \int x \cdot \left(\frac{\eta\mu 2x}{2}\right)' \, dx =$$

Εφαρμόζουμε πάλι ΠΟ στο ολοκλήρωμα που προέκυψε, χωρίς να αλλάξουμε τους ρόλους των f και g

$$= -\frac{x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x}{2} + x \cdot \frac{\eta\mu 2x}{2} - \int (x)' \cdot \frac{\eta\mu 2x}{2} \, dx = \frac{-x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x + x \cdot \eta\mu 2x}{2} - \frac{1}{2} \int \eta\mu 2x \, dx =$$

$$= \frac{-x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x + x \cdot \eta\mu 2x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right) + c = \frac{-x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x + x \cdot \eta\mu 2x}{2} + \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{4} + c, c \in \mathbb{R}.$$

25. Να υπολογίσετε το $I_{25} = \int_0^\pi \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \, dx$.

Ισχύει η σχέση $2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha-\beta) + \eta\mu(\alpha+\beta)$ (βλέπε "ΧΡΗΣΙΜΑ" στη θεωρία), οπότε $\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\eta\mu(\alpha-\beta) + \eta\mu(\alpha+\beta)}{2}$.

$$\text{Έτσι } \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\eta\mu\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + \eta\mu\left(-x - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{\eta\mu\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) - \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{2}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
 I_{25} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \eta\mu(3x + \frac{\pi}{3}) dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \eta\mu(x + \frac{\pi}{3}) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\sigma\upsilon\nu(3x + \frac{\pi}{3})}{3} \right]_0^\pi - \frac{1}{2} \left[-\eta\mu(x + \frac{\pi}{3}) \right]_0^\pi = \\
 &= -\frac{1}{6} \cdot (\sigma\upsilon\nu(3\pi + \frac{\pi}{3}) - \sigma\upsilon\nu(0 + \frac{\pi}{3})) + \frac{1}{2} (\eta\mu(\pi + \frac{\pi}{3}) - \eta\mu(0 + \frac{\pi}{3})) = \\
 &= -\frac{1}{6} \cdot (-\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2} \cdot (-\eta\mu \frac{\pi}{3} - \eta\mu \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{6} \cdot (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

26. Να υπολογίσετε το $I_{26} = \int_0^1 e^{2x+3} dx$.

Η e^{2x+3} πιθανώς προέρχεται από την παραγωγή της e^{2x+3} . Έτσι:

$$(e^{2x+3})' = e^{2x+3} \cdot (2x+3)' = e^{2x+3} \cdot 2. \text{ Άρα } e^{2x+3} = \left(\frac{e^{2x+3}}{2} \right)', \text{ οπότε } I_{26} = \left[\frac{e^{2x+3}}{2} \right]_0^1 = \frac{e^5 - e^3}{2}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Γενικά μια παράγουσα της $e^{ax+\beta}$, $a \neq 0$, είναι πάντα η $\frac{e^{ax+\beta}}{a}$.

27. Να υπολογίσετε το $I_{27} = \int 2^{3x} dx$.

Η 2^{3x} πιθανώς προέρχεται από την παραγωγή της 2^{3x} . Έτσι:

$$(2^{3x})' = 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot (3x)' = 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot 3. \text{ Άρα } 2^{3x} = \left(\frac{2^{3x}}{3 \ln 2} \right)', \text{ οπότε } I_{27} = \frac{2^{3x}}{3 \ln 2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Γενικά μια παράγουσα της $a^{kx+\lambda}$, $k \neq 0$, είναι πάντα η $\frac{a^{kx+\lambda}}{k \cdot \ln a}$.

28. Να υπολογίσετε το $I_{28} = \int_0^1 (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{2x} dx$.

Θα εφαρμόσουμε **ολοκλήρωση κατά παράγοντες**, θεωρώντας ως f την e^{2x} που έχει ως μία παράγουσα την $F(x) = \frac{e^{2x}}{2}$ και ως g την $x^2 + 2x + 1$, που έχει συνεχή παράγωγο στο $[0, 1]$ την $g'(x) = 2x + 2$. Έτσι:

$$\begin{aligned}
 I_{28} &= \int_0^1 (x^2 + 2x + 1) \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2} \right)' dx = \left[(x^2 + 2x + 1) \cdot \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 (x^2 + 2x + 1)' \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx = \\
 &= (1^2 + 2 \cdot 1 + 1) \cdot \frac{e^{2 \cdot 1}}{2} - (0^2 + 2 \cdot 0 + 1) \cdot \frac{e^{2 \cdot 0}}{2} - \int_0^1 (2x + 2) \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx = \\
 &= 2 \cdot e^2 - \frac{1}{2} - \int_0^1 (x + 1) \cdot e^{2x} dx = 2e^2 - \frac{1}{2} - J, \quad (1) \text{ όπου } J = \int_0^1 (x + 1) \cdot e^{2x} dx.
 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του J εφαρμόζουμε **πάλι ολοκλήρωση κατά παράγοντες** με f την e^{2x} και g την $x+1$, η οποία έχει στο $[0, 1]$ συνεχή παράγωγο την $g'(x)=1$. Έτσι:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 (x+1) \cdot e^{2x} dx = \int_0^1 (x+1) \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx = \left[(x+1) \cdot \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (x+1)' \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx = \\ &= 2 \frac{e^2}{2} - \frac{e^0}{2} - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^0}{2}\right) = \\ &= e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \dots = \frac{3e^2}{4} - \frac{1}{4} \quad (2). \end{aligned}$$

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε τελικά ότι } I_{28} = 2e^2 - \frac{1}{2} - \left(\frac{3e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5e^2 - 1}{4}.$$

29. Να υπολογίσετε το $I_{29} = \int_1^e \frac{e^{2x} - 3e^x}{e^{3x} - e^x} dx$.

Εφαρμόζουμε αλλαγή μεταβλητής $u=\varphi(x)=e^x$ με $u>0$ και $du=\varphi'(x) dx=e^x dx$.

Τα νέα όρια της ολοκλήρωσης είναι $u_1=\varphi(1)=e^1=e$ και $u_2=\varphi(e)=e^e$.

Η f είναι συνεχής στο $[e, e^e]$ και η $\varphi'(x)$ στο $[1, e]$. Έτσι:

$$I_{29} = \int_1^e \frac{(e^x - 3) \cdot e^x}{e^{3x} - e^x} dx = \int_1^e \frac{(e^x - 3)}{e^{3x} - e^x} \cdot \overbrace{e^x}^{du} dx = \int_e^{e^e} \frac{u-3}{u^3 - u} du = \int_e^{e^e} \frac{u-3}{u \cdot (u-1) \cdot (u+1)} du, \text{ το}$$

οποίο στη συνέχεια υπολογίζεται όπως το I_7 (ανάλυση της ρητής παράστασης σε άθροισμα ρητών παραστάσεων μορφής $\frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} + \frac{\Gamma}{u+1}$).

30. Να υπολογίσετε το $I_{30} = \int e^{2x} \cdot \eta\mu x dx$.

ΚΛΑΣΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Ο υπολογισμός θα γίνει εφαρμόζοντας **δύο φορές ολοκλήρωση κατά παράγοντες**.

Θα εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες θεωρώντας ως f την $\eta\mu x$ με παράγουσα την $F(x)=-\sigma\upsilon\nu x$ και ως g την e^{2x} (στη συγκεκριμένη μορφή θα μπορούσαμε να πάρουμε τους ρόλους των συναρτήσεων και αντίστροφα). Έτσι:

$$\begin{aligned} I_{30} &= \int e^{2x} \cdot \eta\mu x dx = \int e^{2x} \cdot (-\sigma\upsilon\nu x)' dx = e^{2x} \cdot (-\sigma\upsilon\nu x) - \int (e^{2x})' \cdot (-\sigma\upsilon\nu x) dx = \\ &= -e^{2x} \cdot \sigma\upsilon\nu x + \int 2e^{2x} \cdot \sigma\upsilon\nu x dx = -e^{2x} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2 \cdot J \quad (1), \end{aligned}$$

$$\text{όπου } J = \int e^{2x} \cdot \sigma\upsilon\nu x dx.$$

Εφαρμόζοντας για το J πάλι ολοκλήρωση κατά παράγοντες με f την $\sigma\upsilon\nu x$ και g την e^{2x} (θυμηθείτε, δεν αλλάζουμε τους ρόλους) έχουμε:

$$\begin{aligned} J &= \int e^{2x} \cdot (\eta\mu x)' dx = e^{2x} \cdot \eta\mu x - \int (e^{2x})' \cdot \eta\mu x dx = e^{2x} \cdot \eta\mu x - \int 2e^{2x} \cdot \eta\mu x dx = \\ &= e^{2x} \cdot \eta\mu x - 2 \int e^{2x} \cdot \eta\mu x dx = e^{2x} \cdot \eta\mu x - 2 \cdot I_{30} \quad (2). \end{aligned}$$

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε } I_{30} = -e^{2x} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2 \cdot (e^{2x} \cdot \eta\mu x - 2 \cdot I_{30}) \Leftrightarrow I_{30} = -e^{2x} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2e^{2x} \cdot \eta\mu x - 4 \cdot I_{30} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot I_{30} = e^{2x} \cdot (2\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow I_{30} = \frac{e^{2x}}{5} \cdot (2\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Παρατηρείστε ότι στο τέλος δεν «φαίνεται» πώς προκύπτει το c . Παρ' όλα αυτά είναι απαραίτητη η αναγραφή του στο αποτέλεσμα, καθώς υπολογίζουμε αόριστο ολοκλήρωμα.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Στην άσκηση αυτή παρατηρήσαμε ότι κατά την προσπάθειά μας να υπολογίσουμε το αρχικό ολοκλήρωμα, το εκφράσαμε με τη βοήθεια του εαυτού του και στη συνέχεια το υπολογίσαμε λύνοντας την εξίσωση που προέκυψε. Αυτό συμβαίνει πάντα όταν το ολοκλήρωμα περιέχει συνάρτηση της παραπάνω μορφής.

31. Να υπολογίσετε το $I_{31} = \int e^x \cdot x \cdot \eta\mu x \, dx$.

Εφαρμόζουμε **ολοκλήρωση κατά παράγοντες**, θεωρώντας ως f την e^x με παράγουσα $F(x)=e^x$ και ως g την $x \cdot \eta\mu x$ με $g'(x)=\eta\mu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x$. Έτσι:

$$\begin{aligned} I_{31} &= \int (e^x)' \cdot x \cdot \eta\mu x \, dx = I_{31} = e^x \cdot x \cdot \eta\mu x - \int e^x \cdot (x \cdot \eta\mu x)' \, dx = \\ &= e^x \cdot x \cdot \eta\mu x - \int e^x \cdot (\eta\mu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x) \, dx = e^x \cdot x \cdot \eta\mu x - \int e^x \cdot \eta\mu x \, dx - \int e^x \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = \\ &= e^x \cdot x \cdot \eta\mu x - J_1 - J_2 \quad \textbf{(1)}, \text{ όπου } J_1 = \int e^x \cdot \eta\mu x \, dx \text{ και } J_2 = \int e^x \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx. \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός των J_1 και J_2 θα γίνει με ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int e^x \cdot \eta\mu x \, dx = \int e^x \cdot (-\sigma\upsilon\nu x)' \, dx = e^x \cdot (-\sigma\upsilon\nu x) - \int (e^x)' \cdot (-\sigma\upsilon\nu x) \, dx = \\ &= -e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \int e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx \stackrel{(\text{ΠΟ})}{=} -e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \int e^x \cdot (\eta\mu x)' \, dx = \\ &= -e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x + e^x \cdot \eta\mu x - \int (e^x)' \cdot \eta\mu x \, dx = -e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x + e^x \cdot \eta\mu x - \int e^x \cdot \eta\mu x \, dx = \\ &= -e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x + e^x \cdot \eta\mu x - J_1. \text{ Άρα} \end{aligned}$$

$$J_1 = -e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x + e^x \cdot \eta\mu x - J_1 \Leftrightarrow 2 \cdot J_1 = -e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x + e^x \cdot \eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow J_1 = \frac{-e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x + e^x \cdot \eta\mu x}{2} + c_1 \quad \textbf{(2)}.$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \int e^x \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = \int (e^x)' \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = e^x \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \int e^x \cdot (x \cdot \sigma\upsilon\nu x)' \, dx = \\ &= e^x \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \int e^x \cdot (\sigma\upsilon\nu x + x \cdot \eta\mu x) \, dx = e^x \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \int e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx + \int e^x \cdot x \cdot \eta\mu x \, dx = \\ &= e^x \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu x - J_3 + I_{31} \quad \textbf{(3)}, \text{ όπου το } J_3 = \int e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx \text{ θα υπολογιστεί πάλι με δύο} \\ &\text{φορές ολοκλήρωση κατά παράγοντες;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \int e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = \int e^x \cdot (\eta\mu x)' \, dx = e^x \cdot \eta\mu x - \int (e^x)' \cdot \eta\mu x \, dx = e^x \cdot \eta\mu x - \int e^x \cdot \eta\mu x \, dx \stackrel{(\text{ΠΟ})}{=} \\ &= e^x \cdot \eta\mu x - \int e^x \cdot (-\sigma\upsilon\nu x)' \, dx = e^x \cdot \eta\mu x - \left[e^x \cdot (-\sigma\upsilon\nu x) - \int (e^x)' \cdot (-\sigma\upsilon\nu x) \, dx \right] = \\ &= e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \int e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - J_3. \text{ Άρα} \end{aligned}$$

$$J_3 = e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - J_3 \Leftrightarrow 2 \cdot J_3 = e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow J_3 = \frac{e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{2} + c_2 \quad (4), c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$(3) \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} J_2 = e^x \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \left(\frac{e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{2} + c_2 \right) + I_{31} \quad (5).$$

Άρα

$$(1) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} I_{31} = e^x \cdot x \cdot \eta\mu x - \left(\frac{-e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x + e^x \cdot \eta\mu x}{2} + c_1 \right) - \left[e^x \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \left(\frac{e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{2} + c_2 \right) + I_{31} \right]$$

$$\Leftrightarrow I_{31} = e^x \cdot x \cdot \eta\mu x + \frac{e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - e^x \cdot \eta\mu x}{2} - c_1 - e^x \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \frac{e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{2} + c_2 - I_{31}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot I_{31} = e^x \cdot x \cdot \eta\mu x + \frac{e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - e^x \cdot \eta\mu x}{2} - e^x \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \frac{e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{2} + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot I_{31} = e^x \cdot x \cdot \eta\mu x - e^x \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_{31} = \frac{e^x \cdot x \cdot \eta\mu x - e^x \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{2} + c, c \in \mathbb{R}.$$

32. Να υπολογίσετε το $I_{32} = \int_1^e \ln(x+1) dx$.

ΚΛΑΣΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος θα γίνει **με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, θεωρώντας ως f το 1** που εννοείται (γιατί $\ln(x+1)=1 \cdot \ln(x+1)$) που έχει παράγουσα $F(x)=x$. Έτσι χρησιμοποιούμε τον "άγνωστο φάντασμα" (x) και έχουμε:

$$\begin{aligned} I_{32} &= \int_1^e (x)' \cdot \ln(x+1) dx = [x \cdot \ln(x+1)]_1^e - \int_1^e x \cdot (\ln(x+1))' dx = \\ &= e \cdot \ln(e+1) - 1 \cdot \ln(1+1) - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x+1} \cdot (x+1)' dx = e \cdot \ln(e+1) - \ln 2 - \int_1^e \frac{x}{x+1} dx = \\ &= e \cdot \ln(e+1) - \ln 2 - J, \text{ όπου } J = \int_1^e \frac{x}{x+1} dx. \end{aligned}$$

Κάνοντας τη διαίρεση $x:(x+1)$ έχουμε:

$$\begin{array}{r|l} x+0 & x+1 \\ -x-1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$\text{Έτσι } x = (x+1) \cdot 1 - 1$$

$$\text{Άρα } \frac{x}{x+1} = \frac{(x+1) \cdot 1 - 1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}, \text{ οπότε:}$$

$$J = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int_1^e dx - \int_1^e \frac{1}{x+1} dx = (e-1) - [\ln|x+1|]_1^e = e-1 - \ln(e+1) + \ln 2.$$

$$\text{Άρα } I_{32} = e \cdot \ln(e+1) - \ln 2 - (e-1 - \ln(e+1) + \ln 2) = \dots = (e+1) \cdot \ln(e+1) - 2\ln 2 - e + 1.$$

33. Να υπολογίσετε το $I_{33} = \int (x^2 + 1) \cdot \ln x dx$.

Θα εφαρμόσουμε **ολοκλήρωση κατά παράγοντες** θεωρώντας ως f την x^2+1 , μια που αυτή έχει προφανή παράγουσα την $F(x) = \frac{x^3}{3} + x$ και ως g την $\ln x$. Έτσι:

$$\begin{aligned} I_{33} &= \int \left(\frac{x^3}{3} + x\right)' \cdot \ln x \, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot (\ln x)' \, dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot (\ln x)' \, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot \frac{1}{x} \, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot \ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} + 1\right) \, dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{3} \, dx - \int dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx - \int dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - x + c = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot \ln x - \frac{x^3}{9} - x + c, \, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

34. Να υπολογίσετε το $I_{34} = \int_1^e \frac{x}{x^2+5} \cdot \ln(x^2+5) \, dx$.

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+5} \cdot \ln(x^2+5)$ είναι συνεχής, άρα και ολοκληρώσιμη στο $[1, e]$, ως γινόμενο συνεχών.

1ος τρόπος (Π)

Η f ίσως προέρχεται από παραγώγιση της $[\ln(x^2+5)]^2$. Δοκιμάζουμε:

$$[[\ln(x^2+5)]^2]' = 2 \cdot \ln(x^2+5) \cdot [\ln(x^2+5)]' = 2 \cdot \ln(x^2+5) \cdot \frac{1}{x^2+5} \cdot (x^2+5)' = 4 \cdot \frac{x}{x^2+5} \cdot \ln(x^2+5)$$

Άρα $[[\ln(x^2+5)]^2]' = 4 \cdot \frac{x}{x^2+5} \cdot \ln(x^2+5)$, οπότε $\frac{x}{x^2+5} \cdot \ln(x^2+5) = \left[\frac{[\ln(x^2+5)]^2}{4}\right]'$.

$$\text{Έτσι } I_{34} = \left[\frac{[\ln(x^2+5)]^2}{4}\right]_1^e = \frac{[\ln(e^2+5)]^2 - (\ln 6)^2}{4}.$$

2ος τρόπος (ΑΜ)

$$\text{Θέτουμε } u = \varphi(x) = \ln(x^2+5), \text{ οπότε } du = \varphi'(x) \, dx = [\ln(x^2+5)]' \, dx = \frac{1}{x^2+5} \cdot (x^2+5)' \, dx =$$

$$= \frac{2x}{x^2+5} \, dx. \text{ Επομένως } \frac{x}{x^2+5} \, dx = \frac{1}{2} \, du.$$

Επίσης $u_1 = \ln(1^2+5) = \ln 6$ και $u_2 = \ln(e^2+5)$ και οι f και φ' είναι συνεχείς. Έτσι:

$$\begin{aligned} I_{34} &= \int_1^e \frac{x}{x^2+5} \cdot \ln(x^2+5) \, dx = \int_{\ln 6}^{\ln(e^2+5)} \frac{1}{2} u \, du = \frac{1}{2} \int_{\ln 6}^{\ln(e^2+5)} u \, du = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{u^2}{2}\right]_{\ln 6}^{\ln(e^2+5)} = \\ &= \frac{[\ln(e^2+5)]^2 - (\ln 6)^2}{4}. \end{aligned}$$

35. Να υπολογίσετε το $I_{35} = \int_{-1}^2 f(x) \, dx$ με $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 2x^2 - x, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$.

Η f είναι συνεχής στα $[-1, 0)$ και $(0, 2]$ ως πολυωνυμική.

Συνέχεια στο 0: $f(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 - x) = 2 \cdot 0^2 - 0 = 0$.

Άρα η f είναι συνεχής και στο 0, οπότε η f είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ και επομένως ολοκληρώσιμη.

$$\begin{aligned} I_{35} &= \int_{-1}^0 x \, dx + \int_0^2 (2x^2 - x) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \\ &= \frac{0^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - \left(2 \cdot \frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{16}{3} - 2 = \frac{17}{6}. \end{aligned}$$

36. Να υπολογίσετε το $I_{36} = \int_{-1}^3 (|2x+1| - x^2) \, dx$.

Η $f(x) = |2x+1| - x^2$ είναι συνεχής στο $[-1, 3]$ ως διαφορά συνεχών, άρα και ολοκληρώσιμη. Σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα προσήμων του $2x+1$ είναι:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	3
$2x+1$	-	Φ	+

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 - x^2, & \text{αν } -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\ 2x + 1 - x^2, & \text{αν } -\frac{1}{2} \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Έτσι: $I_{36} = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} -(x^2 + 2x + 1) \, dx + \int_{-\frac{1}{2}}^3 (-x^2 + 2x + 1) \, dx = \dots$

37. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \int_0^3 \frac{2x^3 - 1}{1 + x^2} \, dx + \int_3^0 \frac{x^2 - 2x}{1 + x^2} \, dx$

Επειδή ο υπολογισμός καθενός χωριστά από τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι αρκετά πολύπλοκος και επειδή τα όρια ολοκλήρωσής τους είναι ουσιαστικά τα ίδια, σκεφτόμαστε να εργαστούμε με βάση τις ιδιότητες.

Οι συναρτήσεις $\frac{2x^3 - 1}{1 + x^2}$ και $\frac{x^2 - 2x}{1 + x^2}$ είναι συνεχείς στο $[0, 3]$ ως ρητές, άρα και ολοκληρώσιμες. Έχουμε κατά σειρά:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 \frac{2x^3 - 1}{1 + x^2} \, dx - \int_0^3 \frac{x^2 - 2x}{1 + x^2} \, dx = \int_0^3 \left(\frac{2x^3 - 1}{1 + x^2} - \frac{x^2 - 2x}{1 + x^2} \right) \, dx = \int_0^3 \frac{2x^3 - 1 - x^2 + 2x}{1 + x^2} \, dx = \\ &= \int_0^3 \frac{(2x^3 + 2x) - (x^2 + 1)}{1 + x^2} \, dx = \int_0^3 \frac{2x \cdot (x^2 + 1) - (x^2 + 1)}{1 + x^2} \, dx = \int_0^3 \frac{(x^2 + 1) \cdot (2x - 1)}{1 + x^2} \, dx = \\ &= \int_0^3 (2x - 1) \, dx = [x^2 - x]_0^3 = 3^2 - 3 - (0^2 - 0) = 6. \end{aligned}$$

38. Αν f συνεχής σε διάστημα Δ και $1, 2, 3, 4 \in \Delta$ να αποδείξετε ότι

$$\int_1^2 f(x) \, dx \cdot \int_3^4 f(x) \, dx + \int_1^3 f(x) \, dx \cdot \int_4^2 f(x) \, dx = \int_4^1 f(x) \, dx \cdot \int_2^3 f(x) \, dx$$

Στην άσκηση αυτή, αφού μεταφέρουμε όλους τους προσθετέους της σχέσης στο a' μέλος, θα εργαστούμε εφαρμόζοντας τη σχέση του Chasles με στόχο να εμφανίσουμε σε όλα τα ολοκληρώματα το ίδιο κάτω όριο, π.χ. το 1. Έτσι:

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) \, dx \cdot \int_3^4 f(x) \, dx + \int_1^3 f(x) \, dx \cdot \int_4^2 f(x) \, dx &= \int_4^1 f(x) \, dx \cdot \int_2^3 f(x) \, dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) \, dx \cdot \int_3^4 f(x) \, dx + \int_1^3 f(x) \, dx \cdot \int_4^2 f(x) \, dx - \int_4^1 f(x) \, dx \cdot \int_2^3 f(x) \, dx &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Είναι: } \int_1^2 f(x) dx \cdot \int_3^4 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \cdot \int_4^2 f(x) dx - \int_4^1 f(x) dx \cdot \int_2^3 f(x) dx = \\
& = \int_1^2 f(x) dx \cdot (\int_3^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx) + \int_1^3 f(x) dx \cdot (\int_4^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx) - \\
& - \int_4^1 f(x) dx \cdot (\int_2^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx) = \\
& = \int_1^2 f(x) dx \cdot (-\int_1^3 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx) + \int_1^3 f(x) dx \cdot (-\int_1^4 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx) + \\
& + \int_1^4 f(x) dx \cdot (-\int_1^2 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx) = \\
& = -\int_1^2 f(x) dx \cdot \int_1^3 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \cdot \int_1^4 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx \cdot \int_1^4 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \cdot \int_1^2 f(x) dx - \\
& - \int_1^4 f(x) dx \cdot \int_1^2 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx \cdot \int_1^3 f(x) dx = 0
\end{aligned}$$

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_1^x \frac{\eta \mu t}{t} dt$, με $x \in (0, 2\pi)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα μέγιστο.

β) Να προσδιορίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

α) Η συνάρτηση $g(t) = \frac{\eta \mu t}{t}$ είναι συνεχής στο $(0, 2\pi)$, το 1 ανήκει στο $(0, 2\pi)$, οπότε

η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2\pi)$ με $f'(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$. Ο επαυξημένος πίνακας ακροτάτων

έχει ως εξής:

x	0	π	2π
$\eta \mu x$	+	$\ominus$	-
x	+		+
$f'(x)$	+		-
f			

Τ.μ.

Άρα η f παρουσιάζει ένα τοπικό και ολικό μέγιστο στη θέση π .

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο 1, καθώς είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2\pi)$, θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \int_1^1 \frac{\eta \mu t}{t} dt = 0.$$

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(h) = \int_2^{2+h} (h+1) \cdot \sqrt{t^2 + 1} dt$, με $h \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

β) Να προσδιορίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h \cdot (h+1)}$.

α) Επειδή το ολοκλήρωμα έχει μεταβλητή το t και το h είναι ανεξάρτητο του t έχουμε

$$f(h) = (h+1) \cdot \int_2^{2+h} \sqrt{t^2 + 1} dt.$$

- $y = \sqrt{t^2 + 1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ } Άρα η $y = \int_2^x \sqrt{t^2 + 1} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
To 2 ανήκει στο $\mathbb{R}$
- Η $y = 2+h$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ (καθώς $h \geq 0$).
- Άρα η $y = \int_2^{2+h} \sqrt{t^2 + 1} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left\{ h \in \mathbb{R} / \begin{matrix} h \geq 0 \\ 2+h \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} = \{h \in \mathbb{R} / h \geq 0\} = [0, +\infty)$, ως σύνθεση παραγωγισίμων.

Έτσι τελικά η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, ως γινόμενο παραγωγισίμων με

$$f'(h) = \left[(h+1) \cdot \int_2^{2+h} \sqrt{t^2 + 1} dt \right]' = (h+1)' \cdot \int_2^{2+h} \sqrt{t^2 + 1} dt + (h+1) \cdot \left(\int_2^{2+h} \sqrt{t^2 + 1} dt \right)' = \int_2^{2+h} \sqrt{t^2 + 1} dt + (h+1) \cdot \sqrt{(2+h)^2 + 1} \quad (1).$$

Για $h \in (0, +\infty)$ είναι:

$$2+h > 2 \text{ και } \sqrt{t^2 + 1} > 0 \text{ στο } [2, 2+h], \text{ οπότε } \int_2^{2+h} \sqrt{t^2 + 1} dt > 0$$

$$\text{Επίσης } (h+1) > 0 \text{ και } \sqrt{(2+h)^2 + 1} > 0.$$

Άρα από (1) έχουμε ότι $f'(h) > 0$, για κάθε $h \in (0, +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ ως παραγωγίσιμη, θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

$$\beta) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h \cdot (h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+1) \cdot \int_2^{2+h} \sqrt{t^2 + 1} dt}{h \cdot (h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_2^{2+h} \sqrt{t^2 + 1} dt}{h}.$$

Όμως η $y = \int_2^{2+h} \sqrt{t^2 + 1} dt$ είναι συνεχής στο 0 ως παραγωγίσιμη, οπότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_2^{2+h} \sqrt{t^2 + 1} dt = \int_2^{2+0} \sqrt{t^2 + 1} dt = \int_2^2 \sqrt{t^2 + 1} dt = 0 \text{ και}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$, οπότε στο παραπάνω όριο μπορούμε να εφαρμόσουμε τους κανόνες του De l'Hospital. Έτσι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h \cdot (h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\int_2^{2+h} \sqrt{t^2 + 1} dt \right)'}{(h)'} \stackrel{\text{απο (1)}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(2+h)^2 + 1}}{1} = \sqrt{(2+0)^2 + 1} = \sqrt{5}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Η παραπάνω άσκηση, καθώς και άλλες παρόμοιες χρειάζονται προσεκτική μελέτη, καθώς συνήθως παρατηρείται μια δυσκολία στην αιτιολόγηση της παραγωγισιμότητας της f .

41. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \int_{-2}^x \frac{3}{t-1} dt$.

Έχουμε κατά σειρά:

Η $y = \frac{3}{t-1}$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ως ρητή } Άρα η f είναι παραγωγίσιμη
 $-2 \in (-\infty, 1)$

στο **$(-\infty, 1)$** (σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο πλαίσιο, στην αρχή της §4.4) με

$$f'(x) = \left(\int_{-2}^x \frac{3}{t-1} dt \right)' = \frac{3}{x-1}.$$

42. Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x) = 1 - 2x^2 \cdot \int_0^1 t \cdot f^2(xt) dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2x \cdot f^2(x)$.

ΜΕΡΟΣ ΘΕΜΑΤΟΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2001

Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 t \cdot f^2(xt) dt$, έχει ως μεταβλητή το t .

Θέτουμε $u = \varphi(t) = x \cdot t$ οπότε $du = \varphi'(t) dt = x \cdot (t)' dt = x dt$.

$u_1 = x \cdot 0 = 0$ και $u_2 = x \cdot 1 = x$.

$$\text{Άρα } f(x) = 1 - 2 \cdot \int_0^1 x^2 \cdot t \cdot f^2(xt) dt = 1 - 2 \int_0^1 xt \cdot f^2(xt) \cdot x dt = 1 - 2 \int_0^x u \cdot f^2(u) du$$

Επειδή η $u \cdot f^2(u)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $0 \in \mathbb{R}$, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(1 - 2 \int_0^x u \cdot f^2(u) du \right) = 0 - 2 \cdot \frac{d}{dx} \left(\int_0^x u \cdot f^2(u) du \right) = -2 \cdot x \cdot f^2(x).$$

43. Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού και η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \int_1^{2x^2} \frac{1}{1 + \eta \mu^2 \omega} d\omega$$

Η $y = \frac{1}{1 + \eta \mu^2 \omega}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως ημίκυκλο συνεχών και $1 \in \mathbb{R}$, οπότε η

$y = \int_1^x \frac{1}{1 + \eta \mu^2 \omega} d\omega$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η $y = 2x^2$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\{x \in \mathbb{R} / 2x^2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ ως σύνθεση των παραγωγισίμων

$f(u) = \int_1^u \varphi(\omega) d\omega$ και $g(x) = 2x^2$. Το ίδιο σύνολο $(\mathbb{R})$ είναι και το πεδίο ορισμού της.

$$\text{Είναι: } f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_1^{2x^2} \frac{1}{1 + \eta \mu^2 \omega} d\omega \right) = \frac{1}{1 + \eta \mu^2 2x^2} \cdot (2x^2)' = \frac{4x}{1 + \eta \mu^2 2x^2}.$$

44. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} e^{t-1} dt$

Η $f(t) = e^{t-1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση συνεχών και οι x^2 και x^3 είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

Για οποιοδήποτε $a \in \mathbb{R}$ (ή επιλέγουμε κάποια τιμή του a , δεν παίζει ρόλο), έχουμε:

$$F(x) \stackrel{\text{σχέση Chasles}}{=} \int_{x^2}^a e^{t-1} dt + \int_a^{x^3} e^{t-1} dt = - \int_a^{x^2} e^{t-1} dt + \int_a^{x^3} e^{t-1} dt.$$

Όμως οι συναρτήσεις $\int_a^{x^2} e^{t-1} dt$ και $\int_a^{x^3} e^{t-1} dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ ως συνθέσεις παραγωγισίμων (η πρώτη της $u=x^2$ με την $\int_a^u e^{t-1} dt$ και η δεύτερη της $w=x^3$ με την $\int_a^w e^{t-1} dt$). Άρα:

$$\frac{d}{dx} F(x) = -\frac{d}{dx} \int_a^{x^2} e^{t-1} dt + \frac{d}{dx} \int_a^{x^3} e^{t-1} dt = -e^{x^2-1} \cdot (x^2)' + e^{x^3-1} \cdot (x^3)' = -2x \cdot e^{x^2-1} + 3x^2 \cdot e^{x^3-1}$$

45. Αν ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους $f(t)$ δίνεται από τη σχέση $\frac{df(t)}{dt} = 3\sin t + 2$ και $f(\pi)=0$, να υπολογιστεί το μέγεθος $f(t)$, $t \in [0, \pi]$.

Αφού $f'(t) = 3\sin t + 2$, θα είναι $f(t) = 3\eta\mu t + 2t - c$, $c \in \mathbb{R}$.

Για $t=\pi$ έχουμε $f(\pi) = 3\eta\mu\pi + 2\pi - c \Leftrightarrow 0 = 3 \cdot 0 + 2\pi - c \Leftrightarrow c = 2\pi$. Άρα $f(t) = 3\eta\mu t + 2t - 2\pi$.

ΛΛΛΙΩΣ: $\int \frac{df(t)}{dt} dt = f(t) + c \Leftrightarrow \int (3\sin t + 2) dt = f(t) + c \Leftrightarrow 3\eta\mu t + 2t = f(t) + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(t) = 3\eta\mu t + 2t - c$, $c \in \mathbb{R}$ κ.τ.λ.

46. Τα κέρδη μιας εταιρείας σε χιλιάδες € που ξεκίνησε να λειτουργεί πριν από 30 χρόνια με αρχικό κεφάλαιο 30.000 €, αυξάνουν με ρυθμό $12t \cdot e^{t^2-1}$, όπου t οι δεκαετίες λειτουργίας της εταιρείας. Θεωρώντας το χρόνο ως συνεχή μεταβλητή να υπολογίσετε:

α) Τη συνάρτηση $K(t)$ των κερδών.

β) Την αύξηση των κερδών της τα τελευταία 20 χρόνια.

α) Αφού $K'(t) = 12t \cdot e^{t^2-1} = 6 \cdot (t^2-1)' \cdot e^{t^2-1} = 6 \cdot (e^{t^2-1})'$, θα είναι $K(t) = 6e^{t^2-1} + c$, $c \in \mathbb{R}$

Όμως $K(0)=30$, οπότε η παραπάνω σχέση για $t=0$ δίνει $K(0) = 6e^{0^2-1} + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 30 = 6e^{-1} + c \Leftrightarrow c = 30 - \frac{6}{e}$. Άρα τελικά $K(t) = 6e^{t^2-1} + 30 - \frac{6}{e}$.

ΛΛΛΙΩΣ: Είναι $K'(t) = 12t \cdot e^{t^2-1}$, οπότε $K(t) = \int K'(t) dt + c \Leftrightarrow K(t) = \int 12t \cdot e^{t^2-1} dt + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow K(t) = 6 \cdot \int (t^2-1)' \cdot e^{t^2-1} dt + c \Leftrightarrow K(t) = 6e^{t^2-1} + c$, $c \in \mathbb{R}$ κ.τ.λ.

β) Προφανώς ζητάμε το $K(3)-K(1)$ (γιατί ο χρόνος δίνεται σε δεκαετίες, άρα μας ενδιαφέρει το διάστημα μεταξύ της τρίτης και της πρώτης δεκαετίας).

Αυτό μπορεί να βρεθεί εύκολα τώρα που έχουμε προσδιορίσει τη συνάρτηση $K(t)$, αλλά

θα μπορούσε να υπολογιστεί χωρίς αυτήν μια που **$K(3)-K(1) = \int_1^3 K'(t) dt$** .

Άρα $K(3)-K(1) = \dots$

47. Ένας πληθυσμός βακτηριδίων αυξάνει με ρυθμό $N'(t) = \frac{1}{300} \cdot e^{\frac{t}{300}}$ χιλιάδες βακτηρίδια το δευτερόλεπτο. Να βρεθεί η αύξηση του πληθυσμού το πρώτο λεπτό.

Ζητάμε την αύξηση του πληθυσμού μεταξύ των χρονικών στιγμών 0 sec και 60 sec, δηλαδή τη διαφορά $N(60)-N(0)$. Τη διαφορά αυτή ως γνωστόν μπορεί να μας τη δώσει το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{60} N'(t) dt$. Η N' είναι συνεχής στο $[0, 60]$, οπότε έχουμε:

$$N(60)-N(0) = \int_0^{60} N'(t) dt = \int_0^{60} \frac{1}{300} \cdot e^{\frac{t}{300}} dt = \int_0^{60} \left(\frac{t}{300}\right)' \cdot e^{\frac{t}{300}} dt = \left[e^{\frac{t}{300}}\right]_0^{60} =$$

$$= e^{\frac{60}{300}} - e^{\frac{0}{300}} = e^{\frac{1}{5}} - 1 \approx 0,221 \text{ χιλιάδες βακτηρίδια δηλαδή περίπου } 221 \text{ βακτηρίδια.}$$

ΛΛΙΩΣ: Αφού $N'(t) = \frac{1}{300} \cdot e^{\frac{t}{300}} = (e^{\frac{t}{300}})'$, θα είναι $N(t) = e^{\frac{t}{300}} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Άρα $N(60)-N(0) = \dots$

48. Να υπολογίσετε τον τύπο της συνάρτησης f , αν η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$, για κάθε $x > 0$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2, 4)$.

Η δοσμένη σχέση γίνεται ισοδύναμα $x \cdot f'(x) = f(x) \Leftrightarrow x \cdot f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \cdot f'(x) - (x)' \cdot f(x) = 0$. Διαιρώντας τα μέλη με x^2 έχουμε:

$$\frac{x \cdot f'(x) - (x)' \cdot f(x)}{x^2} = \frac{0}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0.$$

Επομένως από το θεώρημα της σταθερής συνάρτησης έχουμε ότι $\frac{f(x)}{x} = c$ (1), $c \in \mathbb{R}$.

Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι $f(2)=4$, οπότε η (1) για $x=2$ δίνει:

$$\frac{f(2)}{2} = c \Leftrightarrow \frac{4}{2} = c \Leftrightarrow c = 2. \text{ Άρα από την (1) έχουμε } f(x) = 2x.$$

49. Να υπολογίσετε τον τύπο της συνάρτησης f , αν η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) + 2x \cdot f(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1)=1$.

Το πρώτο μέλος της δοσμένης σχέσης μας θυμίζει παράγωγο γινομένου, μια και το $2x$ είναι η παράγωγος της x^2 . Όμως ο πρώτος προσθετέος του πρώτου μέλους δεν έχει τον παράγοντα x^2 (δηλαδή το πρώτο μέλος δεν είναι $x^2 \cdot f'(x) + 2x \cdot f(x)$). Ίσως τότε το πρώτο μέλος να προέρχεται από την παραγωγή ενός γινομένου «μιας σύνθετης $g(h(x))$ επί την f » και το $2x$ να είναι η παράγωγος της δευτερεύουσας (το $h'(x)$). Τότε όμως η παράγωγο της βασικής στην τιμή της δευτερεύουσας (η $g'(h(x))$) θα έπρεπε να ήταν η ίδια η σύνθετη ($g(h(x))$). Ποια συνάρτηση έχει αυτή την ιδιότητα; Η εκθετική με βάση το e . Και για να έχει παράγωγο δευτερεύουσας το $2x$, θα έπρεπε να ήταν η e^{x^2} .

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της δοσμένης σχέσης με e^{x^2} και έχουμε:

$$e^{x^2} \cdot f'(x) + e^{x^2} \cdot 2x \cdot f(x) = e^{x^2} \cdot f(x) \Leftrightarrow e^{x^2} \cdot f'(x) + e^{x^2} \cdot (x^2)' \cdot f(x) = e^{x^2} \cdot f(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (e^{x^2} \cdot f(x))' = e^{x^2} \cdot f(x).$$

Όμως από γνωστή εφαρμογή (στις παραγώγους και συγκεκριμένα στην παράγραφο της σταθερής συνάρτησης) έχουμε ότι $e^{x^2} \cdot f(x) = c \cdot e^x$ (1).

Όμως από υπόθεση $f(1)=1$, οπότε για $x=1$ η παραπάνω σχέση δίνει $e^1 \cdot f(1) = c \cdot e^1 \Leftrightarrow c=1$.

$$\text{Άρα (1)} \Leftrightarrow e^{x^2} \cdot f(x) = 1 \cdot e^x \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{e^{x^2}} = e^{x-x^2}.$$

50. Να υπολογίσετε τον τύπο της συνάρτησης f , αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

$$\text{και ισχύει } f(x) = x + \frac{1}{x} \cdot \int_1^x f(t) dt, \text{ για κάθε } x > 0.$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \cdot \int_1^x f(t) dt, \text{ για κάθε } x > 0$$

Η σχέση μεταξύ των f' και f που αναζητούμε, σύμφωνα με τη μεθοδολογία, ίσως προκύψει αν μπορέσουμε να παραγωγίσουμε τη δοσμένη σχέση.

Η δοσμένη σχέση γράφεται ισοδύναμα $x \cdot f(x) = x^2 + \int_1^x f(t) dt$ (1) (με απαλοιφή παρονομαστών).

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, οπότε και συνεχής και το 1 ανήκει στο $(0, +\infty)$, η συνάρτηση $\int_1^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, οπότε τα μέλη της (1) είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες. Παραγωγίζοντας τα μέλη της (1) έχουμε:

$$(x \cdot f(x))' = (x^2 + \int_1^x f(t) dt)' \Leftrightarrow f(x) + x \cdot f'(x) = 2x + f(x) \Leftrightarrow x \cdot f'(x) = 2x \Leftrightarrow f'(x) = 2 \quad x > 0.$$

$$\text{Άρα } f(x) = 2x + c \quad (2), c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Όμως η αρχική σχέση για } x=1 \text{ δίνει } f(1) = 1 + \frac{1}{1} \cdot \int_1^1 f(t) dt \Leftrightarrow f(1) = 1 + 0 \Leftrightarrow f(1) = 1.$$

$$\text{Η (2) για } x=1 \text{ γίνεται } f(1) = 2 \cdot 1 + c \Leftrightarrow 1 = 2 + c \Leftrightarrow c = -1.$$

$$\text{Άρα (2)} \Leftrightarrow f(x) = 2x - 1.$$

51. Αν $a \in (0, \beta)$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$,

$$\text{δείξτε ότι } \int_a^\beta f(x) dx \leq \beta \cdot f(\beta) - a \cdot f(a).$$

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$, θα ισχύει ότι για κάθε x με $a \leq x \leq \beta$ είναι $f(a) \leq f(x) \leq f(\beta)$ (1), άρα $f(x) \leq f(\beta)$, οπότε με βάση την πρόταση Γ είναι:

$$\int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta f(\beta) dx \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx \leq f(\beta) \cdot (\beta - a) \quad (2), \text{ γιατί } f(\beta) \text{ σταθερή ποσότητα.}$$

$$\text{Έτσι (2)} \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx \leq \beta \cdot f(\beta) - a \cdot f(\beta) \quad (3).$$

Όμως $f(\beta) \geq f(a)$ (από (1)), άρα $-a \cdot f(\beta) \leq -a \cdot f(a)$, οπότε

$$\beta \cdot f(\beta) - a \cdot f(\beta) \leq \beta \cdot f(\beta) - a \cdot f(a) \quad (4).$$

Από (3) και (4) είναι $\int_a^\beta f(x)dx \leq \beta \cdot f(\beta) - a \cdot f(a)$.

52. Έστω συναρτήσεις f, g με συνεχείς παραγώγους στο $[0, a]$, για τις οποίες ισχύουν ότι $f'(x) > 0, g'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, a]$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι:

$$\int_0^\beta f(x) \cdot g'(x) dx + \int_0^a f'(x) \cdot g(x) dx \geq f(a) \cdot g(\beta), \text{ για κάθε } \beta \in (0, a).$$

$$\text{Είναι (1)} \quad \int_0^\beta f(x) \cdot g'(x) dx + \int_0^a f'(x) \cdot g(x) dx \geq f(a) \cdot g(\beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\beta f(x) \cdot g'(x) dx + \int_0^a f'(x) \cdot g(x) dx - f(a) \cdot g(\beta) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [f(x) \cdot g(x)]_0^\beta - \int_0^\beta f'(x) \cdot g(x) dx + \int_0^a f'(x) \cdot g(x) dx - f(a) \cdot g(\beta) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\beta) \cdot g(\beta) - f(0) \cdot g(0) + \int_\beta^a f'(x) \cdot g(x) dx + \int_0^a f'(x) \cdot g(x) dx - f(a) \cdot g(\beta) \geq 0 \stackrel{f(0)=0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f(\beta) \cdot g(\beta) + \int_\beta^a f'(x) \cdot g(x) dx - f(a) \cdot g(\beta) \geq 0 \Leftrightarrow g(\beta) \cdot [f(\beta) - f(a)] + \int_\beta^a f'(x) \cdot g(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_\beta^a f'(x) \cdot g(x) dx \geq g(\beta) \cdot [f(a) - f(\beta)] \quad (2).$$

Όμως g γνησίως αύξουσα στο $[\beta, a]$. οπότε για $x \geq \beta$ είναι $g(x) \geq g(\beta) \stackrel{f'(x) > 0}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow g(x) \cdot f'(x) \geq g(\beta) \cdot f'(x) \Leftrightarrow \int_\beta^a f'(x) \cdot g(x) dx \geq \int_\beta^a f'(x) \cdot g(\beta) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_\beta^a f'(x) \cdot g(x) dx \geq g(\beta) \cdot \int_\beta^a f'(x) dx \Leftrightarrow \int_\beta^a f'(x) \cdot g(x) dx \geq g(\beta) \cdot [f(x)]_\beta^a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_\beta^a f'(x) \cdot g(x) dx \geq g(\beta) \cdot (f(a) - f(\beta)).$$

Αποδείξαμε την (2), άρα και την ισοδύναμή της (1).

53. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\int_1^x x \cdot f(t) dt + 1 \geq e^x - 2012 \cdot \ln x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Δείξτε ότι } \int_0^1 f(t) dt = 2011.$$

$$\text{Έστω η συνάρτηση } h(x) = \int_1^x x \cdot f(t) dt + 1 - e^x + 2012 \cdot \ln x =$$

$$= x \cdot \int_1^x f(t) dt + 1 - e^x + 2012 \cdot \ln x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι $h(0) = 0$ και με βάση την υπόθεση είναι $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $h(x) \geq h(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η h παρουσιάζει ελάχιστο στο 0.

Επιπλέον η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $1 \in \mathbb{R}$. Άρα η $y = \int_1^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο

$\mathbb{R}$, οπότε η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων και επειδή παρουσιάζει στο 0 (εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$) ελάχιστο, από Θεώρημα Fermat θα είναι $h'(0) = 0$ (1).

$$\text{Όμως } h'(x) = (x)' \cdot \int_1^x f(t) dt + x \cdot (\int_1^x f(t) dt)' - e^x + 2012 \cdot \text{συν} x =$$

$$= \int_1^x f(t) dt + x \cdot f(x) - e^x + 2012 \cdot \sin x.$$

$$\text{Άρα (1)} \Leftrightarrow \int_1^0 f(t) dt + 0 \cdot f(0) - e^0 + 2012 \cdot \sin 0 = 0 \Leftrightarrow \int_1^0 f(t) dt - 1 + 2012 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_1^0 f(t) dt = -2011 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt = 2011.$$

54. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις f, g στο $[a, \beta]$ για τις οποίες ισχύει ότι $f(a) < g(a)$ και $\int_a^\beta f(x) dx > \int_a^\beta g(x) dx$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ στο $[a, \beta]$. Η h είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως διαφορά συνεχών.

$$h(a) = f(a) - g(a) < 0.$$

Επίσης $\int_a^\beta f(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx > 0$, οπότε υπάρχει $x_1 \in (a, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_1) - g(x_1) > 0$, γιατί αν ήταν $f(x) - g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ θα είχαμε

$$\int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx \leq 0, \text{ πράγμα άτοπο. Άρα υπάρχει } x_1 \in (a, \beta], \text{ τέτοιο ώστε } h(x_1) > 0.$$

Έτσι στο $[a, x_1]$ ισχύει το θεώρημα Bolzano, οπότε υπάρχει $x_0 \in (a, x_1) \subseteq (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$ δηλαδή $f(x_0) = g(x_0)$.

55. Έστω f συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με συνεχή παράγωγο, $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \int_0^x f(t) dt$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, είναι και συνεχής, οπότε η συνάρτηση $h(x) = \int_0^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, άρα και συνεχής στο 0.

$$\begin{aligned} \text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \int_0^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2} \stackrel{\text{a.μ. } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x f(t) dt)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} \stackrel{\text{a.μ. } \frac{0}{0}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2} = \frac{f'(0)}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

56. Έστω f συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $(0, +\infty)$, με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{1}{f(t)} dt$.

Έστω $x \in (0, +\infty)$. Τότε για κάθε $t \in [x, x+1]$ έχουμε:

$$x \leq t \leq x+1 \quad \stackrel{f \text{ γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \quad f(x) \leq f(t) \leq f(x+1) \quad \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x+1)} \leq \frac{1}{f(t)} \leq \frac{1}{f(x)} \quad \stackrel{\text{βλέπε μεθοδολογία 5 ολοκληρωμάτων πρόταση Γ}}{\Leftrightarrow} \quad \int_x^{x+1} \frac{1}{f(x+1)} dt \leq \int_x^{x+1} \frac{1}{f(t)} dt \leq \int_x^{x+1} \frac{1}{f(x)} dt \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{f(x+1)} \cdot \int_x^{x+1} dt \leq \int_x^{x+1} \frac{1}{f(t)} dt \leq \frac{1}{f(x)} \cdot \int_x^{x+1} dt \Leftrightarrow \frac{1}{f(x+1)} \leq \int_x^{x+1} \frac{1}{f(t)} dt \leq \frac{1}{f(x)} \quad (1). \end{aligned}$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Επίσης θέτοντας $x+1=u$ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x+1)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(u)} = 0$.

Άρα από τη σχέση (1) και το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{1}{f(t)} dt = 0$.

57. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \int_2^x t^2 \cdot (\int_1^t (\omega^2 + 1) d\omega) dt$ είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$.

Έστω $g(t) = \int_1^t (\omega^2 + 1) d\omega$. Τότε $f(x) = \int_2^x t^2 \cdot g(t) dt$.

Είναι $y = \omega^2 + 1$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και $1 \in \mathbb{R}$. Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής.

Η $y = t^2 \cdot g(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο συνεχών και $2 \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = x^2 \cdot g(x) = x^2 \cdot \int_1^x (\omega^2 + 1) d\omega$.

Επίσης f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγισίμων με $f''(x) = (x^2)' \cdot \int_1^x (\omega^2 + 1) d\omega + x^2 \cdot (\int_1^x (\omega^2 + 1) d\omega)' = 2x \cdot \int_1^x (\omega^2 + 1) d\omega + x^2 \cdot (x^2 + 1)$.

Είναι $x > 0$, $x^2 > 0$ και $x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x > 1$.

Επίσης η $y = \omega^2 + 1$ είναι θετική στο $(1, +\infty)$ και $x > 1$, οπότε η $g(x) = \int_1^x (\omega^2 + 1) d\omega$ είναι θετική στο $(1, +\infty)$.

Άρα $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$.

58. Έστω f συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$, η οποία τέμνει τον άξονα x στα 0 και π . Να δείξετε ότι $\int_0^\pi (f''(x) + f(x)) \cdot \eta \mu x \, dx = 0$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \int_0^\pi f''(x) \cdot \eta \mu x \, dx + \int_0^\pi f(x) \cdot \eta \mu x \, dx = 0 \quad (2).$$

Θα πάρουμε το πρώτο μέλος της (2) και θα εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο καθένα ολοκλήρωμα (προσοχή στο ποια επιλέγουμε ως f και ποια ως g στο καθένα). Έτσι:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f''(x) \cdot \eta \mu x \, dx + \int_0^\pi f(x) \cdot \eta \mu x \, dx &= \int_0^\pi (f'(x))' \cdot \eta \mu x \, dx + \int_0^\pi f(x) \cdot (-\sigma \upsilon \nu x)' \, dx = \\ &= [f'(x) \cdot \eta \mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \cdot (\eta \mu x)' \, dx + [f(x) \cdot (-\sigma \upsilon \nu x)]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \cdot (-\sigma \upsilon \nu x) \, dx = \\ &= f'(\pi) \cdot \eta \mu \pi - f'(0) \cdot \eta \mu 0 - \int_0^\pi f'(x) \cdot \sigma \upsilon \nu x \, dx - f(\pi) \cdot \sigma \upsilon \nu \pi + f(0) \cdot \sigma \upsilon \nu 0 + \int_0^\pi f'(x) \cdot \sigma \upsilon \nu x \, dx = \\ &= f'(\pi) \cdot 0 - f'(0) \cdot 0 - 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 0, \text{ καθώς } f(\pi) = f(0) = 0 \text{ από υπόθεση.} \end{aligned}$$

59. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν $\int_4^x f(t) \, dt \geq x^2 - 16$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το $f(4)$.

$$\int_4^x f(t) dt \geq x^2 - 16 \Leftrightarrow \int_4^x f(t) dt - x^2 + 16 \geq 0 \quad (1).$$

Ορίζουμε συνάρτηση $g(x) = \int_4^x f(t) dt - x^2 + 16$, η οποία ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $g(4) = \int_4^4 f(t) dt - 4^2 + 16 = 0$, οπότε η (1) δίνει $g(x) \geq g(4)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο 4 του πεδίου ορισμού της.

Επιπλέον, αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $4 \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $\int_4^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε και η g ως άθροισμα παραγωγισίμων, με $g'(x) = (\int_4^x f(t) dt - x^2 + 16)' = f(x) - 2x$.

Άρα από Θεώρημα Fermat είναι $g'(4) = 0 \Leftrightarrow f(4) - 2 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow f(4) = 8$.

60. Αν $I_v = \int_0^\pi e^x \cdot \eta\mu^v x \, dx$, $v \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι $I_v = \frac{v \cdot (v-1)}{v^2 + 1} \cdot I_{v-2}$.

Η συνάρτηση $e^x \cdot \eta\mu^v x$ είναι συνεχής, οπότε και ολοκληρώσιμη στο $[0, \pi]$, ως γινόμενο συνεχών. Έχουμε κατά σειρά:

$$\begin{aligned} I_v &= \int_0^\pi e^x \cdot \eta\mu^v x \, dx = \int_0^\pi (e^x)' \cdot \eta\mu^v x \, dx = [e^x \cdot \eta\mu^v x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cdot (\eta\mu^v x)' \, dx = \\ &= e^\pi \cdot \eta\mu^v \pi - e^0 \cdot \eta\mu^v 0 - \int_0^\pi e^x \cdot v \cdot \eta\mu^{v-1} x \cdot (\eta\mu x)' \, dx = e^\pi \cdot 0 - 1 \cdot 0 - \int_0^\pi e^x \cdot v \cdot \eta\mu^{v-1} x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = \\ &= -v \cdot \int_0^\pi (e^x)' \cdot \eta\mu^{v-1} x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = -v \cdot \left[[e^x \cdot \eta\mu^{v-1} x \cdot \sigma\upsilon\nu x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cdot (\eta\mu^{v-1} x \cdot \sigma\upsilon\nu x)' \, dx \right] = \\ &= -v \cdot \left[e^\pi \cdot \eta\mu^{v-1} \pi \cdot \sigma\upsilon\nu \pi - e^0 \cdot \eta\mu^{v-1} 0 \cdot \sigma\upsilon\nu 0 - \int_0^\pi e^x \cdot [(v-1) \cdot \eta\mu^{v-2} x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^{v-1} x \cdot (-\eta\mu x)] \, dx \right] = \\ &= v \cdot \int_0^\pi e^x \cdot [(v-1) \cdot \eta\mu^{v-2} x \cdot (1 - \eta\mu^2 x) - \eta\mu^v x] \, dx = \\ &= v \cdot \int_0^\pi e^x \cdot [(v-1) \cdot \eta\mu^{v-2} x - (v-1) \cdot \eta\mu^v x - \eta\mu^v x] \, dx = v \cdot \int_0^\pi e^x \cdot [(v-1) \cdot \eta\mu^{v-2} x - v \cdot \eta\mu^v x] \, dx = \\ &= v \cdot \int_0^\pi e^x \cdot [(v-1) \cdot \eta\mu^{v-2} x - v \cdot \eta\mu^v x] \, dx = v \cdot (v-1) \cdot \int_0^\pi e^x \cdot \eta\mu^{v-2} x \, dx - v^2 \cdot \int_0^\pi e^x \cdot \eta\mu^v x \, dx \end{aligned}$$

Παρατηρείστε ότι από τα ολοκληρώματα που προκύπτουν, το πρώτο είναι το I_{v-2} και το δεύτερο το I_v . Άρα ισχύει ότι $I_v = v \cdot (v-1) \cdot I_{v-2} - v^2 \cdot I_v \Leftrightarrow (v^2 + 1) \cdot I_v = v \cdot (v-1) \cdot I_{v-2}$

$$\Leftrightarrow I_v = \frac{v \cdot (v-1)}{v^2 + 1} \cdot I_{v-2}, \text{ για κάθε } v \in \mathbb{N}^*.$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΣΗΜΕΙΩΣΗ ▼

Σχέσεις σαν την παραπάνω, όπως είναι γνωστό, ονομάζονται **αναδρομικοί τύποι** (καθώς το I_v δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια ακολουθία με όρους που δίνονται με τη μορφή ολοκληρωμάτων). Τέτοιοι τύποι μας δίνουν τη δυνατότητα, να μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα πολλούς όρους της ακολουθίας, αν γνωρίζουμε κάποιους αρχικούς.

Έτσι στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το $I_1 = \int_0^{\pi} e^x \cdot \eta\mu x \, dx$ (ανεξάρτητα από την παραπάνω εργασία) και με τη βοήθεια της σχέσης (1) που αποδείξαμε και του I_3 , να υπολογίσουμε διαδοχικά το I_3 , το I_5 , το I_7 κ.τ.λ., θέτοντας στη σχέση αντίστοιχα όπου n το 3, το 5, το 7 κ.τ.λ.

61. Αν $I = \int_0^{\pi} e^x \cdot \eta\mu^2 x \, dx$ και $J = \int_0^{\pi} e^x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx$, να υπολογίσετε τα $I+J$, $I-J$, I , J .

Τα ολοκληρώματα I και J υπολογίζονται, αλλά με χρονοβόρες διαδικασίες. Για να μας δίνουν να υπολογίσουμε πρώτα τα $I+J$ και $I-J$ σκεφτόμαστε ότι αυτά μπορεί να είναι απλούστερα. Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε τα I και J , λύνοντας το σύστημα των $I+J$ και $I-J$ με αγνώστους τα I και J .

Οι συναρτήσεις $e^x \cdot \eta\mu^2 x$ και $e^x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$ είναι συνεχείς στο $[0, \pi]$, ως γινόμενα συνεχών, οπότε και ολοκληρώσιμες. Είναι:

$$\begin{aligned} I+J &= \int_0^{\pi} e^x \cdot \eta\mu^2 x \, dx + \int_0^{\pi} e^x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx = \int_0^{\pi} (e^x \cdot \eta\mu^2 x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x) \, dx = \\ &= \int_0^{\pi} e^x \cdot (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) \, dx = \int_0^{\pi} e^x \, dx = [e^x]_0^{\pi} = e^{\pi} - e^0 = \mathbf{e^{\pi} - 1} \quad (1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I-J &= \int_0^{\pi} e^x \cdot \eta\mu^2 x \, dx - \int_0^{\pi} e^x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx = \int_0^{\pi} (e^x \cdot \eta\mu^2 x - e^x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x) \, dx = \\ &= \int_0^{\pi} e^x \cdot (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x) \, dx = \int_0^{\pi} e^x \cdot (-\sigma\upsilon\nu 2x) \, dx = -\int_0^{\pi} e^x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \, dx = \\ &= -\int_0^{\pi} (e^x)' \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \, dx = -\left[[e^x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cdot (\sigma\upsilon\nu 2x)' \, dx \right] = \\ &= -e^{\pi} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi + e^0 \cdot \sigma\upsilon\nu 0 + \int_0^{\pi} e^x \cdot (-\eta\mu 2x) \cdot (2x)' \, dx = -e^{\pi} + 1 - 2 \int_0^{\pi} e^x \cdot \eta\mu 2x \, dx = \\ &= -e^{\pi} + 1 - 2 \int_0^{\pi} (e^x)' \cdot \eta\mu 2x \, dx = -e^{\pi} + 1 - 2 \cdot \left[[e^x \cdot \eta\mu 2x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cdot (\eta\mu 2x)' \, dx \right] = \\ &= -e^{\pi} + 1 - 2 \cdot \left[e^{\pi} \cdot \eta\mu 2\pi - e^0 \cdot \eta\mu 0 - 2 \int_0^{\pi} e^x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \, dx \right] = \\ &= -e^{\pi} + 1 - 2 \cdot \left[e^{\pi} \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 2 \int_0^{\pi} e^x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \, dx \right] = -e^{\pi} + 1 + 4 \cdot \int_0^{\pi} e^x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \, dx = -e^{\pi} + 1 - 4 \cdot (I-J) \end{aligned}$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο $(I-J) = -e^{\pi} + 1 - 4 \cdot (I-J) \Leftrightarrow 5 \cdot (I-J) = 1 - e^{\pi} \Leftrightarrow \mathbf{I-J = \frac{1-e^{\pi}}{5}} \quad (2).$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) $\begin{cases} I+J = e^{\pi} - 1 \\ I-J = \frac{1-e^{\pi}}{5} \end{cases}$ βρίσκουμε ότι $\mathbf{I = 2 \cdot \frac{e^{\pi} - 1}{5}}$ και

$$\mathbf{J = 3 \cdot \frac{e^{\pi} - 1}{5}}.$$

62. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x) = e^x - \int_0^1 e^x f(x) \, dx$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της f .

Σημαντική Παρατήρηση: το $\int_0^1 e^x f(x) dx$ είναι αριθμός

Έστω $\int_0^1 e^x f(x) dx = c$ (1). Τότε από την υπόθεση είναι $f(x) = e^x - c$ (2).

$$\text{Άρα (1)} \Leftrightarrow \int_0^1 e^x \cdot (e^x - c) dx = c \Leftrightarrow \int_0^1 (e^{2x} - c \cdot e^x) dx = c \Leftrightarrow \left[\frac{e^{2x}}{2} - c \cdot e^x \right]_0^1 = c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^2 - 1}{2} - c \cdot (e - 1) = c \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow c = \frac{e^2 - 1}{2e}. \text{ Άρα από (2) είναι } f(x) = e^x - \frac{e^2 - 1}{2e}.$$

4.6 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Όσα αναφέρονται παρακάτω ισχύουν με την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στα αντίστοιχα διαστήματα. Αν δεν είναι εμφανώς συνεχείς, θα πρέπει να αποδεικνύουμε ότι είναι συνεχείς.

1. ΕΜΒΑΔΟΝ ΧΩΡΙΟΥ ΟΡΙΖΟΜΕΝΟΥ ΑΠΟ ΤΗ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f ΚΑΙ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ $x'x$

Στην περίπτωση αυτή μπορεί να ζητάμε:

- A.** το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον $x'x$ και δύο κατακόρυφες ευθείες $x=a$ και $x=\beta$ ή
 - B.** το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον $x'x$ και την κατακόρυφη ευθεία $x=a$ ή
 - Γ.** το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον $x'x$.
- Ας δούμε πώς υπολογίζεται καθένα από τα παραπάνω εμβαδά:

A. Εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον $x'x$ και δύο κατακόρυφες ευθείες $x=a$ και $x=\beta$ με $a < \beta$

Το εμβαδόν αυτό δίνεται από τη σχέση

$$E = \int_a^\beta |f(x)| dx \quad (1)$$

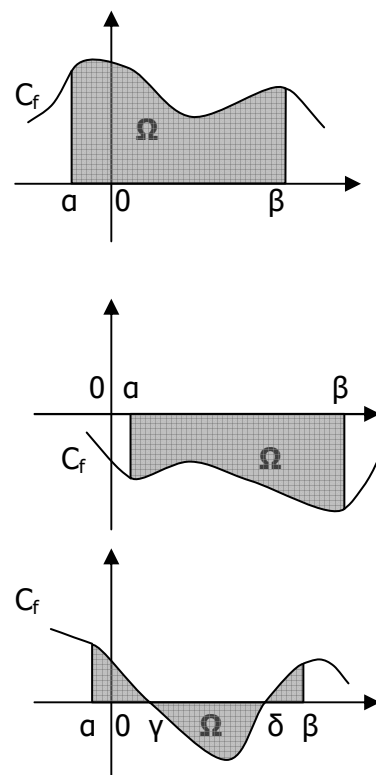
ΜΕΘΟΔΟΣ

Προσδιορίζουμε τα πρόσημα της f στο $[a, \beta]$ και υπολογίζουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- 1. 1ο Σχήμα:** Επειδή $f(x) \geq 0$ (και συγκεκριμένα στο σχήμα $f(x) > 0$), για κάθε $x \in [a, \beta]$, θα είναι $E = \int_a^\beta f(x) dx$. Τότε το εμβαδόν μπορεί να οριστεί και ως **το σύνολο των σημείων (x, y) με $a \leq x \leq \beta$ και $0 \leq y \leq f(x)$.**

- 2ο Σχήμα:** Επειδή $f(x) \leq 0$ (και συγκεκριμένα στο σχήμα $f(x) < 0$), για κάθε $x \in [a, \beta]$, θα είναι $E = -\int_a^\beta f(x) dx$. Τότε το εμβαδόν μπορεί να οριστεί και ως **το σύνολο των σημείων (x, y) με $a \leq x \leq \beta$ και $f(x) \leq y \leq 0$.**



3ο Σχήμα: Επειδή είναι $f(x) \geq 0$ στα $[a, \gamma]$ και $[\delta, \beta]$ και $f(x) \leq 0$ στο $[\gamma, \delta]$, θα είναι

$$E = \int_a^\gamma f(x) dx - \int_\gamma^\delta f(x) dx + \int_\delta^\beta f(x) dx.$$

2. Ο αριθμός που εκφράζει το **εμβαδόν δεν μπορεί να είναι αρνητικός** και τον γράφουμε πάντα συνοδευόμενο από τα αρχικά **τ.μ.** που σημαίνει «τετραγωνικές μονάδες».

Β. Εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον x' και την κατακόρυφη ευθεία $x=a$

Βασική προϋπόθεση για να ορίζεται ένα τέτοιο εμβαδόν, είναι η C_f να τέμνει τον x' σε ένα σημείο $B(\beta, f(\beta))$ τουλάχιστον. Τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_\beta^a |f(x)| dx, \text{ αν } \beta < a \quad (1\text{o Σχήμα})$$

ή

$$E = \int_a^\beta |f(x)| dx, \text{ αν } a < \beta \quad (2\text{o Σχήμα})$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην περίπτωση που η C_f τέμνει τον x' σε περισσότερα από ένα σημεία, τότε για να έχει νόημα το παραπάνω εμβαδόν με τη συγκεκριμένη διατύπωση, θα πρέπει τα σημεία αυτά να έχουν όλα τετμημένες ή μεγαλύτερες του a ή μικρότερες του a . Στην περίπτωση αυτή το εμβαδόν είναι πάλι $E = \int_a^\beta |f(x)| dx$ ή $E = \int_\beta^a |f(x)| dx$, ανάλογα αν οι

τετμημένες των σημείων τομής είναι όλες μεγαλύτερες του a ή όλες μικρότερες του a . Ως β θεωρούμε την τετμημένη του σημείου τομής που βρίσκεται σε μεγαλύτερη απόσταση από το a .

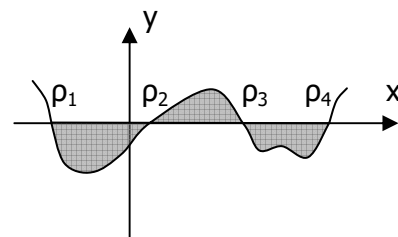
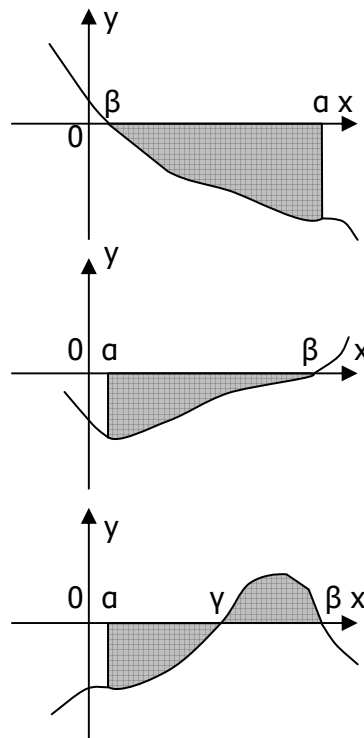
Έτσι στο 3ο Σχήμα θα είναι $E = \int_a^\beta |f(x)| dx = -\int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\beta f(x) dx$.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Προσδιορίζουμε τις ρίζες και τα πρόσημα της f και υπολογίζουμε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα.

Γ. Εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον x' .

Βασική προϋπόθεση για να ορίζεται ένα τέτοιο εμβαδόν, είναι η C_f να τέμνει τον x' σε δύο τουλάχιστον σημεία (φυσικά οι τετμημένες των σημείων αυτών είναι ρίζες της f). Τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι



$E = \int_{\rho_1}^{\rho_v} |f(x)| dx$, όπου ρ_1 και ρ_v η μικρότερη και η μεγαλύτερη ρίζα της f αντίστοιχα.

Έτσι στο παραπάνω σχήμα είναι $E = \int_{\rho_1}^{\rho_2} |f(x)| dx = -\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x) dx + \int_{\rho_2}^{\rho_3} f(x) dx - \int_{\rho_3}^{\rho_4} f(x) dx$.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Προσδιορίζουμε τις ρίζες και τα πρόσημα της f και υπολογίζουμε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα.

2. ΕΜΒΑΔΟΝ ΧΩΡΙΟΥ ΟΡΙΖΟΜΕΝΟΥ ΑΠΟ ΤΙΣ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΔΥΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ f ΚΑΙ g

Στην περίπτωση αυτή μπορεί να ζητάμε:

A. το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και δύο κατακόρυφες ευθείες $x=a$ και $x=\beta$ ή

B. το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και την κατακόρυφη ευθεία $x=a$ ή

Γ. το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g .

Ας δούμε πώς υπολογίζεται καθένα από τα παραπάνω εμβαδά:

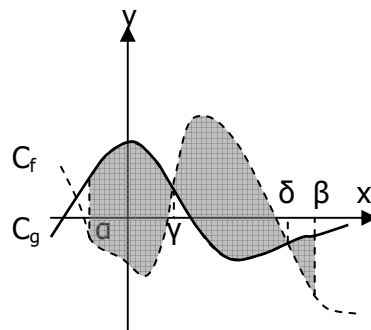
A. Εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και δύο κατακόρυφες ευθείες $x=a$ και $x=\beta$ με $a < \beta$

Το εμβαδόν αυτό δίνεται σε κάθε περίπτωση από τη σχέση:

$$E = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx.$$

Έτσι στο διπλανό σχήμα είναι $f(x)-g(x) \leq 0$ στο $[a, \gamma]$ (γιατί η C_g βρίσκεται «πάνω» από τη C_f), $f(x)-g(x) \geq 0$ στο $[\gamma, \delta]$ και $f(x)-g(x) \leq 0$ στο $[\delta, \beta]$. Άρα με βάση τη σχέση είναι:

$$E = -\int_a^\gamma (f(x) - g(x)) dx + \int_\gamma^\delta (f(x) - g(x)) dx - \int_\delta^\beta (f(x) - g(x)) dx$$



ΜΕΘΟΔΟΣ

Προσδιορίζουμε τα πρόσημα της $f(x)-g(x)$ στο $[a, \beta]$ και υπολογίζουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Παρατηρείστε ότι η θέση του άξονα x 'ς σε σχέση με τις C_f και C_g δεν παίζει κανένα ρόλο.

2. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε το χωρίο του οποίου ζητάμε το εμβαδόν θα μπορούσε να οριστεί ως το σύνολο των σημείων (x, y) του επιπέδου, για τα οποία είναι $a \leq x \leq \beta$ και $g(x) \leq y \leq f(x)$.

Παρόμοια θα οριζόταν το αντίστοιχο χωρίο αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Β. Εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και την κατακόρυφη ευθεία $x=a$

Βασική προϋπόθεση για να ορίζεται ένα τέτοιο εμβαδόν, είναι οι C_f και C_g να τέμνονται σε ένα σημείο $B(\beta, f(\beta))$ τουλάχιστον. Τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx, \text{ αν } a < \beta \quad (1\text{o Σχήμα})$$

ή

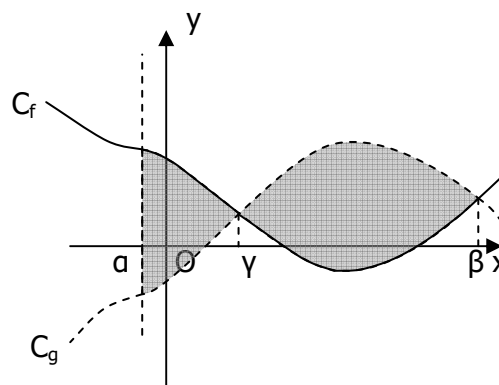
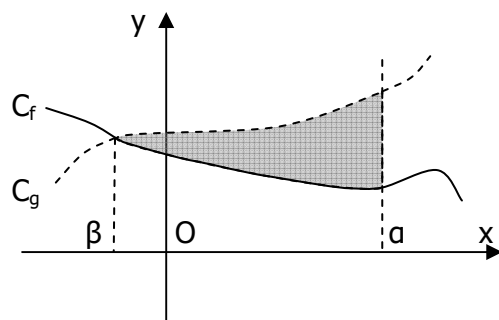
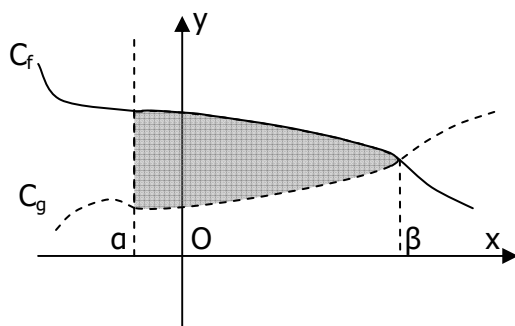
$$E = \int_\beta^a |f(x) - g(x)| dx, \text{ αν } \beta < a \quad (2\text{o Σχήμα})$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην περίπτωση που οι C_f και C_g τέμνονται σε περισσότερα από ένα σημεία, τότε για να έχει νόημα το παραπάνω εμβαδόν με τη συγκεκριμένη διατύπωση, θα πρέπει τα σημεία αυτά να έχουν όλα τετμημένες ή μεγαλύτερες του a ή μικρότερες του a . Στην περίπτωση αυτή το εμβαδόν είναι πάλι $E = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx$ ή $E = \int_\beta^a |f(x) - g(x)| dx$, ανάλογα αν οι τετμημένες των σημείων τομής είναι όλες μεγαλύτερες του a ή όλες μικρότερες του a . Ως β θεωρούμε την τετμημένη του σημείου τομής που βρίσκεται σε μεγαλύτερη απόσταση από το a .

Έτσι στο 3ο Σχήμα θα είναι

$$\begin{aligned} E &= \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx = \\ &= \int_a^y [f(x) - g(x)] dx - \int_y^\beta [f(x) - g(x)] dx. \end{aligned}$$



ΜΕΘΟΔΟΣ

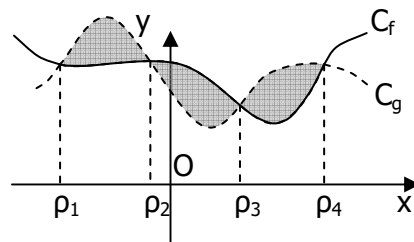
Προσδιορίζουμε τις ρίζες και τα πρόσημα της $f(x)-g(x)$ στο $[a, \beta]$ και υπολογίζουμε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα.

Γ. Εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g .

Βασική προϋπόθεση για να ορίζεται ένα τέτοιο εμβαδόν, είναι οι C_f και C_g να τέμνονται σε δύο τουλάχιστον σημεία (φυσικά οι τετμημένες των σημείων αυτών είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)-g(x)=0$). Τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_{\rho_1}^{\rho_n} |f(x) - g(x)| dx, \text{ όπου } \rho_1 \text{ και } \rho_n \text{ η μικρότερη}$$

και η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $f(x)-g(x)=0$ αντίστοιχα.



$$\text{Έτσι στο παραπάνω σχήμα είναι } E = \int_{\rho_1}^{\rho_4} |f(x) - g(x)| dx =$$

$$= -\int_{\rho_1}^{\rho_2} (f(x) - g(x)) dx + \int_{\rho_2}^{\rho_3} (f(x) - g(x)) dx - \int_{\rho_3}^{\rho_4} (f(x) - g(x)) dx.$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Προσδιορίζουμε τις ρίζες και τα πρόσημα της διαφοράς $f(x)-g(x)$ και υπολογίζουμε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα.

ΤΕΛΙΚΑ ΣΕ ΚΑΘΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ παρατηρούμε ότι η σχέση υπολογισμού **οποιουδήποτε από τα παραπάνω εμβαδά είναι μία η**

$$E = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx,$$

μόνο που:

- τα όρια a και b ή θα δίνονται ή θα είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)-g(x)=0$ και
- η g ή θα είναι οποιαδήποτε συνάρτηση ή ο άξονας $x'x$, δηλαδή η συνάρτηση $g(x)=0$, οπότε φυσικά η παραπάνω σχέση καταλήγει στην

$$E = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, όλα τα παραπάνω χωρία με τον τρόπο που ορίστηκαν, είναι χωρία που ορίζονται από δύο συναρτήσεις. Τέτοια χωρία μπορούμε να τα λέμε «**απλά χωρία**» και τα εμβαδά τους υπολογίζονται άμεσα με τη βοήθεια ολοκληρωμάτων.

Εκτός όμως από αυτά υπάρχουν χωρία που ορίζονται από τις γραφικές παραστάσεις περισσότερων από δύο συναρτήσεων και τα οποία μπορούμε να τα λέμε «**σύνθετα χωρία**». Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη μέθοδο υπολογισμού των εμβαδών τέτοιων χωρίων.

3. ΕΜΒΑΔΟΝ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΧΩΡΙΟΥ (χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις περισσοτέρων από δύο συναρτήσεων)

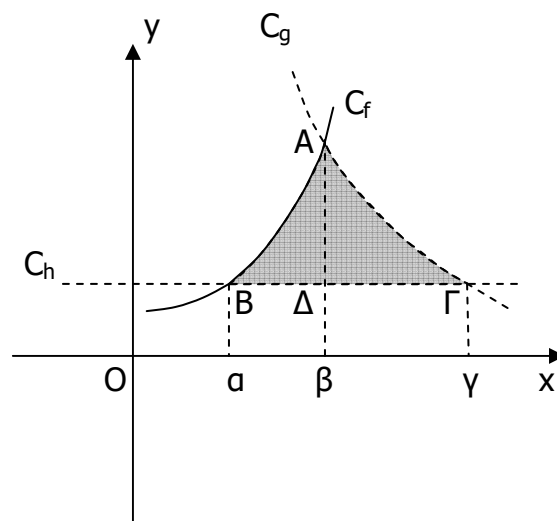
Τα εμβαδά τέτοιων χωρίων υπολογίζονται με προσθέσεις ή αφαιρέσεις εμβαδών άλλων απλών χωρίων από τα οποία αποτελούνται τα σύνθετα χωρία. Στα απλά αυτά χωρία μπορεί να περιλαμβάνονται και γεωμετρικά σχήματα, τα εμβαδά των οποίων (αν το επιθυμούμε) μπορούμε να προσδιορίσουμε με τους κλασικούς τύπους της Γεωμετρίας.

Έτσι στο σχήμα για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ που ορίζεται από τις συναρτήσεις f , g και h (η h έχει γραφική παράσταση μια οριζόντια ευθεία), μπορούμε να φέρουμε $ΑΔ \perp x'x$, χωρίζοντας έτσι το σύνθετο αυτό χωρίο σε δύο μεικτόγραμμα τρίγωνα, τα ΑΒΔ και ΑΔΓ, τα οποία ορίζονται από δύο γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων το καθένα και κατά συνέπεια είναι απλά. Έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι $(ΑΒΓ) = (ΑΒΔ) + (ΑΔΓ)$.

Στη συνέχεια:

- θα βρούμε τις τετμημένες των σημείων Α, Β και Γ στα οποία τέμνονται ανά δύο οι γραφικές παραστάσεις,
- θα δείξουμε ότι στο $[a, \beta]$ η C_f είναι πάνω από την C_h και στο $[\beta, \gamma]$ η C_g είναι πάνω από την C_h και τελικά θα γράψουμε ότι:

$$(ΑΒΓ) = \int_a^{\beta} (f(x) - h(x)) dx + \int_{\beta}^{\gamma} (g(x) - h(x)) dx.$$



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΕΜΒΑΔΑ

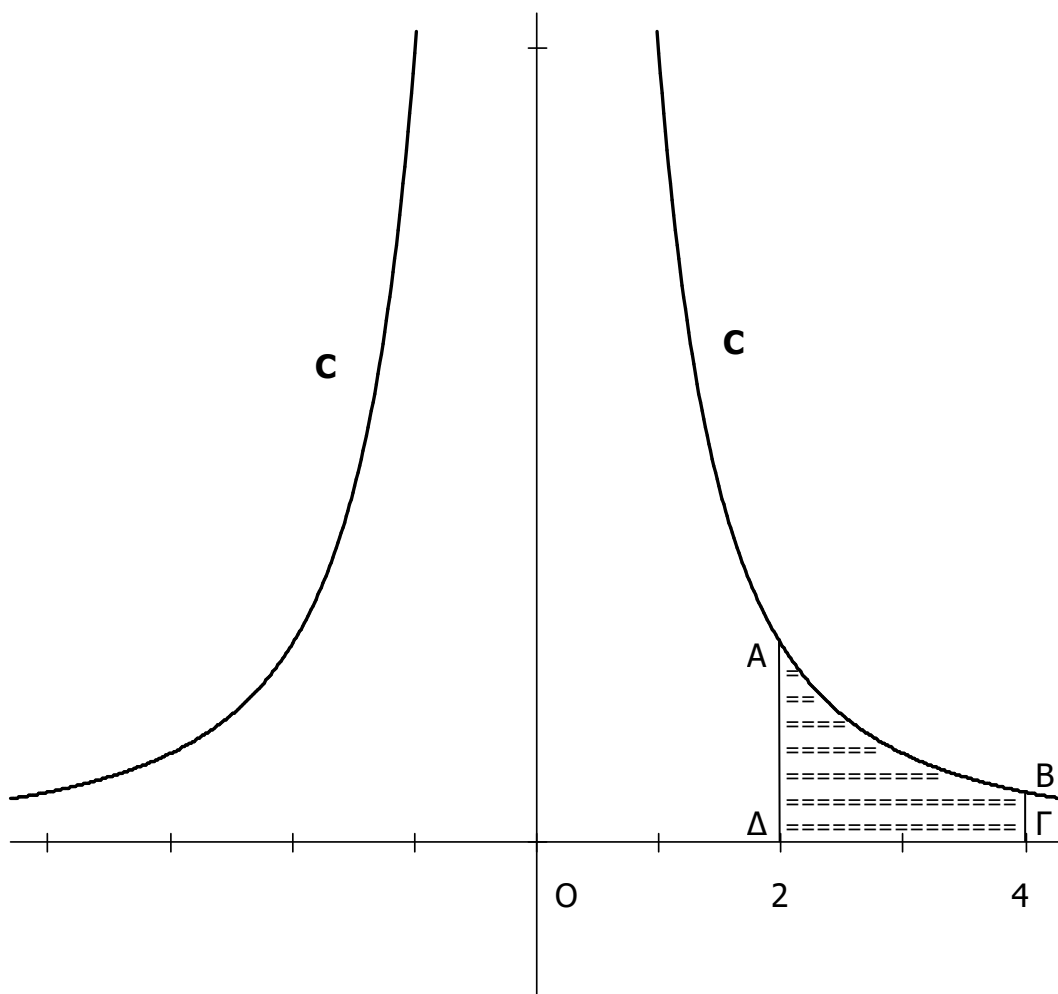
Όταν μας ζητούν ένα εμβαδόν εξετάζουμε από πόσες **συναρτήσεις** ορίζεται το αντίστοιχο χωρίο (φυσικά δεν συνυπολογίζονται οι κατακόρυφες ευθείες, μια που αυτές δεν αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων).

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ	ΜΕΘΟΔΟΣ
Αν οι συναρτήσεις είναι το πολύ δύο, το αντίστοιχο χωρίο είναι απλό	• Το σχήμα δεν είναι απαραίτητο (αν και βοηθά) • Σε κάθε περίπτωση ισχύει $E = \int_a^{\beta} f(x) - g(x) dx$, το οποίο υπολογίζεται αφού προσδιορίσουμε τα a και β καθώς και το πρόσημο της $f(x) - g(x)$ στο $[a, \beta]$
Αν οι συναρτήσεις είναι περισσότερες από δύο, το αντίστοιχο χωρίο είναι σύνθετο	• Το σχήμα είναι απαραίτητο • Στο σχήμα φέρνουμε κατάλληλες κατακόρυφες ευθείες από τις κορυφές του σύνθετου χωρίου και υπολογίζουμε το εμβαδόν του ως άθροισμα ή διαφορά των εμβαδών των απλών χωρίων που δημιουργούνται.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΑ ΕΜΒΑΔΑ

1. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^2}$, τον ημιάξονα Ox και τις ευθείες $x=2$ και $x=4$.

Άλλη εκφώνηση της ίδιας άσκησης: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που αποτελείται από το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ με $2 \leq x \leq 4$ και $0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}$.

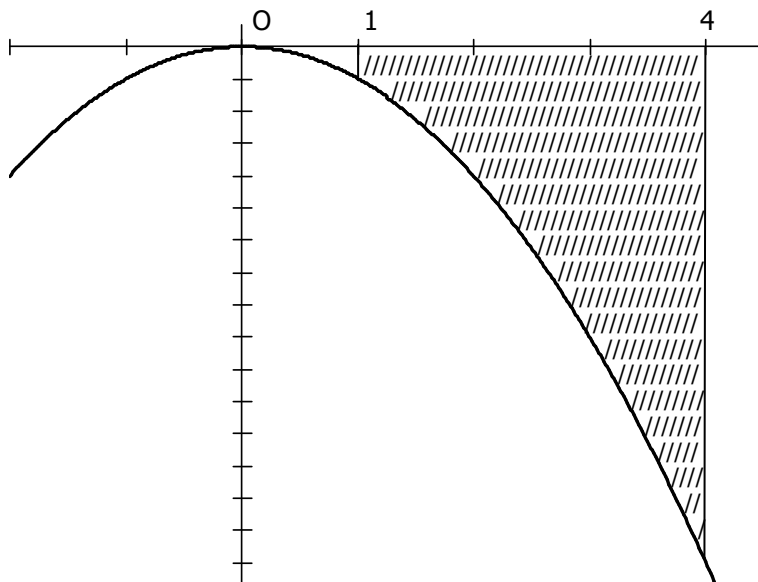


Το ζητούμενο εμβαδόν είναι αυτό του γραμμοσκιασμένου μεικτόγραμμου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Η f είναι συνεχής στο $[2, 4]$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [2, 4]$ (προφανές). Άρα έχουμε:

$$E = \int_2^4 |f(x)| dx = \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx = \int_2^4 x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x} \right]_2^4 = -\left[\frac{1}{x} \right]_2^4 = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \text{ τ.μ.}$$

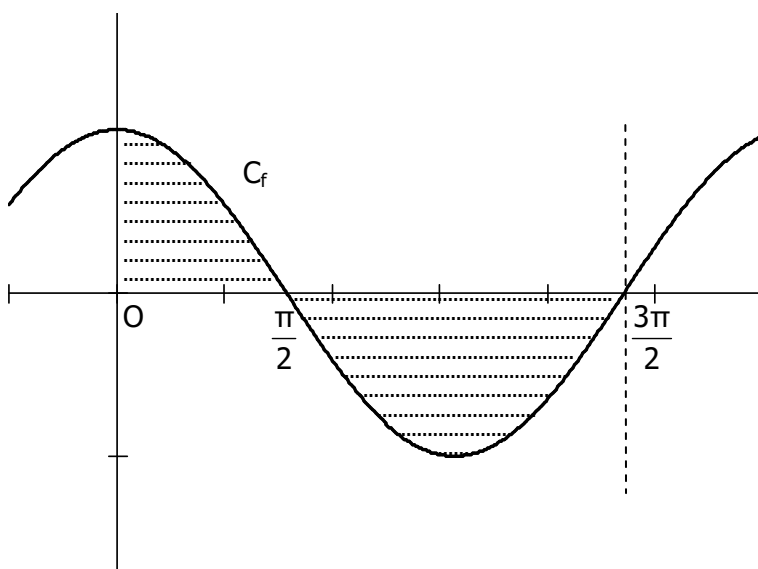
2. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της συνάρτησης $f(x) = -x^2$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=4$.



Είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$. Έτσι:

$$\begin{aligned} E &= \int_1^4 |f(x)| dx = -\int_1^4 f(x) dx = \\ &= -\int_1^4 (-x^2) dx = \int_1^4 x^2 dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{63}{3} = \\ &= 21 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

3. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f με $f(x) = \sin x$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=\frac{3\pi}{2}$.



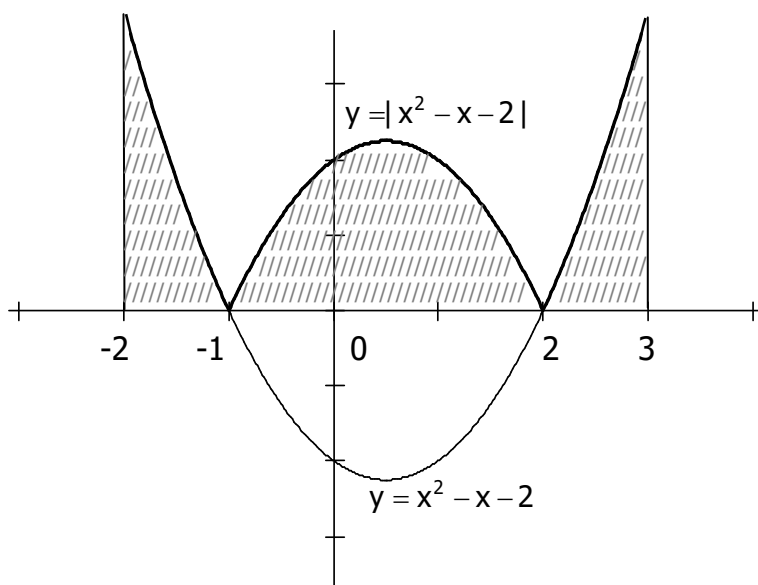
Είναι $\sin x \geq 0$ για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ και $\sin x \leq 0$ για

κάθε $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Έτσι:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |f(x)| dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx = \end{aligned}$$

$$= [\eta \mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\eta \mu x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \eta \mu \frac{\pi}{2} - \eta \mu 0 - (\eta \mu \frac{3\pi}{2} - \eta \mu \frac{\pi}{2}) = 1 - 0 - (-1 - 1) = 3 \text{ τ.μ.}$$

4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x^2-x-2|$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-2$ και $x=3$.



Η γραφική παράσταση της f χαράσσεται από την γραφική παράσταση της $y=x^2-x-2$, διατηρώντας τα μη αρνητικά της τμήματα και χαράσσοντας τα συμμετρικά των αρνητικών της τμημάτων ως προς τον άξονα $x'x$. Στο σχήμα, με λεπτή γραμμή είναι η γραφική παράσταση της $y=x^2-x-2$ και με παχιά γραμμή είναι η γραφική παράσταση της f .

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[-2, 3]$ ως απόλυτο συνεχούς.

Το x^2-x-2 έχει ρίζες τα -1 και 2 και ο πίνακας προσήμων του είναι:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
x^2-x-2	$+$	$-$	$+$	

Άρα $x^2-x-2 \geq 0$ στα $[-2, -1]$ και $[2, 3]$ και $x^2-x-2 \leq 0$ στο $[-1, 2]$.

$$\begin{aligned} \text{Έτσι: } E &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2) dx - \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx + \int_2^3 (x^2 - x - 2) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 = \dots = \frac{49}{6} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

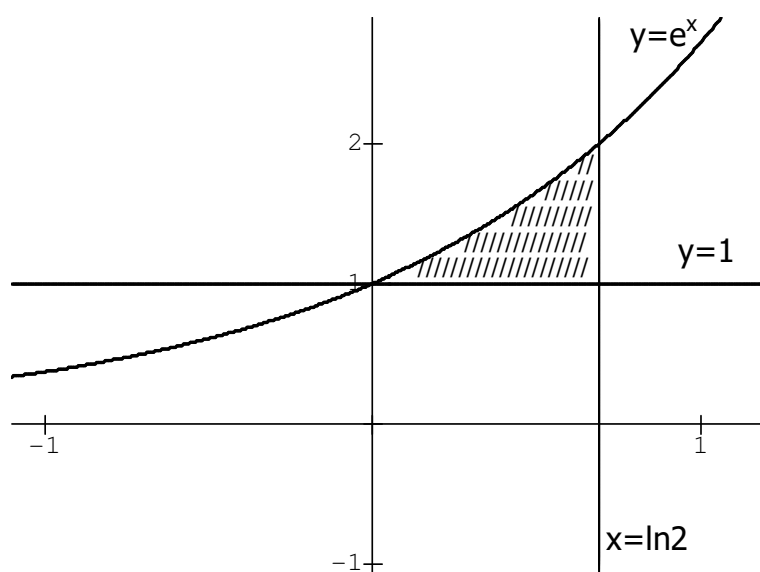
5. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το διάγραμμα της $f(x)=|x^2-x-2|$ και τον άξονα $x'x$.

Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα η C_f τέμνει τον $x'x$ στα $(-1, 0)$ και $(2, 0)$, ενώ για κάθε $x \in [-1, 2]$ είναι $f(x)=-(x^2-x-2) \geq 0$.

Άρα

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^2 -(x^2 - x - 2) dx = - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^2 = - \left[\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2 \cdot (-1) \right) \right] = \\ &= \frac{9}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

6. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τα διαγράμματα των συναρτήσεων $f(x)=e^x$, $g(x)=1$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=\ln 2$.



Το ζητούμενο εμβαδόν θα δίνεται από τη σχέση

$$E = \int_0^{\ln 2} |f(x) - g(x)| dx.$$

$$\text{Έστω } f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Άρα στο $[0, \ln 2]$ είναι $f(x) - g(x) \geq 0$, οπότε

$|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ (η C_f βρίσκεται "πάνω" από τη C_g).

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E &= \int_0^{\ln 2} |f(x) - g(x)| dx = \int_0^{\ln 2} (f(x) - g(x)) dx = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) dx = [e^x - x]_0^{\ln 2} = \\ &= e^{\ln 2} - \ln 2 - e^0 + 0 = 2 - \ln 2 - 1 = 1 - \ln 2 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

7. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f και C_g αν $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x$ και $g(x) = x^2$.

Ο πίνακας προσήμων της $f(x) - g(x)$ είναι:

x	$-\infty$	0	1	5	$+\infty$
x	-	○	+	+	+
$x^2 - 6x + 5$	+	+	○	-	+
$f(x) - g(x)$ (ΓΙΝΟΜΕΝΟ)	-	○	+	○	+

Επειδή οι ρίζες της $f(x) - g(x)$ είναι οι 0, 1, 5 και τα πρόσημά της είναι τα παραπάνω έχουμε:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^5 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx - \int_1^5 (f(x) - g(x)) dx = \\ &= \int_0^1 (x^3 - 6x^2 + 5x) dx - \int_1^5 (x^3 - 6x^2 + 5x) dx = \dots = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} \right]_1^5 = \dots = \frac{131}{4} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f και από τις ευθείες που εφάπτονται στη C_f στα σημεία όπου αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x + 2$.

Τα σημεία που τέμνει η C_f τον $x'x$ βρίσκονται ως εξής:

Θέτουμε στην $y = x^2 + 2x - 3$ όπου $y = 0$. Έτσι $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ή $x = 1$. Άρα τα σημεία αυτά είναι τα $A(-3, 0)$ και $B(1, 0)$.

Αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι εφαπτόμενες της C_f στα A, B αντίστοιχα, τότε

$$\varepsilon_1: y-0=f'(-3) \cdot [x-(-3)] \Leftrightarrow y=f'(-3) \cdot (x+3)$$

$$\varepsilon_2: y-0=f'(1) \cdot (x-1) \Leftrightarrow y=f'(1) \cdot (x-1).$$

$$\text{Όμως } f'(-3)=2 \cdot (-3)+2=-4 \text{ και } f'(1)=2 \cdot 1+2=4.$$

$$\text{Άρα τελικά } \varepsilon_1: y=-4x-12 \text{ και } \varepsilon_2: y=4x-4.$$

Οι ε_1 και ε_2 έχουν κοινά σημεία με την παραβολή C_f μόνο τα Α και Β, ενώ τέμνονται μεταξύ τους σε σημείο Γ του οποίου η τετμημένη x_Γ είναι λύση της εξίσωσης $-4x-12=4x-4 \Leftrightarrow x=-1$. Άρα $x_\Gamma=-1$, οπότε $y_\Gamma=4 \cdot (-1)-4=-8$. Έτσι $\Gamma(-1, -8)$.

Επειδή η παραβολή έχει ως α το $1 > 0$, στρέφει τα κοίλα άνω σε όλο το $\mathbb{R}$, που σημαίνει ότι οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ βρίσκονται συνεχώς "κάτω" από τη C_f (**1**).

Επίσης $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [-3, 1]$. Άρα αν Ε είναι το ζητούμενο εμβαδόν έχουμε:

1ος τρόπος

$$E = E_{\triangle AB\Gamma} - E_{\triangle ADBA} \text{ (βλέπε σχήμα).}$$

Όμως

$$E_{\triangle AB\Gamma} = \frac{|AB| \cdot |u_\Gamma|}{2} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16 \text{ τ.μ.}$$

$$E_{\triangle ADBA} = \int_{-3}^1 -f(x) dx =$$

$$= -\int_{-3}^1 (x^2 + 2x - 3) dx = \dots = \frac{32}{3} \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Άρα } E = 16 - \frac{32}{3} = \frac{16}{3} \text{ τ.μ.}$$

2ος τρόπος

$$E = E_{\triangle A\Gamma A} + E_{\triangle B\Gamma B}.$$

$$\text{Από (1) όμως είναι } E_{\triangle A\Gamma A} = \int_{-3}^{-1} [f(x) - (-4x - 12)] dx \text{ και } E_{\triangle B\Gamma B} = \int_{-1}^1 [f(x) - (4x - 4)] dx$$

$$\text{Έτσι } E_{\triangle A\Gamma A} = \int_{-3}^{-1} (x^2 + 2x - 3 + 4x + 12) dx = \int_{-3}^{-1} (x^2 + 6x + 9) dx =$$

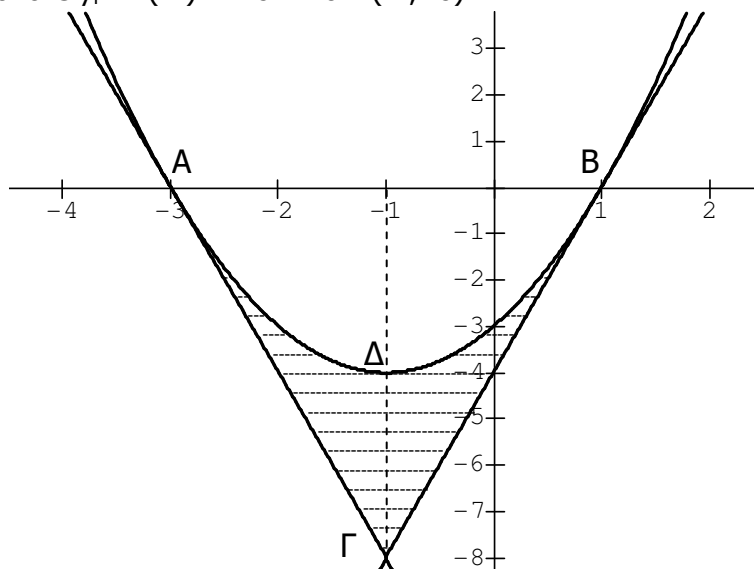
$$= \left[\frac{x^3}{3} + 6 \frac{x^2}{2} + 9x \right]_{-3}^{-1} = \dots = \frac{8}{3} \text{ τ.μ. και}$$

$$E_{\triangle B\Gamma B} = \int_{-1}^1 (x^2 + 2x - 3 - 4x + 4) dx = \int_{-1}^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 = \dots = \frac{8}{3} \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Άρα } E = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ τ.μ.}$$

3ος τρόπος

$$\text{Λόγω της συμμετρίας του σχήματος είναι } E = 2 \cdot E_{\triangle A\Gamma A} = 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ τ.μ.}$$



9. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις $x+y-2=0$ και $y^2=x$.

Η $y^2=x$ προφανώς δεν είναι συνάρτηση. Είναι όμως μια παραβολή που αποτελείται από δύο κλάδους, τους $y=\sqrt{x}$ και $y=-\sqrt{x}$, $x \geq 0$, (βλέπε σχήμα), που καθένας χωριστά είναι συνάρτηση.

Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων των δύο γραμμών της εκφώνησης βρίσκονται από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ y^2=x \end{cases} \text{ που είναι τα}$$

σημεία $A(1, 1)$ και $H(4, -2)$.

Κατασκευάζουμε το

παραπάνω σχήμα, χρησιμοποιώντας κάποιους πίνακες τιμών για τις δύο γραμμές και έχουμε ως ζητούμενο εμβαδόν, το εμβαδόν του χωρίου ΑΟΔΗΓΑ του παραπάνω σχήματος.

1ος τρόπος

$$E = E_{\text{IOHI}} - E_{\text{AIHA}}$$

$$\text{Λόγω συμμετρίας είναι } E_{\text{IOHI}} = 2 \cdot E_{\text{OΘIO}} = 2 \cdot \int_0^4 \sqrt{x} \, dx = 2 \cdot \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} \, dx = 2 \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} \right]_0^4 = \frac{4}{3} \cdot (\sqrt{4^3} - \sqrt{0^3}) = \frac{32}{3} \text{ τ.μ.}$$

$$E_{\text{AIHA}} = \int_1^4 [\sqrt{x} - (2-x)] \, dx = \int_1^4 (x^{\frac{1}{2}} + x - 2) \, dx = \dots = \frac{37}{6} \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Άρα } E = \frac{32}{3} - \frac{37}{6} = \frac{9}{2} \text{ τ.μ.}$$

Το 2-x προέρχεται από την $y=2-x$ δηλαδή την ευθεία

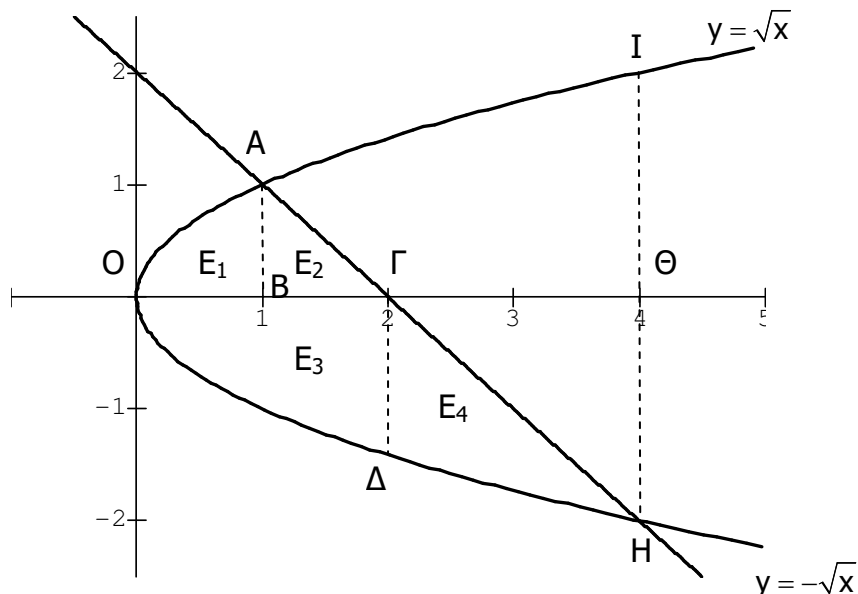
2ος τρόπος

Αν E_1, E_2, E_3, E_4 τα εμβαδά των επιμέρους χωρίων στα οποία μπορούμε να χωρίσουμε το χωρίο που μας ενδιαφέρει (βλέπε σχήμα), τότε αυτά είναι "απλά" εμβαδά για τα οποία έχουμε:

$$E_1 = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx, \quad E_2 = \int_1^2 (2-x) \, dx, \quad E_3 = -\int_0^2 -\sqrt{x} \, dx \quad \text{και} \quad E_4 = \int_2^4 [2-x - (-\sqrt{x})] \, dx.$$

$$\text{Έτσι } E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = \dots = \frac{9}{2} \text{ τ.μ.}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Εκτός των παραπάνω τρόπων μπορείτε να προσδιορίσετε και άλλους λιγότερο ή περισσότερο εύχρηστους. Μπορείτε να βρείτε άλλο τρόπο;



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Εδώ θα βρούμε χρήσιμες προτάσεις (με τις αποδείξεις τους) που **δεν υπάρχουν** στο σχολικό βιβλίο. Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια από αυτές κατά τη λύση μιας άσκησης, **θα πρέπει πρώτα να την αποδείξουμε.**

1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ , τότε ισχύει ότι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι υπήρχε $x_0 \in \Delta$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) < 0$. Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ και επομένως

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ σε γειτονιά G του x_0 (καθώς μια παράσταση παίρνει στη γειτονιά του x_0

το πρόσημο του ορίου της). Από την τελευταία σχέση έχουμε ότι

για $x \in G$ με $x < x_0$ είναι $f(x) > f(x_0)$ ή αντίστοιχα για $x \in G$ με $x > x_0$ είναι $f(x) < f(x_0)$

σχέσεις που οδηγούν σε άτοπο, αφού f γνησίως αύξουσα στο Δ .

Άρα $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

2. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε διάστημα Δ , τότε ισχύει ότι $f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού η f είναι κυρτή στο Δ , η f' είναι συνάρτηση γνησίως αύξουσα.

Έστω ότι υπήρχε $x_0 \in \Delta$, τέτοιο ώστε $f''(x_0) < 0$. Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$ και επομένως

$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$ σε γειτονιά G του x_0 (καθώς μια παράσταση παίρνει στη γειτονιά του

x_0 το πρόσημο του ορίου της). Από την τελευταία σχέση έχουμε ότι

για $x \in G$ με $x < x_0$ είναι $f'(x) > f'(x_0)$ ή αντίστοιχα για $x \in G$ με $x > x_0$ είναι $f'(x) < f'(x_0)$

σχέσεις που οδηγούν σε άτοπο, αφού f' γνησίως αύξουσα στο Δ .

Άρα $f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

3. Η αντίστροφη μιας παραγωγίσιμης και «1-1» συνάρτησης είναι παραγωγίσιμη;

Όπως αποδείξαμε στο παράρτημα του 1ου τεύχους, η αντίστροφη μιας συνεχούς και «1-1» συνάρτησης είναι συνεχής.

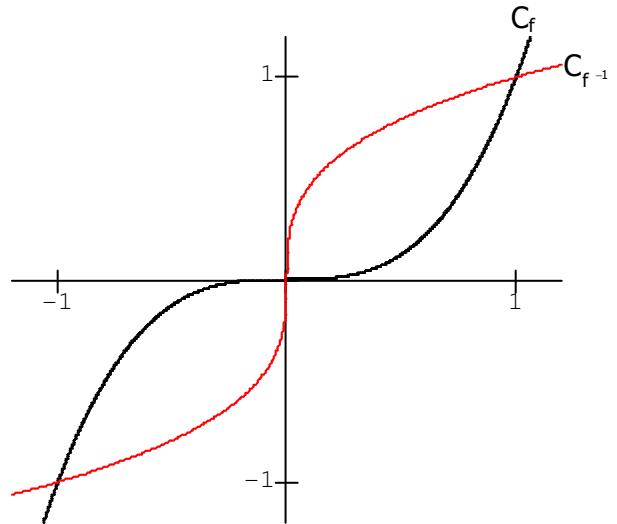
Δεν ισχύει το ίδιο για την παραγωγισιμότητα της αντίστροφης.

Έτσι αν f παραγωγίσιμη και αντιστρέφεται **ΔΕΝ** είναι απαραίτητο η αντίστροφη να είναι και αυτή παραγωγίσιμη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Η $f(x)=x^3$ είναι συνάρτηση «1-1» και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Όμως η αντίστροφή της

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{αν } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.



Όμως

αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και αντιστρέφεται και είναι παραγωγίσιμη σε $x_0 \in \Delta$ με $f'(x_0) \neq 0$, μπορούμε να δείξουμε ότι τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο

$y_0 = f(x_0)$ και μάλιστα ισχύει $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ **(1)**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ παραγωγισιμότητας της f^{-1} ΚΑΙ της σχέσης (1)

Έστω $y=f(x)$ και $y_0=f(x_0)$. Ισχύουν:

Όπως είπαμε παραπάνω, ισχύει ότι «αν η f είναι συνεχής στο Δ τότε η f^{-1} είναι συνεχής στο $f(\Delta)$ ».

Έτσι $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} x = x_0$, δηλαδή όταν $y \rightarrow y_0$, τότε $x \rightarrow x_0$.

Επίσης αν $y \neq y_0$ τότε $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$ (αφού η f^{-1} είναι «1-1») δηλαδή $x \neq x_0$.

Έτσι έχουμε $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \stackrel{x \neq x_0}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} \in \mathbb{R}$

Άρα η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $y_0=f(x_0)$ και ισχύει ότι $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Αυτό μάλιστα ισχύει για κάθε x στο οποίο είναι $f'(x) \neq 0$, οπότε σε

οποιοδήποτε τέτοιο x η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη με $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

Αν θέλουμε απλά να αποδείξουμε την (1) και γνωρίζουμε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο y_0 , μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:

ΑΠΟΔΕΙΞΗ μόνο της σχέσης (1) ΑΝ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ότι f^{-1} παραγωγίσιμη

Η $f^{-1} \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ ως σύνθεση παραγωγισίμων και ισχύει ότι $f^{-1}(f(x))=x$, για κάθε $x \in \Delta$. Άρα $(f^{-1}(f(x)))' = (x)' \Leftrightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$

$$\text{Για } x=x_0 \text{ είναι } (f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)=1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(y_0) \cdot f'(x_0)=1 \stackrel{f'(x_0) \neq 0}{\Leftrightarrow} (f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

4. Αν f συνάρτηση παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f' διατηρεί πρόσημο στο Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι η f' δεν διατηρεί πρόσημο στο Δ .

Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$.

Έστω $f'(x_1) < 0$ και $f'(x_2) > 0$.

Είναι $f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < 0$, οπότε υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε να είναι

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < 0, \text{ για κάθε } x \in (x_1, x_1 + \delta_1). \text{ Αφού } x - x_1 > 0, \text{ θα είναι } f(x) - f(x_1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) < f(x_1) \quad (1).$$

Επίσης $f'(x_2) = \lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} > 0$, οπότε υπάρχει $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε να είναι

$$\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} > 0, \text{ για κάθε } x \in (x_2 - \delta_2, x_2). \text{ Αφού } x - x_2 < 0, \text{ θα είναι } f(x) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) < f(x_2) \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι η f δεν παρουσιάζει ελάχιστο ούτε στο x_1 ούτε στο x_2 .

Όμως η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, οπότε σίγουρα παρουσιάζει ελάχιστο και αφού αυτό δεν παρουσιάζεται στα άκρα του διαστήματος, θα εμφανίζεται σε εσωτερικό σημείο x_0 του $[x_1, x_2]$. Τότε όμως από το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(x_0) = 0$, άτοπο αφού $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, από υπόθεση.

Όμοια αν $f'(x_1) > 0$ και $f'(x_2) < 0$.

Άρα η f' διατηρεί πρόσημο στο Δ .

5. Αν f συνάρτηση παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι «1-1» στο Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η απόδειξη μπορεί να προκύψει από την προηγούμενη πρόταση, γιατί καθώς η f' διατηρεί πρόσημο, η f θα είναι γνησίως μονότονη, άρα και «1-1». Επειδή όμως η απόδειξη της προηγούμενης πρότασης είναι απαιτητική, παραθέτουμε εδώ μια ευκολότερη απόδειξη για την πρόταση αυτή.

Έστω ότι η f δεν είναι «1-1» στο Δ . Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$, άρα και συνεχής και $f(x_1)=f(x_2)$, οπότε από Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$, άτοπο αφού $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Άρα η f είναι «1-1».

6. Προσδιορισμός κοινών σημείων C_f και $C_{f^{-1}}$ όταν f συνεχής και "1-1" σε διάστημα Δ με $f'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \Delta$.

Όπως είδαμε στο παράρτημα του 1ου τεύχους, αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε ισχύει ότι τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, αν υπάρχουν, είναι μόνο τα κοινά σημεία της C_f με τη διχοτόμο $y=x$ της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

Εδώ θα δούμε ότι γενικότερα ισχύει η πρόταση:

Αν f συνεχής και "1-1" σε διάστημα Δ με $f'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, αν υπάρχουν, είναι μόνο τα κοινά σημεία της C_f με τη διχοτόμο $y=x$ της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν κοινό σημείο (a, β) που δεν ανήκει στη διχοτόμο $y=x$, με $a \in \Delta$. Τότε $a \neq \beta$.

Έστω $a < \beta$. Τότε $f(a)=\beta$ (1) και $f^{-1}(a)=\beta \Leftrightarrow f(\beta)=a$ (2), οπότε και $\beta \in \Delta$.

Άρα f συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο (a, β) , οπότε από ΘΜΤ στο $[a, \beta]$, υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} \stackrel{(1)}{=} \frac{a - \beta}{\beta - a} \stackrel{(2)}{=} -1$, άτοπο, αφού

$f'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \Delta$. Όμοια αν $a > \beta$.

Άρα τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, αν υπάρχουν, ανήκουν οπωσδήποτε πάνω στην $y=x$.

7. Ισχύουν οι ανισώσεις (1) $x+1 \leq e^x \leq x \cdot e^x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$(2) \frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1, \text{ για κάθε } x > 0$$

οι οποίες είναι αρκετά χρήσιμες σε διάφορες περιπτώσεις

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Οι απόδειξη και στις δύο ανισώσεις γίνεται γενικά με τρεις τρόπους (όχι πάντα ίδιους για όλα τα μέλη τους):

- με τη βοήθεια της μονοτονίας και των ακροτάτων,
- με τη βοήθεια του ΘΜΤ
- με τη βοήθεια της κυρτότητας και τη θέση της εφαπτομένης ως προς τη γραφική παράσταση.

Μάλιστα η πρώτη από τις (1) έχει αποδειχθεί με τους δύο πρώτους τρόπους στα λυμένα παραδείγματα του φυλλαδίου στην παράγραφο των ακροτάτων και του ΘΜΤ αντίστοιχα, η δεύτερη από τις (1) έχει αποδειχθεί στα λυμένα παραδείγματα των ακροτάτων και η δεύτερη από τις (2) έχει αποδειχθεί στα λυμένα παραδείγματα της κυρτότητας.

8. Μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε διάστημα (α, β) δεν είναι δυνατόν να παρουσιάζει καμπή και τοπικό ακρότατο στο ίδιο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε (α, β) η οποία παρουσιάζει καμπή σε $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Τότε η f' θα αλλάξει μονοτονία στα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Έστω $f' \nearrow$ στο $(\alpha, x_0]$ και $f' \searrow$ στο $[x_0, \beta)$.

Έστω επίσης ότι στο x_0 η f παρουσιάζει και ακρότατο. Τότε από θεώρημα Fermat θα είναι $f'(x_0)=0$ (1).

Για $x \in (\alpha, x_0)$ είναι $x < x_0$ και αφού $f' \nearrow$ στο $(\alpha, x_0]$, θα είναι

$$f'(x) < f'(x_0) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f'(x) < 0 \quad (2).$$

Επίσης για $x \in (x_0, \beta)$ είναι $x > x_0$ και αφού $f' \searrow$ στο $[x_0, \beta)$, θα είναι

$$f'(x) < f'(x_0) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f'(x) < 0 \quad (3).$$

Από (2) και (3) είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και f παραγωγίσιμη στο x_0 .

Άρα $f \searrow$ στο (α, β) , άτοπο αφού τότε δεν θα παρουσίαζε ακρότατο στο x_0 .

Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι η f παρουσιάζει καμπή και τοπικό ακρότατο στη θέση x_0 . Άρα αυτό είναι κάτι που δεν μπορεί να συμβεί.

9. Έστω συνάρτηση παραγωγίσιμη σε διάστημα (α, β) . Μεταξύ δύο ακροτάτων της f υπάρχει οπωσδήποτε τουλάχιστον ένα σημείο καμπής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω x_1, x_2 οι θέσεις των ακροτάτων εντός του (α, β) , οπότε από θεώρημα Fermat είναι $f'(x_1)=f'(x_2)=0$ (1).

Έστω ότι η f δεν παρουσιάζει καμπή στο (α, β) . Τότε η f' δεν αλλάζει μονοτονία εντός του (α, β) . Έστω ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) . Τότε για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ με

$$x_1 < x < x_2 \text{ θα είναι } f'(x_1) < f'(x) < f'(x_2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 0 < f'(x) < 0, \text{ άτοπο.}$$

10. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση, με $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Είναι $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Το όριο αυτό δίνει α.μ. $\frac{0}{0}$ και

μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα De l' Hospital καθώς καταλήγει σε $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$, το οποίο σύμφωνα με την υπόθεση υπάρχει στο $\mathbb{R}$ (χωρίς την υπόθεση

αυτή δεν θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα De l' Hospital). Έτσι διαδοχικά έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{a.μ. } \frac{0}{0}}{=} \lim_{\text{D.L. } x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell$$

Έτσι αποδείξαμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$, οπότε f' συνεχής στο x_0 .

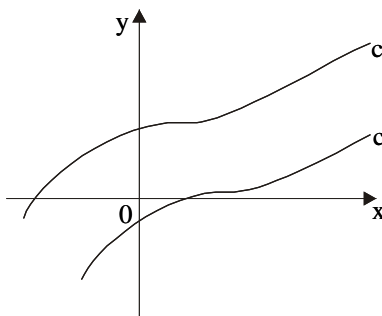
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

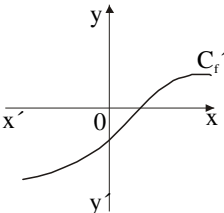
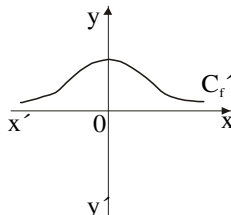


Newton
Isaac

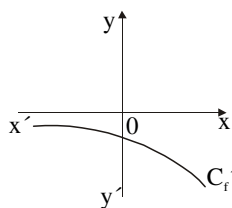
1. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ υπάρχει. Σ Λ
2. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι πραγματικός αριθμός. Σ Λ
3. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ ή $-\infty$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Σ Λ
4. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Σ Λ
5. Αν $f(x)=e^x$, τότε $f'(x_0)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}$. Σ Λ
6. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Σ Λ
7.
 - α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε θα είναι συνεχής στο x_0 . Σ Λ
 - β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , τότε θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Σ Λ
 - γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Σ Λ
 - δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε δεν είναι συνεχής στο x_0 . Σ Λ
8. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 . Σ Λ
9. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 2, τότε $[f(2)]' = f'(2)$. Σ Λ
10. Η συνάρτηση $f(x)=a^x$, $a>0$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $(a^x)' = xa^{x-1}$. Σ Λ
11. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει $(f(f(x)))' = (f'(x))^2$. Σ Λ

- | | | | |
|------------|---|----------------------|----------------------|
| 12. | Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε και το άθροισμα $f+g$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 . | Σ | Λ |
| 13. | Αν το άθροισμα $f+g$ δύο συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 , τότε και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 . | Σ | Λ |
| 14. | Αν f, g συναρτήσεις με $f+g, f$ παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . | Σ | Λ |
| 15. | Αν οι συναρτήσεις f, g και fog ορίζονται στο R και η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη, τότε και οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες. | Σ | Λ |
| 16. | Ισχύει $\left. \frac{dc}{dx} \right _{x=x_0} = 0$, όπου c σταθερά και $x_0 \in R$. | Σ | Λ |
| 17. | Για μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R ισχύει
α) αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή
β) αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια | Σ
Σ | Λ
Λ |
| 18. | Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , τότε ορίζεται πάντα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$. | Σ | Λ |
| 19. | Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f . | Σ | Λ |
| 20. | Αν μια ευθεία (ϵ) έχει με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μόνο ένα κοινό σημείο, τότε είναι οπωσδήποτε εφαπτομένη της. | Σ | Λ |
| 21. | Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$. Τότε η γραφική της παράσταση δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη. | Σ | Λ |
| 22. | Για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = (x-2)^2 \cdot e^x$. Τότε η C_f στο σημείο $(2, f(2))$ δέχεται οριζόντια εφαπτομένη. | Σ | Λ |
| 23. | Οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=x^2, g(x)=x^2+3, h(x)=x^2-20$ στα σημεία τομής τους με την ευθεία $x=x_0$, είναι παράλληλες. | Σ | Λ |
| 24. | Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=ax+b$, σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού της, συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. | Σ | Λ |
| 25. | Αν $f(x)=x^4$, τότε υπάρχουν σημεία της C_f στα οποία δέχεται παράλληλες εφαπτομένες. | Σ | Λ |
| 26. | Αν δυο συναρτήσεις τέμνονται, τότε στο κοινό τους σημείο δέχονται κοινή εφαπτομένη. | Σ | Λ |

- 27.** Σε κάθε χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της απομάκρυνσης ενός κινητού είναι η επιτάχυνση αυτού. **Σ Λ**
- 28.** Αν $y=ax+\beta$, τότε ο ρυθμός μεταβολής των τιμών του y εξαρτάται από τις τιμές της μεταβλητής x . **Σ Λ**
- 29.** Αν $f'(x) = 3x^2$, τότε ισχύει πάντα $f(x)=x^3$. **Σ Λ**
- 30.** Στο σχήμα η γραφική παράσταση της g προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της C_f . Ισχύει $f'(x)=g'(x)$, για κάθε x στο κοινό πεδίο ορισμού τους. **Σ Λ**
- 
- 31.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(a) \neq f(\beta)$, $a, \beta \in \mathbb{R}$, $a < \beta$, τότε ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. **Σ Λ**
- 32.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x)-f(x_0)=f'(\xi) \cdot (x-x_0)$. **Σ Λ**
- 33.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) , τότε υπάρχει ένα μόνο $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f(a)-f(\beta)=f'(\xi) \cdot (a-\beta)$. **Σ Λ**
- 34.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) και $f(a)=f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x_0 εσωτερικό του διαστήματος $[a, \beta]$, στο οποίο η εφαπτομένη του διαγράμματος της f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. **Σ Λ**
- 35.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (a, \beta)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a)), (\beta, f(\beta))$. **Σ Λ**
- 36.** Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο ριζών της f , υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της f' . **Σ Λ**
- 37.** Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' , υπάρχει το πολύ μια ρίζα της f . **Σ Λ**
- 38.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \in (a, \beta)$, με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$. **Σ Λ**

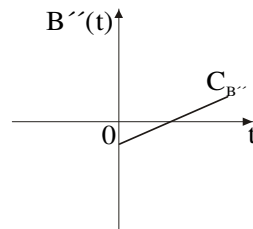
- 39.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f . **Σ** **Λ**
- 40.** Υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle, χωρίς να ισχύουν (όλες) οι υποθέσεις του θεωρήματος. **Σ** **Λ**
- 41.** Αν για μια συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[a, \beta]$, τότε εφαρμόζεται και το θεώρημα της μέσης τιμής, στο ίδιο διάστημα. **Σ** **Λ**
- 42.** Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι μηδέν σε ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση είναι σταθερή στο Δ . **Σ** **Λ**
- 43.** Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f , με $f'(x) > 0$ για $2 < x < 7$. Αν $f(3) = 5$, τότε μπορεί να ισχύει $f(5) = 4$. **Σ** **Λ**
- 44.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και η γραφική παράσταση της f' είναι αυτή του σχήματος, τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη. **Σ** **Λ**
- 
- 45.** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}$, τότε $f(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}$. **Σ** **Λ**
- 46.** Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \neq 0$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}^*$. **Σ** **Λ**
- 47.** Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε θα ισχύει $f'(x) \leq 0$. **Σ** **Λ**
- 48.** Αν για μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , ισχύει $f'(x) = e^x$, ημ4, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. **Σ** **Λ**
- 49.** Αν $f'(x) = x^2 + 1$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα. **Σ** **Λ**
- 50.** Αν $f'(x) = x^2 - 5x + 6$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 3]$. **Σ** **Λ**
- 51.** Αν το διάγραμμα $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. **Σ** **Λ**
- 

52. Αν το διάγραμμα C_f' της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.



Σ Λ

53. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της $B''(t)$, όπου $B(t)$ είναι η συνάρτηση του βάρους κάποιου ανθρώπου που βρίσκεται σε δίαιτα, μετά από χρόνο t . Τότε ο ρυθμός μείωσης του βάρους, στην αρχή μειώνεται και μετά αυξάνει.



Σ Λ

54. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) με $f(a)=f(\beta)$ και $f''(x)>0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια μόνο ρίζα στο (a, β) .

Σ Λ

55. Αν για μια συνάρτηση ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Fermat, τότε υπάρχει x_0 ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.

Σ Λ

56. Αν $f'(x)=(x+3) \cdot x^2$, τότε το $x_0=-3$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου.

Σ Λ

57. Για τη συνάρτηση $f(x)=3x^2$, $x \in [-3, 2]$, υπάρχει μόνο ένα τοπικό ακρότατο.

Σ Λ

58. Για τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει τουλάχιστον ένα τοπικό ελάχιστο μεγαλύτερο από κάποιο τοπικό μέγιστο.

Σ Λ

59. Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x+2e^x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0=\frac{\pi}{3}$.

Σ Λ

60. Αν $f'(x)=e^{-x^2+16}$, τότε η f δεν μπορεί να έχει τοπικά ακρότατα.

Σ Λ

61. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g που είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Αν σ' ένα σημείο x_0 παρουσιάζουν και οι δυο τοπικό μέγιστο, τότε και η συνάρτηση $f+g$, εφόσον ορίζεται, θα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 .

Σ Λ

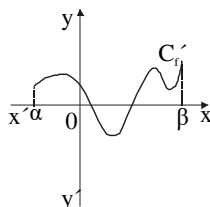
62. Αν μια άρτια συνάρτηση έχει στο x_0 τοπικό ελάχιστο, τότε στο $-x_0$ θα έχει τοπικό μέγιστο.

Σ Λ

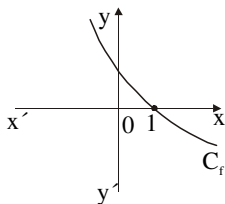
63. Αν για τη συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(5)=0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=5$.

Σ Λ

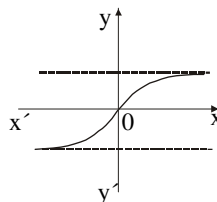
- 64.** Μια περιοδική συνάρτηση f μπορεί να έχει ένα μόνο τοπικό ακρότατο. **Σ** **Λ**
- 65.** Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f , μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f . **Σ** **Λ**
- 66.** Μια συνάρτηση f μπορεί να έχει τοπικό ακρότατο και σε σημείο x_0 , στο οποίο δεν είναι συνεχής. **Σ** **Λ**
- 67.** Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 , τότε ισχύει $f'(x_0)=0$. **Σ** **Λ**
- 68.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 και παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 , τότε ισχύει $f'(x_0)=0$. **Σ** **Λ**
- 69.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 εσωτερικό του πεδίου ορισμού της και παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 , τότε ισχύει $f'(x_0)=0$. **Σ** **Λ**
- 70.** Αν στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της f ισχύει ότι $f'(x_0)=0$, τότε το x_0 είναι τοπικό ακρότατο της f . **Σ** **Λ**
- 71.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε πιθανά ακρότατα της f είναι
 α) τα σημεία του διαστήματος (a, β) στα οποία η f' μηδενίζεται **Σ** **Λ**
 β) τα σημεία του διαστήματος (a, β) στα οποία η f δεν παραγωγίζεται **Σ** **Λ**
 γ) τα άκρα του $[a, \beta]$. **Σ** **Λ**
- 72.** Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f' μιας συνάρτησης f . Τότε η f έχει δύο τουλάχιστον θέσεις τοπικών ακροτάτων. **Σ** **Λ**



- 73.** Αν $f'(x)=(x-1)^2$, τότε το σημείο $x_0=1$ είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f . **Σ** **Λ**
- 74.** Αν $f'(x)=|x-1|$, τότε το σημείο $x_0=1$ είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f . **Σ** **Λ**
- 75.** Αν το διάγραμμα $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f έχει ακρότατο στο $x_0=1$. **Σ** **Λ**

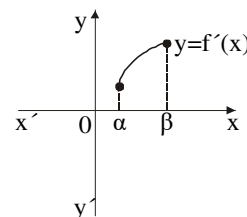


- 76.** Η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε ισχύει ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.



Σ Λ

- 77.** Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, και η γραφική παράσταση της f' φαίνεται στο σχήμα, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.



Σ Λ

- 78.** Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και η f είναι κυρτή στο Δ , τότε $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Σ Λ

- 79.** Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Σ Λ

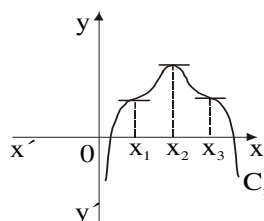
- 80.** Μια πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού έχει οπωσδήποτε σημείο καμπής.

Σ Λ

- 81.** Μια πολυωνυμική συνάρτηση 4ου βαθμού έχει τουλάχιστον ένα σημείο καμπής.

Σ Λ

- 82.** Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε:
α) το x_1 είναι σημείο καμπής
β) το x_2 είναι σημείο καμπής
γ) το x_3 είναι σημείο καμπής

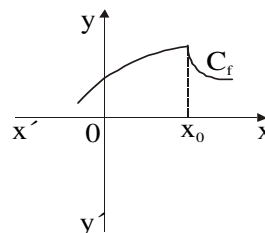
Σ Λ
Σ Λ
Σ Λ

- 83.** Αν $f''(x) = (x-2)^2$, τότε η f έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 2$.

Σ Λ

- 84.** Η f παρουσιάζει στο x_0 σημείο καμπής.

Σ Λ



- 85.** Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης f , όταν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 .

Σ Λ

- 86.** Η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , με $f(x) = \frac{x^2-4}{(x-2)^2}$.

Σ Λ

- 87.** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^5 + x^3 - 2}{x^2 + x + 2004}$ έχει μια πλάγια ασύμπτωτη. **Σ** **Λ**
- 88.** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ έχει δύο κατακόρυφες ασύμπτωτες. **Σ** **Λ**
- 89.** Ισχύει $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$. **Σ** **Λ**
- 90.** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^{-x}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$. **Σ** **Λ**
- 91.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. **Σ** **Λ**
- 92.** Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$. **Σ** **Λ**
- 93.** Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=0$. **Σ** **Λ**
- 94.** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει εφαπτομένη στο x_0 την ευθεία $y = ax + \beta$, με $a \neq 0$, όταν
A. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \in \mathbb{R}$ **B.** η f είναι συνεχής στο x_0
Γ. η f δεν είναι συνεχής στο x_0 **Δ.** το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι $+\infty$
E. το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι $-\infty$
- 95.** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$, όταν
A. η f είναι συνεχής στο x_0 **B.** το x_0 είναι άκρο του πεδίου ορισμού της f
Γ. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0$ **Δ.** είναι $f'(x_0) = 0$
E. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ ή $-\infty$
- 96.** Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$, τότε
A. η f δεν ορίζεται στο $x_0 = 0$ **B.** $f'(0) = 2$ **Γ.** $f'(2) = 0$
Δ. η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ **E.** δεν ισχύει κανένα από τα παραπάνω

97. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε

A. το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

B. το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ δεν υπάρχει

Γ. το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

Δ. τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι άνισα

Ε. το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

98. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη

A. στο πεδίο ορισμού της

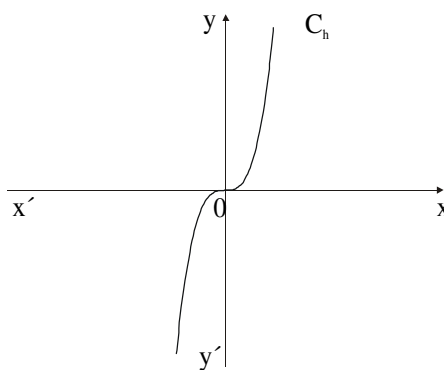
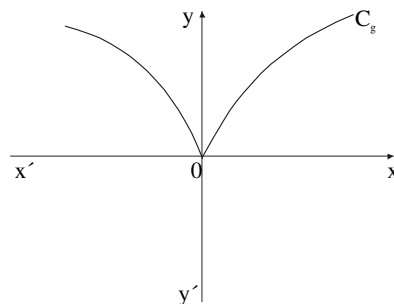
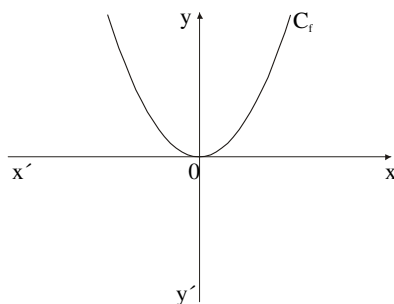
B. στο $x_0 = 0$

Γ. στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Δ. στο $(0, +\infty)$

Ε. σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της

99. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g , h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Στο σημείο $x_0 = 0$ **δεν** είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση

A. f

B. g

Γ. h

Δ. όλες

Ε. καμία

100. Ο τύπος $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ ισχύει, όταν

A. οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0

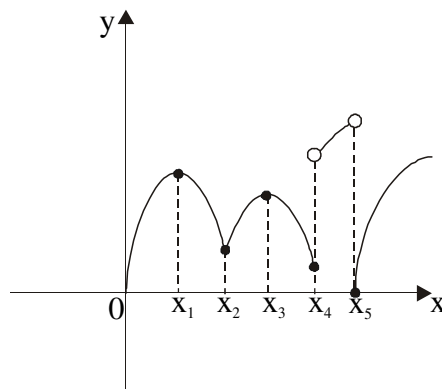
B. η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$

Γ. η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$

Δ. οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο $g(x_0)$

Ε. οι f και g είναι συνεχείς στο $g(x_0)$

- 101.** Από τις παρακάτω συναρτήσεις έχει παράγωγο την συνάρτηση $f(x) = -3\eta\mu 3x$ η
A. $g(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x$ **B.** $h(x) = \sigma\upsilon\nu x^3$
Γ. $\varphi(x) = 3\sigma\upsilon\nu x$ **Δ.** $s(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$ **E.** $\sigma(x) = \sigma\upsilon\nu \frac{x}{3}$
- 102.** Από τις παρακάτω συναρτήσεις έχει παράγωγο την συνάρτηση $f(x) = a^x \ln a$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, η
A. x^a **B.** $\log_a x$ **Γ.** $e^{a \ln x}$ **Δ.** $\log x^a$ **E.** a^x
- 103.** Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f , g στο διάστημα $[0, \pi]$ ισχύει $g(x) = f(\eta\mu x)$. Η τιμή $g'(\frac{\pi}{2})$ είναι ίση με
A. 1 **B.** $f'(1)$ **Γ.** 0 **Δ.** $f'(\frac{\pi}{2})$ **E.** $\frac{\pi}{2} \cdot f'(\frac{\pi}{2})$
- 104.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x - 1$. Η 5η παράγωγος της f είναι
A. - 1 **B.** 4 **Γ.** x **Δ.** 0 **E.** 24
- 105.** Αν $f(x) = e^{2x}$, τότε η $f^{(v)}(x)$ θα ισούται με
A. e^{2x} **B.** e^{vx} **Γ.** $(e^{2x})^v$ **Δ.** $2^v e^{2x}$ **E.** ve^{2x}
- 106.** Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -x^3 + 5$ στο σημείο $A(1, 4)$ είναι
A. 5 **B.** - 5 **Γ.** - 3 **Δ.** 3 **E.** 2
- 107.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = 0$, τότε η γραφική της παράσταση στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ δέχεται
A. κατακόρυφη εφαπτομένη
B. καμία εφαπτομένη
Γ. οριζόντια εφαπτομένη
Δ. εφαπτομένη της μορφής $y = ax + \beta$, $a \neq 0$
E. εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$
- 108.** Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε **λάθος** είναι ότι
A. η f είναι παραγωγίσιμη στο x_1
B. η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_2
Γ. η C_f δέχεται εφαπτομένη στο x_3
Δ. η f είναι παραγωγίσιμη στο x_4
E. η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_5

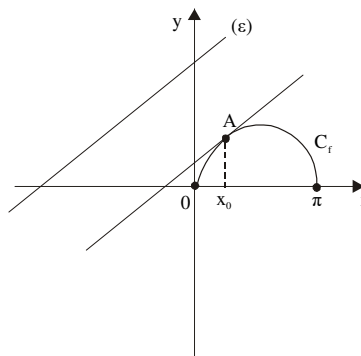


- 109.** Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και της ευθείας (ε) με συντελεστή διεύθυνσης

$\lambda = \frac{1}{2}$, φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το

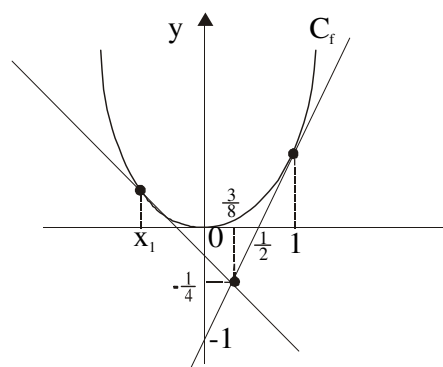
σημείο $A(x_0, f(x_0))$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) έχει τετμημένη

- A.** $\frac{\pi}{6}$ **B.** $\frac{\pi}{4}$ **Γ.** $\frac{\pi}{3}$ **Δ.** $\frac{\pi}{2}$ **Ε.** $\frac{3\pi}{4}$



- 110.** Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$ και οι εφαπτομένες στα σημεία της με τετμημένες 1 και x_1 . Αν οι εφαπτομένες αυτές είναι κάθετες, τότε το x_1 είναι

- A.** $-\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **Γ.** $-\frac{1}{3}$
Δ. $-\frac{3}{2}$ **Ε.** -1

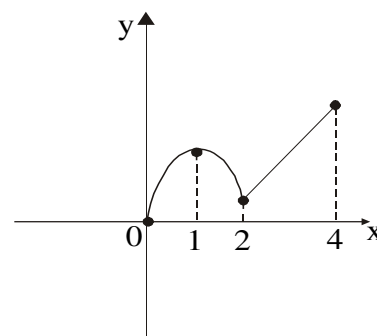


- 111.** Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{3}{2}x - 2$. Το x_0 είναι

- A.** $\frac{5}{4}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **Γ.** 2 **Δ.** $\frac{5}{2}$ **Ε.** 3

- 112.** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει λύση την

- A.** $x=0$ **B.** $x=1$
Γ. $x=2$ **Δ.** $x=4$
Ε. καμία από τις παραπάνω



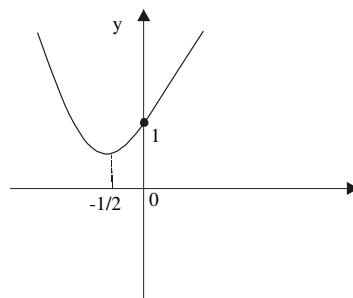
- 113.** Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x_0) = g'(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε

- A.** $f(x_0) = g(x_0)$
B. $x_0 \neq 0$
Γ. οι εφαπτομένες των C_f, C_g στα $(x_0, f(x_0))$ και $(x_0, g(x_0))$ αντίστοιχα, είναι παράλληλες
Δ. $f''(x_0) = g''(x_0)$
Ε. $f'(x) = g'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- 114.** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x_0)=2$. Η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ με τον άξονα $x'x$ είναι περίπου
A. -64° **B.** $27,3^\circ$ **Γ.** $63,4^\circ$ **Δ.** 89° **Ε.** $106,4^\circ$

- 115.** Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγωγίσιμης συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$



Η εφαπτομένη της στο σημείο $(0, 1)$ είναι η ευθεία

- A.** $y = -x + 1$ **B.** $y = x + 1$ **Γ.** $y = 1$

- Δ.** $x = 0$ **Ε.** καμία από τις παραπάνω

- 116.** Οι συναρτήσεις f, g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο κοινό πεδίο ορισμού τους $\mathbb{R}$. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $A(1, 2)$, από τις παρακάτω συνθήκες:

I. $f'(1) = g'(1)$

II. $f(1) = g(1)$

III. f, g συνεχείς στο $x_0 = 1$

IV. $f''(1) = g''(1)$

απαραίτητες είναι

A. μόνο η I

B. μόνο η II

Γ. οι I και II

Δ. οι II και IV

Ε. όλες

- 117.** Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[a, b]$. Τότε θα υπάρχει $\xi \in (a, b)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(\xi, f(\xi))$

A. να είναι παράλληλη με τον άξονα $y'y$

B. να έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν

Γ. να έχει συντελεστή διεύθυνσης ένα

Δ. να είναι παράλληλη με την ευθεία $y=x$

Ε. να μην ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης.

- 118.** Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[a, b]$. Το θεώρημα μέσης τιμής ισχύει για την f , όταν

A. η f είναι συνεχής στο $[a, b]$

B. η f έχει ίσες τιμές στα σημεία a και b

Γ. η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b)

Δ. η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και συνεχής στα a και b

Ε. η f είναι συνεχής στο (a, b) .

- 119.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = c$, με πεδίο ορισμού το $[a, b]$. Το πλήθος των σημείων $\xi \in (a, b)$ που προκύπτουν από το θεώρημα του Rolle είναι

A. 1

B. 2

Γ. το πολύ 2

Δ. κανένα

Ε. άπειρο

- 120.** Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x$, $x \in [-1, 2]$, το πλήθος των αριθμών $\xi \in (-1, 2)$ που προκύπτουν από το θεώρημα της μέσης τιμής είναι

A. τουλάχιστον τρεις

B. ακριβώς ένας

Γ. τουλάχιστον δύο

Δ. ακριβώς δύο

Ε. κανένας

- 121.** Το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για τη συνάρτηση $f(x)=\ln x$, για κάθε $x_1, x_2 > 0$, εξασφαλίζει ξ μεταξύ των x_1, x_2 ώστε να ισχύει

A. $\ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{\xi}{x_1 - x_2}$

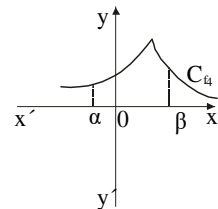
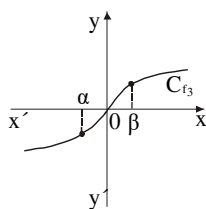
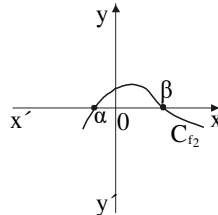
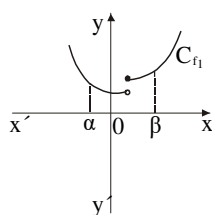
B. $\ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{\xi}$

Γ. $\ln(x_1 - x_2) = \frac{1}{\xi} \cdot (x_1 - x_2)$

Δ. $\ln \frac{x_1}{x_2} = \xi \cdot (x_1 - x_2)$

E. $\ln(x_1 - x_2) = \xi \cdot (x_1 - x_2)$

- 122.** Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_1, f_2, f_3, f_4 .



Αυτές που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[a, b]$ είναι οι

- A.** f_2 και f_4 **B.** μόνο η f_4 **Γ.** μόνο η f_2 **Δ.** f_2 και f_3 **E.** f_1 και f_4

- 123.** Οι συναρτήσεις f, g ορίζονται στο $\mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμες σ' αυτό. Αν $f'(x)=g'(x)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, ποια από τις παρακάτω συνθήκες πρέπει να ισχύει επιπλέον, ώστε $f(x)=g(x)$, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$;

A. f και g συνεχείς στο $\mathbb{R}$

B. $f(0)=g(0)$

Γ. $f''(x)=g''(x)+c$

Δ. $f''(0)=g''(0)$

E. δεν χρειάζεται να προστεθεί άλλη συνθήκη

- 124.** Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g ισχύει $f'(x)=g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, τότε

A. $f(x)=g(-x)+c$

B. $f(x)=-g(x)+c$

Γ. $f(x)=g(x)-c$

Δ. $f(x)+g(-x)=c$

E. $f(-x)=g(x)+c$

- 125.** Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ έχει παράγωγο την $f'(x)=2\ln x+1$, τότε για τη μονοτονία της f ισχύει

A. $\begin{array}{c|c} x & 0 \quad \quad \quad +\infty \\ \hline f(x) & \nearrow \end{array}$

B. $\begin{array}{c|c} x & 0 \quad \quad \quad e^{-\frac{1}{2}} \quad \quad \quad +\infty \\ \hline f(x) & \nearrow \quad \quad \quad \searrow \end{array}$

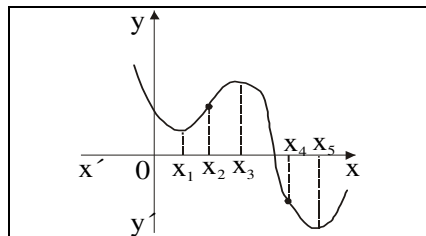
Γ. $\begin{array}{c|c} x & 0 \quad \quad \quad e^{-\frac{1}{2}} \quad \quad \quad +\infty \\ \hline f(x) & \searrow \quad \quad \quad \nearrow \end{array}$

Δ. $\begin{array}{c|c} x & 0 \quad \quad \quad e^{-\frac{1}{2}} \quad \quad \quad e^{-\frac{1}{4}} \quad \quad \quad +\infty \\ \hline f(x) & \searrow \quad \quad \quad \nearrow \quad \quad \quad \searrow \end{array}$

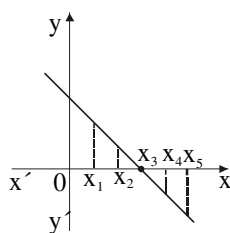
E. $\begin{array}{c|c} x & 0 \quad \quad \quad +\infty \\ \hline f(x) & \searrow \end{array}$

- 126.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και γνησίως φθίνουσα, τότε
- A.** $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - B.** $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - Γ.** $f'(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - Δ.** $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - E.** η $f'(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$

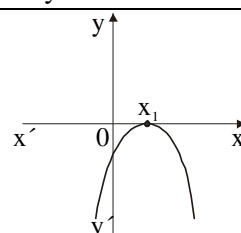
- 127.** Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f . Η γραφική παράσταση της f' μπορεί να είναι



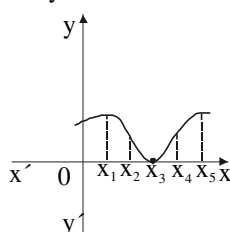
A.



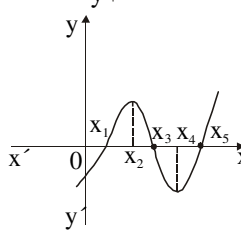
B.



Γ.

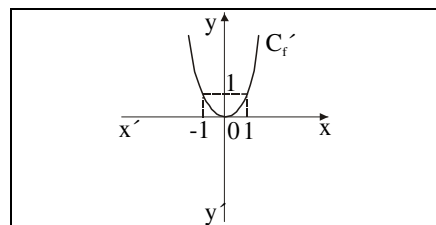


Δ.

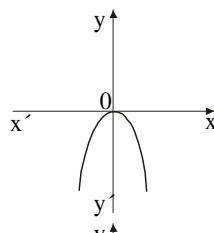


E. καμία από αυτές

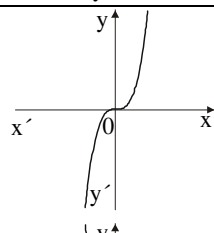
- 128.** Η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η γραφική παράσταση της f μπορεί να είναι



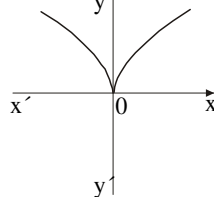
A.



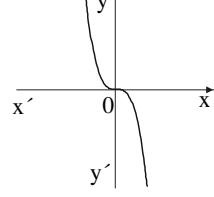
B.



Γ.



Δ.

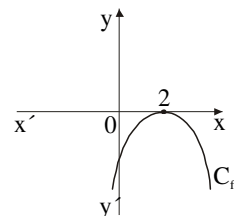


E. καμία από τις προηγούμενες

- 129.** Η παράγωγος f' της συνάρτησης f είναι ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού. Η f έχει
- A.** τρία ακριβώς τοπικά ακρότατα
 - B.** ένα ολικό μέγιστο και ένα ολικό ελάχιστο
 - Γ.** τουλάχιστον τρία τοπικά ακρότατα
 - Δ.** ένα μόνο τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο
 - Ε.** τρία το πολύ τοπικά ακρότατα

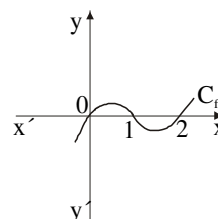
- 130.** Η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε ισχύει ότι

- A.** η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$
- B.** η f είναι γνησίως φθίνουσα μόνο στο $[2, +\infty)$
- Γ.** η f έχει τοπικό μέγιστο το σημείο $x_0=2$
- Δ.** η f έχει τοπικό ελάχιστο το σημείο $x_0=2$
- Ε.** η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$



- 131.** Το διάγραμμα $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε **δεν** ισχύει ότι

- A.** η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 1]$
- B.** η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 2]$
- Γ.** η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο με $x=0$
- Δ.** η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο με $x=1$
- Ε.** η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο με $x=2$

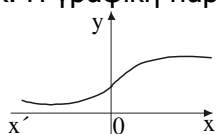


- 132.** Έστω μια συνεχής συνάρτηση f , η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σ' ένα διάστημα Δ . Τότε καθώς το x αυξάνει, η κλίση της C_f

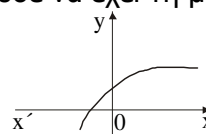
- A.** αυξάνει **B.** ελαττώνεται **Γ.** μένει σταθερή
- Δ.** είναι μηδέν **Ε.** δεν μπορούμε να απαντήσουμε

- 133.** Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να έχει τη μορφή

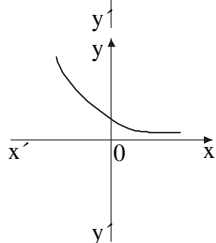
A.



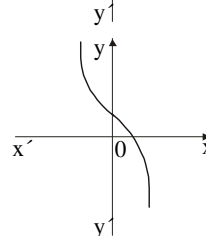
B.



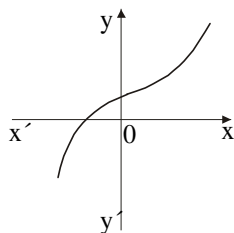
Γ.



Δ.

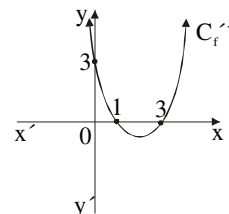


Ε.

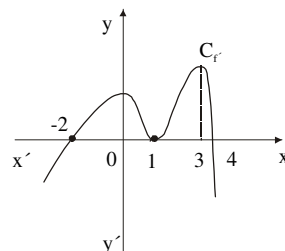


- 134.** Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σ' ένα διάστημα Δ , τότε
A. $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$
B. $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in \Delta$
Γ. $f''(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \Delta$
Δ. $f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$
Ε. δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το πρόσημο της $f''(x)$ στο Δ

- 135.** Το διάγραμμα $C_{f''}$ της δεύτερης παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο
A. $(-\infty, 1]$ **B.** $[1, 3]$ **Γ.** $[3, +\infty)$
Δ. $\mathbb{R}$ **Ε.** $(-\infty, -3]$

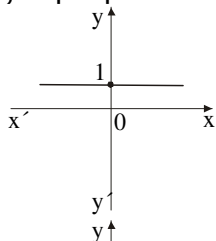


- 136.** Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f' μιας συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$. Τότε για τη συνάρτηση f ισχύει
A. στο διάστημα $[-2, 0]$ η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω
B. στο διάστημα $[1, 3]$ ισχύει $f''(x) = 0$
Γ. στο διάστημα $[0, 1]$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω
Δ. στο διάστημα $[-2, 1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα
Ε. όλα τα παραπάνω

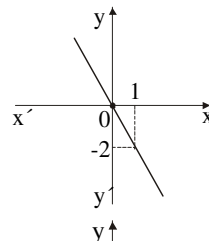


- 137.** Αν μια συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, τότε η γραφική παράσταση της f' μπορεί να είναι η

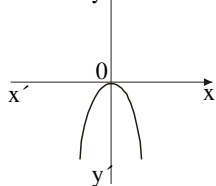
A.



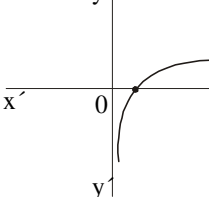
B.



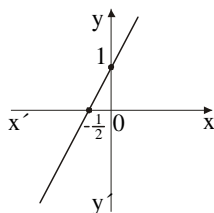
Γ.



Δ.

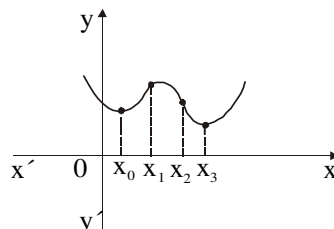


Ε.



- 138.** Αν η γραφική παράσταση της παραγωγίσιμης συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε

- A.** η f έχει μόνο δύο τοπικά ακρότατα
B. η f δεν παραγωγίζεται σε όλα τα σημεία του διαστήματος $[x_0, x_3]$
Γ. $f''(x) > 0$ για όλα τα $x \in (x_2, x_3)$
Δ. $f''(x) < 0$ για όλα τα $x \in (x_0, x_1)$
Ε. η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, x_3]$



- 139.** Η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Θεωρούμε τις προτάσεις:

I. Η C_f δέχεται εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$

II. Η f' αλλάζει πρόσημο στο x_0

III. Η f'' αλλάζει πρόσημο στο x_0

Τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f αν ισχύουν οι προτάσεις

A. I και II

B. I και III

Γ. II και III

Δ. μόνο η III

Ε. μόνο η I

- 140.** Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, μπορεί να έχει πλήθος πλάγιων ασυμπτώτων

A. το πολύ τρεις

B. το πολύ δύο

Γ. το πολύ μία

Δ. εξαρτάται από το πλήθος των οριζοντίων ασυμπτώτων

Ε. δεν υπάρχει περιορισμός για το πλήθος

- 141.** Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = xe^{-ax}$ με $a > 0$ και $x \in [0, +\infty)$. Για όλες τις συναρτήσεις f ισχύει ότι

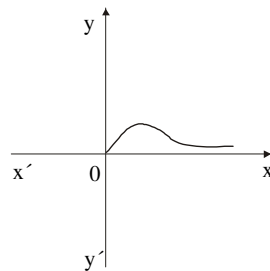
A. έχουν μόνο 1 τοπικό ακρότατο

B. το 0 είναι σημείο καμπής

Γ. η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

Δ. η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη

Ε. όλα τα παραπάνω



- 142.** Η ευθεία (ϵ) είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f . Τότε ισχύει ότι

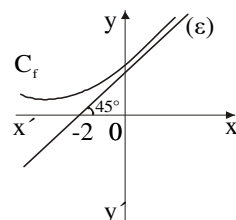
A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

Γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

Δ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$

Ε. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

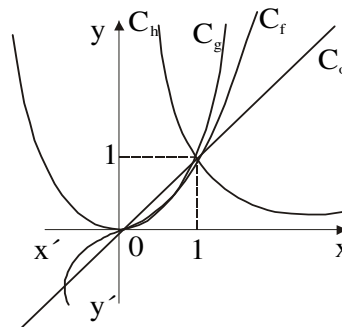


- 143.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η γραφική της παράσταση μπορεί να έχει
- A.** δύο πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$
 - B.** οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$
 - Γ.** κατακόρυφες ασύμπτωτες
 - Δ.** πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$
 - E.** οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$
- 144.** Η ευθεία $y=x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της
- A.** $f(x)=\frac{x^3+x^2-5}{2x^2+3}$
 - B.** $g(x)=x^4+5x$
 - Γ.** $h(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$
 - Δ.** $\varphi(x)=e^x-1$
 - E.** $\kappa(x)=x+\eta\mu x$

- 145.** Η στήλη A περιέχει γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και τις εφαπτομένες τους στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$. Σε κάθε σχήμα της στήλης A του παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε τη σχέση της στήλης B, η οποία ερμηνεύει αλγεβρικά στο συγκεκριμένο σχήμα, τη θέση της εφαπτομένης.

	Στήλη A	Στήλη B
1.		α. $f'(1)=0$
2.		β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$
3.		γ. $f'(1)>0$
4.		δ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = +\infty$
		ε. $f'(1)<0$
		ζ. $f'(1)>f'(0)$

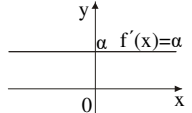
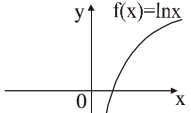
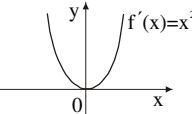
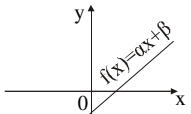
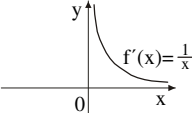
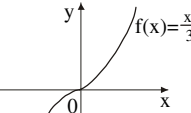
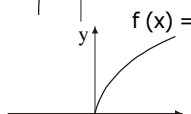
- 146.** Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τεσσάρων συναρτήσεων f , g , h και φ . Να διατάξετε τους συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων τους στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$, κατά αύξουσα σειρά.



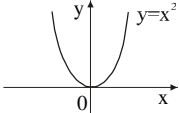
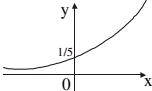
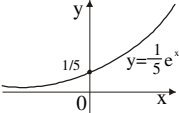
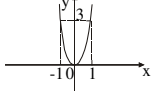
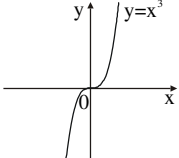
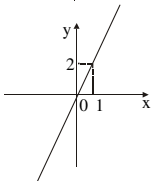
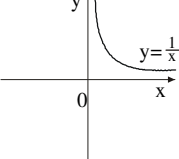
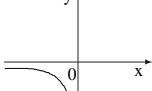
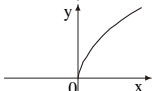
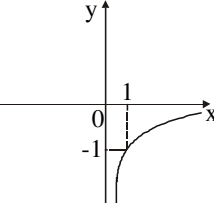
- 147.** Σε κάθε σύμβολο της στήλης Α του παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε το σύμβολο από τη στήλη Β που έχει την ίδια σημασία.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$	α. $2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$
2. $\frac{d^2f}{dx^2}$	β. $f'(x)$
3. $\frac{df^2}{dx}$	γ. $f^2(x) \cdot f'(x)$
4. $\left(\frac{df}{dx}\right)^2$	δ. $f''(x)$
	ε. $(f'(x))^2$

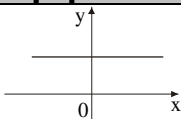
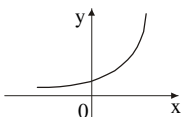
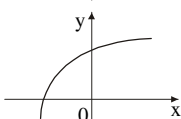
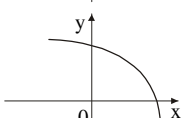
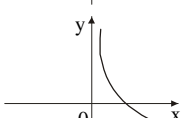
- 148.** Στη στήλη Α δίνονται οι γραφικές παραστάσεις παραγώγων συναρτήσεων f' . Στη στήλη Β δίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων f . Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση f' της στήλης Α τη γραφική παράσταση της f από τη στήλη Β του παρακάτω πίνακα.

Στήλη Α	Στήλη Β
γραφικές παραστάσεις f'	γραφικές παραστάσεις f
1. 	α. 
2. 	β. 
3. 	γ. 
	δ. 

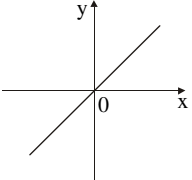
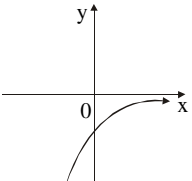
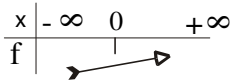
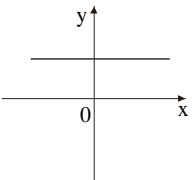
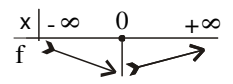
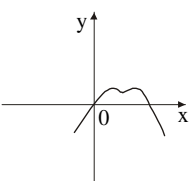
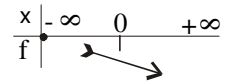
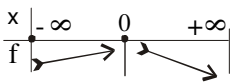
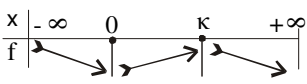
- 149.** Να αντιστοιχίσετε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης που φαίνεται στη στήλη Α του παρακάτω πίνακα με τη γραφική παράσταση της παραγώγου της που φαίνεται στη στήλη Β.

Στήλη Α		Στήλη Β	
γραφικές παραστάσεις f		γραφικές παραστάσεις f'	
1.		α.	
2.		β.	
3.		γ.	
4.		δ.	
		ε.	
		στ.	

- 150.** Κάθε συνάρτηση τη στήλης Α του παρακάτω πίνακα να την αντιστοιχίσετε στις σχέσεις που ισχύουν γι' αυτήν από τη στήλη Β.

	Στήλη Α	Στήλη Β
1.		α. $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$
2.		β. $f'(x) < 0$ και $f''(x) < 0$
3.		γ. $f'(x) > 0$ και $f''(x) < 0$
4.		δ. $f'(x) < 0$ και $f''(x) > 0$
5.		ε. $f'(x) = 0$
		ζ. $f'(x) = 0$ και $f''(x) > 0$

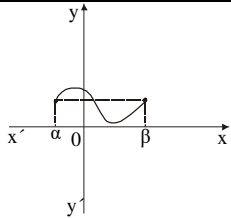
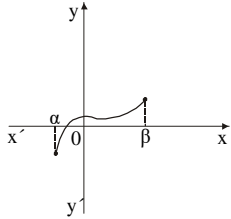
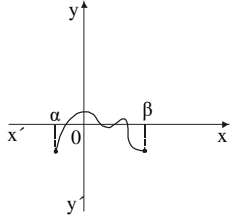
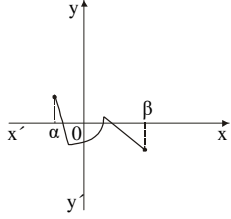
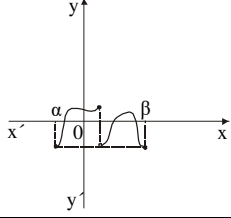
- 151.** Κάθε γραφική παράσταση C_f της στήλης Α του παρακάτω πίνακα να την αντιστοιχίσετε στη μονοτονία από τη στήλη Β.

Στήλη Α		Στήλη Β	
C_f		μονοτονία της f	
1.		α.	σταθερή συνάρτηση
2.		β.	
3.		γ.	
4.		δ.	
		ε.	
		στ.	

- 152.** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε συνάρτηση της στήλης Α του παρακάτω πίνακα, το πλήθος των σημείων καμπής που αναφέρεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x) = \ln x, x > 0$	α. 2
2. $g(x) = \eta \mu x, x \in \mathbb{R}$	β. 0
3. $h(x) = 5x^3 + x + 1, x \in \mathbb{R}$	γ. 4
4. $t(x) = x^4 - 2x^3, x \in \mathbb{R}$	δ. άπειρα
	ε. 1
	στ. 3

- 153.** Να συμπληρώσετε κάθε στήλη του παρακάτω πίνακα με ΝΑΙ αν ισχύει το αντίστοιχο θεώρημα ή με ΟΧΙ αν δεν ισχύει:

Γραφική παράσταση	Θεώρημα Bolzano	Θεώρημα Rolle	Θεώρημα μέσης τιμής
			
			
			
			
			

154.	Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0 (αν ορίζεται) σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:	ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
1)	$f(x) = \sqrt{x+3}$, αν $x_0 = -2$	$\frac{1}{2}$
2)	$f(x) = 2x^2 - x + 3$, αν $x_0 = -1$	-5
3)	$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 2x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$, αν $x_0 = 1$	2
4)	$f(x) = x^2 + x+2 $, αν $x_0 = -2$	Δεν ορίζεται
5)	$f(x) = x^2 - x - 6 $, αν $x_0 = 1$	1
6)	$f(x) = \frac{x^2 + x}{ x^2 - 1 + 1}$, αν $x_0 = -1$	-1
7)	$f(x) = \eta\mu^v x$, $v \in \mathbb{N}^*$, αν $x_0 = 0$	0
8)	$f(x) = \eta\mu^3(x-2)$, αν $x_0 = 2$	0
9)	$f(x) = \sqrt{ x-1 }$, αν $x_0 = 1$	Δεν ορίζεται
10)	$f(x) = x^2 - x-2 $ αν $x_0 = 2$	Δεν ορίζεται
11)	$f(x) = \sqrt{1 - \sin 2x}$ αν $x_0 = 0$	Δεν ορίζεται

155. Να βρείτε την παράγωγο (αν υπάρχει) των παρακάτω συναρτήσεων στο αντίστοιχο σημείο:

α) $f(x) = \ln x$ στο 1

β) $f(x) = |2-x|$ στο 2

γ) $f(x) = \sqrt{x^3}$ στο 0

δ) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ στο 0

ε) $f(x) = x\sqrt{x}$ στο 0

ζ) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ στο -2

ΑΠ: α) 1, β) Δεν υπάρχει, γ) 0, δ) Δεν υπάρχει, ε) 0, ζ) $-\frac{5}{16}$

156. ➡ Έστω οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (a, \beta)$ με $f'(x_0) = g'(x_0)$ και $f(x_0) = g(x_0)$. Αν ισχύει $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για $x \in (a, \beta)$, να αποδείξετε ότι και η h είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $h'(x_0) = f'(x_0)$.

157. ✓ ➡ Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1 , η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f(x) = |x-1| \cdot g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η τιμή $g(1)$.

ΑΠ: 0

158. ✓ Έστω f συνάρτηση με $f(x) = |x-a| \cdot g(x)$, όπου $a \in \mathbb{R}$ και g πολυωνυμική συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = a$ αν και μόνο αν το πολυώνυμο $g(x)$ έχει παράγοντα τον $x-a$.

159. Αν f συνάρτηση συνεχής στο $x_0 = 1$, δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = (x^2 - 3x + 2) \cdot f(x)$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και να βρείτε την $g'(1)$.

ΑΠ: $g'(1) = -f(1)$

160. Δίνεται συνάρτηση f με $f(0) = 1$ και $f'(0) = 2$ και g συνάρτηση με

$$g(x) = 2f(x) + \frac{x^2}{3f(x)} \quad \text{όπου } f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να υπολογίσετε την } g'(0).$$

ΑΠ: 4

161. ✓ Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $x - x^2 \leq f(x) \leq x + x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: α) $f(0)=0$, β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$

162. ✓ Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 5 και $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{x-5} = 4$, δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 5.

ΑΠ: $f'(5)=4$

163. ✓ ➡ Αν f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x)}{x} = 2021$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

ΑΠ: 2021

164. ✓ Αν f συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(-2+h)=1-h+h^2-3h^4$ για κάθε $h \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $f(-2)+f'(-2)=0$.

165. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 0 και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^3(x) - x \cdot f^2(x) - x^2 \cdot f(-x) = x^2 \cdot \eta \mu x$ να δείξετε ότι $f'(0)=1$.

166. ✓ ➡ Αν f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $x_0=1$ με $f(1)-g(1)=1$ και ισχύει ότι $f(x) \leq g(x)+x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f'(1)-g'(1)=2$.

167. ✓ ➡ Αν f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο 2 και g παραγωγίσιμη συνάρτηση στο 1 με $g(x) = \begin{cases} f(x^3 + 1), & x < 1 \\ f(2x), & x \geq 1 \end{cases}$, να δείξετε ότι $2f'(2)=g'(1)=0$.

168. ✓ Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $f(1)=6$, $f(5)=30$ και $f(x+y)-f(x)=kxy+y^2$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $k \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί:
➡ α) Η τιμή του k , β) η $f'(7)$

ΑΠ: $k=2$, $f'(7)=14$

169. Αν f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 και $g(x) = \begin{cases} f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0), & x \geq x_0 \\ f(x), & x < x_0 \end{cases}$, να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0

170. ✓ Θεωρούμε μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y)=e^x \cdot f(y) + e^y \cdot f(x) + xy + a$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι $f(0)=-a$.
β) Να δείξετε ότι η C_f περνά από την αρχή των αξόνων.
γ) Με δεδομένο ότι η παράγωγος της $y=e^x$ στο 0 είναι 1, να δείξετε ότι $f'(x)=f(x)+f'(0) \cdot e^x + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ ΜΕΡΟΥΣ ΘΕΜΑΤΟΣ ΓΕΝΙΚΩΝ ΕΞΕΤ. Α' ΔΕΣΜΗΣ 1997

171. ✓ Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0=a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x \cdot f(a) - a \cdot f(x)}{x - a} = f(a) - a \cdot f'(a)$

- 172.** ✓ Αν f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα όρια:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^2(x) - f(x_0) \cdot f(x)}{x - x_0}$$

$$f(x_0) \cdot f'(x_0)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}$$

$$2\sqrt{x_0} \cdot f'(x_0)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^3}, \text{ αν } f'(x_0) > 0$$

$$+\infty$$

$$4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + (x_0 - h)^2 + 2hx_0 - x_0^2}{h}$$

$$f'(x_0)$$

- 173.** ✓ Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο a να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(a+h) - f^2(a-h)}{h}$$

$$\beta) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a-\frac{h}{2})}{h}$$

$$\text{ΑΠ: } \alpha) 4f(a) \cdot f'(a), \beta) \frac{5f'(a)}{2}$$

- 174.** ✓ Αν f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $a \neq 0$ να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f^2(a) - a^2 f^2(x)}{x^2 - 3ax + 2a^2},$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^3(x) - f^3(a)}{|x-a|}$$

ΑΠ: α) $2af(a) \cdot f'(a) - 2[f(a)]^2$, β) 0, αν $f(a)=0$ ή $f'(a)=0$, αλλιώς το όριο δεν υπάρχει.

- 175.** Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1)=f'(1)=2$ να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 4}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(2+x) + x - 1}{x + 1}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x) - 2}{f(x) - 2x^2}$$

$$\text{ΑΠ: } \alpha) 16, \beta) 3, \gamma) -2$$

- 176.** ✓ Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 1 να βρείτε το $f'(1)$ ώστε:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+4h) - f(1-\frac{h}{3})}{h} = 2 + f'(1)$$

$$\text{ΑΠ: } f'(1) = \frac{3}{5}$$

177. Έστω συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + 1}{x + 1}, & \text{αν } x \geq 1 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$.

α) Να προσδιοριστεί ο $a \in \mathbb{R}$, ώστε η g να είναι συνεχής.

β) Για την τιμή του a που προσδιορίσατε στο α) ερώτημα να εξετάσετε αν η g είναι παραγωγίσιμη.

ΑΠ: α) $a = -1$, β) Δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1

- 178.** ✓ ➔ Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1)=0$ και $f'(1)=2021$ να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) \cdot f\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

$$\text{ΑΠ: } -2021$$

- 179.** ✓ Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο 2 η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \geq 2 \\ \alpha x + \beta, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$.

ΑΠ: $\alpha=4, \beta=-4$

- 180.** ✓ Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ συναρτήσεως του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει η $f'(\kappa)$ αν

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{αν } x \leq \kappa \\ \alpha x + 3\beta, & \text{αν } x > \kappa \end{cases}$$

ΑΠ: $\alpha=4\kappa, \beta=-\frac{2}{3}\kappa^2$

- 181.** ✓ Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \alpha + 1, & \text{αν } x < 0 \\ \alpha x - \beta + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ΑΠ: $\alpha=0, \beta=1$

- 182.** ✓ Να υπολογιστούν οι τιμές των παραμέτρων, ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες στα αντίστοιχα x_0 :

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
 $\alpha=\frac{2}{3}, \beta=-\frac{4}{3}$

1) $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta - 1, & x < -1 \\ (\alpha - 1)x^2 + 2\beta, & x \geq -1 \end{cases}$, στο $x_0 = -1$

$\alpha=3$

2) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 2, & x \leq 1 \\ \frac{\alpha x - 1}{x + 1}, & x > 1 \end{cases}$, στο $x_0 = 1$

$\lambda=1$

3) $f(x) = \begin{cases} \lambda x^2 + x, & x \geq 0 \\ x^2 + \lambda x + \lambda^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$, στο $x_0 = 0$

$\alpha=1, \beta=-3, \gamma=1$

4) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ \gamma x^2 + x - 3, & x > 2 \end{cases}$, στο $x_0 = 2$

$\alpha=-\frac{3}{2}, \beta=\frac{5}{2}$

5) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \in (-\infty, 1] \\ \sqrt{x^2 + 3}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$, στο $x_0 = 1$

$\alpha=0, \beta=-1$

6) $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x \leq 1 \\ \frac{\beta x - 1}{x + 1}, & x > 1 \end{cases}$, στο $x_0 = 1$

- 183.** ✓ ➡ Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , τέτοιες ώστε να ισχύουν:

α) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

β) $x \cdot g(x) = \frac{f(x) - 1}{2021}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$

Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

- 184.** Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει η $f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = 0$.

- 185.** ✓ Αν f παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει $f(x+y)=f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $f(0) \neq 0$, δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

$$\text{ΑΠ: } f'(x) = f(x) \cdot f'(0)$$

- 186.** Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο 0 με $f'(0)=1$ και $f(x+y)=f(x) \cdot \sin y + f(y) \cdot \sin x$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

- 187.** Αν $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=2$ και $f(x \cdot y)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

- 188.** ✓ ➔ Αν $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(x \cdot y)=y \cdot f(x) + x \cdot f(y)$, για κάθε $x, y > 0$, να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + f'(1)$, για κάθε $x > 0$.

- 189.** Αν f συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $\eta \mu x - x^2 \leq f(x) \leq \eta \mu x + x^3$, δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

$$\text{ΑΠ: } f'(0)=1$$

- 190.** Αν f, g, h συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο 2 με $h'(2)=g'(2)=1$, $h(2)=f(2)=g(2)$ και ισχύει ότι $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $f'(2)$.

$$\text{ΑΠ: } f'(2)=1$$

- 191.** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε:

i) η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 6$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x-1} = -3$

Να υπολογιστούν:

α) Το $f(1)$, β) Το $f'(1)$ και γ) Το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\text{ΑΠ: α) 0, β) 6, γ) -2}$$

- 192.** ✓ Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1) $f(x)=2x^3-3x+1$

$$6x^2-3$$

2) $\varphi(u)=\frac{u^2}{2}$

$$u$$

3) $V(t)=\frac{s \cdot t}{p}$, με s, p σταθερές

$$\frac{s}{p}$$

4) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

$$-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}$$

5) $g(x)=x^2+\sqrt[3]{x}+2$

$$2x+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

6) $g(\omega)=\frac{a}{\omega^2}$, $a \neq 0$

$$-\frac{2a}{\omega^3}$$

7) $h(x)=\frac{c}{\sqrt{x}}$, $c \neq 0$

$$-\frac{c}{2x\sqrt{x}}$$

8) $x(\omega)=\frac{1}{\omega^2-3\omega+2}$

$$-\frac{2\omega-3}{(\omega^2-3\omega+2)^2}$$

- 9) $g(x) = \frac{x^2 - 1}{2x + 1}$ $\frac{2x^2 + 2x + 2}{(2x + 1)^2}$
- 10) $\varphi(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + \ln x$ $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + \frac{1}{x}$
- 11) $t(x) = x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ $x \cdot \sigma\upsilon\nu x$
- 12) $f(u) = u \cdot \ln u$ $\ln u + 1$
- 13) $\varphi(x) = \sqrt{x} - \ln x$ $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$
- 14) $\varphi(r) = \frac{\ln r}{r}$ $\frac{1 - \ln r}{r^2}$
- 15) $h(t) = \frac{\sigma\upsilon\nu t}{1 + \eta\mu t}$ $-\frac{1}{1 + \eta\mu t}$
- 16) $f(x) = x^2 - e^x + 3^x$ $2x - e^x + 3^x \cdot \ln 3$
- 17) $t(x) = x \cdot e^x \cdot \ln x$ $e^x \cdot (\ln x + x \cdot \ln x + 1)$
- 18) $g(x) = \frac{x \cdot \ln x}{x^2 - 1}$ $\frac{x^2 - x^2 \ln x - \ln x - 1}{(x^2 - 1)^2}$
- 19) $f(t) = \ln t \cdot (\sqrt{t} + \eta\mu t)$ $\frac{2\sqrt{t} + 2\eta\mu t + \sqrt{t} \cdot \ln t + 2t \cdot \sigma\upsilon\nu t \cdot \ln t}{2t}$
- 20) $h(x) = (2x^2 - 1)^2$ $16x^3 - 8x$
- 21) $f(x) = (x^2 + 1)^4$ $8x \cdot (x^2 + 1)^3$
- 22) $g(x) = \left(\frac{3x + 1}{x - 1} \right)^7$ $-28 \left(\frac{3x + 1}{x - 1} \right)^6 \cdot \frac{1}{(x - 1)^2}$
- 23) $u(t) = \frac{1}{(t + 1)^{11}}$ $-\frac{11}{(t + 1)^{12}}$
- 24) $h(t) = \sqrt{\frac{t + 1}{t - 1}}$ $-\frac{\sqrt{\frac{t - 1}{t + 1}}}{(t - 1)^2}$
- 25) $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ $\frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$
- 26) $f(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{2}}$ $\frac{1}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{x - 1}}$
- 27) $f(x) = \sqrt[5]{2x - 4}$ $\frac{2}{5 \cdot \sqrt[5]{(2x - 4)^4}}$
- 28) $f(x) = \eta\mu^3 x$ $3\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x$
- 29) $\varphi(y) = \eta\mu^3(y^2 + y + 1)$ $3(2y + 1) \cdot \eta\mu^2(y^2 + y + 1) \cdot \sigma\upsilon\nu(y^2 + y + 1)$
- 30) $g(x) = (2 - \sigma\upsilon\nu^2 x)^3$ $6 \cdot (2 - \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$
- 31) $g(x) = \ln(x^2 - x + 2)$ $\frac{2x - 1}{x^2 - x + 2}$

$$\begin{array}{ll}
 32) \quad p(u)=2u \cdot e^{3u-1} & 2 \cdot (1+3u) \cdot e^{3u-1} \\
 33) \quad t(x)=\ln(\eta\mu\sqrt{x}), \quad 0 < x < \pi^2 & \frac{\sigma\varphi\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\
 34) \quad r(x)=\eta\mu(\sigma\upsilon\nu^2x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\eta\mu^2x) & -2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu^2x - \eta\mu^2x) \\
 35) \quad h(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}) & \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
 36) \quad g(t)=\ln(\ln t) & \frac{1}{t \ln t} \\
 37) \quad t(u)=\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^5 & \frac{10}{u^2-1} \\
 38) \quad p(x)=\frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\
 39) \quad h(x)=\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}
 \end{array}$$

193. ✓ Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad f(x)=x^x, \quad x > 0 & x^x \cdot (1+\ln x) \\
 2) \quad g(x)=x^{\eta\mu x}, \quad x > 0 & x^{\eta\mu x} \left(\sigma\upsilon\nu x \cdot \ln x + \frac{\eta\mu x}{x} \right) \\
 3) \quad h(x)=(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}, \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, 2k\pi + \pi) & (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \left[-\eta\mu x \cdot \ln(\eta\mu x) + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x} \right] \\
 4) \quad t(u)=(\eta\mu u)^u, \quad u \in (0, \pi) & (\eta\mu u)^u \cdot [\ln(\eta\mu u) + u \cdot \sigma\varphi u] \\
 5) \quad \varphi(x)=x^{\sqrt{x}}, \quad x > 0 & x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} \\
 6) \quad f(x)=(2x+1)^{x^2+1}, \quad x > -\frac{1}{2} & (2x+1)^{x^2+1} \cdot \left[2x \cdot \ln(2x+1) + \frac{2(x^2+1)}{2x+1} \right] \\
 7) \quad h(x)=x^{x^x}, \quad x > 0 & x^{x^x+x} \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x} \right) \\
 8) \quad f(t)=\eta\mu t^t, \quad t \in (0, \pi) & t^t \cdot (\ln t + 1) \cdot \sigma\upsilon\nu t^t
 \end{array}$$

194. ✓ Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ll}
 \alpha) \quad f(x)=\ln(\epsilon\varphi x^x), \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}) & \beta) \quad f(x)=x^{x^2+1} + 2^{\sqrt{x}}, \quad x > 0 \\
 \gamma) \quad f(x)=\eta\mu^3(2+3^{\eta\mu x}) & \delta) \quad f(x)=x^{x \cdot \ln(\sigma\upsilon\nu x)}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\
 \epsilon) \quad f(x)=\eta\mu(e^{-x}) &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{ΑΠ: } \alpha) \ln(\epsilon\varphi x) + \frac{x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}, \quad \beta) x^{x^2+1} \cdot \left(2x \cdot \ln x + \frac{x^2+1}{x} \right) + \frac{2^{\sqrt{x}} \cdot \ln 2}{2\sqrt{x}}, \\
 \gamma) 3 \ln 3 \cdot \eta\mu^2(2+3^{\eta\mu x}) \cdot \sigma\upsilon\nu(2+3^{\eta\mu x}) \cdot 3^{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x, \\
 \delta) x^{x \cdot \ln(\sigma\upsilon\nu x)} \cdot [\ln(\sigma\upsilon\nu x) \cdot \ln x - x \cdot \sigma\varphi x \cdot \ln x + \ln(\sigma\upsilon\nu x)], \quad \epsilon) -e^{-x} \cdot \sigma\upsilon\nu(e^{-x})
 \end{array}$$

195. ✓ Να υπολογιστούν, όπου ορίζονται, οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- 1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq -1 \\ -x^3 + 1, & x > -1 \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq -1 \\ -3x^2, & x > -1 \end{cases}$
- 2) $f(x) = \begin{cases} x \cdot (\sqrt{x} + 1), & x > 0 \\ (x^2 + 1) \cdot \eta\mu x, & x \leq 0 \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1, & x > 0 \\ 2x\eta\mu x + (x^2 + 1)\sigma\upsilon\nu x, & x \leq 0 \end{cases}$
- 3) $f(x) = |x|$ $f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
- 4) $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2}, & x < 0 \end{cases}$
- 5) $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x > 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x < 0 \end{cases}$
- 6) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 5, & x \leq -2 \\ \ln(x+3), & x > -2 \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < -2 \\ \frac{1}{x+3}, & x > -2 \end{cases}$
- 7) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6, & x \leq 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3}, & x > 1 \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} 6x - 5, & x \leq 1 \\ \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}}, & x > 1 \end{cases}$

196. ✓ Να υπολογιστούν, όπου ορίζονται, οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- 1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, & x > 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt[3]{-x}}, & x < 0 \end{cases}$
- 2) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ $f'(x) = \begin{cases} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$
- 3) $f(x) = \sqrt[5]{(x+1)^4}$ $f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{5\sqrt[5]{x+1}}, & x > -1 \\ -\frac{4}{5\sqrt[5]{-(x+1)}}, & x < -1 \end{cases}$
- 4) $f(x) = (x+1)^{\frac{4}{5}}, \mu\epsilon x \geq -1$ $f'(x) = \frac{4}{5\sqrt[5]{x+1}}, x > -1$

197. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a_1^x + a_2^{2x} + a_3^{3x} + \dots + a_v^{vx}$, όπου $a_1, a_2, a_3, \dots, a_v$ θετικοί αριθμοί. Αν $f'(0) = 0$ δείξτε ότι $a_1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 \cdot \dots \cdot a_v^v = 1$.

- 198.** ✓ Έστω οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{x}}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της fog .

$$\text{ΑΠ: } (fog)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$$

- 199.** ✓ ➔ Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(2x-1)=f(x)$ και η συνάρτηση g με $g(x)=(x^2-2x+3) \cdot f(x)$. Να υπολογιστεί ο αριθμός $g'(1)$.

ΑΠ: 0

- 200.** Έστω f συνάρτηση τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια, η f'' περιττή και η $f^{(3)}$ άρτια.

- 201.** Να λυθεί η εξίσωση $\begin{vmatrix} f'(x) & g'(0) \\ 2 & x-2 \end{vmatrix} = 26$, $x \in \mathbb{R}$, με $f(x)=4x^2-5x+1$ και $g(x)=\frac{3x+2}{5x-1}$.

$$\text{ΑΠ: } x=2 \text{ ή } x=\frac{5}{8}$$

- 202.** Να λυθεί η εξίσωση $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$, όπου $f(x)=e^x \cdot \eta\mu x$.

ΑΠ: $x \in \mathbb{R}$

- 203.** 1) Αν $f(x)=x \cdot e^{-x}$ δείξτε ότι $f^{(3)}(x) + 2f''(x) + f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2) Αν $f(x)=x \cdot e^{x^2}$ δείξτε ότι $f^{(3)}(x) - 6f'(x) - 2xf''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3) Αν $f(x)=x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ δείξτε ότι ισχύει $x^2 \cdot f''(x) - 2x \cdot f'(x) + (2+x^2) \cdot f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

4) Αν $f(x) = e^x (a \cdot \sigma\upsilon\nu 2x + \beta \cdot \eta\mu 2x) + \frac{1}{4}e^{3x}$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $f''(x) - 2f'(x) + 5f(x)$.

5) Αν $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ δείξτε ότι $x^3 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0$, για κάθε $x \neq 0$.

6) Αν $y = \sqrt{x} - x$ δείξτε ότι $4x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot (x+y) = -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^*$.

ΑΠ: 4) $2 \cdot e^{3x}$

- 204.** Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\omega) = \omega^3 \cdot e^\omega$. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η σχέση $\alpha \cdot \varphi(\omega) + \beta \cdot \varphi'(\omega) + \gamma \cdot \varphi''(\omega) = 12\omega \cdot e^\omega$ να ισχύει για κάθε $\omega \in \mathbb{R}$.

ΑΠ: $\alpha=2, \beta=-4, \gamma=2$

- 205.** ✓ Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{a + \ln(x+1)}{x^2}$ με $x > 1$ και $a \in \mathbb{R}$ σταθερά. Δείξτε ότι:

$$x(1+x) \left(x \cdot \frac{dy}{dx} + 2y \right) = 1.$$

- 206.** Αν $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^v$, $v \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι:

α) $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot y$

β) $(x^2 + 1) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + x \cdot \frac{dy}{dx} - v^2 y = 0.$

- 207.** ➔ Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο x_0 συναρτήσεις f και g , με $g(x_0) \neq 0$ και $g'(x_0) \neq 0$.
Αν F συνάρτηση με $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ και $F'(x_0) = 0$, δείξτε ότι $F(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Παραλλαγή θέματος Γενικών Εξετάσεων

- 208.** ➔ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Αν $f(\rho) = f'(\rho) = 0$, δείξτε ότι ο αριθμός ρ είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

- 209.** Να βρείτε πολυώνυμο $f(x)$ 2^{ου} βαθμού τέτοιο ώστε $f(1) = 2$, $f'(1) = 1$ και $f''(1) = 2$

ΑΠ: $f(x) = x^2 - x + 2$

- 210.** Να προσδιορίσετε πολυώνυμο $f(x)$ τρίτου βαθμού αν $f(0) = f'(0) = f''(0) = 5$ και $f''(1) = 17$.

ΑΠ: $f(x) = 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 5x + 5$

- 211.** α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει διπλή ρίζα τον αριθμό $\rho \in \mathbb{R}$, το $P'(x)$ έχει τον ρ απλή ρίζα.

β) **Γενίκευση:** Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό $\rho \in \mathbb{R}$ βαθμού πολλαπλότητας k , το $P'(x)$ έχει τον ρ ρίζα πολλαπλότητας $k-1$.

- 212.** ✓ ➔ Αν για ένα πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει ότι $P(x) = [P'(x)]^2 \cdot P''(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον βαθμό του $P(x)$.

ΑΠ: $P(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή το $P(x)$ είναι 2ου βαθμού

- 213.** ➔ Βρείτε όλα τα μη σταθερά πολυώνυμα $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, για τα οποία είναι $[P'(x)]^2 = P(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΠ: $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \beta x + \beta^2$, $\beta \in \mathbb{R}$

- 214.** ➔ Δίνεται πολυώνυμο $f(x) = 4x^3 - 15x^2 - 13x + 70$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(x) : (x-3)^2$, χωρίς να γίνει η διαίρεση.

ΥΠΟΔ: Το υπόλοιπο $u(x)$ θα είναι το πολύ πρώτου βαθμού, δηλαδή της μορφής $ax + \beta$, $a \neq 0$

ΑΠ: $u(x) = 5x - 11$

- 215.** ✓ Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $f(\ln x) = e^{-x} \cdot \ln x$, για κάθε $x > 0$, να βρείτε το $f'(1)$.

ΑΠ: $\frac{1-e}{e^e}$

- 216.** ✓ Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(\eta\mu x) = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Δείξτε ότι $3f''(\frac{1}{2}) - 2f'(\frac{1}{2}) = 4 + 2\sqrt{3}$.

- 217.** ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

➔ β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$.

➔ γ) Θεωρώντας ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, να βρείτε την παράγωγο της f^{-1} στο σημείο 1.

ΑΠ: α) $\mathbb{R}$, β) $x=1$, γ) $\frac{1}{2}$

- 218.** ✓ ➡ α) Αν f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και με αντίστροφη f^{-1} , να δείξετε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί η παράγωγος της f^{-1} .
 β) Αν $f(x) = e^{x-1} + x^3 + 2022$ να βρεθεί η τιμή $(f^{-1})'(2024)$.

$$\text{ΑΠ: } \alpha) (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \beta) \frac{1}{4}$$

- 219.** Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος των συναρτήσεων:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$1) f(x) = \begin{cases} 3, & x < 4 \\ -1, & x \geq 4 \end{cases}$$

$$f''(x) = 0, x \neq 4$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq -1 \\ -x^3 + 1, & x \geq -1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x < -1 \\ -6x, & x > -1 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x + \eta \mu x, & x < 0 \\ x^4 + x^3 + 2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\eta \mu x, & x < 0 \\ 12x^2 + 6x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$4) f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}, x > 0$$

$$5) f(x) = \varepsilon \varphi x - \sigma \varphi x$$

$$f''(x) = 2 \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu^3 x} - 2 \frac{\sigma \nu x}{\eta \mu^3 x},$$

$$6) f(x) = x^x$$

$$x \neq k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$f''(x) = x^x \left[(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right]$$

- 220.** Μια συνάρτηση είναι περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:
 α) η γραφική της παράσταση διέρχεται από το $(0, 0)$.
 β) $f''(0) = 0$.

- 221.** Να υπολογιστούν οι τιμές των παραμέτρων, ώστε να είναι παραγωγίσιμες οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \in (0, 1] \\ ax^2 + \beta x - 1, & x \in (1, 2) \end{cases}$$

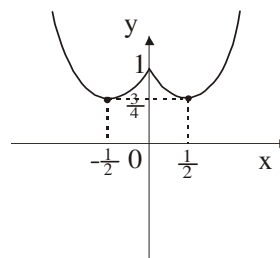
$$\beta) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & \text{αν } |x| > 1 \\ ax^2 + \beta, & \text{αν } |x| \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{ΑΠ: } \alpha) a = -4, \beta = 10, \beta) a = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{2}$$

- 222.** Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2 - |x| + 1$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' .

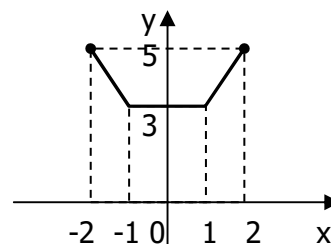


$$\text{ΑΠ: } f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{αν } x < 0 \\ 2x - 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

223. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία με τετμημένες -1 , 1 , $\frac{3}{2}$.

β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f' .



ΑΠ: α) Στα $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη, ενώ στο $x_3 = \frac{3}{2}$

είναι παραγωγίσιμη, **β)** $f'(x) = \begin{cases} -2, & -2 \leq x < -1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ 2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

224. Αν f συνάρτηση με $f(t) = t^3 - 3t^2 + 5t$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ως προς t όταν $t = 2$

ΑΠ: 5

225. ✓ Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης:

α) $f(x) = \frac{3x^2 \cdot h - 2x \cdot h^2 + x}{x}$ ως προς x όταν $x = 2$

β) $f(h) = \frac{3x^2 \cdot h - 2x \cdot h^2 + x}{x}$ ($x \neq 0$) ως προς h όταν $h = 2$

ΑΠ: α) $3h$, β) $3x - 8$

226. ✓ Αν f συνάρτηση με $f(t) = e^t + 2t$ να βρείτε τη χρονική στιγμή t_0 που ο ρυθμός μεταβολής της f αυξάνεται με ρυθμό 2.

ΑΠ: $t_0 = \ln 2$

227. Αν f συνάρτηση με $f(t) = t \cdot \ln t$ να βρείτε τη χρονική στιγμή t_0 που ο ρυθμός μεταβολής της f αυξάνεται με ρυθμό 2.

ΑΠ: $t_0 = \frac{1}{2}$

228. ✓ Η συνάρτηση θέσης κινητού που κινείται πάνω σε άξονα δίνεται σε m από τη σχέση $x(t) = t^3 + t^2 + t - 3$, όπου t ο χρόνος σε sec , με $0 \leq t \leq 10$. Να βρείτε:

α) Την αρχική ταχύτητα του κινητού.

β) Ποια χρονική στιγμή η ταχύτητά του είναι 2 m/sec .

γ) Ποια χρονική στιγμή η επιτάχυνσή του είναι 8 m/sec^2 .

ΑΠ: α) 1 m/sec , β) $\frac{1}{3} \text{ sec}$, γ) 1 sec

229. ✓ Μια δύναμη εφαρμόζεται σε κινητό που κινείται σε άξονα και του οποίου η απομάκρυνση από την αρχή O τη χρονική στιγμή $t \text{ sec}$ μετά την εφαρμογή της δύναμης, δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = -\ln(t+1)$, $t \geq 0$.

α) Να δείξετε ότι το κινητό δεν ήταν σε κατάσταση ηρεμίας όταν εφαρμόστηκε η δύναμη.

β) Να δείξετε ότι η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται.

γ) Να δείξετε ότι η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη.

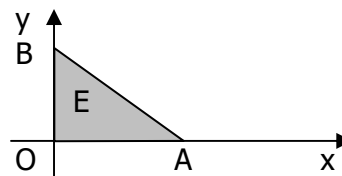
δ) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας και της επιβράδυνσης του κινητού, 3 sec μετά την εφαρμογή της δύναμης.

$$\text{ΑΠ: } \delta) |u(3)| = \frac{1}{4} \text{ και } |a(3)| = \frac{1}{16}$$

230. ✓ Ο όγκος ενός σφαιρικού μπαλονιού μειώνεται με ρυθμό $4\text{m}^3/\text{sec}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας του r , τη χρονική στιγμή t_0 που η ακτίνα είναι ίση με 20m .

$$\text{ΑΠ: } -\frac{1}{400\pi} \text{ m/sec}$$

231. ✓ Σημείο A κινείται πάνω στον θετικό ημιάξονα Ox ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy. Αν η θέση του $x(t)$ κάθε χρονική στιγμή t αυξάνει με ρυθμό 3 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του τριγώνου OAB όταν $x=2 \text{ cm}$, όπου B σημείο με συντεταγμένες $(0, 2e^x)$.



$$\text{ΑΠ: } E'(t_0) = 9e^2 \text{ cm}^2/\text{sec}$$

232. ➡ Σημείο K κινείται προς τα δεξιά κατά μήκος του τμήματος της καμπύλης συνάρτησης f με $f(x) = 2x^3 + 1$ που βρίσκεται δεξιά του $y'y$. Να βρείτε σε ποια θέση ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του K είναι διπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

$$\text{ΑΠ: } \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{12\sqrt{3}} + 1 \right)$$

233. ✓ ➡ Σημείο $A(a(t), \ln a(t))$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του A να είναι $2a(t)$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου τομής της εφαπτομένης της C_f στο A με τον $x'x$, όταν η τετμημένη του A γίνει ίση με $\frac{1}{e}$.

$$\text{ΑΠ: } \frac{2}{e}$$

234. ✓ Έστω συνάρτηση $f(x) = e^x + x$ και σημείο A της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο A

β) Κινητό $M(x, f(x))$ κινείται κατά μήκος της C_f και καθώς διέρχεται από το A, η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες/sec . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M, όταν αυτό διέρχεται από το A.

$$\text{ΑΠ: } \alpha) y = (e+1) \cdot x, \beta) -2e-2 \text{ μον/sec}$$

235. ✓ Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x, & x < 1 \end{cases}$$

Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x \geq 1$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι $2 \text{ μονάδες ανά δευτερόλεπτο}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου MOK τη χρονική στιγμή t_0 , όπου $K(x, 0)$ και $O(0, 0)$.

ΤΜΗΜΑ ΘΕΜΑΤΟΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2019

$$\text{ΑΠ: } 28 \text{ τ.μ./sec}$$

- 236.** ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+ax+\beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$ και ορθογώνιο του οποίου οι διαστάσεις μήκος και ύψος μεταβάλλονται με ρυθμούς a cm/sec και β cm/sec αντίστοιχα. Αν ο άξονας x' εφάπτεται στη C_f στη θέση 1, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου τη χρονική στιγμή που αυτό γίνεται τετράγωνο με εμβαδόν 25 cm^2 .

ΑΠ: $a=-2, \beta=1, E'(t_0)=-5\text{cm}^2/\text{sec}$

- 237.** ✓ ® Η ευθεία $\varepsilon: y=-2x+4$ τέμνει τον άξονα x' στο Γ και τον $y'y$ στο A , ενώ η συμμετρική της ως προς τον άξονα $y'y$ τέμνει τον x' στο B . Σημείο M κινείται πάνω στο τμήμα $A\Gamma$ και η τεταγμένη του πλησιάζει προς τον άξονα x' με ρυθμό $0,2$ μον/min.

α) Να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο η τετμημένη του M απομακρύνεται από το O .

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του εγγεγραμμένου ορθογωνίου στο τρίγωνο $AB\Gamma$ που έχει ως μία κορυφή το M , όταν η τετμημένη του M είναι $1,5$.

γ) Να βρείτε για ποια θέση του M το εμβαδόν του ερωτήματος β) γίνεται μέγιστο.

ΑΠ: α) $0,1$ μον/min, β) $-0,4$ τετρ. μον/min, γ) $x(t_0)=1$ μον

- 238.** ✓ Σε ένα σχέδιο που έγινε σε σύστημα συντεταγμένων, ένα τρένο ακολουθεί την τροχιά της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$, $x \geq 0$ και πρόκειται να περάσει πάνω από ένα μικρό ρυάκι που ρέει κατά μήκος της ευθείας με εξίσωση $x=3$. Αν η απόσταση της μηχανής του τρένου από την αρχή των αξόνων αυξάνεται με ρυθμό 2m/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x της μηχανής του τρένου τη χρονική στιγμή που αυτή διέρχεται πάνω από το ρυάκι.

ΑΠ: $\frac{8\sqrt{3}}{7} \text{ m/sec}$

- 239.** ✓ Παρατηρητής Π παρακολουθεί ένα αερόστατο A που απογειώνεται κατακόρυφα στις 12 το μεσημέρι με σταθερή ταχύτητα $100\sqrt{3} \text{ m/min}$. Η απόσταση $\Pi\Sigma$ του παρατηρητή από τη σκιά Σ του αερόστατου είναι $400\sqrt{3} \text{ m}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας παρατήρησης $\theta=\widehat{A\Pi\Sigma}$ κατά τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 400m από το έδαφος

ΑΠ: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{16} \text{ rad/min}$

- 240.** ✓ ➔ Σε δεξαμενή σχήματος ανεστραμμένου κώνου χύνεται νερό με ρυθμό $5\text{m}^3/\text{sec}$. Το ύψος του κώνου είναι 20 m και η ακτίνα της βάσης 10 m . Να βρείτε πόσο γρήγορα ανέρχεται το επίπεδο του νερού στη δεξαμενή, όταν η επιφάνεια του νερού απέχει από την κορυφή του κώνου 5 m .

ΑΠ: $\frac{4}{5\pi} \text{ m/sec}$

- 241.** ✓ Εργάτης βρίσκεται στο τελευταίο σκαλί μιας σκάλας 5 m της οποίας το άνω άκρο βρίσκεται σε επαφή με κατακόρυφο τοίχο και γλιστρά προς τα κάτω με ρυθμό 4 m/sec.

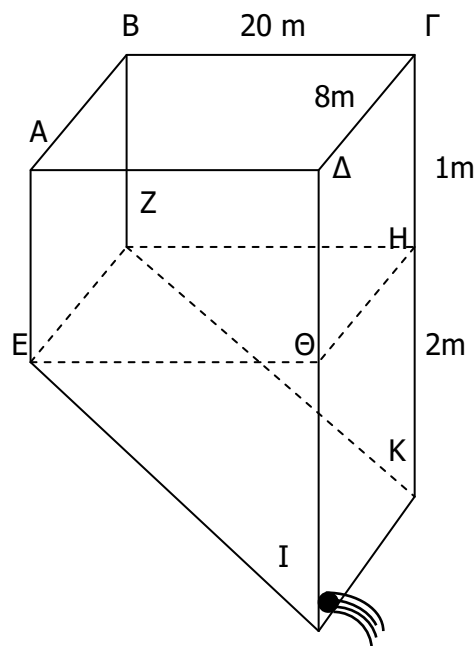
- Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο γλιστρά στο έδαφος το κάτω άκρο της σκάλας τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία ο εργάτης βρίσκεται σε ύψος 3 m από το έδαφος.
- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου που σχηματίζεται από τον τοίχο, το έδαφος και τη σκάλα τη χρονική στιγμή t_0 .

ΑΠ: i) 3 m/sec, ii) $-7/2 \text{ m}^2/\text{sec}$

- 242.** ✓ ➡ Μια ορθογώνια πισίνα έχει μήκος 20 m, πλάτος 8 m και ο πυθμένας της είναι κεκλιμένο επίπεδο. Το βάθος της πισίνας στο αβαθέστερο σημείο της είναι 1 m και στο βαθύτερο 3 m. Το νερό της πισίνας εκρέει από το βαθύτερο σημείο της με ρυθμό $1 \text{ m}^3/\text{min}$. Να βρείτε πόσο γρήγορα κατεβαίνει η επιφάνεια του νερού τη χρονική στιγμή που το ύψος του νερού από το χαμηλότερο σημείο της είναι:

- α) 2,5 m, β) 1 m.

Δίνεται ότι ο όγκος παραλληλεπιπέδου διαστάσεων α, β, γ είναι $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$.



ΑΠ: α) $1/160 \text{ m/min}$, β) $1/80 \text{ m/min}$

- 243.** ✓ ➡ Ένας ποδηλάτης βρίσκεται 4 km ανατολικά από ένα σταυροδρόμι και ταξιδεύει προς αυτό με ταχύτητα 9 km/h. Την ίδια χρονική στιγμή ένας άλλος ποδηλάτης βρίσκεται 3 km νότια από το σταυροδρόμι και απομακρύνεται από αυτό με ταχύτητα 10 km/h. Η απόσταση των δύο ποδηλατών αυξάνεται ή μειώνεται τη χρονική στιγμή αυτή; Με τι ρυθμό;

ΑΠ: Μειώνεται με ρυθμό $1,2 \text{ km/h}$

- 244.** ✓ Να βρεθεί (αν υπάρχει) η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της γραφικής παράστασης συνάρτησης f :

1) στο σημείο M με τετμημένη $x_0=3$, αν $f(x)=3x^2-2x+1$.

2) στο σημείο M με τετμημένη $x_0=0$, αν $f(x)=|x| \cdot (x+1)$.

3) στο σημείο με τεταγμένη $y_0 = \frac{1}{2}$, αν $f(x) = \frac{2x-3}{x-4}$.

4) στο σημείο $A(x_0, y_0)$ της $f(x) = \sqrt{8x}$, αν γνωρίζουμε ότι σχηματίζει γωνία κλίσης 45° .

5) με $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ που σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{3}$ με τον

άξονα $x'x$.

6) στο $M(x_0, y_0)$ με $x_0=0$, αν $f(x)=x^2-2|x|$.

7) της $f(x)=x^2-5x+6$ που διέρχεται από το σημείο $M(1, -2)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$y=16x-26$$

Δεν υπάρχει

$$y = -\frac{9}{20}x + \frac{4}{5}$$

$$y=x+2$$

$$y = \sqrt{3x+4}$$

Δεν ορίζεται

$$y=x-3 \text{ ή } y=-7x+5$$

8) με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$ που είναι παράλληλη προς τον

$$y=1 \text{ ή } y=9$$

άξονα $x'x$.

9) με $f(x)=x^2-4x+5$, η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $x-2y+6=0$.

$$y=-2x+4$$

10) με $f(x)=x^3-1$ που έχει συντελεστή διεύθυνσης 1.

$$y = x - \frac{2}{3\sqrt{3}} - 1 \text{ ή }$$

$$y = x + \frac{2}{3\sqrt{3}} - 1$$

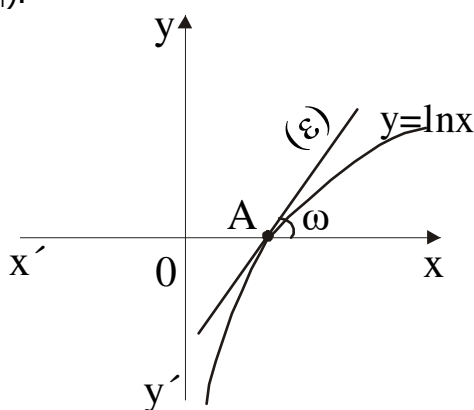
11) στο σημείο M με τετμημένη $x_0=-2$, αν $f(x)=\sqrt{x+2}$.

$$x=-2$$

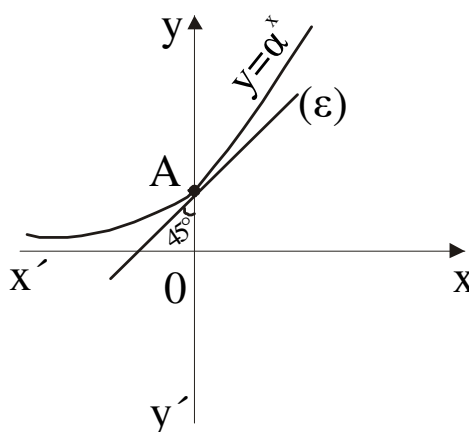
245. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(x)=\ln(2+e^x)$ να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο με τεταγμένη $y=\ln 3$

$$\text{ΑΠ: } y = \frac{1}{3}x + \ln 3$$

246. Στο σχήμα (α) να υπολογίσετε τη γωνία ω και στο σχήμα (β) να υπολογίσετε τον αριθμό a . (Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα η (ε) είναι εφαπτομένη της C_f).



(α)



(β)

$$\text{ΑΠ: (α) } \omega=45^\circ, (\beta) a=e$$

247. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=3x^2+x+1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε μία τουλάχιστον συνάρτηση f για την οποία να ισχύει $f'(x)=g(x)$ (1).

β) Από όλες τις συναρτήσεις f οι οποίες έχουν την ιδιότητα (1) να βρείτε εκείνη της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $(-2, -2)$.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση f με την ιδιότητα (1) της οποίας η C_f να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

$$\text{ΑΠ: α) π.χ. } f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2+x, \beta) f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2+x+6, \gamma) \text{ Όχι}$$

248. Έστω συνάρτηση $f(x)=x^2+2x+a$, $a \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα σημεία της C_f , όπου η εφαπτομένη της να είναι:

α) παράλληλη προς τον άξονα $x'x$

β) παράλληλη προς την ευθεία $2x-3=y$

γ) κάθετη στην ευθεία $y-x=0$

$$\text{ΑΠ: α) } (-1, a-1), \beta) (0, a), \gamma) \left(-\frac{3}{2}, a-\frac{3}{4}\right)$$

- 249.** ✓ Να προσδιορίσετε, αν υπάρχει, σημείο $M(x_0, y_0)$ της C_f με $f(x)=x^2-1$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f :

α) είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$

β) είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$

γ) σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$

δ) διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$.

ΑΠ: α) (0, -1), β) (1, 0), γ) $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$, δ) (0, -1) και (2, 3)

- 250.** ✓ Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία $(x_0, 1)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2+3}$ και ναδειχτεί ότι είναι κάθετες.

ΑΠ: $y=x$, $y=-x$

- 251.** Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$, με $x>0$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(0, 1)$.

ΑΠ: $y-2=\frac{1}{4} \cdot (x-2)$

- 252.** ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-5x+2$. Να βρεθούν τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτόμενες της διέρχονται από το σημείο $(0, -2)$.

ΑΠ: (2, -4), (-2, 16)

- 253.** Δείξτε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της $f(x)=\frac{x-4}{x-2}$ στα σημεία τομής της με τους άξονες είναι παράλληλες.

- 254.** Αν $A(1, 2)$ και $B(3, 10)$ δύο σημεία της C_f με $f(x)=x^2+1$, να βρεθεί σημείο $M(x_0, y_0)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη προς τη χορδή AB .

ΑΠ: (2, 5)

- 255.** Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $4 \cdot (x-1) \leq f(x) \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Εξετάστε αν f παραγωγίσιμη στο $x_0=2$

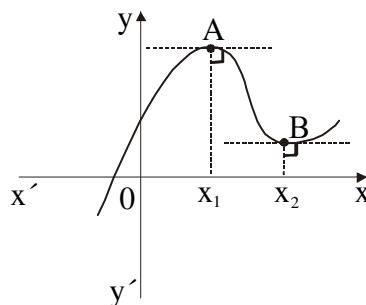
β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(2, f(2))$.

ΑΠ: α) $f'(2)=4$, β) $y=4 \cdot (x-1)$

- 256.** Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει η σχέση $f(2+x)-f(2-x)=-2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $(2, f(2))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y=x$.

- 257.** ✓ ➔ Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x)=x^3+kx^2+x+\lambda$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν στα σημεία A και B του σχήματος οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες προς τον $x'x$, να δείξετε ότι $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$.



- 258.** Να βρεθεί σημείο $M(x_0, y_0)$ της C_f με $f(x)=2x^2-8x+2$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $y=8x+4$. Στη συνέχεια να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τους άξονες και την εφαπτομένη της C_f στο M .

$$\text{ΑΠ: } M(4, 2), E = \frac{225}{4} \text{ τ.μ.}$$

- 259.** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στο διάγραμμα της συνάρτησης $f(x)=2x^2+3x-1$ και είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon': y=x-2$

$$\text{ΑΠ: } y=-x-3$$

- 260.** Να προσδιοριστούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ στα σημεία $M(x_0, y_0)$, όπου ισχύει $f'(x_0)=f(x_0)$.

$$\text{ΑΠ: } y=0 \text{ ή } y - \frac{2}{\sqrt{2}+1} = \frac{2}{\sqrt{2}+1} \cdot (x - \sqrt{2}) \text{ ή } y - \frac{2}{1-\sqrt{2}} = \frac{2}{1-\sqrt{2}} \cdot (x + \sqrt{2})$$

- 261.** Να βρείτε το σημείο στο οποίο τέμνει τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη του διαγράμματος της f με $f(x)=\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 1$ στο $(1, \frac{23}{6})$.

Θέμα Γενικών εξετάσεων Δ' Δέσμης

$$\text{ΑΠ: } (-\frac{5}{18}, 0)$$

- 262.** Δείξτε ότι η διχοτόμος της δεύτερης και τέταρτης γωνίας των αξόνων ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων εφάπτεται στο διάγραμμα της συνάρτησης $f(x)=x^3-6x^2+8x$. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής και να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλο κοινό σημείο εκτός από αυτό.

ΑΠ: Σημείο επαφής (3, -3), άλλο κοινό σημείο (0, 0)

- 263.** Αν A το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^2-x$ με τον άξονα $x'x$ και η εφαπτομένη της C_f στο A τέμνει τον άξονα $y'y$ στο B , να βρεθεί η γωνία $\widehat{OBA}$, όπου O η αρχή των αξόνων.

$$\text{ΑΠ: } 45^\circ$$

- 264.** ✓ Να υπολογιστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $y=\lambda x+4$ να εφάπτεται του διαγράμματος της συνάρτησης $f(x)=x^3-x^2+1$.

$$\text{ΑΠ: } \lambda=5$$

- 265.** Να βρεθούν οι $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $y=3x$ να εφάπτεται στο διάγραμμα της f με $f(x)=x^2+\kappa x+\lambda$ στο σημείο $M(1, 3)$.

$$\text{ΑΠ: } \kappa=\lambda=1$$

- 266.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{7x^2+\lambda x+\mu}{x^2+2x-3}$, Να βρεθούν οι $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ και η εφαπτομένη της στο σημείο με τετμημένη -2 να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

$$\text{ΑΠ: } \mu=0, \lambda=20$$

- 267.** Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=ax+\beta$, $a \neq 0$ και η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x-4$. Να βρεθούν οι $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η (ε) να εφάπτεται στην C_f στο σημείο $(1, -6)$.

$$\text{ΑΠ: } a=-1, \beta=-5$$

- 268.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $a \neq 0$. Να βρείτε τη συνθήκη για τα $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η C_f να μην έχει σε κανένα της σημείο οριζόντια εφαπτομένη.

$$\text{ΑΠ: } \beta^2 < 3a\gamma$$

- 269.** Έστω C_f η γραφική παράσταση συνάρτησης f με $f(x)=ax^3+4x+\beta$, $a \neq 0$ και ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-1,5)$. Αν η ε σχηματίζει γωνία 45° με την ευθεία $y+7=0$, να βρεθούν τα $a, \beta \in \mathbb{R}$.

ΑΠ: $a=-1, \beta=8$

- 270.** ✓ Δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τους άξονες και οποιαδήποτε εφαπτομένη της καμπύλης με εξίσωση $2xy=a^2$, $a \in \mathbb{R}$ σταθερό, είναι σταθερό.

ΑΠ: $E=a^2$

- 271.** α) Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να γράψετε τις συνθήκες ώστε η C_f και η C_g στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x=x_0$ να δέχονται κοινή εφαπτομένη.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$ και $g(x)=x^2-3x+1$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη σε ένα σημείο, του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.

ΑΠ: β) (3, 1)

- 272.** α) Να βρεθούν οι a, β με $a \in \mathbb{R}^*$ και $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=ax^2+\beta x+1$ και $g(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ να δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0=-1$.

β) Για την τιμή του a που προσδιορίσατε δείξτε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=ax^3+2x^2+3ax-5$ δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

ΑΠ: α) $a=2, \beta=4$

- 273.** ✓ Να βρεθούν οι $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των $f(x)=x^2+ax+1$ και $g(x)=2x^2+x+\beta$ να δέχονται κοινή εφαπτομένη στο $M(1, f(1))$.

ΑΠ: $a=3, \beta=2$

- 274.** Να υπολογιστούν οι τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των $f(x)=ax^2+\beta x+2$ και $g(x)=x-\frac{1}{x}$ να δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο M με τετμημένη 1.

ΑΠ: $a=4, \beta=-6$

- 275.** ✓ Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3+ax+\beta$ και $g(x)=x^2-\gamma$. Να προσδιορίσετε τα $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε οι γραφικές παραστάσεις να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $A(1, 2)$.

ΑΠ: $a=-1, \beta=2, \gamma=-1$

- 276.** ✓ Αν οι γραφικές παραστάσεις των $f(x)=\frac{4x+5}{2x-1}$ και $g(x)=2ax^3+\beta x^2+ax+3$, $a, \beta \in \mathbb{R}$, δέχονται κοινή εφαπτομένη στο $M(x_0, y_0)$ με $x_0=1$, δείξτε ότι η συνάρτηση $h(x)=x^3+16$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a, β) .

ΑΠ: $a=-26, \beta=84$

- 277.** ✓ Να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=3x^2+ax+2$ και $g(x)=\frac{x-1}{x}$ να δέχονται κοινή εφαπτομένη σε ένα κοινό τους σημείο.

ΑΠ: $a=-5$

- 278.** ✓ Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x-2)$ και $g(x)=x^2+3x-2$. Δείξτε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(3, 0)$ εφάπτεται και στη C_g .

- 279.** Αν $f(x)=x^2-x+2$ και $g(x)=e^x$, να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στη θέση 1 εφάπτεται και της C_g .

280. ✓ ➔ Αν $f(x)=x^2+2$ και $g(x)=x^2+2x+2$ να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών τους παραστάσεων.

$$\text{ΑΠ: } y = x + \frac{7}{4}$$

281. Δείξτε ότι η ευθεία $\varepsilon: y=12x-11$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3+5$, δύο κοινά σημεία και εφάπτεται σ' αυτήν σε ένα από αυτά.

ΑΠ: Κοινά σημεία (-4, -59) και (2, 13). Το δεύτερο σημείο επαφής

282. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+2$. Να βρεθούν οι ευθείες μορφής $y=(\lambda-1)x+1$ που εφάπτονται στη C_f , καθώς και τα σημεία επαφής τους.

ΥΠΟΔ: 2 περιπτώσεις, αν $\lambda=1$ και $\lambda \neq 1$

ΑΠ: $y=-x+1$ στο (1, 0) και $y=-5x+1$ στο (-1, 6)

283. ✓ ➔ Αν $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f'(x)+8x^3=2x \cdot f(x)$, για κάθε $x>0$, να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y+2x=1$ εφάπτεται στη C_f .

284. ✓ Δείξτε ότι η εφαπτομένη του διαγράμματος της συνάρτησης f με $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, $x>0$, στο $M(1, y_0)$, είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-x$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

285. Να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $\varepsilon: y=9x-14$ να εφάπτεται στη C_f με $f(x)=x^3-3ax+2$. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν η ε έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f .

ΑΠ: $a=1$, άλλο κοινό σημείο το (-4, -50)

286. Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης, σε οποιοδήποτε σημείο της, δεν έχει με αυτήν άλλο κοινό σημείο.

287. ✓ Δίνεται η υπερβολή $y=\frac{a}{x}$, $a \neq 0$.

α) Αν ε η εφαπτομένη της σε τυχαίο σημείο $M(x_0, y_0)$, δείξτε ότι το τμήμα της ε που περιέχεται μεταξύ των αξόνων, διχοτομείται πάντα από το M .

β) Δείξτε ότι από κάθε σημείο $(x_1, 0)$ του άξονα $x'x$ με $x_1 \neq 0$, διέρχεται μόνο μία εφαπτομένη ε' της C_f .

γ) Δείξτε ότι η ε' σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με σταθερό εμβαδόν.

ΑΠ: γ) $E=2|a|$ σταθερό

288. ✓ Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\ln x)=x \cdot \ln x - x$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη 0.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη 1 και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ΑΠ: β) $y=-1$, γ) $E=\frac{e}{2}$

289. ✓ ➔ Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο -2. Αν η ευθεία $2x-y-1=0$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο με τεταγμένη -5, να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^2(x) - 25}{x^2 + 2x}$$

ΑΠ: 10

290. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$. Αν C η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ και ε η εφαπτομένη της C σε ένα κοινό σημείο της με τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι η ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$.

291. Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}^*$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^3 + 2x^2 + 3ax - 5$ να μη δέχεται σε κανένα σημείο της οριζόντια εφαπτομένη.

$$\text{ΑΠ: } a < -\frac{2}{3} \text{ ή } a > \frac{2}{3}$$

292. ✓ ➡ Αν f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής στο 2 με $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2x + 3}{x - 2} = 0$, να δείξετε ότι η $\varepsilon: -2x + y + 3 = 0$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο με τετμημένη 2

293. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(ax)}{x}$ με $a > 0$ και $x > 0$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι παραπάνω εφαπτόμενες στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, καθώς μεταβάλλεται το a , διέρχονται από το ίδιο σημείο.

$$\text{ΑΠ: } \alpha) y - \frac{\ln(ax_0)}{x_0} = \frac{1 - \ln(ax_0)}{x_0^2} \cdot (x - x_0), \beta) \text{ Το σημείο είναι το } (2x_0, \frac{1}{x_0})$$

294. ✓ ➡ Αν $f(x) = -2x^2 + \ln x$, να δείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον θέση $x_0 \in (\frac{1}{e}, 1)$ στην οποία η C_f δέχεται εφαπτομένη που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

295. ✓ Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 0$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta \mu x}{x} = 2001$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$.

$$\text{ΑΠ: } \beta) y = 2000x$$

296. ✓ ➡ Έστω $f(x) = x^3 + 4x - 4$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στη θέση -9

$$\text{ΑΠ: } \alpha) \mathbb{R}, \beta) y = \frac{1}{7}x + \frac{2}{7}$$

297. ✓ Αν f είναι μια μη σταθερή πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύουν: $f'(4) = 0$ και $(f'(x))^2 = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

➡ α) να βρεθεί ο τύπος της f .

β) να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x + 1$.

$$\text{ΑΠ: } \alpha) f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4, \beta) y = -x + 3$$

298. ➡ α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-6x+8$, να φέρετε τις εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της C_f στα σημεία τομής της C_f με τον $x'x$ και να δικαιολογήσετε από το σχήμα γιατί οι εφαπτόμενες τέμνονται πάνω στην ευθεία $x=3$.

➡ β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής $y=ax^2+bx+\gamma$, $a \neq 0$ με $\Delta > 0$, στα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$ τέμνονται στον άξονα συμμετρίας της παραβολής ($x = -\frac{\beta}{2a}$).

299. ✓ ➡ Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της C_f σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > 0$.

β) Αν η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$, να βρεθεί το x_0 και στη συνέχεια η εξίσωσή της.

γ) Αν η εφαπτομένη του ερωτήματος β) τέμνει την C_f σε δύο σημεία $M(a, f(a))$ και $N(\beta, f(\beta))$, δείξτε ότι $a^{\beta^2} = \beta^{a^2}$.

$$\text{ΑΠ: α) } y - \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} (x - x_0), \text{ β) } x_0 = \sqrt{e}, \quad y = \frac{1}{2e} x$$

300. ✓ Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις πληρούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στα αντίστοιχα διαστήματα και για όσες πληρούν τις προϋποθέσεις, να βρεθούν τα $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ στο $[-3, 1]$

2) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$ στο $[-1, 2]$

3) $f(x) = |x|$ στο $[-2, 2]$

4) $f(x) = e^{x-1}$ στο $[1, 2]$

5) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \in [-1, 0] \\ x^3 - x^2, & x \in (0, 1] \end{cases}$ στο $[-1, 1]$

6) $f(x) = \begin{cases} \eta \mu^2 x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ x^2, & x \in [0, 1] \end{cases}$ στο $[-\frac{\pi}{2}, 1]$

7) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ στο $[0, 2]$

ΑΠ: 1) Ναι, $\xi = -1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$, 2) Ναι, $\xi = \frac{-1 + \sqrt{13}}{3}$, 3) Όχι, 4) Όχι, 5) Όχι,

6) Ναι, $\xi = 0$, 7) Όχι

301. ✓ Να προσδιορίσετε τις τιμές των $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε για τις παρακάτω συναρτήσεις να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle, στο διάστημα που δίνεται κάθε φορά. Στη συνέχεια να βρεθεί για κάθε μία, μία τουλάχιστον θέση στο αντίστοιχο ανοικτό διάστημα, όπου η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 + (a+1)x + \beta, & x \in [-1, 0] \\ (\gamma-1)x^2 + 2x - \beta + 2, & x \in [0, 1] \end{cases}$ στο $[-1, 1]$

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1, & \text{αν } -1 \leq x \leq 0 \\ x^3 + \beta x^2 + 2x + \gamma, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \end{cases}$ στο $[-1, 1]$

$$3) f(x) = \begin{cases} ax^2 - \beta x + 2, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 + x - \gamma, & 0 < x \leq 1 \end{cases} \text{ στο } [-1, 1]$$

$$\text{ΑΠ: 1) } \alpha=\beta=1, \gamma=-2, \xi=\frac{1}{3}, 2) \alpha=2, \beta=-4, \gamma=1, \xi=\frac{4-\sqrt{10}}{3}, 3) \alpha=3,$$

$$\beta=-1, \gamma=-2, \xi=-\frac{1}{6}$$

302. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θ. Rolle για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x + 7, & x < 0 \\ x^2 - 4x + 7, & x \geq 0 \end{cases} \text{ στο διάστημα } [-4, 4].$$

Υπάρχουν σημεία (x_0, y_0) με $x_0 \in (-4, 4)$ στα οποία οι εφαπτόμενες της C_f είναι παράλληλες στον $x'x$; Αν ναι, να βρεθούν τα σημεία.

ΑΠ: Εφαρμόζεται, ναι, $(-2, 11)$ και $(2, 3)$

303. Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-6, 2] \\ -x^2 + 6x + 6, & x \in (2, 6] \end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι συνθήκες του Θ. Rolle στο $[-6, 6]$.

β) Αν δεν εφαρμόζεται το θεώρημα, υπάρχει $x_0 \in (-6, 6)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$;

ΑΠ: α) Όχι, β) Ναι το 3

304. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha+\beta+\gamma=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

305. ✓ Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 3x + 6, & x < 0 \\ 2x^2 + \lambda x + 3\mu, & x \geq 0 \end{cases}$. Να προσδιοριστούν τα κ ,

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε να έχει εφαρμογή το Θ. Rolle στο διάστημα $[-2, 2]$.

ΑΠ: $\kappa=5, \lambda=3, \mu=2$

306. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση $f(x)=1-\sin x$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ και να βρείτε όλα τα $x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, ώστε οι εφαπτόμενες της C_f στα $M(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλες προς την ευθεία $y=2$.

ΑΠ: 0 και π

307. ✓ Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

α) Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της f περιέχεται τουλάχιστον μια ρίζα της f' .

β) Αν η f' έχει δύο τουλάχιστον ρίζες, να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' περιέχεται το πολύ μια ρίζα της f .

308. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο $A(x_0, y_0)$, με $x_0 \in (1, 3)$, της γραφικής παράστασης της f με $f(x)=(x-3) \cdot \ln x$, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=\ln 2$.

- 309.** ✓ Δείξτε ότι η εξίσωση:
- 1) $2x^3 - 3x^2 + \eta\mu\theta = 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0, 1)$.
 - 2) $x^{2012} = 2012x - \ln(a^2 + 1)$, $a \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.
 - 3) $x^3 - 3x + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες στο $(0, 1)$.
 - 4) $x^2 = x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 \in (-\pi, 0)$ και $\rho_2 \in (0, \pi)$.
 - 5) $3\kappa x^5 + 5 \cdot (\kappa + \lambda)x^3 + 15\lambda x + 15 = 0$, με $\kappa \cdot \lambda > 0$, έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.
- 310.** ➡ Δείξτε ότι η εξίσωση $a^x = x - \beta$ με $0 < a < 1$ και $\beta \in \mathbb{R}$, έχει μία μόνο πραγματική ρίζα.
- 311.** ✓ Δείξτε ότι η εξίσωση $x^5 + ax^3 + \beta x + \gamma = 0$, με $a, \beta > 0$ και $\gamma \in \mathbb{R}$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.
- 312.** α) Να αποδείξετε ότι κάθε εξίσωση της μορφής $x^4 + ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a > 0$, έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.
 β) **Γενίκευση:** Αν f ορισμένη σε διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο διαφορετικές ρίζες στο Δ .
- 313.** Αν μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει μ απλές ρίζες, τότε η παράγωγός της έχει τουλάχιστον $\mu - 1$ ρίζες.
Αντίστροφα: Αν η παράγωγος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ έχει κ απλές ρίζες, τότε η συνάρτηση έχει το πολύ $\kappa + 1$ ρίζες.
- 314.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες.
- 315.** Να βρείτε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f'(x) = 0$, αν $f(x) = x \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x+3)$ και σε ποια διαστήματα ανήκουν.
- ΑΠ: τρεις, στα $(-3, -1)$, $(-1, 0)$ και $(0, 2)$**
- 316.** ✓ Αν $a < \beta < \gamma$ και f συνάρτηση συνεχής στο $[a, \gamma]$ με $f(a) = f(\beta) = f(\gamma)$ και υπάρχουν στο (a, γ) οι f' και f'' , δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \gamma)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.
- 317.** ➡ Αν το πολυώνυμο $f(x) = x^4 + \lambda x^3 - \lambda x^2 + 3x - 2$ έχει τέσσερις άνισες ρίζες στο $\mathbb{R}$, να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ΑΠ: $\lambda < -\frac{8}{3}$ ή $\lambda > 0$**
- 318.** ✓ α) Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 3^x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη στο $(0, 1)$.
 ✓ β) Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $g(x) = x + 1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(0, 1)$.
- 319.** ➡ Αν $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{ax}$ τότε η $f'(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα ρ στο $(-1, 1)$ και μάλιστα $\rho \in (0, 1)$ αν $a > 0$ και $\rho \in (-1, 0)$ αν $a < 0$.

ΥΠΟΔ: Δύο τρόποι: Θ. Bolzano στην f' ή Θ. Rolle στην f

- 320.** Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) . Έστω επίσης συνάρτηση g με $g(x) = e^{-kx} \cdot f(x)$, με $k \in \mathbb{R}$ και $g(a) = g(\beta)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = k \cdot f(\xi)$.
- 321.** Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς σε διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (a, β) , με $f(\beta) \cdot g(a) \neq 0$ και $\frac{f(a)}{f(\beta)} = \frac{g(\beta)}{g(a)}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ρ στο (a, β) τέτοιο ώστε $f'(\rho) \cdot g(\rho) = -f(\rho) \cdot g'(\rho)$.
- 322.** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$ τέτοια ώστε $f(a) = g(\beta)$ και $g(a) = f(\beta)$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} + \frac{g'(x_0)}{g(x_0)} = 0$.
- 323.** ✓ ➡ Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς σε διάστημα $[k, \lambda]$ και παραγωγίσιμες στο (k, λ) , οι οποίες έχουν ως μια ρίζα το k . Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\mu \in (k, \lambda)$ τέτοιο ώστε $f'(\mu) \cdot g(\lambda) = f(\lambda) \cdot g'(\mu)$.
- 324.** ➡ Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $\xi \cdot f'(\xi) = f(1) - f(\xi)$.
- 325.** ✓ Έστω συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) , με $f(a) = f(\beta) = 0$. Δείξτε ότι:
- α) Υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$, όπου $g(x) = \frac{f(x)}{x - c}$, $c \notin [a, \beta]$.
- ➡ β) Υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $(c, 0)$.
- Θέμα Γενικών Εξετάσεων**
- 326.** ✓ ➡ Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με ρίζες α και β , όπου $\alpha < \beta$. Να δείξετε ότι μεταξύ των α και β υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 τέτοιο ώστε:
- α) $(x_0^2 + 2021) \cdot f'(x_0) + 2x_0 \cdot f(x_0) = 0$
- β) $x_0 \cdot \ln x_0 \cdot f'(x_0) + f(x_0) = 0$, με $\alpha > 0$
- γ) $f'(x_0) - f(x_0) = 0$
- 327.** ✓ Έστω συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) . Με τη βοήθεια της συνάρτησης g με $g(x) = e^{\frac{f(x)}{x-a}} \cdot (x-a) \cdot (x-\beta)$, δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi) = \frac{a + \beta - 2\xi}{(\xi - a) \cdot (\xi - \beta)}$.
- 328.** ➡ Έστω f τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση σε διάστημα $[a, \beta]$ με $f(a) = f(\beta)$ και τη γραφική της παράσταση να δέχεται στα $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ εφαπτομένες παράλληλες προς τον άξονα $x'x$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$.
- 329.** ➡ Αν $3\alpha + 5\beta + 15\gamma = 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

- 330.** ✓ Αν $a_0, a_1, \dots, a_v \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{N}^*$ με $\frac{a_v}{v+1} + \frac{a_{v-1}}{v} + \dots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0$, δείξτε ότι η εξίσωση $a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

ΥΠΟΔ: Θ Rolle στην παράγουσα

- 331.** ✓ ➡ Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με ιδιότητα $f(a) - f(\beta) = \eta\mu\alpha - \eta\mu\beta$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi) = \sin \xi$.

- 332.** Αν $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + \mu, x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο $(1,2)$.

- 333.** ✓ ➡ Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις f, g στο $[a, \beta]$ που είναι παραγωγίσιμες στο (a, β) με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και $\ln[f(a)] - \ln[f(\beta)] = g(\beta) - g(a)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi) = 0$.

- 334.** ✓ ➡ Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[0,2]$ με $f(0) - f(2) = a^2 - 1$ με $a > 0$ και $a \neq 1$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x) + a^x \cdot \ln a = 0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$.

- 335.** Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο A με $f''(x) > 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ με $g(x) = e^{f(x)} - 1$, έχει το πολύ δύο ρίζες στο A .

- 336.** Δείξτε ότι η εξίσωση $x^{2v} + x^v - 1 = 0$ με $v \in \mathbb{N}^*$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

- 337.** ➡ α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda \cdot (x-a)^\mu \cdot (x-\beta)^v, \mu, v$ θετικοί ακέραιοι, $\lambda \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $\xi = \frac{va + \mu\beta}{\mu + v}$.

➡ β) Ένα πολυώνυμο $P(x)$ είναι άρτιου βαθμού και έχει μοναδικές ρίζες τους αριθμούς 4 και 6 ενώ κάθε ρίζα έχει τον ίδιο βαθμό πολλαπλότητας. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη στην C_P στο σημείο με τετμημένη 5 είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ΥΠΟΔ: β) $P(x) = \lambda \cdot (x-4)^k \cdot (x-6)^k, k$ θετικός ακέραιος

- 338.** ✓ ➡ Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. Αν η f έχει δύο ρίζες α, β με $\alpha < \beta$ και η g δύο ρίζες γ, δ με $\gamma < \delta$ και $f'(x) \cdot g(x) \neq f(x) \cdot g'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $\alpha < \gamma < \beta < \delta$ ή $\gamma < \alpha < \delta < \beta$

- 339.** ➡ Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και $x_1 < x_2$ δύο θετικές ρίζες της. Αν ισχύει ότι $x \cdot \ln x \cdot f'(x) \neq f(x)$ για κάθε $x > 0$, να δείξετε ότι $x_1 < 1 < x_2$.

- 340.** ✓ Εξετάστε για ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις εφαρμόζεται το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού στο αντίστοιχο διάστημα και για όσες εφαρμόζεται να βρείτε τους αριθμούς ξ του συμπεράσματος:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $[1, 4]$

2) $f(x) = \ln x$ στο $[1, e]$

3) $f(x) = x \cdot (1 - \ln x)$ στο $[1, e]$ **4)** $g(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \in [-2, -1) \\ \ln |x|, & x \in [-1, -\frac{1}{2}] \end{cases}$ στο $[-2, -\frac{1}{2}]$

5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ στο $[1, 3]$ **6)** $h(x) = |x^2 + 3x - 4|$ στο $[-2, 2]$

ΑΠ: 1) Ναι, $\xi=2$, 2) Ναι $\xi=e-1$, 3) Ναι, $\xi=e^{\frac{1}{e}-1}$, 4) Όχι, 5) Ναι, $\xi=\sqrt{2}$, 6) Όχι

- 341.** Αν f συνάρτηση με $f(x)=x \cdot \ln x$, να δείξετε ότι υπάρχει σημείο M της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς τη χορδή της C_f που ορίζουν τα σημεία με τετμημένες $x_1=e$ και $x_2=1$. Στη συνέχεια να βρεθεί το M .

ΑΠ: $M(e^{\frac{1}{e-1}}, \frac{e^{\frac{1}{e-1}}}{e-1})$

- 342.** ✓ Έστω $f: [1,3] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[1,3]$, παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ με $f(1)=2$ και $-7 \leq f'(x) \leq 5$ για κάθε $x \in (1,3)$. Δείξτε ότι $|f(3)| \leq 12$.

- 343.** Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για τη συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \alpha x - 1, & x \in [-1, 1) \\ -x^3 + x + \beta, & x \in [1, 2] \end{cases}$ στο $[-1, 2]$ και να βρεθούν οι ξ του θεωρήματος.

ΑΠ: $\alpha=-6, \beta=-5, \xi=0$ ή $\xi=\sqrt{\frac{7}{3}}$

- 344.** ✓ Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού στο $[0, 2]$ για τη f με $f(x) = \begin{cases} \alpha - \frac{x^2}{2}, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ \frac{\beta}{x}, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ και να βρεθούν όλα τα $x_0 \in (0, 2)$, τέτοια ώστε $2f'(x_0) = f(2) - f(0)$.

ΑΠ: $\alpha=\frac{3}{2}, \beta=1, x_0=\frac{1}{2}$ ή $x_0=\sqrt{2}$

- 345.** ✓ Δείξτε ότι:

α) $e^{x_1} < \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} < e^{x_2}$, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

β) $v \cdot x_1^{v-1} < \frac{x_2^v - x_1^v}{x_2 - x_1} < v \cdot x_2^{v-1}$, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$.

γ) $\frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \beta} \leq \varepsilon \varphi - \varepsilon \varphi \beta \leq \frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \alpha}$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $0 < \beta \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

δ) 1) $1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} - 1$ αν $0 < \alpha < \beta$

2) $\frac{1}{y} < \frac{\ln \frac{x}{y}}{x - y} < \frac{1}{x}$ για κάθε $x, y > 0$ με $x < y$

3) $\frac{1}{5} < \ln \sqrt[3]{2,5} < \frac{1}{2}$

ΥΠΟΔ: γ) Δύο περιπτώσεις, αν $\alpha=\beta$ και αν $\alpha \neq \beta$

- 346.** Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι $f'(a) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(x)$ για $x > a$.

347. Έστω $a, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ με $a < \beta$. Δείξτε ότι: $v \cdot a^{v-1}(\beta - a) < \beta^v - a^v < v \cdot \beta^{v-1}(\beta - a)$, $v \in \mathbb{N}^*$.

348. ✓ Δείξτε ότι:

α) $|\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta| \leq |\alpha - \beta|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

➡ β) $1+x \leq e^x \leq 1+x \cdot e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

➡ γ) $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^*$

349. ✓ Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $x > 0$

350. ✓ Αν $0 < a < \beta$, δείξτε ότι $a \cdot e < \left(\frac{\beta^\beta}{a^a}\right)^{\frac{1}{\beta-a}} < \beta \cdot e$.

351. ✓ Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu(a+h) < \eta\mu a + h \sin a$, για κάθε h , όπου $0 < a < a+h < \frac{\pi}{2}$.

352. Να αποδειχτούν οι παρακάτω σχέσεις:

➡ α) $2 - \frac{e}{2} < \ln 2 < \frac{2}{e}$ β) $e^x < \frac{e^x - 1}{x} < 1$, με $x < 0$

✓ ➡ γ) $\frac{x - \eta\mu x}{x} < \ln\left(\frac{x}{\eta\mu x}\right)$, $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$

δ) $\frac{\eta\mu x^2 - \eta\mu x}{x^2 - x} < \sin x^2$, $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ ➡ ε) $e^{\frac{x}{x+1}} < x+1$, $x > 0$

353. ➡ Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, τέτοια ώστε $|f'(x)| \leq 1$, για κάθε $x \in [0, 1]$ και $f(0)=2$. Δείξτε ότι ισχύει $1 < f(x) < 3$, για κάθε $x \in (0, 1)$.

354. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) με $|f'(x)| < \kappa$, για κάθε $x \in (a, \beta)$ με $\kappa > 0$. Δείξτε ότι για οποιαδήποτε $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$ ισχύει ότι $|f(\xi_2) - f(\xi_1)| \leq \kappa \cdot |\xi_2 - \xi_1|$.

355. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[0, 3]$ με f' γνησίως φθίνουσα. Να δείξετε ότι $f(0) + f(3) < f(1) + f(2)$.

356. ✓ ➡ Αν f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0, 5]$ με f' γνησίως αύξουσα και $f(3)=0$, να δείξετε ότι $2f(0) + 3f(5) > 0$.

357. ✓ ➡ Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(x) > f(a)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $f(a+1) > 2f(a)$.

358. ✓ ➡ Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με f' γνησίως φθίνουσα. Να δείξετε ότι $x^2 \cdot f(1) + f(x^3) < f(x^2) + x^2 \cdot f(x)$, για κάθε $x > 0$ με $x \neq 1$.

- 359.** Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και ευθεία ε με συντελεστή διεύθυνσης λ , η οποία τέμνει την C_f σε τρία διαφορετικά σημεία (x_1, y_1) , (x_2, y_2) και (x_3, y_3) με $x_1 < x_2 < x_3$.
 ➡ α) Δείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο εφαπτόμενες της C_f παράλληλες της ε .
 β) Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$.
- 360.** Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-e, e]$ με $2f(0) = f(-e) + f(e)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-e, e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.
- 361.** ➡ α) Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[a, \beta]$ με f' γνησίως αύξουσα στο (a, β) , να δείξετε ότι $f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) < \frac{f(a)+f(\beta)}{2}$.
 β) Να δείξετε ότι $2e^6 < e^5 + e^7$.
- 362.** ➡ Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' γνησίως αύξουσα και $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι $f(x) < x \cdot f'(x)$, για κάθε $x > 0$.
- 363.** ✓ ➡ Έστω συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) με $f(a) = f(\beta)$. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.
- 364.** ✓ ➡ Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[-5, 5]$ και παραγωγίσιμη στο $(-5, 5)$ με $f(-5) = 1$ και $f(5) = 2022$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{10} \in (-5, 5)$ τέτοια ώστε να ισχύει $f'(\rho_1) + f'(\rho_2) + \dots + f'(\rho_{10}) = 2021$.
- 365.** ✓ ➡ Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με f' συνεχή και $f(0) < f(2) < f(1)$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
- 366.** ➡ Έστω f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[2021, 2023]$ με $f(2023) > f(2021) > f(2022)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2021, 2023)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
- 367.** ✓ Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$ και οι αριθμοί $f(a)$, $f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)$, $f(\beta)$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
 α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) - f(a)}{\frac{a+\beta}{2} - a}$ και $\frac{f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) - f(\beta)}{\frac{a+\beta}{2} - \beta}$ είναι ίσοι.
 β) Να αποδείξετε ότι η δεύτερη παράγωγος της f μηδενίζεται σ' ένα τουλάχιστον σημείο.
- 368.** ✓ Έστω f συνάρτηση συνεχής σε διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) . Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\frac{f(\beta)}{f(a)} = e^{\frac{(\beta-a) \cdot f'(\xi)}{f(\xi)}}$.

- 369.** ✓ ➡ Αν f, g συναρτήσεις συνεχείς σε διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμες στα εσωτερικά του σημεία, $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$ και $g(a) \neq g(\beta)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\beta) - f(a)}{g(\beta) - g(a)}$
- 370.** Έστω f συνάρτηση συνεχής σε διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) , με $\mu < f'(x) < M$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, όπου $\mu, M \in \mathbb{R}$ με $\mu < M$. Δείξτε ότι $f(a) + \mu \cdot (x-a) < f(x) < f(a) + M \cdot (x-a)$, για κάθε $x \in (a, \beta)$.
- 371.** ➡ Έστω f συνάρτηση συνεχής σε διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) , με $0 < \mu < f'(x) < M$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, όπου $\mu, M \in \mathbb{R}$ με $\mu < M$. Δείξτε ότι $f(a) + \mu \cdot (x-a) < f(x) < f(\beta) + M \cdot (x-a)$, για κάθε $x \in (a, \beta)$.
- 372.** ➡ Έστω f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, με $f'(x) > 4$ για κάθε $x \in (1, 2)$. Δείξτε ότι $f(x) < f(2) + 4 \cdot (x-1)$, για κάθε $x \in (1, 2)$.
- 373.** Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[a, \beta]$ με $f(a) = 5\beta$ και $f(\beta) = 5a$. Να δείξετε ότι:
 α) η εξίσωση $f(x) = 5x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (a, β)
 β) υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 25$.
- 374.** ✓ Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[1, e]$ με $f(1) = 2$ και $f(e) = e + 1$. Να δείξετε ότι:
 α) η ευθεία $y = -x + 2 + e$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο $(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (1, e)$
 β) υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, e)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 1$.
- 375.** ➡ Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{a - \xi} + \frac{1}{\beta - \xi}$
- 376.** ✓ ➡ Έστω f παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με $f(a) = f(\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (a, \beta)$ ώστε $2 \cdot f'(\kappa) + 5 \cdot f'(\lambda) = 0$.
- 377.** ✓ ➡ Έστω f παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\kappa, \lambda, \mu \in (a, \beta)$ ώστε $2 \cdot f'(\kappa) + 3f'(\lambda) = 5 \cdot f'(\mu)$.
- 378.** ✓ ➡ Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[a, \beta]$ με $f(a) = 2$ και $f(\beta) = -2$. Να δείξετε ότι υπάρχουν γ, δ στο (a, β) με $\gamma \neq \delta$, τέτοια ώστε $\frac{1}{f'(\gamma)} + \frac{1}{f'(\delta)} = \frac{a - \beta}{2}$
- 379.** ✓ ➡ Έστω f παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με $f'(x) \neq 0$.
 α) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ έτσι ώστε $5f(\xi) = 3f(a) + 2f(\beta)$.
 β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (a, \beta)$ έτσι ώστε $\frac{3}{f'(\xi_2)} + \frac{2}{f'(\xi_1)} = \frac{5}{f'(\xi_3)}$

380. ➡ Έστω f συνάρτηση συνεχής και «1-1» σε διάστημα Δ με $f'(x) \neq -1$ για κάθε x εσωτερικό του Δ . Δείξτε ότι ορίζεται η f^{-1} και ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} δεν μπορεί να έχουν κοινά σημεία εκτός της ευθείας $y=x$.

381. ✓ ➡ Έστω f συνάρτηση συνεχής σε διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) , με $f'(x) \leq 4$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. Αν $f(\beta) = \beta^2 + 4$ και $f(a) = 6a - a^2 - 1$, να αποδείξετε ότι: **α)** $a=1$ και $\beta=2$ **β)** $f(x)=4x$ για κάθε $x \in [1, 2]$

382. ✓ ➡ Έστω g συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι

$$g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \sqrt{g(x_1) \cdot g(x_2)} \quad \text{για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ ΘΕΜΑΤΟΣ ΓΕΝΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Α' ΔΕΣΜΗΣ 1997

383. ✓ ➡ Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $[a, a+1]$ και γνησίως αύξουσα, με σύνολο τιμών το $[k, k+1]$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(a, a+1)$, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, a+1)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2$.

384. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 + (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να υπολογιστεί η τιμή της.

ΑΠ: $f(x)=2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

385. ✓ Με τη βοήθεια των παραγώγων να δείξετε ότι:
 $\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

386. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η f' μηδενίζεται στο $\mathbb{R} - \{x_0\}$ με $x_0 \in \mathbb{R}$. Μπορούμε να αποφανθούμε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$; Μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα αν η f' μηδενίζεται στο $\mathbb{R} - \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ με $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$;

Ναι (γιατί;)

387. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = f^2(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και συνάρτηση g με $g(x) = \frac{2}{3} f^3(x) - [f'(x)]^2 + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Δείξτε ότι η g είναι σταθερή.

β) Αν $f(1)=0$ και $f'(1)=-1$, να βρεθεί η g και να δείξετε ότι $3[f'(x)]^2 - 2f^3(x) = 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΠ: $g(x)=1$, $x \in \mathbb{R}$

388. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) + f''(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f'(0) = e$. Να δείξετε ότι $f^2(x) + (f'(x))^2 = 2e^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

389. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g που είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = -f(x)$, $f(0) = 0$ και $g(0) = 1$.

α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $t = f^2 + g^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και βρείτε την τιμή της.

➡ β) Αν F, G δύο συναρτήσεις που πληρούν τις ίδιες προϋποθέσεις με τις f, g αντίστοιχα, δείξτε ότι υποχρεωτικά είναι $F=f$ και $G=g$.

ΥΠΟΔ: β) Αν $(\alpha - \beta)^2 + (\gamma - \delta)^2 = 0$, τότε $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$

390. ✓ Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις παραγωγίσιμες, τέτοιες ώστε $f'(x) - f(x) = g(x)$ και $g'(x) - g(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f^2(x) + g^2(x) = c \cdot e^{2x}$.

391. Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι ισχύει $f'(x) = -f(x)$, αν και μόνο αν, υπάρχει πραγματική σταθερά c τέτοια ώστε $f(x) = c \cdot e^{-x}$.

392. ➡ Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f'(-x) \cdot f(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Δείξτε ότι $f(-x) \cdot f(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

393. ✓ Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(0) = g(0)$ και $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δείξτε ότι:

α) Υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) - g(x) = c \cdot x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν ρ_1, ρ_2 ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$ με $\rho_1 < 0 < \rho_2$ τότε η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

394. ✓ Να προσδιοριστεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ αν ισχύουν ότι $f(0) = 2$,

$f(x) \cdot f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΠ: $f(x) = 2e^x$

395. ✓ α) Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση δείξτε ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$f'(x) = \lambda \cdot f(x) \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^{\lambda x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $c \in \mathbb{R}$ σταθερά και $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Αν $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+^*$ για την οποία ισχύουν:

$x \cdot f'(x) = (x+1)f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^*$ και $f(1) = e$, να βρεθεί η f .

γ) Να βρεθεί συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $\Delta = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, η οποία

ικανοποιεί τις σχέσεις $g'(x) \cdot \sin x + g(x) \cdot \eta \mu x = g(x) \cdot \sin x$, για κάθε $x \in \Delta$ και $g(0) = 1992$.

Το γ) δόθηκε στις γενικές εξετάσεις του 1992-Α' Δέσμη

ΑΠ: β) $f(x) = x \cdot e^x$, γ) $g(x) = 1992 \cdot e^x \cdot \sin x$

396. Έστω f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $f(e) = 1$, $f'(e) = \frac{1}{e}$

και $f(x) + f''(x) \cdot x^2 \cdot \ln x = 0$, για κάθε $x > 1$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $g(x) = f'(x) \cdot \ln x - \frac{f(x)}{x}$ είναι σταθερή.

➡ β) $f(x) = \ln x$ για $x > 1$.

397. ✓ ➔ Να βρεθεί η συνάρτηση f σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) αν f θετική ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = f(x) \cdot \ln f(x)$ και $f(0) = e$

β) αν $f'(x) = \frac{x+2}{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 5$

γ) αν f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{\pi}{2}]$ με $f'(x) - \sin x \cdot f(x) = 0$ για κάθε

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}) \text{ και } f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

δ) αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \cdot (e^{f(x)} + e^{-f(x)}) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$

ε) αν f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $x \cdot f'(x) = (x-1) \cdot e^{-f(x)}$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 0$

ζ) αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $(4+2f'(x)) \cdot (2x+f(x)) = 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

η) αν f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x^2) = \frac{3}{2}x + 1$, για κάθε $x > 0$

με $f(4) = 13$.

θ) αν f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) - 2f(x) = 2x \cdot f'(x)$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$, $f'(0) = 0$ και $f(1) = 1$

ι) αν f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με

$f(0) = f'(0) = 1$.

κ) αν f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \cdot f(x) - f''(x) \cdot f(x) = (f'(x))^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $f(0) = 2$ και $f'(0) = 1$.

$$\text{ΑΠ: α) } f(x) = e^{e^x}, \beta) f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 25}, \gamma) f(x) = \eta \mu x,$$

$$\delta) f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x), \epsilon) f(x) = \ln(x - \ln x), \zeta) f(x) = \sqrt{\frac{3}{2}x^2 + 1} - 2x,$$

$$\eta) f(x) = x\sqrt{x} + x + 1, \theta) f(x) = e^{x^2-1}, \iota) f(x) = e^x, \kappa) f(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$$

398. ✓ Na βρείτε συνάρτηση f ορισμένη στο $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ για την οποία ισχύουν

$\eta \mu x \cdot f(x) = \sin x \cdot [x \cdot \sin x - f'(x)]$, για κάθε $x \in A$ και $f(0) = 2018$.

$$\text{ΑΠ: } f(x) = (\frac{x^2}{2} + 2018) \cdot \sin x$$

399. ➔ Αν f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f^{(3)}(x) = \frac{-x-4}{x^3}$, $f(1) = 0$,

$f'(1) = -1$ και $f''(1) = 3$, να δείξετε ότι $f(x) = (x-2) \cdot \ln x$, $x > 0$.

400. ✓ ➔ Αν $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $f(e) = 1$ και ισχύει ότι $2 \frac{f(x)}{\ln x} + x \cdot f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$, να βρεθεί ο τύπος της f .

$$\text{ΑΠ: } f(x) = \frac{1}{\ln^2 x}$$

401. Na βρεθεί συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 2$, $f'(0) = -1$,

$f''(0) = 3$ και $f^{(3)}(x) = -\frac{1}{e^x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ΑΠ: } f(x) = e^{-x} + x^2 + 1$$

- 402.** Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν ισχύουν οι σχέσεις $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ και $f(x) \cdot f'(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η f .

$$\text{ΑΠ: } f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$

- 403.** ➡ Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν $e \cdot f'(x) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

$$\text{ΑΠ: } f(x) = e^{-\frac{1}{e}x}$$

- 404.** Να βρεθεί συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f(-2) = 0$ και $f(1) = 2$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x) = 2 - \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\text{ΑΠ: } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x}, & x < 0 \\ \frac{x^2 + 1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

- 405.** ✓ ➡ Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{2\sin x^2 - 2f(x)}{x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\text{ΑΠ: } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu x^2}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

- 406.** ✓ ➡ Να βρεθεί συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$, αν ισχύουν οι σχέσεις: $x^2 \cdot f'(x) - f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-1) = 2$ και $f(\frac{1}{2}) = 1$.

$$\text{ΑΠ: } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{e^{\frac{x+1}{x}}}, & x < 0 \\ e^{\frac{2x-1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

- 407.** ✓ Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\pi) = -1$, $f'(\pi) = 0$ και $f(\frac{\pi}{4} - x) + f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

➡ α) Να δείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = (f(x) - \sin x)^2 + (f'(x) + \eta \mu x)^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

➡ γ) Να βρείτε τη συνάρτηση f .

$$\text{ΑΠ: } \gamma) f(x) = \sin x$$

- 408.** ✓ ➡ Να βρεθούν οι μη μηδενικές συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ αν γι' αυτές ισχύουν $f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)}$, $g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}$ και οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν κοινό σημείο το $(0, 1)$.

$$\text{ΑΠ: } f(x) = g(x) = e^x$$

- 409.** ✓ Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{x}{2}$

f γν. αύξ. στο $[0, 1]$ και γν. φθ. στο $[1, +\infty)$

- 2) $g(x)=x^4+2x^3-9x^2-20x+2$ g γν. αύξ. στα $[-\frac{5}{2}, -1]$ και $[2, +\infty)$ και γν. φθ. στα $(-\infty, -\frac{5}{2}]$ και $[-1, 2]$
- 3) $h(x)=\frac{x^2-1}{4x+5}$ h γν. αύξ. στα $(-\infty, -2]$ και $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ και γν. φθ. στα $[-2, -\frac{5}{4})$ και $(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}]$
- 4) $t(x)=e^x \cdot (x-1)$ t γν. αύξ. στο $\mathbb{R}_+$ και γν. φθ. στο $\mathbb{R}_-$
- 5) $f(t)=e^t-t$ f γν. αύξ. στο $\mathbb{R}_+$ και γν. φθ. στο $\mathbb{R}_-$
- 6) $g(u)=\frac{\ln u}{u}$ g γν. αύξ. στο $(0, e]$ και γν. φθ. στο $[e, +\infty)$
- 7) $h(x)=2x+\sin x$ h γν. αύξ. στο $\mathbb{R}$
- 8) $t(x)=x-\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ t γν. αύξ. στο $\mathbb{R}$
- 9) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ f γν. φθ. στα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$ και γν. αύξ. στο $[-2, 0)$
- 10) $g(t)=t^t, t>0$ g γν. φθ. στο $(0, \frac{1}{e}]$ και γν. αύξ. στο $[\frac{1}{e}, +\infty)$
- 11) $h(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$ h γν. αύξ. στο $(1, e^2]$ και γν. φθ. στα $(0, 1)$ και $[e^2, +\infty)$
- 12) $x(t)=\frac{\sigma\upsilon\nu t}{\eta\mu t-2}, t \in [\frac{\pi}{6}, \pi]$ x γν. αύξ. στο $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ και γν. φθ. στο $[\frac{5\pi}{6}, \pi]$
- 13) $f(x)=|x^2+x-12|$ f γν. αύξ. στα $[-4, -\frac{1}{2}]$ και $[3, +\infty)$ και γν. φθ. στα $(-\infty, -4]$ και $[-\frac{1}{2}, 3]$
- 14) $f(x)=\frac{1-|x|}{1+|x|}$ f γν. φθ. στο $\mathbb{R}_+$ και γν. αύξ. στο $\mathbb{R}_-$

410. ✓ Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2^{x^2-3x}$ β) $g(x)=|x^2-9|$ γ) $h(x)=x \cdot \sqrt{1-x^2}$

ΑΠ: α) γν. φθίνουσα στο $(-\infty, \frac{3}{2}]$ και γν. αύξουσα στο $[\frac{3}{2}, +\infty)$,

β) γν. φθίνουσα στα $(-\infty, -3]$ και $[0, 3]$ και γν. αύξουσα στα $[-3, 0]$ και $[3, +\infty)$,

γ) γν. φθίνουσα στα $[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ και $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ και γν. αύξουσα στο $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

411. Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = e^x - x + 1 + \ln(x^2 + 1) \quad \beta) f(x) = e^{-x} + x - e + \frac{x^2}{2}$$

ΑΠ: Και οι δύο γν. φθίνουσες στο $(-\infty, 0]$ και γν. αύξουσες στο $[0, +\infty)$

412. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \frac{e \cdot x}{\ln x}$ και να συγκρίνετε τους αριθμούς e^π και π^e .

**ΑΠ: f γν. φθίνουσα στα $(0, 1)$ και $(1, e]$ και γν. αύξουσα στο $[e, +\infty)$.
Είναι $\pi^e < e^\pi$**

413. ✓ Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση:

$$1) f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2\lambda x^2 - 2x + \lambda^2, \text{ να είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}.$$

$$2) f(x) = \ln(x^2 + 1) + \lambda x - 1, \text{ να είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

ΑΠ: 1) $\lambda \in [-1, 1]$, 2) $\lambda \geq 1$

414. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x$.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

β) Αν $a > b > 1$, δείξτε ότι $b^2 - a^2 < \ln\left(\frac{b}{a}\right)^2$.

ΑΠ: α) f γν. φθίν. στο $(0, 1]$ και γν. αύξ. στο $[1, +\infty)$

415. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (x - 1000)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

➡ β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς 1000^2 και $998^2 + 2^2$.

➡ γ) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x) = (x - a)^v + x^v$, με $a \in \mathbb{R}$ και $a > 0$, $v \in \mathbb{N}^*$, $v = 2\rho$.

➡ δ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς 10000^{100} και $9000^{100} + 1000^{100}$.

ΑΠ: α) Γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 500]$ και γν. αύξουσα στο $[500, +\infty)$,

β) $1000^2 > 998^2 + 2^2$, γ) Γν. φθίνουσα στο $(-\infty, \frac{a}{2}]$ και γν. αύξουσα στο

$[\frac{a}{2}, +\infty)$, δ) $10000^{100} > 9000^{100} + 1000^{100}$

416. Αν $f(x) = (x + 3)^{100} - x^{100} - 3^{100}$, δείξτε ότι η C_f τέμνει σε ένα ακριβώς σημείο τον άξονα $x'x$.

417. Δείξτε ότι η εξίσωση $(x - 2000)^{2000} = x^{2000} + 2000^{2000}$, $x \in \mathbb{R}$, έχει μία μόνο λύση.

418. ✓ Ένα πολυώνυμο $P(x)$ ικανοποιεί τη σχέση $P(x) = P'(x) + x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου.

β) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

➡ γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των πραγματικών ριζών του.

➡ δ) Να βρείτε το πρόσημο των ριζών του.

ΑΠ: β) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 6$, γ) Μία, δ) Αρνητική

419. ➡ Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$, ώστε $P(x) \neq Q(x)$ και $P''(x) \neq Q''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P'(x) = Q'(x)$ έχει ακριβώς μια λύση.

ΥΠΟΔ: Εξετάστε δύο περιπτώσεις, αν ο βαθμός του $S(x) = P(x) - Q(x)$ είναι άρτιος ή περιττός

420. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2 \cdot \ln x$, $x>0$.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία

β) Αν $0 < a_1 < a_2 < \frac{1}{\sqrt{e}}$, δείξτε ότι $a_1^{a_1^2} > a_2^{a_2^2}$.

ΑΠ: i) f γνησ. φθίνουσα στο $(0, \frac{1}{\sqrt{e}}]$ και γνησ. αύξουσα στο $[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$.

421. ✓ α) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(t) = \frac{\ln t}{t}$

β) Να συγκριθούν οι αριθμοί 2004^{2005} και 2005^{2004} .

ΑΠ: α) Γν. αύξ. στο $(0, e]$, γν. φθίν. στο $[e, +\infty)$, β) $2004^{2005} > 2005^{2004}$

422. ✓ α) Δείξτε ότι $e^x > 1+x$, για κάθε $x>0$.

β) Δείξτε ότι $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}$, για κάθε $x>0$

423. ✓ Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0, 6]$. Αν η C_f περνά από το σημείο $A(0, 1)$ και ισχύει: $f'(x) > x$ για κάθε $x \in [0, 6]$, να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 6]$.

β) $g(x) > 0$, $x \in [0, 6]$.

➡ γ) το σημείο $B(6, 18)$ δεν ανήκει στη C_f .

424. ✓ ➡ Έστω συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και f' γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι $x \cdot f'(x) - f(x) > 0$, για κάθε $x>0$.

425. ✓ ➡ Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[0, +\infty)$ με f' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και $f(0)=0$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

426. ✓ ➡ Αν f παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με f' γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$ και $f(1)=0$, $f'(1)=1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-1}, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

427. ✓ Έστω f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και h η συνάρτηση με τύπο $h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$.

α) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$

➡ β) Να βρείτε τη γωνία κλίσης της εφαπτομένης ε της C_h στο σημείο τομής της με τον άξονα $x'x$

ΑΠ: β) 45°

428. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f(0)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x>0$, είναι παραγωγίσιμη στο

$(0, +\infty)$ και ότι ισχύει $g'(x) = \frac{1}{x} (f'(x) - \frac{f(x)}{x})$.

➡ β) Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

429. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[a, b]$ με $f(a)=g(a)$ και $f'(x)>g'(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$, δείξτε ότι $f(x)>g(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

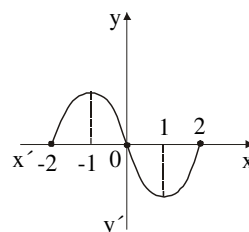
430. ✓ ➡ Αν f συνάρτηση συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f(0)=0$ και $f'(x)<2x \cdot e^{-x \cdot f(x)} - 1$, για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x)<\ln(x^2+1)-x$ για κάθε $x>0$.

431. ➡ Να μελετηθεί η μονοτονία θετικής συνάρτησης f παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $(f(x)+2021)^{f(x)}=2022x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΠ: Είναι γνησίως αύξουσα

432. ✓ ➡ Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = 0$, δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ είναι «1-1».

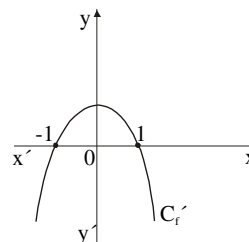
433. Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να λυθούν:
α) $f'(x)=0$ β) $f'(x)<0$ γ) $f'(x)>0$



434. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f .

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα για τη μονοτονία της f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$			
f			



β) Να σχεδιάσετε μια πιθανή γραφική παράσταση της f .

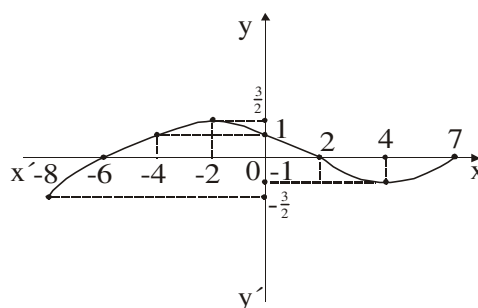
435. Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[-8, 7]$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα.

α) Να μελετήσετε το πρόσημο της $f(x)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>1$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της $f'(x)$ και να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολής της $f(x)$.

δ) Αν $g(x)=e^{f(x)}$ και $h(x)=\ln[f(x)]$, $x \in (-6, 2)$, να εξετάσετε τις g , h ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο.



436. ➡ Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$, για την οποία ισχύει $f(a)=f(b)=0$ και $f''(x)<0$, για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε ότι η f δεν αλλάζει πρόσημο στο (a, b) .

437. ✓ ➡ Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(1)=f(2)$ και f' γνησίως φθίνουσα, να λυθεί η εξίσωση $f(x+e)-f(x+e+1)=0$.

ΑΠ: $x=1-e$

- 438.** ✓ ➔ Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με f' γνησίως φθίνουσα να λυθεί η εξίσωση $f(x+1)+f(2x+2021)=f(2x+2022)+f(x)$

ΑΠ: $x=-2021$

- 439.** ✓ ➔ Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $e^{x^2+2} + \ln(x^2+2) = 2$ β) $x^4=4^x, x>0$ γ) $3^x+4^x=5^x$ δ) $3^x+6^x=4^x+5^x$

ΑΠ: α) Αδύνατη, β) $x=2$ ή $x=4$, γ) $x=2$, δ) $x=0$ ή $x=1$

- 440.** ✓ ➔ Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $e^{x^2-4} + x^2 < 5$

β) $e^{x^2-1} \cdot x^x < 1, \text{ με } x>0$

γ) $e^{x^3} - x > e^x - x^3$

δ) $2x + \eta \mu x < \frac{2}{x} + \eta \mu \frac{1}{x}$

ε) $\pi^{x^2-2x} - \pi^{x-2} \leq 3x - x^2 - 2$

ΑΠ: α) $-2 < x < 2$, β) $0 < x < 1$, γ) $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, δ) $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, ε) $x \in [1, 2]$

- 441.** ➔ Να αποδείξετε ότι $x \cdot \ln^2 x \leq (x-1)^2$, για κάθε $x>0$

- 442.** ➔ Να αποδείξετε ότι $e^x \leq (x+1)^{x+1}$, για κάθε $x>-1$.

- 443.** ➔ Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{x-1}$ ως προς τη μονοτονία και στη συνέχεια να δείξετε ότι $\frac{\ln a}{\beta} - \frac{\ln \beta}{\alpha} > \ln \frac{a}{\beta}$, με $1 < a < \beta$.

- 444.** ➔ Να δείξετε ότι κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις έχει μοναδική ρίζα:

α) $3x^2+2x+\ln x=5$ στο $\mathbb{R}$ β) $x \cdot e^x=1$ στο $(0, 1)$ γ) $3x^3+e \cdot x+a=0$ στο $\mathbb{R}$

- 445.** ✓ Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1) $f(x)=1-x^4$

τ.μ. $(0, 1)$

2) $f(x)=e^{x^2} - 1$

τ.ε. $(0,0)$

3) $f(x)=x^x, x>0$

τ.ε. $(\frac{1}{e}, e^{-\frac{1}{e}})$

4) $f(x)=x \cdot \sqrt{4-x^2} + 4$

τ.ε. $(-\sqrt{2}, 2)$ και $(2, 4)$, τ.μ. $(-2, 4)$ και $(\sqrt{2}, 6)$

5) $f(x)=x \cdot \ln x$

τ.ε. $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$

Ποια από τα παραπάνω τοπικά ακρότατα είναι ολικά;

- 446.** Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1) $f(x)=|x^2+2x-3|$

τ.ε. $(-3, 0)$, $(1, 0)$ και τ.μ. $(-1, 4)$

2) $f(x)=\begin{cases} -x^2+3x-2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 2x-4, & 2 < x \leq 3 \\ -2x+8, & 3 < x \leq 4 \end{cases}$

τ.ε. $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$ και τ.μ.

$(\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$, $(3, 2)$

Ποια από τα παραπάνω τοπικά ακρότατα είναι ολικά;

- 447.** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^4-4x^2+9}$

ΑΠ: τοπ. ελάχ. στα $(-\sqrt{2}, \sqrt{5})$ και $[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ και τοπ. μέγ. στο $(0, 9)$

- 448.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με } f(x) = \eta \mu^2 x - \sqrt{2} \cdot \eta \mu x + 2\sqrt{2}.$$

ΑΠ: f γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{4}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

Παρουσιάζει τοπ. ελάχιστο στο $\frac{\pi}{4}$ το $2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ και τοπ. μέγιστα στα 0

και $\frac{\pi}{2}$ τα $2\sqrt{2}$ και $\sqrt{2} + 1$ αντίστοιχα.

- 449.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - ax^2$, $a \neq 0$.

α) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι τα σημεία που αντιστοιχούν στα τοπικά ακρότατα της f ανήκουν στην καμπύλη με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x^3$

ΑΠ: α) $(0, 0)$ και $(\frac{2a}{3}, -\frac{4}{27}a^3)$

- 450.** ✓ Η παράγωγος μιας συνάρτησης f είναι $f'(x) = x^2 \cdot (x+1)^3 \cdot (x-4)^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να εξετάσετε αν έχει τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο.

ΑΠ: τοπ. ελάχιστο στο -1

- 451.** ✓ Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$, $x > 1$.

ΑΠ: τοπ. ελάχιστο στο $e^{\frac{1}{e}}$ το $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

- 452.** Δείξτε ότι $\left(\frac{\ln x}{x^v}\right)' = \frac{1 - v \cdot \ln x}{x^{v+1}}$, $v \in \mathbb{N}^*$ και στη συνέχεια να μελετήσετε ως προς τα

ακρότατα τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^v}$.

ΑΠ: τοπ. μέγιστο στο $\sqrt[v]{e}$ το $\frac{1}{ve}$

- 453.** Έστω $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$, όπου x_1, x_2 οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f είναι κάθετη στην ευθεία $18y - x + 1 = 0$.

ΑΠ: Τα τοπ. ακρότατα είναι τα $(5, -100)$ και $(-1, 8)$

- 454.** ✓ Να βρεθούν τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- | | |
|---|--------------------|
| 1) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{x}{2}$, για $x \in [0, 1]$ | $[0, \frac{1}{2}]$ |
| 2) $f(x) = x^x$, για $x > 1$ | $[1, +\infty)$ |
| 3) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$, για $0 < x \leq 2$ | $[4, +\infty)$ |
| 4) $f(x) = x^2 + 2x - 3 $ | $[0, +\infty)$ |
| 5) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ | $[-11, +\infty)$ |
| 6) $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ | $[0, \frac{3}{2}]$ |

455. ✓ Να προσδιορίσετε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η $f(x) = ax^2 - x + 2$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{1}{2}$.

ΑΠ: $a=1$

456. ✓ Να βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = a \cdot \ln x + \beta x^2 - 3x + 2$ να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα 1 και 2. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το είδος και τις τιμές αυτών των ακροτάτων. Είναι ολικά αυτά τα τοπικά ακρότατα;

ΑΠ: $a=2, \beta=\frac{1}{2}$, τ.μ. $(1, -\frac{1}{2})$, τ.ε. $(2, 2\ln 2 - 2)$, δεν είναι ολικά

457. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) = -2x^2 + ax + \beta$. Να βρεθούν οι $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η f να παρουσιάζει μέγιστο με συντεταγμένες $(2, 9)$.

ΑΠ: $a=8, \beta=1$

458. Να βρείτε τα a, β ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + 1$ να έχει ακρότατο στο σημείο $A(2, -7)$.

ΑΠ: $a=2, \beta=-8$

459. Αν $f(x) = x^2 \cdot (x+a) + \beta x + \gamma$ συνάρτηση με $f(0)=3$, να βρεθούν οι $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, αν η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στο 1 και στο $\frac{1}{3}$.

ΑΠ: $a=-2, \beta=1, \gamma=3$

460. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + \beta x + \gamma$. Να υπολογιστούν οι $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η f να παρουσιάζει ελάχιστο στο $-\frac{2}{3}$ το $-\frac{10}{3}$.

ΑΠ: $\beta=4, \gamma=-2$

461. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \frac{\lambda x + 1}{x^2}$ έχει ελάχιστο το -1 ;

ΑΠ: $\lambda=2$ ή -2

462. ✓ Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + 1}$ έχει ελάχιστη τιμή το $-\frac{1}{2}$ και μέγιστη το $\frac{11}{5}$.

ΑΠ: Δεν υπάρχει τέτοια τιμή του a

463. ✓ Για ποια τιμή του θετικού αριθμού a η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^a \cdot e^{2a-x}$, $x > 0$, παίρνει την ελάχιστη τιμή της;

ΑΠ: $a = \frac{1}{e^2}$

464. Να προσδιοριστεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \frac{x+1}{e^{\lambda x}}$, να είναι η ελάχιστη δυνατή.

ΑΠ: $\lambda=1$

465. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(2-x) + a \cdot f(x-2) = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $a \neq 2$ και $a \neq -2$.

α) Να βρεθεί ο τύπος της f

β) Να βρεθεί η τιμή του a , ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x_0=1$

ΑΠ: α) $f(x) = \frac{1}{4-a^2} [2(2-x)^2 - a(2+x)^2]$, β) $a = -\frac{2}{3}$

- 466.** ✓ Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $3f(x-1) - f\left(\frac{1-x}{x}\right) = 2x - 1 + \frac{2+x}{x}$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f για $x \leq -2$

$$\text{ΑΠ: } \alpha) f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}, \quad x \neq -1, \quad \beta) R_f = (-\infty, -2]$$

- 467.** ✓ Δείξτε ότι $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) < x$, για κάθε $x > 0$.

- 468.** ✓ Δείξτε ότι $x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x > 1$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

- 469.** Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{2x} - x$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $e^{2x} \geq x + \frac{1}{2} \ln(2e)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ΑΠ: } f \text{ γν. φθίνουσα στο } (-\infty, -\frac{\ln 2}{2}] \text{ και γν. αύξουσα στο } [-\frac{\ln 2}{2}, +\infty), \\ \min \text{ στο } -\frac{\ln 2}{2} \text{ το } \frac{\ln 2 + 1}{2}$$

- 470.** ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot (1-x) - 1$, $x < 1$.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

β) Αν $\beta < \alpha < 0$, δείξτε ότι $e^\beta \cdot (1-\beta) - 1 < e^\alpha \cdot (1-\alpha) - 1$.

γ) Δείξτε ότι για κάθε $x < 1$ ισχύει $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

$$\text{ΑΠ: } \alpha) f \text{ γν. αύξ. στο } (-\infty, 0] \text{ και γν. φθίν. στο } [0, 1)$$

- 471.** α) Δείξτε ότι $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x < x + 1$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

β) Αν $f: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \leq f(x) \leq x + 1$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\text{ΑΠ: } \beta) \text{ το όριο είναι } 1$$

- 472.** Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

α) Να βρεθούν τα ακρότατα της f .

β) Δείξτε ότι ισχύει $e^x \geq x^e$, για κάθε $x > 0$.

$$\text{ΑΠ: } \alpha) \text{ Τοπ. μέγ στο } e \text{ το } \frac{1}{e}$$

- 473.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 4, & \text{αν } x < 2 \\ x^2 + \beta x, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ αν η f είναι συνεχής και οι εφαπτόμενές της C_f στις θέσεις -1 και 4 είναι παράλληλες.

β) Για τις τιμές των a, β που προσδιορίσατε να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

$$\text{ΑΠ: } \alpha) a = -2, \beta = -4, \beta) \text{ τ.μ. στο } 0 \text{ το } 4, \text{ τ.ε. στο } 2 \text{ το } -4$$

- 474.** ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^x + \beta^x - x \cdot \ln(a \cdot \beta)$, $a, \beta > 1$

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Δείξτε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

**ΑΠ: i) f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 το 2.**

475. ✓ Έστω συνάρτηση $f(x)=x^{-2} \cdot \ln x$.

α) Να βρεθούν τα ακρότατά της.

➡ β) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\frac{\ln x}{x^2} < \frac{e}{2}$.

ΑΠ: α) τ.μ. $(\sqrt{e}, \frac{1}{2e})$

476. ➡ Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x)+f(x)=e^x-x-1$. Να προσδιορίσετε τα ακρότατα της f .

ΑΠ: τ.ε. στο 0 το 0

477. ➡ Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^2-2x+3$ παρουσιάζει ένα ολικό ελάχιστο.

478. ✓ α) Δείξτε ότι $e^x \geq x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Δείξτε ότι $\ln x \leq x-1$, για κάθε $x > 0$.

➡ γ) Με τη βοήθεια των α) και β) δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x$ και $g(x)=\ln x$ δεν τέμνονται.

479. ✓ Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1-\ln x}$

➡ β) $f(x) = \frac{2x}{x+1-\ln x}$

γ) $f(x) = \frac{\eta \mu x}{e^x - x - 1}$

➡ δ) $f(x) = \frac{\eta \mu x}{e^x - x + 1}$

➡ ε) $f(x) = \ln(e^x - \ln x)$

ΑΠ: α) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, β) $(0, +\infty)$, γ) $\mathbb{R}^*$, δ) $\mathbb{R}$, ε) $(0, +\infty)$

480. ✓ Να δείξετε ότι:

➡ α) $e^{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}-1}$

β) $e^\pi > \pi$

γ) $e^{-x} \geq 1-x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) $\ln(e^x+1) \leq e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ε) $\ln \frac{2}{\pi} < e^{\frac{2}{\pi}}$

➡ ζ) $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$

481. ✓ ➡ Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x+\pi} - \pi}{\ln x}$

β) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln x - e^x}{\frac{\pi^2}{4} - \pi \cdot x + x^2}$

ΑΠ: α) 0, β) $-\infty$

482. ➡ Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x-x)=\sin x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

483. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}-\ln x+1$.

➡ α) Δείξτε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x > 0$

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(f(x^2+1)-1)=2$

➡ γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x^2-3)+f(x+3)=4$

ΑΠ: β) $x=0$, γ) $x=-2$

484. ✓ Α. Δείξτε ότι οι αριθμοί $e^x - 1$ και x είναι ομόσημοι για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

➡ **Β.** Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

➡ **Γ.** Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη δυο φορές στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $x \cdot e^x \cdot f''(x) + x \cdot e^x \cdot (f'(x))^2 = e^x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \neq 0$, τότε $f''(x_0) > 0$.

β) Αν η f'' είναι συνεχής συνάρτηση στο 0 και η f έχει τοπικό ακρότατο στο 0, να αποδείξετε ότι $f''(0) > 0$.

ΥΠΟΔ: Α. Δύο περιπτώσεις για $x > 0$ και $x < 0$

485. ✓ α) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x^x \cdot (1-x)^{1-x}$ με $x \in (0, 1)$.

➡ **β)** Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ με $\alpha + \beta = 1$, δείξτε ότι $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \geq \frac{1}{2}$.

ΑΠ: α) τ.ε. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

486. ✓ ➡ Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $\ln(e^x + 2) + e^{f(x)} = 3e^x + 4x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f δεν έχει τοπικό ακρότατο.

487. ➡ Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ που παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση x_1 και μέγιστο στη θέση x_2 με $a < x_1 < x_2 < \beta$ και $f(x_1) < 1 < f(x_2)$. Δείξτε ότι η C_g με $g(x) = f(x) + f'(x) - 1$, τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον μία φορά.

488. ✓ ➡ Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x \cdot \ln x + x^3 + \sqrt{3}$ δέχεται εφαπτομένη παράλληλη προς την ευθεία $y = -2021x - 2022$

489. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 3x + 3}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

➡ γ) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 + 3x + 3 - c \cdot e^x = 0$ αν $c \in (e, 3)$.

ΑΠ: α)

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f	↗	↘	↗	

, β) $R_f = (0, +\infty)$, γ) 3 ρίζες

490. ➡ Αν $f(x) = e^{2x} + \frac{x^2}{2} - 2x - 2021$, να δείξετε ότι η C_f έχει μία ακριβώς εφαπτομένη παράλληλη προς τον $x'x$

491. ✓ Έστω ότι $x^a \geq a^x$ ($a > 0$) για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι $a = e$.

492. ✓ Έστω συνάρτηση $f(x) = a^{\ln x} + \beta^{x-1}$, όπου $a, \beta > 0$. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \geq 2$, να δείξετε ότι ισχύει $\beta = \frac{1}{a}$.

493. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(x) \leq e^{-2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος της f στο σημείο του με τετμημένη 0.

ΑΠ: $y = -2x + 1$

- 494.** ✓ Αν f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα $[a, \beta]$ και υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, \beta)$, τέτοια ώστε $f(a), f(\beta) \in (f(x_1), f(x_2))$, δείξτε ότι:
 ➡ α) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.
 β) Η f' έχει τουλάχιστον ένα στάσιμο σημείο στο (ξ_1, ξ_2) .
- 495.** ✓ Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f(x) \leq e^x + x + 1 + \ln x$ για κάθε $x > 0$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, e+2)$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο A είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon: y = (e+2) \cdot x$
- 496.** ✓ Αν ισχύει $\eta\mu(ax) \leq \eta\mu(\beta x) + \eta\mu(\gamma x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$, δείξτε ότι $a = \beta + \gamma$.
- 497.** ✓ ➡ Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $(x^2 - 1) \cdot f(x) \leq \ln \frac{x^2 + 1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
- 498.** ✓ ➡ Να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = |\eta\mu x - ax|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Στη συνέχεια να εκφραστεί ο τύπος της f χωρίς την απόλυτη τιμή.
- ΑΠ: $a = 1, f(x) = \begin{cases} \eta\mu x - x, & x < 0 \\ x - \eta\mu x, & x \geq 0 \end{cases}$**
- 499.** ✓ ➡ Έστω $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(x) = (x-a) \cdot (x-\beta) \cdot f'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.
- 500.** ✓ ➡ Έστω $f: [2021, 2023] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(x) = (x-2021) \cdot (x-2023) \cdot f'(x) + 2022$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση με τιμή 2022.
- 501.** ✓ ➡ Έστω f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[e, \pi]$ με $f([e, \pi]) = [1, 10]$. Αν $f(e) = \pi$ και $f(\pi) = e$, δείξτε ότι:
 α) υπάρχουν $x_1, x_2 \in (e, \pi)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$
 β) υπάρχει $\xi \in (1, 10)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$
- 502.** Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 ➡ α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
 β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(0, -1)$, να λυθεί η εξίσωση $f(2021 + f^{-1}(x + 2022)) = f(2021)$.
- ΑΠ: $x = -2023$**
- 503.** ✓ ➡ Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
 β) Να λυθεί η εξίσωση $f(\eta\mu x) - f(x) = 0$
- ΑΠ: $x = 0$**
- 504.** ➡ Έστω συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f([0, 1]) = [0, 1]$ και $f'(x) \neq e^x$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^x - 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $[0, 1]$.

- 505.** ✓ ➔ Έστω f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f'' συνεχή και μη μηδενική για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(2-x)=f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:
 α) Να λυθεί η εξίσωση $f'(x)=0$
 β) Αν $f(0)>f(1)$, να προσδιοριστούν η μονοτονία και οι θέσεις ακροτάτων της f .
**ΑΠ: α) $x=1$, β) f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$.
 Παρουσιάζει δε ελάχιστο στη θέση 1**
- 506.** ✓ ® Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει
 $f^3(x)+3f(x)=(a-1) \cdot x^3+2x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
 α) Δείξτε ότι $a=1$
 β) Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται
 γ) Να βρεθεί ο τύπος της f^{-1}
 δ) Αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ δείξτε ότι δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα
 ➔ ε) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f
ΑΠ: γ) $f^{-1}(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{2}$, δ) f γνησίως αύξουσα
- 507.** ✓ Έστω $f(x)=x^2 \cdot (3-x)$, όπου η f μετρά την αντίδραση του οργανισμού σε ποσότητα x μιας ουσίας (αύξηση πίεσης, πτώση θερμοκρασίας σώματος κ.λπ.). Να βρείτε την τιμή του x για την οποία η αντίδραση έχει τη μέγιστη τιμή. Ποια είναι η μέγιστη τιμή;
ΑΠ: $x=2$, $f(2)=4$
- 508.** Ένα δοχείο γεμίζει με νερό. Ο όγκος $V(t)$ του νερού στο δοχείο μετά t sec δίνεται από τον τύπο:

$$V(t) = \frac{2}{3} (20t^2 - \frac{t^3}{6}), \quad 0 \leq t \leq 120$$

 α) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου, όταν $t = 20$ sec.
 β) Πότε ο ρυθμός αυτός γίνεται μέγιστος;
ΑΠ: α) 400, β) $t=40$
- 509.** Η ενέργεια, που καταναλώνεται κατά την κίνηση σωματιδίου, δίνεται από τον τύπο $E(u) = \frac{1}{u} \cdot [2 \cdot (u-35)^2 + 750]$, $u > 0$, όπου u είναι η ταχύτητα του σωματιδίου.
 α) Να βρείτε την ταχύτητα που πρέπει να έχει το σωματίδιο ώστε να καταναλώνει την ελάχιστη ενέργεια.
 β) Πόση είναι η ελάχιστη αυτή ενέργεια;
ΑΠ: α) $u=40$, β) $E(40)=20$ μονάδες ενέργειας
- 510.** Σε έναν υποτασικό ασθενή με αρχική πίεση Π_0 χορηγούνται δύο διαφορετικά φάρμακα για την υπόταση σε διαφορετικές ημερομηνίες, των οποίων οι δράσεις καθορίζονται από τις συναρτήσεις:
 $\Pi_1(t) = \Pi_0 + t \cdot e^{-t}$ όπου t ο χρόνος δράσης και Π_1 η πίεση
 $\Pi_2(t) = \Pi_0 + t^2 \cdot e^{-t}$ όπου t ο χρόνος δράσης και Π_2 η πίεση
 Να βρείτε:
 α) Σε πόση ώρα το κάθε φάρμακο φτάνει στη μέγιστη απόδοσή του.
 β) Ποιο είναι το πιο αποτελεσματικό όσον αφορά στην άνοδο της πίεσης.
ΑΠ: α) $t=2$ και $t=1$ αντίστοιχα, β) το δεύτερο

- 511.** Υποθέτουμε ότι το κόστος $K(x)$ για την εβδομαδιαία παραγωγή x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι $K(x)=a+bx$ € και η τιμή πώλησης κάθε μονάδας προϊόντος είναι $P(x)=\gamma-e \cdot x$ €. Να βρείτε:

α) Το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος.
 β) Ποια είναι η τιμή της μονάδας όταν έχουμε το μέγιστο κέρδος.
 γ) Ποιο είναι το εβδομαδιαίο κέρδος σ' αυτό το επίπεδο παραγωγής.
 δ) Σε ποια τιμή πρέπει να πωλείται κάθε μονάδα για να έχουμε το μέγιστο κέρδος, αν η κυβέρνηση φορολογήσει κάθε μονάδα που πωλείται με t €.

$$\text{ΑΠ: α) } \frac{\gamma-\beta}{2e}, \beta) \frac{\gamma+\beta}{2}, \gamma) \frac{\gamma+\beta}{2}-a-\frac{\beta(\gamma-\beta)}{2e}, \delta) \frac{\gamma-\beta-t}{2e}$$

- 512.** ✓ Τα άκρα A και B μιας σκάλας μήκους 10 m κινούνται στους άξονες Oy και Ox ορθογωνίου συστήματος αναφοράς αντίστοιχα (Ox ο οριζόντιος). Τα A και B ολισθαίνουν ελεύθερα και το B απομακρύνεται από το O με σταθερή ταχύτητα $u=2$ m/sec. Η θέση του B πάνω στον Ox κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση $x(t)=u \cdot t$ με το t να δίνεται σε sec και $t \in [0,5]$.

i) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου AOB συναρτήσει του χρόνου.
 ii) Να βρεθεί ποια χρονική στιγμή το $E(t)$ γίνεται μέγιστο.
 iii) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του $E(t)$ τη χρονική στιγμή t , κατά την οποία το μήκος (OA) είναι 6 m; Το εμβαδόν τότε αυξάνεται ή μειώνεται; Πώς το δικαιολογείται αυτό;

ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ ΘΕΜΑΤΟΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 1993 Α' ΔΕΣΜΗΣ

$$\text{ΑΠ: i) } E(t) = t \cdot \sqrt{100 - 4t^2}, t \in [0,5], \text{ ii) } t_0 = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ sec,}$$

$$\text{iii) } E'(t_1) = -\frac{14}{3} \text{ m}^2/\text{sec}$$

- 513.** Να βρεθούν δύο αριθμοί $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ με άθροισμα 4 και άθροισμα κύβων το ελάχιστο δυνατό.

$$\text{ΑΠ: } x=y=2$$

- 514.** α) Να υπολογιστούν οι κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα 10 cm, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο δυνατό εμβαδόν.

✓ β) Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με εμβαδόν κ^2 ($\kappa > 0$) να βρεθεί εκείνο που έχει την ελάχιστη υποτείνουσα.

ΥΠΟΔ β): Αν x, y οι κάθετες πλευρές και ω η υποτείνουσα, τότε

$$\frac{x \cdot y}{2} = \kappa^2 \Leftrightarrow y = \frac{2\kappa^2}{x} \text{ και } \omega^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{x^2 + \frac{4\kappa^2}{x^2}}$$

ΑΠ: α) $5\sqrt{2}$ κάθε μία β) Αυτό που έχει κάθετες πλευρές ίσες με $\kappa\sqrt{2}$

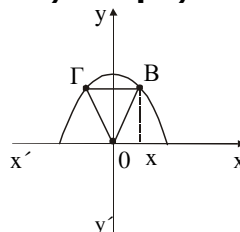
- 515.** Στο σχήμα φαίνεται τμήμα παραβολής με εξίσωση

$$y = \frac{1}{14} \cdot (48 - x^2) \text{ και το τρίγωνο OBG με } B(x, y) \text{ και}$$

$$\Gamma(-x, y).$$

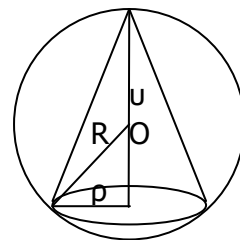
α) Να βρείτε τα σημεία B, Γ για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου OBG γίνεται μέγιστο.

β) Ποιο είναι αυτό το μέγιστο εμβαδόν;



$$\text{ΑΠ: α) } E = \frac{48x - x^3}{14}, B(4, \frac{16}{7}), \Gamma(-4, \frac{16}{7}), \beta) E = \frac{64}{7} \text{ τ.μ.}$$

516. ✓ ➡ Να υπολογίσετε πόσο πρέπει να είναι το ύψος u κώνου εγγεγραμμένου σε δοσμένη σφαίρα ακτίνας R , ώστε ο όγκος του να είναι μέγιστος. Δίνεται ότι ο όγκος κώνου με ακτίνα βάσης ρ και ύψος u είναι $V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 u$.



ΑΠ: β) $u = 4/3 \cdot R$

517. ✓ Να προσδιοριστεί σημείο της παραβολής $y = x^2$, τέτοιο ώστε η απόστασή του από το σημείο $A(6, 3)$ να είναι η ελάχιστη δυνατή. Στη συνέχεια να βρεθεί η ελάχιστη αυτή απόσταση.

ΥΠΟΔ: Για να είναι ελάχιστο το d , αρκεί να είναι ελάχιστο το d^2 .

ΑΠ: $(2, 4)$, $d_{\min} = \sqrt{17}$

518. ✓ Να προσδιοριστεί η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$, δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο ελαχίστου εμβαδού.

ΥΠΟΔ: Αν λ ο συντελεστής διεύθυνσής της τότε $\lambda < 0$ (γιατί;)

ΑΠ: $y = -3x + 6$

519. Σε ημικύκλιο διαμέτρου $2R$ να εγγραφεί τραπέζιο με βάση τη διάμετρο το οποίο να έχει μέγιστο εμβαδόν. Στη συνέχεια να βρεθεί το μέγιστο αυτό εμβαδόν.

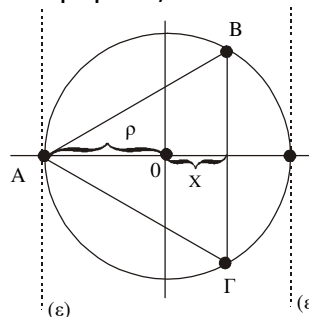
ΑΠ: Αν $2y$ το μήκος της μικρής βάσης τότε πρέπει $y = \frac{R}{2}$, $E_{\max} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

520. Αν η εφαπτομένη της καμπύλης $y = x^2 - 3$ στο σημείο M με $x_M = a > 0$, τέμνει τον άξονα $x'x$ στο A και τον $y'y$ στο B , δείξτε ότι $(OAB) = \frac{1}{4a} \cdot (3 + a^2)^2$. Πότε το εμβαδόν (OAB) γίνεται ελάχιστο;

ΑΠ: $a = 1$

521. ➡ Για ποια χορδή $B\Gamma$ παράλληλη προς την εφαπτομένη ενός κύκλου σ' ένα σημείο του A , το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι μέγιστο;

ΥΠΟΔ: Χρησιμοποιείτε ένα σχήμα όπως αυτό που δίνεται δίπλα



ΑΠ: η $B\Gamma$ πρέπει να απέχει $3\frac{\rho}{2}$ από το A

522. ✓ Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής τις παρακάτω συναρτήσεις:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1) $f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 1$

Κυρτή στο $(-\infty, \frac{1}{2}]$ και κοίλη στο $(\frac{1}{2}, +\infty]$.

Σ.Κ. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

$$2) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Κυρτή στα $(-1, 0]$ και $(1, +\infty)$ και κοίλη στα $(-\infty, -1)$ και $[0, 1)$. Σ.Κ. $(0, 0)$

$$3) \quad f(x) = x \cdot \ln x - 1$$

Κυρτή στο $(0, +\infty)$

$$4) \quad g(x) = x^2 \cdot (x^2 - 4)$$

Κυρτή στα $(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}]$ και $[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

και κοίλη στο $[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}]$.

Σ.Κ. $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{32}{9})$ και $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{32}{9})$

$$5) \quad h(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Κυρτή στο $[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}]$ και κοίλη στα

$(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}]$ και $[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty)$.

Σ.Κ. $(-\frac{2\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2(\sqrt[4]{e})^3})$ και $(\frac{2\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2(\sqrt[4]{e})^3})$

$$6) \quad \varphi(x) = x^2 \cdot \ln x$$

Κυρτή στο $[\frac{1}{e\sqrt{e}}, +\infty)$ και κοίλη στο

$(0, \frac{1}{e\sqrt{e}}]$. Σ.Κ. $(\frac{1}{e\sqrt{e}}, -\frac{3}{2e^3})$

$$7) \quad f(x) = 2\eta\mu x + \frac{1}{2}\eta\mu 2x, \quad x \in [0, \pi]$$

Κυρτή στο $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$ και κοίλη στο

$[0, \frac{2\pi}{3}]$. Σ.Κ. $(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$

$$8) \quad g(x) = x^4 \cdot e^{-x}$$

Κυρτή στα $(-\infty, 2]$ και $[6, +\infty)$ και κοίλη

στο $[2, 6]$. Σ.Κ. $(2, \frac{16}{e^2})$ και $(6, \frac{1296}{e^6})$

$$9) \quad h(x) = 2\ln x^4 + x^2 - 1$$

Κυρτή στα $(-\infty, -2]$ και $[2, +\infty)$ και κοίλη στα $[-2, 0]$ και $(0, 2]$. Σ.Κ. $(-2, 8\ln 2 + 3)$ και $(2, 8\ln 2 + 3)$

$$10) \quad \varphi(x) = x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

Κυρτή στο $[0, 2\pi]$

$$11) \quad g(x) = \ln(1 - x^2) + \frac{x}{3}$$

Κοίλη στο $(-1, 1)$

$$12) \quad f(x) = 1 - |x^3 - 8|$$

Κυρτή στο $[0, 2]$ και κοίλη στα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$. Σ.Κ. $(0, -7)$

$$13) \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 1 \\ -\sqrt[3]{1-x}, & x < 1 \end{cases}$$

Κυρτή στο $(-\infty, 1]$ και κοίλη στο $[1, +\infty)$. Σ.Κ. $(1, 0)$ (εκτός ύλης)

523. ✓ Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ και $g(x) = 2x + f(x)$.

➡ α) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

➡ β) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) Να μελετήσετε τη g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

δ) Να βρείτε τη θέση x_0 σημείου της C_g , στο οποίο η εφαπτομένη της g είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x$.

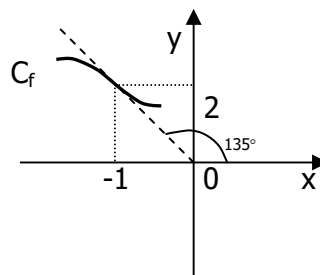
ΑΠ: γ) Κοίλα κάτω στο $(0, e\sqrt{e}]$ και κοίλα άνω στο $[e\sqrt{e}, +\infty)$.

Σημείο καμψής το $(e\sqrt{e}, \frac{4e^3+3}{2e\sqrt{e}})$, δ) $x_0=e$

- 524.** ✓ Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ , παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, +\infty)$ και ισχύει $f(x) \cdot f''(x) > (f'(x))^2$ για κάθε $x \in \Delta$, να δείξετε ότι η $g(x) = \ln f(x)$ στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ .

ΤΜΗΜΑ ΘΕΜΑΤΟΣ ΓΕΝΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Α' ΔΕΣΜΗΣ 1992

- 525.** Να εξηγήσετε γιατί η γραφική παράσταση της $y=f(x)$ κοντά στο σημείο $x=-1$ θα είναι σαν αυτή του διπλανού σχήματος, αν ισχύουν συγχρόνως $f(-1)=2$, $f'(-1)=-1$, $f''(-1)=0$ και $f^{(3)}(x)>0$ για κάθε x .



- 526.** ✓ Για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = x^4 + kx^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$;

ΑΠ: $-2 \leq k \leq 2$

- 527.** ✓ Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = (\lambda-1)x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 1$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$;

ΑΠ: $\lambda \geq 2$

- 528.** Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2ax^3 + 6x^2 + 2x + 1$ στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$;

ΑΠ: $-2 \leq a \leq 2$

- 529.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{a^x + b^x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ με $a \neq b$. Δείξτε ότι:

- α) Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$
 β) Αν $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $a \cdot b = e^2$.

- 530.** α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με $f(x) = a^x - x$, $x \in \mathbb{R}$ όταν $0 < a < 1$.
 β) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει η ισότητα $a^{\lambda^2-4} - a^{\lambda-2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2)$.
 γ) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, 1)$.
 δ) Να δείξετε ότι $a^x \geq x \cdot \ln a + 1$, $0 < a < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τα α) και β) δόθηκαν στις Γενικές Εξετάσεις Α' ΔΕΣΜΗΣ 1992

ΑΠ: β) $\lambda = -1$ ή $\lambda = 2$, γ) $y = x \cdot \ln a - x + 1$

- 531.** ✓ Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $2f(x) + f(-x) = x^2 + 2x + 3$, τότε:

- α) Να βρεθεί ο τύπος της f .
 β) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της βρίσκεται κάτω από τη C_f , με εξαίρεση το σημείο επαφής.

$$\text{ΑΠ: α) } f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$$

532. ✓ Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=f'(0)=2$ και f' γνησίως αύξουσα. Δίνεται επίσης συνάρτηση $g(x)=f(x)+e^x-1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Δείξτε ότι η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $(0, g(0))$.

γ) Δείξτε ότι $f(x) \geq 3x+3-e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ΑΠ: β) } y=3x+2$$

533. ✓ ➔ α) Να δείξετε ότι ισχύουν οι ανισώσεις:

$(x+1) \cdot \ln(x+1) > x$, για κάθε $x > 0$ και $e^x < (1+x)^{1+x}$, για κάθε $x > 0$.

β) Έστω $f(x)=2(x+1)^2 \cdot \ln(x+1) - [(x+1)^2 + 2x^2]$, $x > 0$. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία στο $(0, +\infty)$ και να δείξετε ότι στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0, +\infty)$.

534. ✓ ➔ Δείξτε ότι η εφαπτομένη της C_f με $f(x)=x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$ σε οποιοδήποτε σημείο M , δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f εκτός από το M .

535. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ με $f''(x) > 0$ στο Δ . Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{x-f(x)}$, $x \in \Delta$, στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω αν $|1-f'(x)| < \sqrt{f''(x)}$, για κάθε $x \in \Delta$.

536. ✓ ➔ Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο (α, β) δείξτε ότι για κάθε x , $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $x \neq x_0$ ισχύει ότι $f(x)-f(x_0)-f'(x_0) \cdot (x-x_0) > 0$.

537. ✓ Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x < 0 \\ x^3 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι το σημείο $P(0, f(0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

538. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$.

α) Να βρεθούν τα ακρότατα και η ευθεία που ορίζουν.

β) Δείξτε ότι η C_f έχει τρία συνευθειακά σημεία καμπής.

$$\text{ΑΠ: α) Ακρότατα } (-2, -1) \text{ και } (2, 1), \beta) (0, 0), (2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

539. Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2 \cdot (x+2)$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο σημεία A και B της C_f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον $x'x$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο τέμνονται η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο καμπής της και η ευθεία AB του α) ερωτήματος.

$$\text{ΑΠ: β) } (0, 2)$$

540. ✓ Να βρεθούν οι τιμές του $k \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3+kx^2+1$ να έχει σημείο καμπής στη θέση $x=1$;

$$\text{ΑΠ: } k=-3$$

541. Βρείτε το $a \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=e^x-ax^2$ να παρουσιάζει καμπή στη θέση $x_0=1$.

$$\text{ΑΠ: } a = \frac{e}{2}$$

542. Να βρεθούν οι $a, \beta \in \mathbb{R}^*$ αν είναι γνωστό ότι η $f(x) = \frac{ax}{x^2 + \beta^2}$ έχει σημείο καμπής το $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{7})$.

$$\text{ΑΠ: } (a, \beta) = \left\{ \left(\frac{4}{7}, 1 \right), \left(\frac{4}{7}, -1 \right) \right\}$$

543. ✓ ➡ Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = ax^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$, $a \neq 0$, να έχει σημείο καμπής.

$$\text{ΑΠ: } 3\beta^2 > 8a\gamma$$

544. Να οριστούν οι $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $M(2, 2)$ να είναι σημείο καμπής του διαγράμματος της $f(x) = \frac{\kappa x + \lambda}{x^2 + 1}$

$$\text{ΑΠ: } \kappa = \frac{11}{2}, \lambda = -1$$

545. Δίνεται η συνάρτηση $f: \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \cdot \sin x$.

α) Δείξτε ότι η f'' έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$.

β) Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ τέτοιο ώστε $x_0 = -2 \varepsilon \varphi x_0$.

γ) Δείξτε ότι η σχέση $f''(x) > 0$ είναι ισοδύναμη της $x > -2 \varepsilon \varphi x$.

δ) Δείξτε ότι η C_f έχει ένα σημείο καμπής $M(x_0, f(x_0))$, το οποίο βρίσκεται στο διάγραμμα της συνάρτησης $g(x) = -\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

$$\text{ΑΠ: } \Sigma. \text{Κ. } (-2 \varepsilon \varphi x_0, x_0 \cdot \sin x_0)$$

546. Αν το διάγραμμα της $f(x) = x \cdot \sin x$ παρουσιάζει σημεία καμπής $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, δείξτε ότι:

$$\alpha) \sin x_0 = \frac{y_0}{x_0} \text{ και } \eta \mu x_0 = -\frac{y_0}{2}$$

$$\Rightarrow \beta) \text{ Τα σημεία καμπής βρίσκονται στην καμπύλη με εξίσωση } \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

547. Δείξτε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$, όπου A το σημείο καμπής και B, Γ τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta$, $a < 0$, είναι ισοσκελές.

$$\text{ΑΠ: } A\left(-\frac{a}{3}, \frac{2a^3}{27} + \beta\right), B(0, \beta), \Gamma\left(-\frac{2a}{3}, \frac{4a^3}{27} + \beta\right)$$

548. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3\lambda x^2 - (\lambda - 2)x - 2$.

α) Δείξτε ότι η C_f παρουσιάζει ένα σημείο καμπής για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η C_f να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο καμπής.

γ) Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο καμπής να βρίσκεται στον άξονα $y'y$.

$$\text{ΑΠ: } \beta) \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = \frac{2}{3}, \gamma) \lambda = 0$$

- 549.** Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (\alpha - 1)x^2 - \beta x + 1$ έχει τοπικό μέγιστο στη θέση -1 και σημείο καμπής στη θέση 3 .

ΑΠ: $\alpha = -8, \beta = 21$

- 550.** ✓ Έστω συνάρτηση f με $f(x) = x^4 + a^2 x^2$ ($a \neq 0$). Δείξτε ότι δεν υπάρχει σημείο στο οποίο η συνάρτηση να παρουσιάζει καμπή.

- 551.** ✓ Αν f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $[f(x)]^2 + x \cdot f(x) + x^2 = 5f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η C_f δεν έχει σημείο καμπής.

- 552.** ✓ Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και μια ευθεία (ε) με εξίσωση $y = ax + \beta$, η οποία τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε τρία διαφορετικά σημεία. Αν x_1, x_2, x_3 οι τετμημένες των σημείων αυτών (με $x_1 < x_2 < x_3$):

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_3)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$.

β) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση: Αν μια συνάρτηση είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δέχεται σε δυο σημεία της γραφικής της παράστασης παράλληλες εφαπτόμενες, τότε η f έχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής.

- 553.** Έστω ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

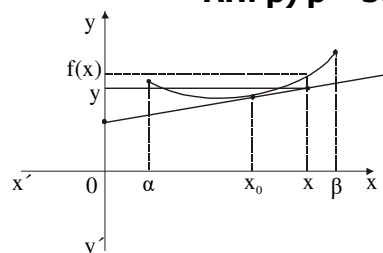
α) Να αποδείξετε ότι έχει πάντοτε ένα σημείο καμπής.

β) Να βρείτε τη συνθήκη μεταξύ των συντελεστών του, ώστε στο σημείο καμπής να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

➡ γ) Αν έχει δύο θέσεις τοπικών ακροτάτων, τις x_1, x_2 , να αποδείξετε ότι $P''(x_1) + P''(x_2) = 0$.

ΑΠ: β) $\beta^2 = 3\alpha\gamma$

- 554.** ➡ Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο διάστημα $[a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται στο $[a, \beta]$, πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in [a, \beta]$ με εξαίρεση το σημείο επαφής.



ΥΠ: Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) > y$ για $x \neq x_0$ όπου $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ (θα γίνει χρήση ΘΜΤ)

- 555.** ✓ Να υπολογιστούν τα όρια:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- | | |
|---|----------------|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$ | $\frac{3}{2}$ |
| 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$ | 0 |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x^2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x - \eta \mu x}{x^3}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 2x + 2\eta \mu^2 x - 2\eta \mu x}{\sin x - \sin^2 x}$ | 4 |
| 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{\eta \mu^2 x}$ | $\frac{1}{2}$ |

- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^3}$ $\frac{1}{6}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{e^x + e^{-x} - 2}$ $\frac{1}{2}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} + 3x}{3e^{x^2} + x}$ $\frac{1}{3}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \eta\mu x}$ 2
- 11) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln x}{x^3 - 3x + 2}$ $-\frac{1}{6}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + e^{-x})}{x}$ 1
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\eta\mu x)}{\ln x}$ 1
- 14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + \ln x}$ $+\infty$
- 15) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^x)$ 0
- 16) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} \cdot \ln x)$ 0
- 17) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x \cdot \ln x)$ 0
- 18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x \cdot \ln(1 + \frac{1}{x})]$ 1
- 19) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \epsilon\phi x]$ 1
- 20) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot e^{\frac{1}{x}})$ $+\infty$
- 21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 1)]$ 1
- 22) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln^2 x \cdot \ln(x + 1)]$ 0
- 23) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\eta\mu x})$ $+\infty$
- 24) $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x})$ $-\frac{1}{2}$
- 25) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$ ΥΠΟΔ: $x - \ln x = x \cdot (1 - \frac{\ln x}{x})$ $+\infty$
- 26) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x)$ ΥΠΟΔ: Όμοια με την 25) $-\infty$
- 27) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} (\frac{\pi}{x - \pi} - \frac{x - \epsilon\phi x}{x - \pi})$ 0
- 28) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\eta\mu x})$ (α.μ.0⁰) 1

- 29) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\eta \mu x)^{\epsilon \phi x}$ (α.μ. $1^{+\infty}$) 1
- 30) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2)^{\frac{1}{x}}$ (α.μ. ∞^0) 1
- 31) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^{x^2}$ 0
- 32) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^{\eta \mu^2 x}$ 0
- 33) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x)^{\eta \mu x}$ 1

556. ✓ Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\ln x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \cdot \ln(1-x)$ ➔ γ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2e^x - 2} \right)$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 \ln x)$ ε) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{2x}$ ζ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x)^{3x}$

η) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$

ΑΠ: α) $-\infty$, β) $+\infty$, γ) $+\infty$, δ) $+\infty$, ε) $\frac{5}{12}$, ζ) 1, η) e^2

557. Να υπολογιστούν τα όρια $\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{e^x - 1}{\ln(x+1)}}$ και $m = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - \ell}{x}$

ΑΠ: $\ell=1$, $m=\ln a$

558. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} a \cdot \ln x + \mu^2 x, & x \in [1, +\infty) \\ x^2 + \lambda^2 x + a, & x \in (-\infty, 1) \end{cases}$. Αν η f είναι

παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, δείξτε ότι το σημείο $M(\mu, \lambda)$ διαγράφει ισοσκελή υπερβολή (δηλαδή ότι $\mu^2 - \lambda^2 = \kappa^2$, όπου κ κατάλληλος πραγματικός αριθμός).

ΑΠ: $\mu^2 - \lambda^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2$

559. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $|f(x) - \ln x| \leq (x-1)^2$ για κάθε $x > 0$. να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στη θέση $x_0=1$.

ΑΠ: $y=x-1$

560. Δίνεται συνάρτηση $f(x)$ με $\ln(x+1)+1 \leq f(x) \leq e^x$ για κάθε $x > -1$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$.

ΑΠ: $y=x+1$

561. ✓ ➔ Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Δείξτε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 4f(x-2h) + 3f(x-3h)}{h^2} = 6f''(x)$$

562. ✓ Να προσδιοριστούν οι ασύμπτωτες ευθείες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

$y=x$ στο $+\infty$, $y=-x$ στο $-\infty$

2) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

$y=1$, $x=-1$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x-1}, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$

$y=x+1$ στο $-\infty$, $x=0$

4) $f(x) = x^5 - x^3 + 2x + 1$

Δεν έχει

5) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$

$x=0$, $y=0$ στο $-\infty$

6) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

$y=3$, $x=2$

7) $f(x) = \frac{x^4 - x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

$x=1$, $x=2$

8) $g(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 13x + 6}{x^2 + x - 6}$

$y=2x-1$

9) $h(x) = \frac{1-4x}{x^2 - 2x + 2}$

$y=0$

10) $f(x) = \frac{2x - |x+2|}{x-1}$

$y=3$, στο $-\infty$, $y=1$ στο $+\infty$,
 $x=1$

11) $x(t) = \frac{e^t + 1}{e^t - 1}$

$y=1$ στο $+\infty$, $y=-1$ στο $-\infty$,
 $t=0$

563. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες ευθείες της γραφικής παράστασης της f με

$f(x) = 1 + \frac{\eta \mu x}{x}$

ΑΠ: $y=1$

564. ✓ ➔ α) Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x-1)}{e^{x-1}} = 0$.

β) Ποιες πληροφορίες μας δίνει το παραπάνω όριο όσον αφορά στις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sin(x-1)}{e^{x-1}}$;

565. ✓ Έστω οι συναρτήσεις $f_1(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ και $f_2(x) = \ln \sqrt{x+1}$. Αν είναι γνωστό ότι η ευθεία $y=ax+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $F=f_1 \circ f_2$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β .

ΑΠ: $a=0$, $\beta=1$

566. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$ και $g(x) = x^3 + 3ax^2 + 9x$. Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο καμπής της C_g να βρίσκεται στην πλάγια ασύμπτωτη της C_f όταν $x \rightarrow +\infty$.

ΑΠ: $a=0$ ή $a=-2$ ή $a=2$

567. ✓ ➔ Με τη βοήθεια της θεωρίας των ασυμπτωτών να βρεθούν οι $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(ax + \beta - \frac{2x^2 + x - 1}{x + 2} \right) = 0$$

ΑΠ: $a=2, \beta=-3$

568. Υπάρχει συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x - 1] = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2] = 0; \text{ Γιατί;}$$

ΑΠ: Όχι

569. ✓ Να βρεθούν οι $a, \beta \in \mathbb{R}$, αν για τη συνάρτηση f ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax - \beta] = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2] = 0.$$

ΑΠ: $a=0$ και $\beta=2$

570. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{x+1}$ και $g(x) = ax^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right)x$, με $a \in \mathbb{R}^*$.

α) Να βρείτε την τιμή του a , ώστε το ακρότατο της g να βρίσκεται στην κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

β) Αν $a = \frac{1}{2}$, δείξτε ότι υπάρχει κοινό σημείο των C_f και C_g όπου δέχονται κοινή εφαπτομένη.

ΑΠ: α) $a = \frac{1}{2}$, β) το $(0, 0)$

571. ✓ Αν το διάγραμμα της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει ασύμπτωτη την ευθεία

$$y = 2x + 1 \text{ όταν } x \rightarrow +\infty, \text{ να υπολογιστεί το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + 5x^2 + 1}{x^2 f(x) - 2x^3 + 3x^2 + 3}.$$

ΑΠ: $\frac{7}{4}$

572. ✓ Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την

$$\text{ευθεία } y = 5x + 1, \text{ να βρεθεί το όριο } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot f(x) - 3x^2 + x \cdot \eta \mu x}{x^2 \cdot f(x) - 5x^3}.$$

ΑΠ: 2

573. ✓ Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση των συναρτήσεων με τύπους:

1) $f(x) = x^3 - 3x - 2$

2) $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - 2x^2}$

3) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

4) $f(x) = \frac{x^2 + x - x \cdot |x - 1|}{x^2 - x - 6}$

5) $f(x) = |x^4 - 10x^2 + 9|$

6) $f(x) = \frac{x}{(x+1) \cdot (1-x)}$

7) $f(x) = \frac{1}{9} \cdot (x+2)^3 \cdot (x-3)^2$

8) $g(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

9) $f(x) = x \cdot \ln x$

10) $y(x) = \frac{x}{\ln x}$

11) $f(t) = t^2 \cdot e^{-t}$

12) $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + 1}$

13) $h(u) = \frac{u}{1 - |u|}$

574. ✓ α) Δείξτε ότι ισχύει $\ln x \leq x-1$, για κάθε $x>0$.

β) Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x \cdot \ln x - \frac{x^2}{2}$

575. Έστω συνάρτηση $f(x) = ax^3 - 9x^2 + 24x + \beta$, $a \in \mathbb{R}^*$. Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση της f , αν γνωρίζουμε ότι παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=2$ το 20.

ΑΠ: $a=1, \beta=0$

576. Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = \frac{1-a}{2} \cdot x^2 - x + 1$, $a \in \mathbb{R}$.

577. ✓ ➔ Έστω g πολωνυμική συνάρτηση και f συνάρτηση με $f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{g(x)}$.

Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ και οι ευθείες $x=-1$ και $x=3$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f , να μελετηθεί και να γίνει γραφική παράσταση της g .

ΑΠ: $g(x) = x^2 - 2x - 3$ κ.τ.λ.

578. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x(x+1)}{2}$

α) Να βρεθούν τα όρια στα άκρα του πεδίου ορισμού της

β) Να γίνει ο πίνακας μεταβολών της f

γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της

δ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$

ε) Δείξτε ότι $\ln \frac{x(x+1)}{2} \leq \frac{3}{2}(x-1)$, για κάθε $x>0$.

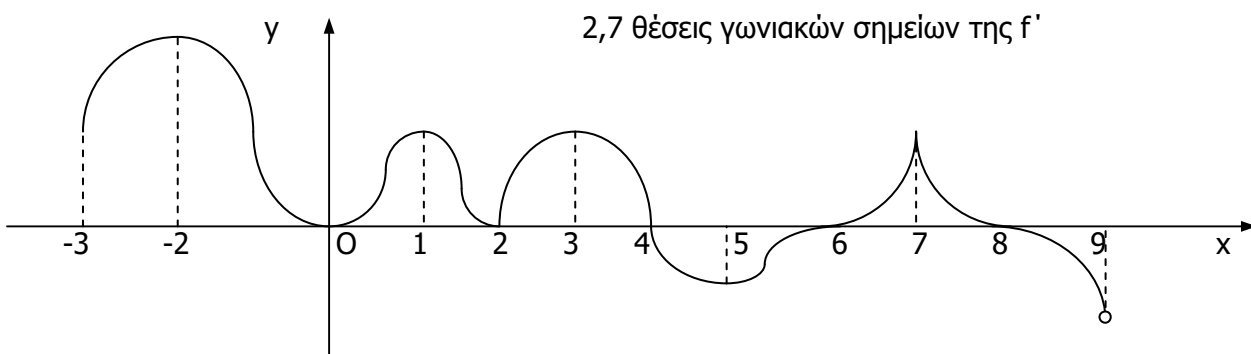
ΑΠ: α) $D_f = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ και τα όρια στα $-\infty, -1, 0, +\infty$ είναι αντίστοιχα $+\infty, -\infty, -\infty, +\infty$

β)

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f		$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$

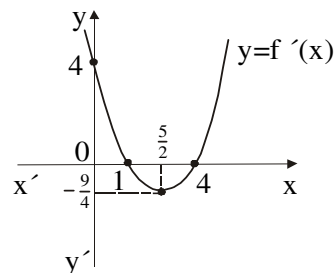
, γ) $R_f = \mathbb{R}$, δ) $y = \frac{3}{2}(x-1)$

579. ✓ Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο διάστημα $[-3, 9)$.



Να γίνει ο πίνακας μεταβολών της f επεξηγώντας σε κάθε περίπτωση τα ευρήματα.

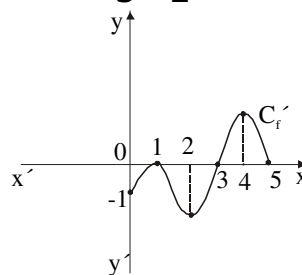
- 580.** ✓ Η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f είναι η παραβολή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
- α) Να κατασκευάσετε πίνακα μονοτονίας της f .
 β) Να βρείτε τον τύπο της f , αν $f(0)=1$.
 γ) Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f .



ΑΠ: α) γν. αύξουσα στα $(-\infty, 1]$ και $[4, +\infty)$ και γν. φθίνουσα στο

$$[1, 4], \beta) f'(x) = x^2 - 5x + 4, f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 1$$

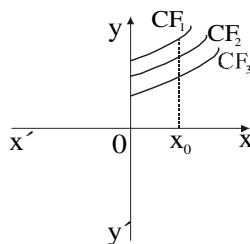
- 581.** Η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο σχήμα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.



	Διάστημα [0, 1]	Διάστημα [1, 2]	Διάστημα [2, 3]	Διάστημα [3, 4]	Διάστημα [4, 5]
Πρόσημο της f'					
Μονοτονία της f					
Μονοτονία της f'					
Είδος κυρτότητας της f					
	$x_0=1$	$x_0=2$	$x_0=3$	$x_0=4$	$x_0=5$
Ακρότατα της f					
Σημεία καμψής της f					

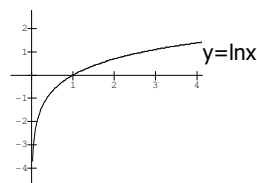
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

1. Η συνάρτηση $F(x)=x\ln x-x$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f(x)=\ln x$ στο $(0, +\infty)$. **Σ** **Λ**
2. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ , έχει μόνο μια παράγουσα στο Δ . **Σ** **Λ**
3. Αν F_1, F_2 είναι δυο παράγουσες μιας συνάρτησης f , τότε αυτές διαφέρουν κατά μια σταθερά c . **Σ** **Λ**
4. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x+1}{x^2+1}$ **δεν** έχει παράγουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. **Σ** **Λ**
5. Ισχύει: $\int f'(x) dx = f(x) + c$. **Σ** **Λ**
6. Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε θα ισχύει: $\int f''(x) dx = f'(x) + c$. **Σ** **Λ**
7. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, θα ισχύει $\int (f(x) \cdot g(x))' dx = f(x) \cdot g(x) + c$. **Σ** **Λ**
8. Οι γραφικές παραστάσεις των παραγουσών F_1, F_2, F_3 μιας συνάρτησης f , που φαίνονται στο διπλανό σχήμα, έχουν παράλληλες εφαπτόμενες σε κάθε σημείο τους με τετμημένη x_0 . **Σ** **Λ**

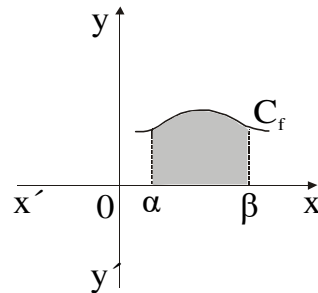


9. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $F(x)=e^x+c$, έχουν εφαπτόμενες παράλληλες σε κάθε σημείο τους με τετμημένη x_0 . **Σ** **Λ**
10. Ισχύει: $\int f(x) dx \cdot \int g(x) dx = \int (f(x) \cdot g(x)) dx$. **Σ** **Λ**
11. Αν f, g δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις, θα ισχύει ο τύπος $\int f'(x) \cdot g'(x) dx = f'(x) \cdot g(x) - \int f''(x) \cdot g(x) dx$. **Σ** **Λ**
12. Για $x < 1$ το $\int \frac{dx}{x-1}$ είναι ίσο με $\ln(1-x)+c$. **Σ** **Λ**

- 13.** Αν $f'(x) = \frac{1}{g'(x)}$, τότε $\int f'(x) \cdot g'(x) dx = x + c$. **Σ Λ**
- 14.** Ισχύει: $\int_a^a f(x) dx = 0$. **Σ Λ**
- 15.** Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$ ισχύει: $\int_a^\beta f(x) dx + \int_\beta^a f(x) dx = 0$. **Σ Λ**
- 16.** Ισχύει ότι $\int_a^\beta \frac{x^2 - 4x}{x^3 + 1} dx = \frac{\int_a^\beta (x^2 - 4x) dx}{\int_a^\beta (x^3 + 1) dx}$. **Σ Λ**
- 17.** Αν f, g συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο $[a, \beta]$, τότε ισχύει: $\int_\beta^a f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int_\beta^a f'(x) \cdot g(x) dx$. **Σ Λ**
- 18.** Αν f συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $[0, a]$, ισχύει: $\int_0^a x \cdot f'(x) dx = a \cdot f(a) - \int_0^a f(x) dx$. **Σ Λ**
- 19.** Ισχύει $\int_2^4 c dx = \int_6^8 c dx$, c σταθερά. **Σ Λ**
- 20.** Ισχύει: $\int_0^1 \eta \mu x dx = 1 - \sigma \nu 1$. **Σ Λ**
- 21.** Αν θεωρήσουμε ότι $e \approx 2,7$, τότε ισχύει $\int_0^1 e^x dx = 1,7$. **Σ Λ**
- 22.** Ισχύει: $\int_0^{2\pi} \eta \mu x dx = 0$. **Σ Λ**
- 23.** Αν $f(t) = \int_a^t x \cdot \sqrt{x^2 - 2x} dx$, τότε $\int_a^t x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x} dx = x \cdot f(t)$. **Σ Λ**
- 24.** Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που παριστάνει το $\int_1^x \frac{1}{t} dt$. **Σ Λ**
- 25.** Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(10)=100$, τότε ισχύει: $100 = f(0) + \int_0^{10} f'(x) dx$. **Σ Λ**
- 26.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ και $f(0)=f(1)$, τότε $\int_0^1 f'(x) dx = 0$. **Σ Λ**



27. Το εμβαδόν του σκιασμένου τμήματος είναι ίσο με $\int_a^b f(x) dx + c$, $c \neq 0$.



Σ Λ

28. Αν $A = \int_0^2 f(x) dx$, τότε:

α) $\int_0^2 f(\omega) d\omega = A$

Σ Λ

β) $\int_2^0 f(t) dt = -A$

Σ Λ

γ) $\int_0^2 (3 \cdot f(z) - 4) dz = 3A - 8$

Σ Λ

29. Αν $a > b$, τότε $\int_a^b (e^x + 1) dx \geq 0$.

Σ Λ

30. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$, τότε ισχύει $\int_1^{\ln 2} f(x) dx > 0$.

Σ Λ

31. Αν $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ τότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Σ Λ

32. Αν f, g συνεχείς στο $[a, b]$ με $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε θα ισχύει ότι $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Σ Λ

33. Αν η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$, τότε ισχύει ότι $\int_1^3 f(x) dx < \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx$.

Σ Λ

34. Η ιδιότητα του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x) dx = \int_a^y f(x) dx + \int_y^b f(x) dx$, ισχύει μόνο εφόσον $a < y < b$.

Σ Λ

35. Αν f, g συνεχείς στο $[a, b]$ με $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.

Σ Λ

36. Αν $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Σ Λ

37. Ισχύει: $\int_{\ln a}^{\ln b} e^x dx = b - a$, $a, b > 0$.

Σ Λ

38. Ισχύει: $\int_1^{x^2} \frac{1}{t} dt = 2 \ln x, x > 0.$ Σ Λ

39. Ισχύει: $\int_{\frac{n}{2}}^n (1 - 4 \sin^3 x) dx > 0.$ Σ Λ

40. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ισχύει: $(\int_a^x f(t) dt)' = f(x).$ Σ Λ

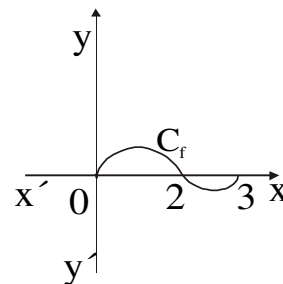
41. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ισχύει: $(\int_x^a f(t) dt)' = -f(x).$ Σ Λ

~~42. Αν f συνεχής και g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ισχύει:
 $(\int_a^{g(x)} f(t) dt)' = f(g(x)) \cdot g'(x).$ Σ Λ~~

~~43. Αν f συνεχής και g, h παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ ισχύει:
 $(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt)' = f(h(x)) \cdot h'(x) + f(g(x)) \cdot g'(x).$ Σ Λ~~

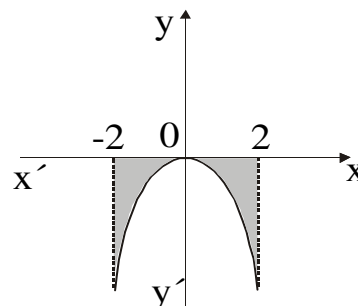
44. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$, ισχύει ο τύπος $(\int_x^a f(t) dt)' = -(\int_a^x f(t) dt)'$. Σ Λ

45. Για τη συνάρτηση του διπλανού σχήματος ισχύει ότι:
 $\int_0^2 f(x) dx < \int_0^3 f(x) dx.$

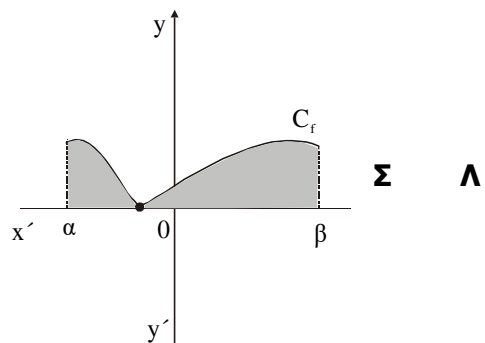


46. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε το $\int_{\beta}^a f(x) dx$ εκφράζει το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f , του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=a, x=\beta$. Σ Λ

47. Για το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου που φαίνεται στο σχήμα, ισχύει: $E = -\int_{-2}^2 f(x) dx.$

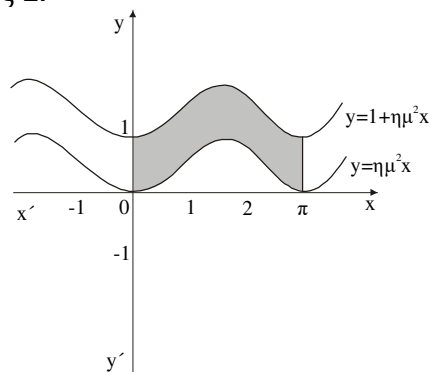
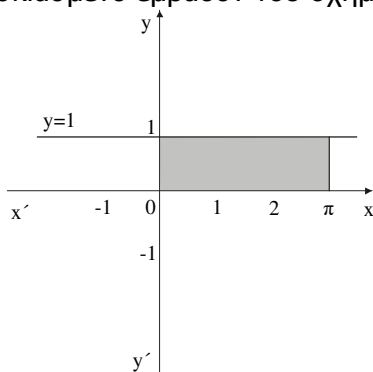


48. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με $E = \int_a^{\beta} f(x) dx$.



49. Το σκιασμένο εμβαδόν του σχήματος 1 είναι μεγαλύτερο από το σκιασμένο εμβαδόν του σχήματος 2.

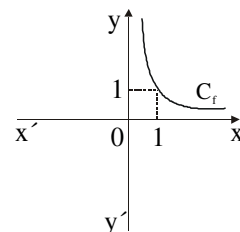
Σ Λ



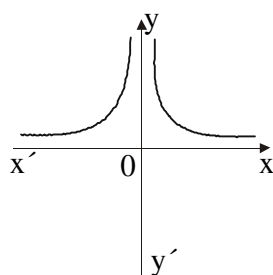
Σχήμα 1

Σχήμα 2

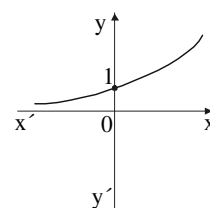
50. Αν η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε μία παράγουσά της μπορεί να έχει γραφική παράσταση την



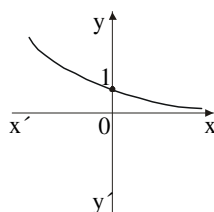
Α.



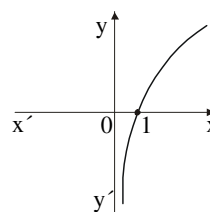
Β.



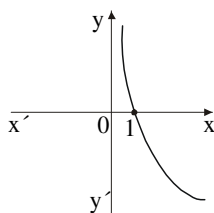
Γ.



Δ.

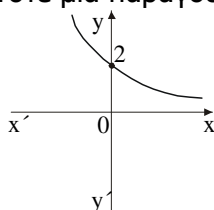


Ε.

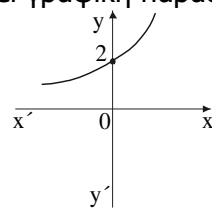


51. Αν $f(x)=e^x$, τότε μία παράγουσα της f μπορεί να έχει γραφική παράσταση την

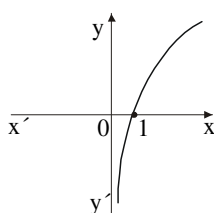
Α.



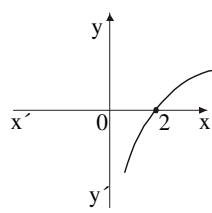
Β.



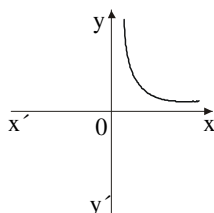
Γ.



Δ.

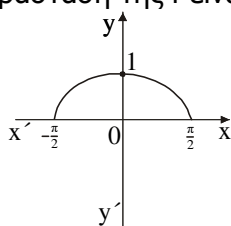


Ε.

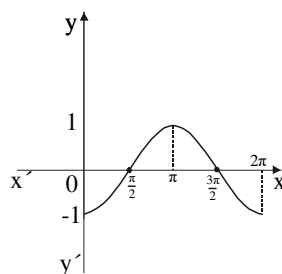


52. Αν $F(x)=-\eta\mu x$ είναι μία παράγουσα της συνάρτησης f στο $[0, 2\pi]$, τότε η γραφική παράσταση της f είναι

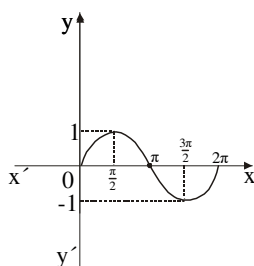
Α.



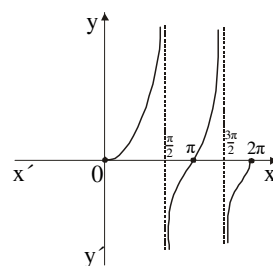
Β.



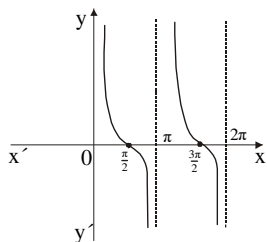
Γ.



Δ.

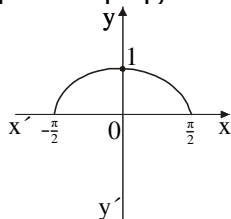


Ε.

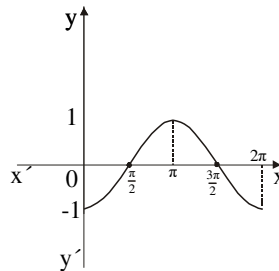


- 53.** Αν $F(x) = -\eta\mu x$ είναι μία παράγουσα της συνάρτησης f στο $[0, 2\pi]$, τότε η γραφική παράσταση της f είναι

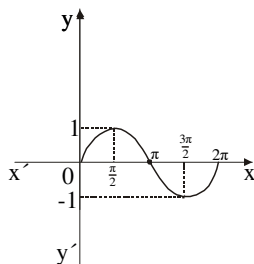
Α.



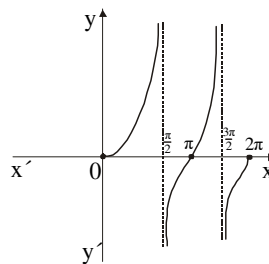
Β.



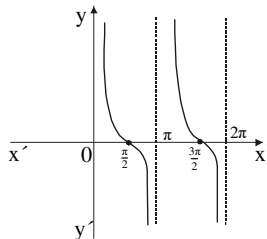
Γ.



Δ.

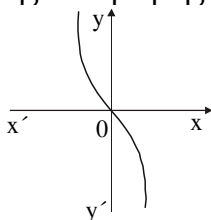


Ε.

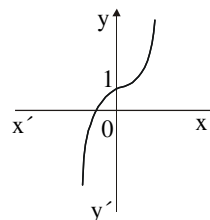


- 54.** Αν $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}$ είναι μία παράγουσα της συνάρτησης f , τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι

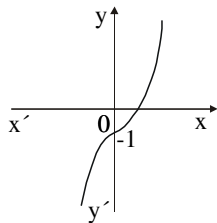
Α.



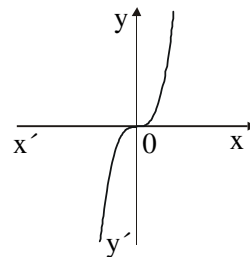
Β.



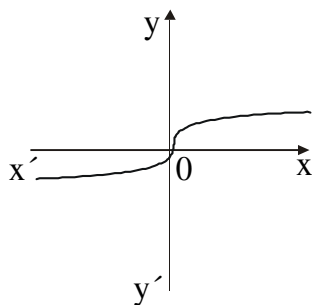
Γ.



Δ.

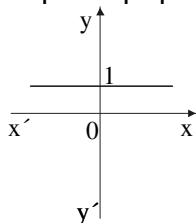


Ε.

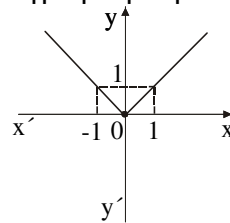


55. Αν $f(x)=1$, τότε μία παράγουσα της f μπορεί να έχει γραφική παράσταση την

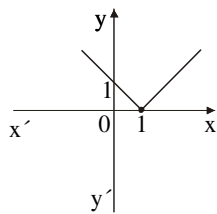
Α.



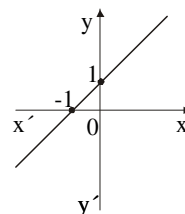
Β.



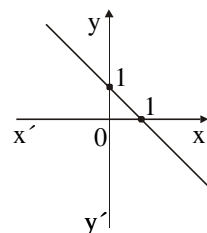
Γ.



Δ.



Ε.



56. Για τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ισχύει

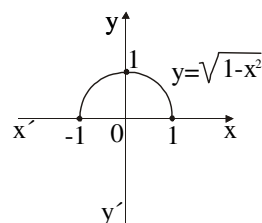
Α. $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$

Β. $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$

Γ. $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{\pi}{2}$

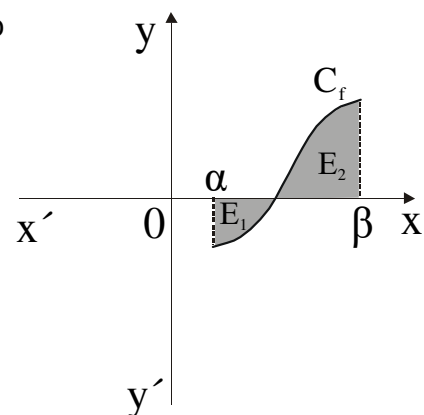
Δ. $\int_{-1}^1 f(x) dx = \pi$

Ε. $\int_{-1}^1 f(x) dx = \pi^2$

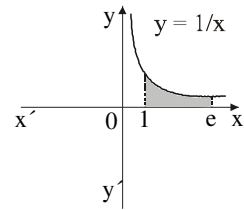


- 57.** Το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ
- A.** είναι αριθμός
 - B.** είναι μια παράγουσα της f
 - Γ.** είναι το σύνολο των παραγουσών της f
 - Δ.** είναι ίσο με $f'(x)$
 - E.** είναι ίσο με $f(x)+c, c \in \mathbb{R}$
- 58.** Έστω f συνεχής σε διάστημα Δ και $a, \beta, \gamma \in \Delta$. Τότε ισχύει
- A.** $\int_a^\beta f(x) dx = \int_\gamma^a f(x) dx + \int_a^\beta f(x) dx$
 - B.** $\int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\beta f(x) dx + \int_\beta^a f(x) dx = 0$
 - Γ.** $\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\beta^\gamma f(x) dx$
 - Δ.** $\int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\beta f(x) dx + \int_a^\beta f(x) dx = 0$
 - E.** $\int_a^\gamma f(x) dx = \int_a^\beta f(x) dx + \int_\beta^\gamma f(x) dx$
- 59.** Μία παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = \frac{3x^2 + \frac{1}{x}}{1 + e^x}, x > 0$, είναι η συνάρτηση
- A.** $F_1(x) = \frac{x^3 + \ln x}{x + e^x}$
 - B.** $F_2(x) = \frac{6x - \frac{1}{x^2}}{e^x}$
 - Γ.** $F_3(x) = \int_a^\beta \left(\frac{3x^2 + \frac{1}{x}}{1 + e^x} \right)' dx$
 - Δ.** $F_4(x) = \int_{2004}^x \frac{3t^2 + \frac{1}{t}}{1 + e^t} dt$
 - E.** καμία από τις προηγούμενες
- 60.** Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $a \in \Delta$, τότε μία παράγουσα της f στο Δ είναι η συνάρτηση
- A.** $F(x) = \int_{f(x)}^a f(t) dt$
 - B.** $F(x) = \int_a^\beta f(x) dx$
 - Γ.** $F(x) = \int_a^{f(x)} f(t) dt$
 - Δ.** $F(x) = \int f(t) dt$
 - E.** $F(x) = \int_a^x f(u) du$
- 61.** Η παράγωγος της συνάρτησης $F(x) = \int_1^{e^x} \ln t dt$ ισούται με
- A.** 0
 - B.** $\frac{1}{x} \cdot e^x$
 - Γ.** e^x
 - Δ.** $x \cdot e^x$
 - E.** $\ln x \cdot e^x$

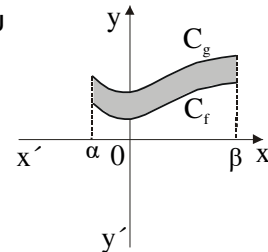
- 62.** Το ολοκλήρωμα $I = \int_a^{\beta} (f(x) \cdot g(x))' dx$ ισούται με
A. $f'(\beta) \cdot g(\beta) - f(a) \cdot g'(a)$ **B.** $f(\beta) \cdot g(\beta) - f(a) \cdot g(a)$
Γ. $(f \cdot g)(a) - (f \cdot g)(\beta)$ **Δ.** $f(\beta) \cdot g'(\beta) - f'(a) \cdot g(a)$
E. $2(\beta - a)$
- 63.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε η παράσταση $(\int_a^{\beta} f(x) dx)'$ είναι ίση με
A. $f(x)$ **B.** $f(\beta) - f(a)$ **Γ.** $(\beta - a) \cdot f(x)$ **Δ.** 0
E. $F(\beta) - F(a)$ όπου $F(x)$ παράγουσα της f
- 64.** Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα $u(t) = 2t$ m/sec. Κατά τη διάρκεια του νιοστού δευτερολέπτου το σώμα διάνυσε 9 μέτρα. Ισχύει:
A. $v=1$ **B.** $v=3$ **Γ.** $v=4$ **Δ.** $v=5$ **E.** $v=10$
- 65.** Αν $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x dx$ και $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \nu^2 x dx$ και $K = I + J$, τότε το K είναι ίσο με
A. 1 **B.** 2 **Γ.** π **Δ.** 2π **E.** $\frac{\pi}{2}$
- 66.** Το ολοκλήρωμα $I = \int_a^{\beta} f'(g(x)) \cdot g'(x) dx$ είναι ίσο με
A. $f'(g(\beta)) - f'(g(a))$ **B.** $f(g'(\beta)) - f(g'(a))$ **Γ.** $f(g(\beta)) - f(g(a))$ **Δ.** $g(\beta) - g(a)$
E. $f(\beta) - f(a)$
- 67.** Το $\int_a^{\beta} e^{x^2} dx$ είναι πάντα
A. θετικό **B.** αρνητικό **Γ.** ίσο με το 0
Δ. θετικό αν $\beta > a$ **E.** είναι θετικό αν $\beta < a$
- 68.** Για τη συνάρτηση f του διπλανού σχήματος το $\int_a^{\beta} f(x) dx$ είναι ίσο με
A. $E_1 + E_2$ **B.** $\frac{1}{2}(E_2 - E_1)$
Γ. $2E_1 + E_2$ **Δ.** $\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$ **E.** $E_2 - E_1$



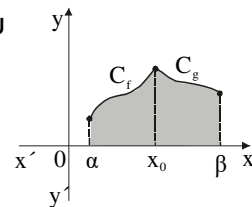
- 69.** Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με
A. e **B.** $e-1$ **Γ.** 1
Δ. $1-e$ **E.** $2-e$



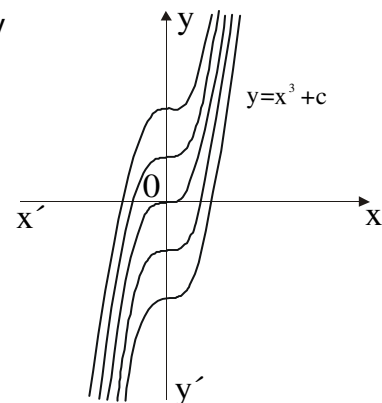
- 70.** Αν $g(x)=f(x)+1$, το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με
A. $a \cdot f(\beta) - \beta \cdot f(a)$ **B.** $\beta - a$ **Γ.** $a \cdot \beta$
Δ. 1 τ.μ.
E. κανένα από τα προηγούμενα



- 71.** Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου που φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι ίσο με
A. $\int_a^\beta (g(x) \cdot f(x)) dx$ **B.** $\int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$
Γ. $\int (f(x) - g(x)) dx$ **Δ.** $\int_a^{x_0} f(x) dx - \int_\beta^{x_0} g(x) dx$
E. τίποτα από τα παραπάνω

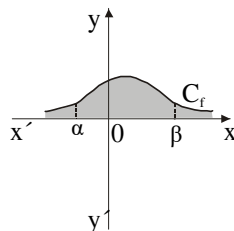


- 72.** Οι καμπύλες του σχήματος παριστάνουν συναρτήσεις του συνόλου
A. $\int x^3 dx$ **B.** των παραγουσών της $f(x)=3x^2$
Γ. $\int x^4 dx$ **Δ.** $\int (3x^2 + 2) dx$
E. τίποτα από τα παραπάνω

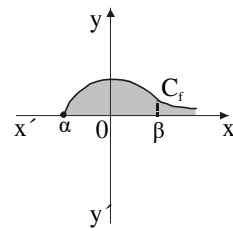


- 73.** Το $\int_\beta^a f(x) dx$ μας δίνει το εμβαδόν του σκιασμένου τμήματος στο σχήμα

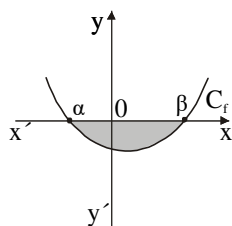
A.



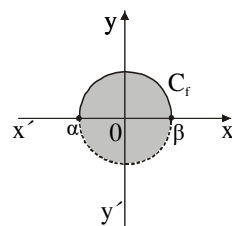
B.



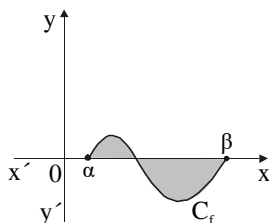
Γ.



Δ.



Ε.

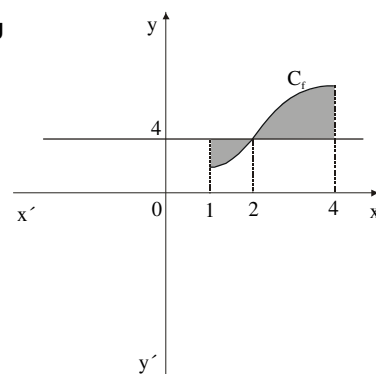


74. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με

Α. $\int_1^4 f(x) dx$ Β. $\int_1^4 (-f(x)) dx$

Γ. $\int_1^4 (f(x)-4) dx$ Δ. $\int_1^4 (4-f(x)) dx$

Ε. $\int_1^2 (4-f(x)) dx + \int_2^4 (f(x)-4) dx$



75. Οι συναρτήσεις f και g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από τις παρακάτω προτάσεις:

I. $f'(x) \leq g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

II. $f''(x) \leq g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

III. $\int_0^2 f(x) dx \leq \int_0^2 g(x) dx$

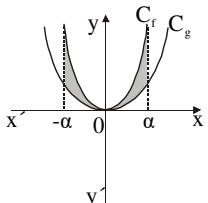
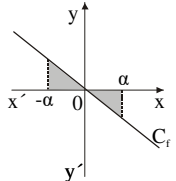
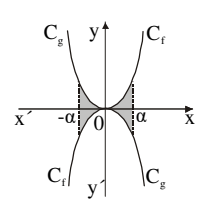
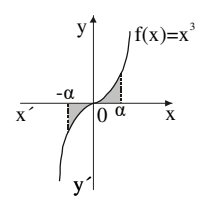
αληθεύουν

Α. όλες Β. καμία Γ. μόνο η I Δ. μόνο η III Ε. μόνο οι I και II

76. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α του παρακάτω πίνακα με την παράγωγό της στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $F(x) = \int_{-1}^{x+3} \eta \mu(t+2) dt$	α. $f(x) = -\eta \mu(x+2)$
2. $F(x) = \int_a^{x^2} \ln(u+1) du$	β. $f(x) = \eta \mu(x+2)$
3. $F(x) = \int_0^x t \cdot \ln(t^2+1) dt$	γ. $f(x) = 2x \cdot \ln(x^2+2)$
4. $F(x) = \int_{x+2}^{-1} \eta \mu t dt$	δ. $f(x) = \eta \mu(x+5)$
5. $F(x) = -\int_{x^2}^1 \ln(u+2) du$	ε. $f(x) = x \cdot \ln(x^2+1)$
	ζ. $f(x) = \ln(x^2+2)$
	η. $f(x) = 2x \cdot \ln(x^2+1)$
	θ. $f(x) = \eta \mu(x+3)$

77. Να αντιστοιχίσετε το εμβαδόν κάθε χωρίου που φαίνεται στη στήλη Α του παρακάτω πίνακα στον τύπο που το υπολογίζει και υπάρχει στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. 	α. $E = \int_{-a}^0 (g(x)-f(x)) dx + \int_0^a (f(x)-g(x)) dx$ β. $E = \int_{-a}^0 (f(x)-g(x)) dx + \int_0^a (g(x)-f(x)) dx$
2. 	γ. $E = \int_{-a}^a (f(x)-g(x)) dx$ δ. $E = \int_{-a}^a f(x) dx$
3. 	ε. $E = -2 \int_{-a}^0 f(x) dx$ ζ. $E = \int_{-a}^0 f(x) dx - \int_0^a f(x) dx$
4. 	

78. Στη στήλη Α του παρακάτω πίνακα φαίνονται οι παράγουσες κάποιων συναρτήσεων και στη στήλη Β οι συναρτήσεις αυτές. Να γίνει αντιστοίχιση.

Στήλη Α	Στήλη Β
παράγουσα F	συνάρτηση f
1. $\frac{1}{3} \sin 3x + 3$ 2. $e^{\phi x} + \ln 2$ 3. $\ln 3x - 2 + 2$ 4. e^{2x+3} 5. 2^x 6. $\frac{2^x}{\ln 2}$	α. $\frac{1}{3} \eta \mu 3x$ β. $2^x \ln 2$ γ. $\frac{1}{\sin^2 x}$ δ. e^{2x+3} ε. $-\eta \mu 3x$ ζ. $\frac{3}{3x-2}$ η. $\frac{2}{3x-2}$ θ. 2^x ι. $2e^{2x+3}$

79. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράγουσα F που υπάρχει στη στήλη Α του παρακάτω πίνακα στην αντίστοιχη συνάρτηση f της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
παράγουσα F	συνάρτηση f
1. $F(x)=x+c$ 2. $F(x)=2\sqrt{x}+c$ 3. $F(x)=\varepsilon\varphi x+c$ 4. $F(x)=-\ln \sigma\upsilon\nu x +c$ 5. $F(x)=\frac{1}{x}+c$ 6. $F(x)=x\ln x-x+c$	α. $f(x)=\varepsilon\varphi x$ β. $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ γ. $f(x)=e^x$ δ. $f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ ε. $f(x)=1$ ζ. $f(x)=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ η. $f(x)=\ln x$ θ. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ι. $f(x)=\sigma\varphi x$

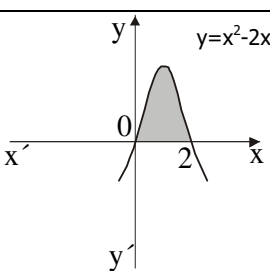
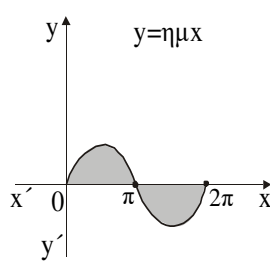
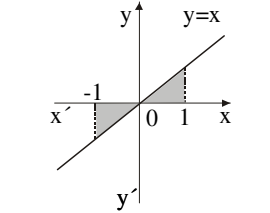
80. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
1. $\int_0^1 (2x+5) dx$	
2. $\int_0^1 (x^3+x^2+1) dx$	
3. $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} \right) dx$	
4. $\int_1^e \left(e^x + \frac{1}{x} \right) dx$	
5. $\int_0^\pi (2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x) dx$	
6. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\eta\mu^2 x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right) dx$	
7. $\int_{-1}^0 (x+1)^9 dx$	
8. $\int_2^3 (x^2-3x+5)^2 \cdot (2x-3) dx$	
9. $\int_0^\pi \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x dx$	
10. $\int_{-1}^1 x \cdot e^{x^2+1} dx$	
11. $\int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx$	
12. $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$	
13. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$	

81. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Συνάρτηση f	Μια παράγουσα F της f
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = \eta\mu 2x$	
$f(x) = e^{3x}$	
$f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$	
$f(x) = \ln x$	
$f(x) = \frac{1}{x-1}$	
$f(x) = x^3 + 1$	
$f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$	
$f(x) = c$	

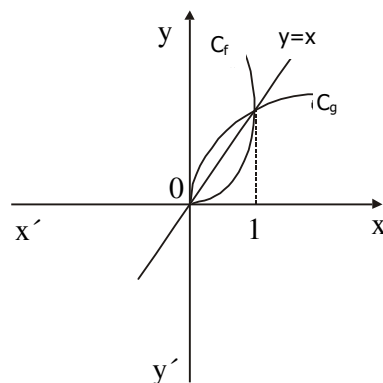
82. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Συνάρτηση	Εμβαδόν σκιασμένου χωρίου
	
	
	

- 83.** Τα παρακάτω ολοκληρώματα αναφέρονται στις συναρτήσεις του διπλανού σχήματος. Να τα γράψετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.

$$E_1 = \int_0^1 x \, dx, \quad E_2 = \int_0^1 f(x) \, dx$$

$$E_3 = \int_0^1 g(x) \, dx, \quad E_4 = \int_0^1 (x - g(x)) \, dx$$



- 84.** Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $G(x) = \frac{1}{a} F(ax + \beta)$ είναι μια παράγουσα της $h(x) = f(ax + \beta)$, $a \neq 0$ στο $\mathbb{R}$.

- 85.** ✓ Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- 1) $\int (2x^2 - 5x + \frac{7}{2}) \, dx$ $2\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + \frac{7}{2}x + c$
- 2) $\int_0^1 (2x^2 - 5x + \frac{7}{2}) \, dx$ $\frac{5}{3}$
- 3) $\int \frac{dx}{x^3}$ $-\frac{1}{2x^2} + c$
- 4) $\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^3}$ $\frac{5}{72}$
- 5) $\int \frac{x^3 - x + 2}{x^2} \, dx$ $\frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{2}{x} + c$
- 6) $\int_1^2 \frac{x^3 - x + 2}{x^2} \, dx$ $\frac{5}{2} - \ln 2$
- 7) $\int \frac{dx}{x+2}$ $\ln|x+2| + c$
- 8) $\int_0^1 \frac{dx}{x+2}$ $\ln 3 - \ln 2$
- 9) $\int \frac{dx}{3x-1}$ $\frac{\ln|3x-1|}{3} + c$
- 10) $\int_1^2 \frac{dx}{3x-1}$ $\frac{\ln 5 - \ln 2}{3}$
- 11) $\int \frac{dt}{3-t}$ $-\ln|3-t| + c$
- 12) $\int_0^{-1} \frac{dt}{3-t}$ $\ln \frac{3}{4}$
- 13) $\int (1-x^2) \cdot \sqrt[3]{x} \, dx$ $\frac{3x \cdot \sqrt[3]{x}}{4} - \frac{3x^3 \cdot \sqrt[3]{x}}{10} + c$
- 14) $\int_1^2 (1-x^2) \cdot \sqrt[3]{x} \, dx$ $-\frac{9 \cdot (2\sqrt[3]{2} + 1)}{20}$

- 15) $\int (t^3 + 1)^3 \cdot 3t^2 dt$ $\frac{(t^3 + 1)^4}{4} + c$
- 16) $\int_{-1}^1 (t^3 + 1)^3 \cdot 3t^2 dt$ 4
- 17) $\int (7x - 1)^{1990} dx$ $\frac{(7x - 1)^{1991}}{13937} + c$
- 18) $\int_0^1 (7x - 1)^{1990} dx$ $\frac{6^{1991} + 1}{7 \cdot 1991}$
- 19) $\int (2 - 3x)^8 dx$ $-\frac{(2x - 3)^9}{27} + c$
- 20) $\int_0^1 (2 - 3x)^8 dx$ 19
- 21) $\int \frac{2}{(x + 2)^{300}} dx$ $-\frac{2}{299 \cdot (x + 2)^{299}} + c$
- 22) $\int_0^{-1} \frac{2}{(x + 2)^{300}} dx$ $\frac{2^{-298} - 2}{299}$
- 23) $\int \sqrt[3]{1 - y} dy$
- 24) $\int_0^1 \sqrt[3]{1 - y} dy$ $\frac{v}{v + 1}$
- 25) $\int t \cdot \sqrt{1 - xt^2} dt, x \neq 0$
- 26) $\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}} t \cdot \sqrt{1 - xt^2} dt, x \neq 0$ 0
- 27) $\int (x - \frac{3}{2}) \cdot \sqrt{x^2 - 3x + 2} dx$
- 28) $\int_2^3 (x - \frac{3}{2}) \cdot \sqrt{x^2 - 3x + 2} dx$ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

86. ✓ ΔΕΙΞΤΕ ΟΤΙ:

- 1) $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1) \cdot (x+7)} = \frac{\ln \frac{6}{5}}{6}$
- 2) $\int_2^3 \frac{4x-5}{x^2-1} dx = \frac{17}{2} \ln 2 - \frac{9}{2} \ln 3$
- 3) $\int_3^5 \frac{x+2}{x^2+2x-8} dx = \frac{1}{3} \ln \frac{81}{7}$
- 4) $\int_1^2 \frac{x+2}{x^2+4x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{12}{5}$
- 5) $\int_2^3 \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x} dx = 1 + \ln \frac{27}{16}$
- ➔ 6) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x+1}} = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + c, c \in \mathbb{R}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Οι 5) και 6) είναι εκτός ύλης

87. ΔΕΙΞΤΕ ΟΤΙ:

- 1) $-\int_0^1 \frac{7-2x^3+x}{x-2} dx = \frac{29}{3} - 7 \ln 2$ 2) $\int_3^6 \frac{-5x^4-5x^3+22}{x^2+x-2} dx = 14 \ln 2 - 2 \ln 5 - 345$
- 3) $\int \frac{x^3}{x^2-7x+10} dx = \frac{x^2}{2} + 7x - \frac{8}{3} \ln |x-2| + \frac{125}{3} \ln |x-5| + c, c \in \mathbb{R}$

88. ✓ Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1) $\int_{-2}^2 |x^2 + x - 2| dx$

$\frac{19}{3}$

2) $\int_0^x t \cdot |t| dt$ (ΥΠΟΔ: Δύο περιπτώσεις αν $x \geq 0$ ή $x < 0$)

$\frac{x^2 \cdot |x|}{3}$

3) $\int_{-3}^2 (2|x-1| - 3|x+2|) dx$

$-\frac{17}{2}$

4) $\int_{-\frac{1}{2}}^2 |x^2 - 1| dx$

$\frac{59}{24}$

5) $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx$

4

6) $\int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$

$e + \frac{1}{e} - 2$

7) $\int_{-1}^2 (f \circ g)(x) dx$, αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{|x-1|}$

$\frac{5}{2}$

89. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1) $\int_{-1}^0 \frac{3x+2}{3x^2+4x+7} dx$

$\frac{1}{2} \ln \frac{7}{6}$

2) $\int_1^{16} \sqrt{x} \sqrt{x} dx$

$\frac{508}{7}$

➡ 3) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}} dx$ $2 \cdot \left(\frac{(x+1)^2 \sqrt{x+1}}{5} - \frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3} + 2\sqrt{x+1} \right) + c$

4) $\int_{-1}^1 f(x) dx$ με $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x, & x < 0 \\ x^3 + x, & x \geq 0 \end{cases}$

$\frac{11}{12}$

5) $\int_{-4}^4 f(x) dx$ με $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

0

90. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \lambda x \cdot e^{x-1} + 2, & x \leq 1 \\ x^2 - \lambda x + 3, & x > 1 \end{cases}$.

α) Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής.

β) Για την τιμή αυτή του λ να υπολογιστεί το $\int_0^3 f(x) dx$.

ΑΠ: α) $\lambda=1$, β) $\frac{1}{e} + \frac{38}{3}$

91. ✓ Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1) $\int e^{\phi x} dx$

$-\ln |\sin x| + c$

2) $\int \eta \mu^2 x dx$

$\frac{x}{2} - \frac{\eta \mu^2 x}{4} + c$

3) $\int \eta \mu^3 x dx$

$-\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + c$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \eta \mu x dx$

1

- 5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx$ **$\frac{3}{16}$**
- 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^6 x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx$ **$\frac{1}{7}$**
- 7) $\int \sigma\upsilon\nu^4 x \, dx$ **$\frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\eta\mu^4 x}{32} + \frac{\eta\mu^2 x}{4} + c$**
- 8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + \frac{\pi}{3}) \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \, dx$ **-1**
- 9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \eta\mu x \, dx$ **$\pi - 2$**
- 10) $\int \eta\mu(ax + \beta) \, dx, a \neq 0$
- 11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\eta\mu x} \, dx$ **e-1**
- 12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x) \cdot (\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x) \, dx$
- 13) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} \, dx$ **$\frac{1}{2}$**
- 14) $\int \epsilon\varphi^2 x \, dx$ **$\epsilon\varphi x - x + c$**
- 15) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \epsilon\varphi^2 x}{\epsilon\varphi x} \, dx$ **$\frac{1}{2} \ln 3$**
- 16) $\int \sigma\varphi x \, dx$ **$\ln |\eta\mu x| + c$**
- 17) $\int (\epsilon\varphi x + \epsilon\varphi^3 x) \, dx$ **$\frac{\epsilon\varphi^2 x}{2} + c$**
- 18) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x} \, dx$ **$\ln(1 + \sqrt{2})$**
- 19) $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \, dx$ **$\frac{1}{2} \ln(\sigma\upsilon\nu^2 x) + c$**
- 20) $\int \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x} \, dx$ **$-\ln |\sigma\upsilon\nu x| + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{2} + c$**
- 21) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \, dx$ **$\ln 2$**
- 22) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu 2x} \, dx$
- 23) $\int \frac{\eta\mu^3 x}{2 + \sigma\upsilon\nu x} \, dx$ **$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{2} - 2\sigma\upsilon\nu x + 3\ln |\sigma\upsilon\nu x + 2| + c$**
- ➡ 24) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{(1 + 2\sigma\upsilon\nu x)^2} \, dx$ **$\frac{1}{3}$**
- 25) $\int \frac{x^2 dx}{\sigma\upsilon\nu^2(x^3)}$ **$\frac{1}{3} \epsilon\varphi(x^3) + c$**

$$26) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{\eta \mu x}} dx \quad 2 - \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 27) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sin^2 x} dx \quad \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$28) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^5 x dx \quad \frac{8}{15}$$

(ΥΠΟΔ: Δοκιμάστε δύο τρόπους: α) ΑΜ και β) ΠΟ γράφοντας το $\eta \mu^5 x$ ως $\eta \mu^4 x \cdot (-\sin x)'$ και όταν χρειαστεί χρησιμοποιείτε ότι $\sin^2 x = 1 - \eta \mu^2 x$)

$$\Rightarrow 29) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot e^x \cdot \eta \mu x dx \quad \frac{1}{4} (\pi \cdot e^{\frac{\pi}{2}} - 2)$$

$$30) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x \cdot \sin^2 x dx \quad \frac{\pi}{16}$$

$$31) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^6 x dx$$

(ΥΠΟΔ: Χρησιμοποιείτε ΠΟ όπως στο I₂₈)

$$32) \int \eta \mu^4 x \cdot \sin^2 x dx$$

(ΥΠΟΔ: $\sin^2 x = 1 - \eta \mu^2 x$)

$$33) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu^5 x}{\sin^4 x} dx \quad \frac{5}{6}$$

$$34) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\eta \mu^2 x} dx \quad \frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{2}$$

(ΥΠΟΔ: $\sin^4 x = (1 - \eta \mu^2 x)^2$)

$$35) \int \epsilon \varphi^5 x dx \quad \frac{\epsilon \varphi^4 x}{4} - \frac{\epsilon \varphi^2 x}{2} - \ln |\sin x| + c$$

$$36) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\eta \mu x \cdot \sin x} \quad \frac{1}{2} \ln 3$$

(ΥΠΟΔ: $1 = \eta \mu^2 x + \sin^2 x$)

$$37) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\eta \mu^2 x \cdot \sin^2 x} \quad \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(ΥΠΟΔ: $1 = \eta \mu^2 x + \sin^2 x$)

$$38) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta \mu x \cdot \sin^2 x} dx$$

(ΥΠΟΔ: $1 = \eta \mu^2 x + \sin^2 x$)

$$39) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\eta \mu x + \sin x)^2}{\eta \mu^2 x \cdot \sin^2 x} dx \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} + \ln 3$$

$$\Rightarrow 40) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^4 x} dx \quad \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 41) \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx \quad 2\sqrt{2}$$

$$42) \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx \quad 4\sqrt{2}$$

$$43) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - \eta\mu 2x} \, dx \quad \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} (\text{ΥΠΟΔ: } \sqrt{1 - \eta\mu 2x} &= \\ \sqrt{1 - \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)} &= \sqrt{2\eta\mu^2(\frac{\pi}{4} - x)} = \\ \sqrt{2} \cdot |\eta\mu(\frac{\pi}{4} - x)| \end{aligned}$$

$$44) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x \cdot \sin^3 x \, dx \quad \frac{2}{15}$$

$$45) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cdot \sin 2x \, dx$$

$$46) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x \cdot \eta\mu x \, dx$$

$$47) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cdot \sin x}{x \cdot \eta\mu x + \sin x} \, dx \quad \ln \frac{\pi}{2}$$

- 92.** Με τη βοήθεια των τύπων $2\eta\mu\alpha \cdot \sin\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta)$,
 $2\sin\alpha \cdot \sin\beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$, $2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)$
να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu 5x \cdot \sin 3x \, dx \quad \frac{1}{4}$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin 3x \, dx \quad 0$$

$$3) \int \eta\mu 4x \cdot \eta\mu 5x \, dx$$

$$4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \eta\mu x \, dx \quad \frac{3}{4}$$

$$5) \int_0^{\pi} \eta\mu^2 \frac{x}{4} \cdot \sin \frac{x}{2} \, dx \quad 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x \cdot \eta\mu 2x \cdot \sin 3x \, dx \quad -\frac{\pi}{8}$$

(ΥΠΟΔ: Μετατρέψτε το πρώτο γινόμενο σε άθροισμα, στη συνέχεια εκτελέστε επιμεριστική ιδιότητα και μετά πάλι το ίδιο)

- 93.** ✓ Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$1) \int 3^x \, dx$$

$$2) \int_1^2 3^x \, dx \quad \frac{6}{\ln 3}$$

$$3) \int (3e^x + 1) \, dx$$

$$4) \int_0^1 (3e^x + 1) \, dx \quad 3e - 2$$

$$5) \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$$

$$6) \int_1^2 \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$$

$$\ln(e^2 + 1) - 1$$

$$7) \int e^x \cdot x dx$$

$$8) \int_0^1 e^x \cdot x dx$$

$$9) \int e^x \cdot (x^2 - 5x + 1) dx$$

$$e^x \cdot (x^2 - 7x + 8) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$10) \int 3^{x^3} \cdot x^2 dx$$

$$11) \int_0^1 (e^{2x} - 1)^2 dx$$

$$\frac{e^4 - 4e^2 + 7}{4}$$

$$12) \int_0^1 e^{-2x} \cdot x \cdot (x + 1) dx$$

$$\frac{e^2 - 4}{2e^2}$$

$$13) \int_0^1 \frac{2x + 1}{e^x} dx$$

$$3 - \frac{5}{e}$$

$$14) \int_0^\pi e^x \cdot \eta \mu x dx$$

$$\frac{e^\pi + 1}{2}$$

$$15) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x) dx$$

$$16) \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{1 + e^x} \quad (\text{ΥΠΟΔ: Αλλαγή μεταβλ})$$

$$2\ln 2 - \ln 3$$

$$\Rightarrow 17) \int_0^1 \frac{1 + e^{x+1}}{1 + e^x} dx$$

$$1 + (e - 1) \cdot [\ln(1 + e) - \ln 2]$$

$$18) I_1 = \int_0^\pi e^{-2x} \cdot \eta \mu 2x dx, \quad I_2 = \int_0^\pi e^{-2x} \cdot \sigma \upsilon \nu 2x dx$$

$$I_1 = \frac{e^{2\pi} - 1}{4e^{2\pi}}, \quad I_2 = \frac{e^{2\pi} - 2}{4e^{2\pi}},$$

$$I_3 = \int_0^\pi (e^{-x} \cdot \eta \mu x + e^{-x} \cdot \sigma \upsilon \nu x)^2 dx,$$

$$I_3 = \frac{3e^{2\pi} - 3}{4e^{2\pi}}$$

$$\Rightarrow 19) \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{\sqrt{2 - e^x} + e^x}$$

$$\frac{2}{3} \ln 2$$

$$\Rightarrow 20) \int_{-2}^{-1} \frac{27^x}{9^x - 4} dx$$

$$\frac{2 + 9(\ln 5 + \ln 19 - \ln 17 - \ln 7)}{9 \ln 3}$$

$$21) \int (x \cdot e^x + e^x) dx$$

$$x \cdot e^x + c$$

$$22) \int e^{x^2 + \ln x} dx$$

$$\frac{e^{x^2}}{2} + c$$

$$23) \int_1^2 e^{x^2 + \ln x} dx$$

$$\frac{e^4 - e}{2}$$

$$\Rightarrow 24) \int x^{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\frac{e^{\ln^2 x}}{2} + c$$

$$25) \int \frac{e^x}{e^x - e^{2x}} dx$$

- 26) $\int \frac{e^{3x} - 2e^{2x} + e^x}{e^x - 1} dx$ $\frac{e^{2x}}{2} - e^x + c, c \in \mathbb{R}$
- 27) $\int \ln x \, dx$ $x \cdot \ln x - x + c, c \in \mathbb{R}$
- 28) $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx$ $e - 2$
- 29) $\int x^2 \cdot \ln x \, dx$
- 30) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$
- 31) $\int x \cdot (\ln x)^2 \, dx$
- 32) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \ln x} \, dx$ $\ln 2$
- 33) $\int \frac{\ln x + 1}{x \cdot \ln x} \, dx$ $\ln x + \ln |\ln x| + c, c \in \mathbb{R}$
- 34) $\int_e^{e^2} \frac{\ln^2 x - 1}{x \cdot \ln x} \, dx$ $\frac{3}{2} - \ln 2$
- 35) $\int_2^3 (3x - 4) \cdot \ln x \, dx$
- 36) $\int_2^4 \log_2(x + 1) \, dx$
- 37) $\int_1^e \frac{\ln x}{4\sqrt{x}} \, dx$ $1 - \frac{\sqrt{e}}{2}$
- 38) $\int_0^1 \ln \frac{2-x}{x+1} \, dx$
- 39) $\int_1^e \frac{e^2(1 - \ln x^2)}{x^2} \, dx$
- 40) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot [\ln(\ln x)]}$ (ΥΠΟΔ: Αλλαγή μεταβλ) $\ln |\ln(\ln x)| + c, c \in \mathbb{R}$
- 41) $\int_1^{e^2} |1 - \ln x| \, dx$ $2e - 2$
- 42) $\int_0^1 (x - 1) \cdot e^{x^2 - 2x + 3} \, dx$ $\frac{e^2 - e^3}{2}$
- 43) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cdot e^{\eta \mu 2x} \, dx$ $\frac{1}{2}(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - 1)$
- 44) $\int_0^1 \frac{2 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x}{6^x} \, dx$ $\frac{2}{\ln 2} + \frac{6}{\ln 3}$
- 45) $\int \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) \cdot e^x \, dx$ $e^x \cdot \ln x + c, c \in \mathbb{R}$
- ➡ 46) $\int_1^e \frac{x+1}{x^2} \cdot \ln^2 x \, dx$ $\frac{7}{3} - \frac{5}{e}$

94. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (x^{100} + 100 \cdot x^{99}) \cdot e^x \, dx$.

ΑΠ: e

95. ✓ Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ με $\int_1^2 f(x) dx = 4$, $\int_2^4 f(y) dy = 6$ και $\int_1^\kappa f(t) dt = 2$, να υπολογιστεί το $I = \int_\kappa^4 f(u) du$.

ΑΠ: 8

96. ✓ Να υπολογιστούν τα $I+J$ και $I-J$ και με τη βοήθεια αυτών, τα I και J , αν:

$$1) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cdot \sin^2 x \, dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cdot \eta\mu^2 x \, dx$$

$$2) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} \, dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} \, dx \quad (\text{ΥΠΟΔ: } \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)')$$

$$3) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^4 x \cdot \sin^2 x \, dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x \cdot \sin^4 x \, dx$$

$$\text{ΑΠ: 1) } I = J = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}, \quad 2) I = J = \frac{\pi}{4}, \quad 3) I = J = \frac{\pi}{32}$$

97. ✓ Δείξτε ότι:

$$1) \int_0^2 \frac{2x^2+1}{2x^2+3} \, dx - 2 \int_2^0 \frac{dx}{2x^2+3} = 2 \quad 2) \int_0^2 \frac{7x^5 - x^2 - 2}{x^3+1} \, dx + \int_2^0 \frac{3x^5 - 5x^2 - 2}{x^3+1} \, dx = \frac{32}{3}$$

$$3) \int_a^\beta f(x) \, dx \cdot \int_\gamma^\delta f(x) \, dx - \int_\gamma^a f(x) \, dx \cdot \int_\delta^\beta f(x) \, dx + \int_a^\delta f(x) \, dx \cdot \int_\beta^\gamma f(x) \, dx = 0$$

98. α) Να δείξετε ότι $\int_{a+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma) \, dx = \int_a^\beta f(x) \, dx$ (1), $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

➡ β) Αν $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της (1).

99. Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$ και $c \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\int_a^\beta f(x) \, dx = \int_{c-\beta}^{c-a} f(c-x) \, dx$$

100. ✓ ➡ Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$ τέτοια ώστε $f(a+\beta-x) = f(x)$ για κάθε

$$x \in [a, \beta], \text{ δείξτε ότι } \int_a^\beta x \cdot f(x) \, dx = \frac{a+\beta}{2} \int_a^\beta f(x) \, dx$$

101. Αν f γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$ με συνεχή παράγωγο, να βρείτε το πρόσημο του $\int_a^\beta f'(x) \, dx$.

ΑΠ: Θετικό

102. ✓ Α. Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα $[a, \beta]$ με $f(x) \leq g(x)$ για κάθε

$$x \in [a, \beta], \text{ να δείξετε ότι } \int_a^\beta f(x) \, dx \leq \int_a^\beta g(x) \, dx.$$

Β. Αν f συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και μ, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της στο $[a, \beta]$, δείξτε ότι $\mu \cdot (\beta - a) \leq \int_a^\beta f(x) \, dx \leq M \cdot (\beta - a)$.

Γ. Να δείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{\pi}{11} \leq \int_0^\pi \frac{1}{9+2\sin x} \, dx \leq \frac{\pi}{7}$$

$$\beta) \frac{x}{\ln 2x} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{x}{\ln x} \text{ για κάθε } x > 1$$

$$\gamma) \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{1+|t|} \, dt \leq \frac{1}{3}$$

$$\delta) \Rightarrow \int_1^x e^{t^2} \, dt \leq \frac{1}{2}(e^{x^2} - e) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ. Να δείξετε ότι $\frac{2}{\sqrt{3+2(x+1)^2}} \leq \int_{x-1}^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{3+2t^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{3+2(x-1)^2}}$, για κάθε $x > 1$ και στη συνέχεια ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x-1}^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{3+2t^2}} = 0$.

Ε. α) Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ όσον αφορά στα ακρότατα.

β) Δείξτε ότι $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx \leq e - \frac{1}{e}$.

ΑΠ: Ε. α) Μέγιστο στο e το $f(e)=1/e$

103. α) Αν f συνεχής στο $[0, 5]$ και $\int_0^5 f(x) dx = 10$, να δείξετε ότι το ελάχιστο της f στο $[0, 5]$ δεν μπορεί να είναι το 3.

β) Αν f συνεχής και μη σταθερή στο $[0, 5]$ και $\int_0^5 f(x) dx = 10$, να δείξετε ότι το ελάχιστο της f στο $[0, 5]$ δεν μπορεί να είναι το 2.

104. ✓ Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$ και ισχύει $\int_a^\beta f(x) dx > 0$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) > 0$.

105. ✓ ➔ Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο, $f(0)=0$ και ισχύει ότι $f'(x) \geq 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\int_0^3 f(x) dx \geq 9$.

106. ✓ ➔ Αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\int_1^{2005} f(x) dx > 2004 \cdot \int_0^1 f(x) dx$.

107. ✓ Αν η f είναι θετική και έχει συνεχή παράγωγο στο $[0, 1]$, ενώ η C_f διέρχεται από τα $A(0, 1)$ και $B(1, e)$, να υπολογιστεί το $I = \int_0^1 \frac{f'(x) \cdot \ln f(x)}{f(x)} dx$.

ΑΠ: 1/2

108. ✓ Αν η f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση 1 και η εφαπτομένη της C_f στο $A(2, f(2))$ είναι παράλληλη προς την $\varepsilon: y=2005$, να υπολογιστεί το $I = \int_1^2 \frac{f''(x) - f'(x)}{e^x} dx$.

ΑΠ: 0

109. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει $f''(x) + 2f'(x) + 10f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία $A(0, 1)$ και $B(4, 2)$, να βρείτε το $I = \int_0^4 f(x) dx$.

ΑΠ: $-\frac{1}{5}$

110. ✓ Αν οι εφαπτόμενες ευθείες στο διάγραμμα συνάρτησης f στα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1=1$ και $x_2=0$, σχηματίζουν με τον άξονα x γωνίες αντίστοιχα $\omega_1 = \frac{\pi}{3}$ και $\omega_2 = \frac{\pi}{6}$ και η f'' είναι συνεχής στο $[0, 1]$, να βρείτε το $\int_1^0 f''(x) dx$.

$$\text{ΑΠ: } -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- 111. ✓** Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$, $\int_0^e f(x) dx = 2005$ και $\int_0^1 e^x f(e^x) dx = 1$, να υπολογιστεί το $J = \int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx$.

ΑΠ: 2004

- 112.** Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(1)=2004$ και $\int_0^2 |2004 - f(x)| dx = \int_0^2 f(x) dx$, να υπολογιστεί το $J = \int_1^2 f(x) dx$.

ΑΠ: 0

- 113.** Η εφαπτομένη του διαγράμματος μιας συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x=a$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{3}$ και στο σημείο με τετμημένη $x=\beta$ γωνία $\frac{\pi}{4}$. Αν η f'' είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f''(x) dx$.

ΑΠ: $1-\sqrt{3}$

- 114.** Να υπολογιστούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu\pi x + \beta$ με $f'(1)=2$ και $\int_0^2 f(x) dx = 4$.

ΑΠ: $\alpha = -\frac{2}{\pi}, \beta = 2$

- 115.** Να υπολογιστούν οι $\kappa, \lambda, v \in \mathbb{R}$ αν $f(x) = \kappa \cdot e^{2x} + \lambda \cdot e^x + vx$ με $f(0)=-1$, $f'(\ln 2)=31$ και $\int_0^{\ln 4} [f(x) - vx] dx = \frac{39}{2}$.

ΑΠ: $\kappa=5, \lambda=6, v=3$

- 116. ✓ ➡** Αν f συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $[1, 2]$, τέτοια ώστε $\int_1^2 [f(x) + f'(x)] \cdot e^x dx = 1$ και $f(2)=2e^{-2}$, να βρεθεί το $f(1)$.

ΑΠ: $f(1) = \frac{1}{e}$

- 117. ✓** Αν f συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[a, \beta]$ και $f(a)=f(\beta)$, δείξτε ότι $\int_a^\beta x \cdot f''(x) dx = \beta \cdot f'(\beta) - a \cdot f'(a)$

- 118. ✓ ➡** Αν f συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, \pi]$ και $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \cdot \eta\mu x dx = 5$, $f(\pi)=2$, δείξτε ότι $f(0)=3$.

- 119. ✓** Αν $I_v = \int_0^2 \frac{x^v}{x^3 + 1} dx$, $v \in \mathbb{N}$, να δείξετε ότι:

$$\alpha) I_{v+3} + I_v = \frac{2^{v+1}}{v+1}, \quad \beta) I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = \frac{20}{3}$$

- 120. α)** Αν $I_v = \int \ln^v x dx$, $v \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι για κάθε $v > 1$ ισχύει $I_v = x \cdot (\ln x)^v - v \cdot I_{v-1}$ (ΥΠΟΔ: Εφαρμόστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες).

β) Αν $I_v = \int_1^e \ln^v x \, dx$, δείξτε ότι για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$ με $v > 1$ ισχύει $I_v = e - v \cdot I_{v-1}$.

γ) Να προσδιορίσετε παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν $f'(x) = (\ln x)^3$ και $f(1) = 3$.

$$\text{ΑΠ: } f(x) = x \cdot (\ln x)^3 - 3x \cdot (\ln x)^2 + 6x \ln x - 6x + 9$$

121. ✓ Αν $I_v = \int_a^b e^{\varphi^v} x \, dx$ με $v \in \mathbb{N}^*$ και $v \geq 3$, δείξτε ότι αν $a, b \in [0, \frac{\pi}{2}]$ είναι

$$I_v = \frac{1}{v-1} \cdot (e^{\varphi^{v-1}b} - e^{\varphi^{v-1}a}) - I_{v-2}.$$

122. Αν $I_v = \int_0^1 x^v \cdot e^{-x} \, dx$, $v \in \mathbb{N}^*$:

α) Να υπολογιστεί το I_1 .

β) Δείξτε ότι $I_{v+1} = -\frac{1}{e} + (v+1) \cdot I_v$, για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$.

γ) Να υπολογιστεί το $I = \int_0^1 x \cdot (1+x) \cdot (1-x) \cdot e^{-x} \, dx$

$$\text{ΑΠ: α) } I_1 = -\frac{2}{e} + 1, \text{ γ) } I = 3 - \frac{2}{e}$$

123. Αν $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ και $g(x) = 1 + \frac{1}{e^x}$, δείξτε ότι:

α) $g'(x) = -f(x) \cdot g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\beta) \int_{-1}^1 f(x) \, dx = 1$$

124. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x) = e^{2x} - 3 \cdot e^x + 2$, να λυθεί η εξίσωση $\int_0^y f(x) \, dx = 2y$.

$$\text{ΑΠ: } y=0 \text{ ή } y=\ln 5$$

125. Να λυθεί η εξίσωση $\int_1^x \frac{e^t}{e^t - 2} \, dt = \ln 2$ με $x > 1$.

$$\text{ΑΠ: } x = \ln(2e-2)$$

126. ✓ α) Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[-a, a]$. Δείξτε ότι:

$$1) \int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] \, dx$$

$$2) \text{ αν η } f \text{ είναι περιττή τότε } \int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$$

$$3) \text{ αν η } f \text{ είναι άρτια τότε } \int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$$

β) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$1) \int_{-1}^1 x^{1991} \cdot e^{x^2} \, dx$$

$$2) \int_{-\pi}^{\pi} \eta \mu^7 x \cdot \sigma \upsilon \nu^8 x \, dx$$

$$3) \int_{-1}^1 \frac{\eta \mu \nu x}{\ln(a^2 + x^2)} \, dx$$

$$4) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma \upsilon \nu x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} \, dx$$

127. ✓ Να βρεθεί συνάρτηση f ώστε $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ και $f''(x) = 6x + 4$, για κάθε

$$x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{ΑΠ: } f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$$

- 128. ✓** Να βρεθεί συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$, τέτοια ώστε το διάγραμμά της να διέρχεται από το σημείο $(1, 3)$ και να δέχεται εφαπτομένη σε κάθε σημείο του $(x, f(x))$ με συντελεστή διεύθυνσης $\frac{2-x}{x}$.

$$\text{ΑΠ: } f(x) = 2\ln x - x + 4, x > 0$$

- 129. ✓** Έστω f η συνάρτηση της ποσότητας κάποιας ουσίας στο αίμα σε mgr, σε σχέση με το χρόνο t , με $2 < t < 10$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f είναι ίσος με $\frac{1}{t-2}$:

α) Να βρείτε τον τύπο της f , αν ισχύει $f(3)=4$.

β) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές η ποσότητα της ουσίας θα ξεπερνά το 1 mgr.

$$\text{ΑΠ: α) } f(t) = \ln(t-2) + 4, \beta) 2 + e^{-3} < t < 10$$

- 130. ✓** Ο ρυθμός μεταβολής των γεννήσεων νέων μικροοργανισμών σε εκατομμύρια σε μια καλλιέργεια είναι $\frac{d\Gamma(t)}{dt} = 8 - t$ με $0 \leq t \leq 5$ σε ώρες. Αν ο ρυθμός των μικροοργανισμών που αποβιώνουν είναι σταθερός και ίσος με 3 εκατομμύρια μικροοργανισμών ανά ώρα, ενώ στο τέλος της 2ης ώρας έχουμε 1 εκατομμύρια μικροοργανισμούς, να βρεθεί το πλήθος των μικροοργανισμών στο τέλος της 5ης ώρας.

$$\text{ΑΠ: } 5,5 \text{ εκατομμύρια}$$

- 131. ✓** Αν $P(t)$ είναι ο πληθυσμός μιας χώρας, όπου t ο χρόνος σε έτη, ένας «νόμος της αύξησης» εκφράζεται από τη σχέση $P'(t) = \kappa \cdot P(t)$ (1), όπου $\kappa > 0$ σταθερά που εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $P(t)$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο:

α) Δείξτε ότι $P(t) = P(0) \cdot e^{\kappa t}$.

β) Αν υποθέσουμε ότι για τον πληθυσμό μιας χώρας ισχύει ο νόμος της αύξησης από το 1920 και μετά, που ο πληθυσμός ήταν 5.000.000 και ότι το 1990 ο πληθυσμός ήταν 10.000.000 τότε: i) να βρεθεί η σταθερά κ για τη χώρα αυτή και ii) αν υποθέσουμε ότι οι συνθήκες διαβίωσης δεν θα μεταβάλλονταν σημαντικά, να «προβλεφθεί» ο πληθυσμός της χώρας το έτος 2060.

$$\text{ΑΠ: } \beta) \kappa = \frac{\ln 2}{70}, \gamma) \text{ Το } 2060 \text{ θα ήταν } 20.000.000$$

- 132. ✓** Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}_+$ αν $f'(x) \cdot e^{f(x)} = x \cdot e^x$ και $f(1)=0$.

$$\text{ΑΠ: } f(x) = \ln(x \cdot e^x - e^x + 1)$$

- 133. ✓** Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ αν $f(x) + f'(x) = e^x \cdot \sin x$ και $f(0)=0$.

$$\text{ΑΠ: } f(x) = \frac{e^x \cdot (\eta \mu x + 2 \sigma \upsilon \nu x) - 2e^{-x}}{5}$$

- 134. ✓** Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) = \int_{x^2}^5 \frac{1}{t} dt$. Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της, β) Την $\frac{df}{dx}$, γ) την $\frac{d^2f}{dx^2}$

$$\text{ΑΠ: α) } \mathbb{R}^*, \beta) -\frac{2}{x}, \gamma) \frac{2}{x^2}$$

- 135. ✓** Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \int_c^{x^3} \frac{1}{2 + \eta \mu^2 t} dt, c \in \mathbb{R}, \quad \beta) f(x) = \int_{x^2}^{x^3} e^{t+1} dt, x > 0$$

~~$$\gamma) f(x) = \int_e^{x^2+1} \ln t \, dt,$$~~

~~$$\delta) f(x) = \int_{x-1}^{\eta\mu x} t \cdot \sigma\upsilon\nu t \, dt$$~~

~~$$\epsilon) f(t) = \int_{t-1}^{t^2} (x + \eta\mu x) \, dx,$$~~

~~$$\zeta) f(x) = \int_x^{\frac{1}{e}} \frac{t+1}{t} \cdot \ln^2 t \, dt, \quad x > 0$$~~

~~$$\text{ΑΠ: } \alpha) f'(x) = \frac{3x^2}{2+\eta\mu^2 x^3}, \quad \beta) f'(x) = 3x^2 \cdot e^{x^3+1} - 2x \cdot e^{x^2+1}, \quad \gamma) f'(x) = 2x \ln(x^2+1), \quad \delta) f'(x) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x) \cdot \sigma\upsilon\nu x - (x-1) \cdot \sigma\upsilon\nu(x-1),$$~~

~~$$\epsilon) f'(t) = 2t \cdot (t^2 + \eta\mu t^2) - t + 1 - \eta\mu(t-1), \quad \zeta) f'(x) = -\frac{x+1}{x} \ln^2 x, \quad \mathbf{R}_+^*$$~~

- 136. ✓** Αν $f: [0, a] \rightarrow [0, a]$ συνάρτηση με συνεχή θετική παράγωγο στο $[0, a]$, $a > 0$, να δείξετε ότι $\int_0^x t \cdot f'(t) \, dt = \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) \, dt$, για κάθε $x \in [0, a]$, όπου f^{-1} η αντίστροφη συνάρτηση της f (λάβετε ως δεδομένο ότι η αντίστροφη μιας συνεχούς συνάρτησης είναι συνεχής).

- 137. ✓** Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x (t-1) \cdot (t-2)^2 \, dt$, $x \in \mathbf{R}$, ως προς τη μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμψής.

ΑΠ: Γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$, γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$, τοπ. ελάχιστο στο $(1, -\frac{17}{12})$, κυρτή στα $(-\infty, \frac{4}{3}]$ και $[2, +\infty)$, κοίλη στο $[\frac{4}{3}, 2]$, σημεία καμψής $(\frac{4}{3}, -\frac{112}{81})$ και $(2, -\frac{4}{3})$

- 138. ✓** Έστω f συνάρτηση με $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt$ και $x \geq 0$.

α) Να βρεθεί η μονοτονία της f .

β) Δείξτε ότι:

- 1) $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$ για κάθε $t \in \mathbf{R}$
- 2) $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \, dt \leq 1$
- 3) $f(x) \leq x$, για κάθε $x \geq 0$
- 4) $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ για κάθε $t \geq 1$
- 5) $\int_1^x \frac{1}{1+t^2} \, dt \leq 1 - \frac{1}{x}$, για κάθε $x \geq 1$.

ΑΠ: α) f γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$

- 139.** Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f με $f(x) = \int_0^x (t+1) \, dt$, $x \in [0, 2]$.

ΑΠ: Ελάχιστο $(0, 0)$, Μέγιστο $(2, 4)$

- 140. ➡** Αν f συνεχής στο $\mathbf{R}$ και ισχύει ότι $\int_1^x x \cdot f(t) \, dt \leq x^2 - 2004\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$,

να δείξετε ότι:

α) $\int_0^1 f(t) \, dt = 2004$

β) Η C_f τέμνει την ευθεία $y=2004$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

~~141. ✓ ➡~~ Αν f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\int_0^1 x \cdot f(xt) dt \leq e^{ax} - 2003\eta\mu x - 1 \text{ και το σημείο } M(0, 1) \text{ ανήκει στη } C_f, \text{ να βρείτε την τιμή του } a.$$

ΑΠ: $a=2004$

~~142. ✓ ➡~~ Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι

$$\int_x^{2x-1} f(t) dt \geq \int_1^x f(t) dt$$

~~143.~~ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_1^x (t^{1997} + t^{1999} + t^{2001} + t^{2003} + t) dt$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

~~144.~~ Να προσδιορίσετε τις θέσεις των σημείων καμπής των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt, \quad x > 0$$

$$\beta) f(x) = \int_0^x x \cdot e^{-t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

ΑΠ: $\alpha) e, \beta) -1, 1$

~~145.~~ Έστω f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή τρίτη παράγωγο. Αν το σημείο $A(1, 2)$ είναι σημείο καμπής της C_f και ισχύει $\int_0^1 (x^3 \cdot f^{(3)}(x) + 6f(x)) dx = 9$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο A .

ΑΠ: $y=x+1$

~~146.~~ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_{\pi/6}^{2x} \frac{\eta\mu t}{t} dt$, με $x > 0$.

~~\alpha) Να υπολογιστεί η $f'(x)$.~~

~~\beta) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.~~

~~147.~~ Δίνονται οι συναρτήσεις F_1 και F_2 με $F_1(x) = \int_2^x (2t-5) dt$ και $F_2(x) = \int_0^x 4t dt$, $x \in \mathbb{R}$.

~~\alpha) Να υπολογιστούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της C_{F_1} στα σημεία όπου η C_{F_1} τέμνει τον άξονα $y'y$.~~

~~\beta) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_{F_1} και C_{F_2} .~~

ΑΠ: $\alpha) y=-5x+6, \beta) (1, 2), (-6, 72)$

~~148.~~ Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του διαγράμματος της συνάρτησης f με $f(x) = 2 \int_2^x (t-1) dt$, $x \in \mathbb{R}$, στα σημεία τομής του με τον άξονα $x'x$.

ΑΠ: $y=-2x, y=2x-4$

~~149.~~ Να γίνει ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης $f(x) = \int_1^x (\ln^2 t - 1) dt$, $x > 0$.

- 150. ✓ ➡** Έστω f παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $[a, \beta]$, $a < \beta$ και η συνάρτηση $g(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in (a, \beta)$. Αν $g(a) \cdot g(\beta) > 0$, να δείξετε ότι η g παρουσιάζει μοναδικό ακρότατο στο (a, β) και να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου.

ΑΠ: Ελάχιστο

- 151. ➡** Έστω $g: [1, 4] \rightarrow [-2, 2]$ με $g(x) = \int_1^x f(t) dt$ όπου f παραγωγίσιμη στο $[1, 4]$.

Αν $g(4) = 1$ τότε να δείξετε ότι:

- α) Υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$ στο διάστημα $(1, 4)$.
 β) Υπάρχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της g με τετμημένη στο διάστημα $(1, 4)$.

- 152. ✓ ➡** Έστω g συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση με $g(x) = \int_x^0 \left(\int_0^\pi g(t) \cdot \eta_{\mu x} dx \right) dt + x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Δείξτε ότι $(e^{2x} \cdot g(x))' = 2x \cdot e^{2x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί ο τύπος της g (απαιτείται αόριστο ολοκλήρωμα).

γ) Να υπολογιστούν τα όρια της g στο $+\infty$ και $-\infty$.

ΑΠ: β) $g(x) = \frac{2x \cdot e^{2x} - e^{2x} + 1}{2e^{2x}}$, γ) $+\infty$ και τα δύο

- 153. ✓** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $(0, +\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} - 2 \cdot \int_1^x \frac{1}{u} \cdot f\left(\frac{x}{u}\right) du$, $x > 0$.

➡ α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = -\frac{1}{x^3} - \frac{2f(x)}{x}$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln x + x^2 \cdot f(x)$, $x > 0$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

➡ γ) Να δείξετε ότι $f(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$, $x > 0$.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου $\Omega(t)$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=t$ με $t \in (0, 1)$.

ζ) Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(t)$.

ΑΠ: δ) $x=0, y=0, \epsilon) -\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + 1$ τ.μ., ζ) $+\infty$

- 154. ✓** Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και g συνάρτηση με $g(x) = \int_a^x f(2x-t) dt$, $a, \beta \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $g'(x) = 2f(2x-a) - 2f(2x-\beta)$.

- 155. ✓ ➡** Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[a, \beta]$ με $0 < a < \beta$, τέτοια ώστε να ισχύει $\frac{f(a)}{a} = \frac{f(\beta)}{\beta}$. Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow a} \int_a^x \frac{f(x+a-t)}{(x-a) \cdot (x+a-t)} dt = 1$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi) = 1$.

- 156. ✓** Να μελετήσετε την $f(x) = \int_0^{2004} e^{-(x+t)^2} dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

157. ✓ Αν f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\int_{\lambda}^x f(t) dt = 2x^2 - 8$, για κάθε

$x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί ο τύπος της f .

ΑΠ: α) $\lambda = \pm 2$, β) $f(x) = 4x$

158. ✓ Να προσδιοριστεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$, αν

$$\int_0^x f(t) dt = \eta \mu x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΑΠ: $f(x) = \sin x - 2x$

159. ✓ Να βρεθεί συνάρτηση f συνεχής και ορισμένη στο $\mathbb{R}$, αν ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{ότι } 1 + \int_0^x f(t) \cdot e^t dt = (x^2 + 1) \cdot e^x$$

ΑΠ: $f(x) = (x+1)^2$

160. ✓ Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ δείξτε ότι:

α) Αν $f'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $f(x) = c \cdot e^x$.

β) Αν $\int_0^x f(t) dt = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι η σταθερή μηδενική συνάρτηση.

~~**161.** Αν f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ και F συνάρτηση τέτοια ώστε~~

~~$$F(x) = \int_a^x f(t) dt - \frac{1}{2} \int_{2a-3\beta}^{2x-3\beta} f\left(\frac{t+3\beta}{2}\right) dt, \text{ δείξτε ότι η } F \text{ είναι η σταθερή μηδενική συνάρτηση.}$$~~

162. ✓ ➡ Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, αν ισχύει $e + \int_1^x f(t) dt = \frac{f(x)}{x}$, για κάθε $x > 0$.

ΑΠ: $f(x) = x \cdot e^{\frac{x^2+1}{2}}$

163. ✓ Να βρείτε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν ισχύουν $f(x) > 0$, $f(1) = 1$ και $f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΠ: $f(x) = e^{2x-2}$

164. ✓ ➡ α) Να προσδιορίσετε συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g(0) = 1$ και $(x \cdot g(x) - g(x))' = x \cdot g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

➡ β) Να προσδιορίσετε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $x \cdot f'(x) = e^x - 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ΑΠ: α) } g(x) = e^x, \text{ β) } f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot e^x - e^x + 1}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

165. ✓ Να προσδιορίσετε συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$, τέτοια ώστε να ισχύουν $x \cdot \ln x \cdot f'(x) + f(x) = 0$, για κάθε $x > 1$ και $f(e) = 2$.

ΑΠ: $f(x) = \frac{2}{\ln x}$

166. ✓ ➡ Να βρείτε συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ τέτοια ώστε να ισχύουν $x \cdot f'(x) = f(x) + x \cdot f(x)$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = e$.

ΑΠ: $f(x) = x \cdot e^x$

- 167. ✓** Να βρείτε δύο τουλάχιστον συναρτήσεις f , παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες να ισχύει $\int_1^x t \cdot f(t) dt = f^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ΑΠ: } f(x)=0 \text{ και } f(x)=\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}$$

ΥΠΟΔ: Είναι λάθος να ισχυριστούμε ότι μια σχέση μορφής $f(x) \cdot g(x)=0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $f(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, καθώς μπορεί να είναι $f(x)=0$ για κάποια x και $g(x)=0$ για τα υπόλοιπα.

- 168.** Να βρείτε τη συνάρτηση f που είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ αν ισχύουν ότι $f'(x)=2x \cdot e^{-f(x)}$ και $\int_0^2 x \cdot e^{f(x)} dx = 8$

$$\text{ΑΠ: } f(x)=\ln(x^2+2)$$

- 169.** Να βρείτε συνάρτηση f ορισμένη και συνεχή στο $[-\frac{\pi}{3}, 0]$ για την οποία ισχύει

$$3 \int_a^x f(t) dt = 3e\phi x + \sqrt{3} \text{ με } a \in [-\frac{\pi}{3}, 0]. \text{ Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το } a.$$

$$\text{ΑΠ: } f(x)=\frac{1}{\sin^2 x} \text{ και } a=-\frac{\pi}{6}$$

- ~~**170.** Αν f συνεχής στο $(0, +\infty)$, τέτοια ώστε $\int_1^{x^2+1} f(t) dt = e^x \cdot \sin(\frac{\pi x}{2})$, για κάθε $x > 0$,~~

~~$$\text{δείξτε ότι } f(2) = -\frac{e\pi}{4}.$$~~

- 171. ➡** Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$ υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in [a, \beta], \text{ τέτοιο ώστε } \int_a^\xi f(t) dt = \lambda^2 \int_\xi^\beta f(t) dt$$

- 172. ✓ ➡** Αν f και g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, \beta]$, δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον

$$\text{ένα } \xi \in (a, \beta), \text{ τέτοιο ώστε } g(\xi) \cdot \int_a^\xi f(t) dt = f(\xi) \cdot \int_\xi^\beta g(t) dt.$$

- 173.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=(x-1) \cdot \int_2^x \frac{\ln t}{t} dt$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η h είναι παραγωγίσιμη.

β) Να αποδείξετε ότι μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα του Rolle για την h στο $[1, 2]$.

$$\gamma) \text{ Να αποδείξετε ότι υπάρχει } \xi \in (1, 2) \text{ τέτοιο ώστε } \frac{1-\xi}{\xi} \cdot \ln \xi = \int_2^\xi \frac{\ln t}{t} dt.$$

- 174. ✓ ➡** Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^2 \cdot (1 - e^{-3t}) dt}{\int_0^x (4t - 2\eta\mu 2t) dt}$

$$\text{ΑΠ: } \frac{9}{8}$$

175. Αν $x > 0$ να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $I_1 = \int_0^x t^2 \cdot e^{-t} dt$ και

$$I_2 = \int_0^x y \cdot e^{-y} dy. \text{ Στη συνέχεια να υπολογιστούν τα όρια } \lim_{x \rightarrow +\infty} I_1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} I_2.$$

176. ✓ ➔ Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$ αν $I(x) = \int_e^x \frac{e^2 \cdot (1 - \ln t)}{t^2} dt$ με $x > e$.

ΑΠ: -e

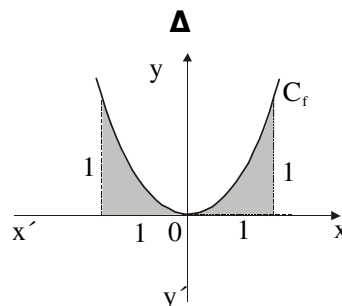
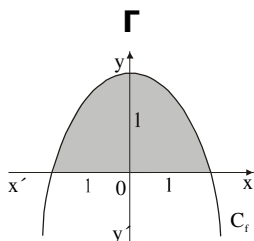
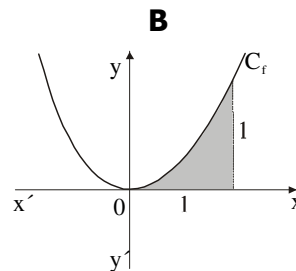
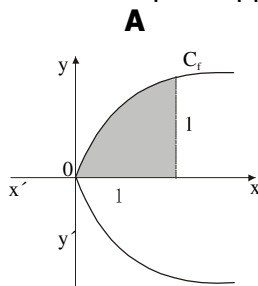
177. α) Αν $f(x) = \frac{1}{2}x \cdot \ln x \cdot (x - 4) - \frac{x^2}{4} + 2x$, $x > 0$, να βρεθεί η $f'(x)$.

β) Να υπολογιστεί το $I(t) = \int_1^t (x - 2) \cdot \ln x dx$, $t > 1$.

γ) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(t)}{t \cdot \ln t}$

ΑΠ: γ) 1

178. ✓ ➔ Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα η καμπύλη C_f είναι παραβολή. Να υπολογίσετε τα σκιασμένα εμβαδά.



ΑΠ: Α. $\frac{2}{3}$, Β. $\frac{1}{3}$, Γ. $\frac{4}{3}$, Δ. $\frac{2}{3}$

179. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + e^{-x}$, $g(x) = x - e^{-x}$.

α) Να βρείτε το πρόσημο της $f(x) - g(x)$ και της $f(x) - x$ στο διάστημα $[0, +\infty)$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x=0$, $x=2$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f και τις ευθείες $x=0$, $x=2$, $y=x$.

ΑΠ: α) Θετικό, β) $2 \cdot (1 - e^{-2})$, γ) $1 - e^{-2}$

180. ✓ Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία (x, y) του επιπέδου για τα οποία είναι:

α) $-2 \leq x \leq -1$ και $0 \leq y \leq 3x^2$

β) $-1 \leq x \leq 1$ και $0 \leq y \leq (x+4) \cdot e^{-x}$

ΑΠ: α) 7 τ.μ., β) $4e - \frac{6}{e}$ τ.μ.

Το β) Θέμα Γενικών Εξετάσεων 1992, Α' Δέσμης

181. ✓ Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται:

α) Από τη C_f της $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$, του άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=2$ και $x=5$.

β) Από τη γραφική παράσταση της $f(x)=x^3-x$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=-2$ και $x=2$.

γ) Από το διάγραμμα της $f(x)=x^4-2x^3+x^2+3$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\varepsilon_1$, $x=\varepsilon_2$ όπου $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι θέσεις των τοπικών ελαχίστων της f .

δ) Από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{e}$ και $x=a$, όπου a η τετμημένη του τοπικού ακροτάτου της f .

ε) Από το διάγραμμα της $f(x) = x^2 \cdot \ln \sqrt{1-x}$, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=-1$.

ζ) Από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=-1$ και $x=2$.

ΑΠ: α) $\frac{27}{2} + \ln 2$ τ.μ., β) 5 τ.μ., γ) $\frac{91}{30}$ τ.μ., δ) 1 τ.μ., ε) $\frac{1}{3} \ln 2 - \frac{5}{36}$ τ.μ., ζ) $\frac{16}{3}$ τ.μ.

182. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις:

α) $y = x^2 \cdot \sin \frac{x}{2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$

β) $y = x^3$ και $y = x^3 + x^2 - x - 2$

γ) $y = 6 - x$, $y = \sqrt{x}$ και $y = 0$

ΑΠ: α) $4\pi^2 + 16\pi - 23$ τ.μ., β) $\frac{9}{2}$ τ.μ., γ) $\frac{22}{3}$ τ.μ.

183. ✓ Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από:

1) Τα διαγράμματα των συναρτήσεων $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=-1$ και $x=1$.

2) Τα διαγράμματα των συναρτήσεων $f(x)=2^x+1$, $g(x)=x+1$ και $h(x)=3$ και τον άξονα $y'y$.

3) Το διάγραμμα της συνάρτησης $f(x)=x \cdot \sin x$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

4) Το διάγραμμα της συνάρτησης $f(x)=x \cdot \sin x$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=\pi$.

5) Τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x = \frac{\pi}{2}$.

6) Τα διαγράμματα των συναρτήσεων $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$ και την ευθεία $x=1$.

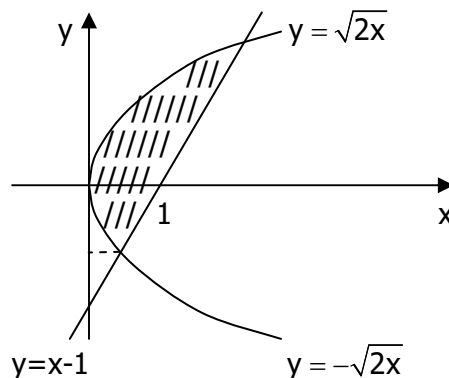
7) Τις παραβολές $y=2x^2$ και $y^2=4x$.

8) Τις παραβολές $x^2=y$, $x^2=2y$ και την ευθεία $2x-y=0$.

ΑΠ: 1) 1 τ.μ, 2) $\frac{1}{\ln 2}$ τ.μ., 3) $\pi-2$ τ.μ., 4) π τ.μ., 5) $2(\sqrt{2}-1)$ τ.μ.,

6) $e + \frac{1}{e} - 2$ τ.μ., 7) $\frac{2}{3}$ τ.μ., 8) 4 τ.μ.

184. Να αναφέρετε ένα τρόπο υπολογισμού του εμβαδού του διπλανού γραμμοσκιασμένου χωρίου



185. ✓ Έστω συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 2x$ στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ και C_f η γραφική της παράσταση.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο (x_0, y_0) με $x_0 = \frac{\pi}{3}$.
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την εφαπτομένη του α) ερωτήματος, τον ημιάξονα Oy και την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$.

ΑΠ: α) $y = -x + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, β) $\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}) - 1$ τ.μ.

186. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x) = \frac{2x-1}{e^x}$ και $f(0) = -1$.

- α) Να βρεθεί η συνάρτηση f .
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g με $g(x) = \frac{f(x)}{2x+1}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

ΑΠ: α) $f(x) = -(2x+1) \cdot e^{-x}$, β) $2 - \frac{4}{e}$ τ.μ.

187. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 3x - x^2$.

- α) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(-1, 0)$.
 β) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις εφαπτόμενες του α) ερωτήματος.

ΑΠ: α) $y = x + 1$, $y = 9x + 9$, β) $\frac{16}{3}$ τ.μ.

188. ✓ Έστω συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + \gamma$.

- α) Να προσδιοριστούν οι $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η f να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις -1 και 1 και η C_f να διέρχεται από το $(1, 0)$.
 β) Για τις τιμές αυτές των a, b, γ να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f μεταξύ των θέσεων των τοπικών ακροτάτων και του άξονα $x'x$.
 γ) Στη συνέχεια να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f , την εφαπτομένη ϵ στο σημείο (x_0, y_0) , όπου x_0 η θέση του τοπικού ελαχίστου και το εμβαδόν του

χωρίου που ορίζεται από τη C_f , την ε και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\kappa$ και $x=\lambda$, όπου κ η θέση τοπικού μεγίστου και λ η θέση του σημείου καμπής της C_f .

ΑΠ: α) $a=0$, $\beta=-3$, $\gamma=2$, β) 4 τ.μ., γ) $E=\frac{13}{4}$ τ.μ.

- 189.** α) Να μελετηθεί η $F(x)=x-\ln(x+1)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $G(x)=x-\ln(x+1)$, με $x \in [0, 1]$.
 γ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g με $f(x)=x$ και $g(x)=\ln(x+1)$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

ΑΠ: β) $[0, 1-\ln 2]$, γ) $\frac{3}{2}-\ln 4$ τ.μ.

- 190.** Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις παρακάτω σχέσεις:

α) $\int_0^{\pi} \eta \mu 2x \, dx = 0$

β) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} \, dx = \frac{9\pi}{2}$

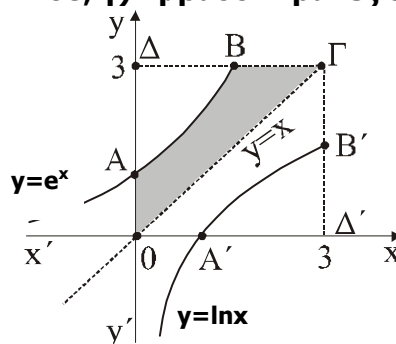
γ) $\int_1^2 (2x+1) \, dx = 4$

δ) $\int_{1/2}^5 \ln x \, dx < \int_1^5 \ln x \, dx$

ΥΠΟΔ: β) Εμβαδόν ημικυκλίου, γ) Εμβαδόν τραπεζίου

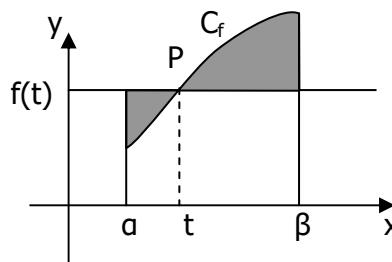
- 191.** α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου $A'B'\Delta'$.

- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



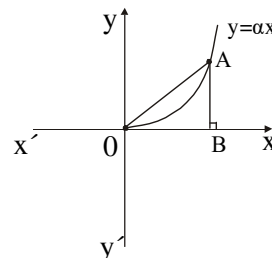
ΑΠ: α) $3\ln 3 - 2$, β) (ΑΟΓΒ) = $\frac{9}{2} - (3\ln 3 - 2)$

- 192.** ✓ Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με $f'(x) > 0$. Να βρεθεί σημείο $P(t, f(t))$ της C_f , με την εξής ιδιότητα: Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ευθεία $y=f(t)$ και τις ευθείες $x=a$ και $x=\beta$, να είναι ελάχιστο.



ΑΠ: $P(\frac{a+\beta}{2}, f(\frac{a+\beta}{2}))$

- 193.** ➡ Έστω μια πολυωνυμική συνάρτηση της μορφής $f(x)=ax^v$, $a>0$, $x \geq 0$ και τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_1, 0)$. Υπάρχει συνάρτηση f για την οποία η C_f να χωρίζει το τρίγωνο OAB σε δύο ισεμβαδικά χωρία;



ΑΠ: $f(x)=ax^3$

- 194.** ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-x^3$.

- α) Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση της f .
 β) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα $x'x$ και τη

C_f .

➡ γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και χωρίζει το παραπάνω χωρίο σε δύο ισοδύναμα (ισεμβαδικά) χωρία.

$$\text{ΑΠ: } \beta) \frac{1}{2} \text{ τ.μ., } \gamma) y = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})x$$

195. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$.

α) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά.

➡ β) Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{4} \leq \int_1^2 f(x) dx \leq 2$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=4$.

➡ δ) Να προσδιορίσετε την κάθετη ευθεία στον άξονα $x'x$ που χωρίζει το χωρίο του προηγούμενου ερωτήματος σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

$$\text{ΑΠ: } \gamma) \frac{9}{4} \text{ τ.μ., } \delta) x = \frac{21 + \sqrt{697}}{16}$$

196. α) Δείξτε ότι $x-1 \geq \ln x$, για κάθε $x > 0$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(a)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f της $f(x) = \ln x$, την ευθεία $y = x-1$ και τις ευθείες $x=e$ και $x=a$ με $a \in (0, 1)$.

γ) Δείξτε ότι $\lim_{a \rightarrow 0^+} a \cdot \ln a = 0$.

δ) Υπολογίστε το $\lim_{a \rightarrow 0^+} E(a)$.

ε) Υπολογίστε το $E(1)$.

$$\text{ΑΠ: } \beta) E(a) = a \ln a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}e^2 - e, \delta) \frac{1}{2}e^2 - e, \epsilon) \frac{1}{2}e^2 - e - \frac{1}{2}$$

197. α) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f της

$f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, την ασύμπτωτη της C_f , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=\lambda$, $\lambda > 0$.

β) Να βρεθεί το όριο του παραπάνω εμβαδού όταν $\lambda \rightarrow +\infty$.

$$\text{ΑΠ: } \alpha) \text{ Ασύμπτωτη } y=0, E=1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}}, \beta) 1$$

198. α) Στο διπλανό σχήμα να εκτιμήσετε τη σχέση που φαίνεται να έχουν τα εμβαδά E_1, E_2 .

β) Προσπαθήστε τώρα να ελέγξετε τα συμπεράσματά σας με αυστηρά μαθηματικό τρόπο, π.χ.:

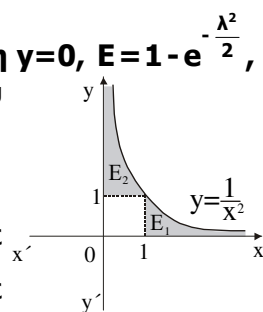
για το E_1 : θεωρήστε $\lambda > 1$ και υπολογίστε

το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\lambda \frac{1}{x^2} dx$ και για το E_2 : $0 < \lambda < 1$ και υπολογίστε

το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_\lambda^1 \frac{1}{x^2} dx$.

Είναι συμβατά τα όσα είχατε υποθέσει στο ερώτημα (α) με τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β);

➡ Μπορείτε να δικαιολογήσετε τα αποτελέσματά σας γεωμετρικά;



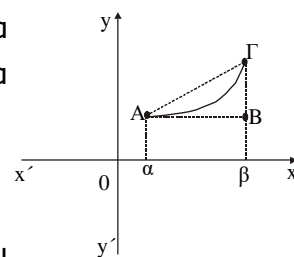
$$\text{ΑΠ: } E_1=1, E_2=+\infty$$

- 199.** Αν E_t το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το διάγραμμα της $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$, τον ημιάξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=t$, $t>0$, να υπολογιστούν τα $\lim_{t \rightarrow +\infty} E_t$ και $\lim_{t \rightarrow 0^+} E_t$

$$\text{ΑΠ: } E_t = \begin{cases} -2 + \frac{2}{\sqrt{t}}, & 0 < t < 1 \\ 2 - \frac{2}{\sqrt{t}}, & t > 1 \\ 0, & t = 1 \end{cases}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} E_t = 2, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} E_t = +\infty$$

- 200.** ➡ α) Η συνεχής θετική συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[a, \beta]$ και είναι γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε και να δικαιολογήσετε γεωμετρικά τη σχέση:

$$(\beta - a) \cdot f(a) < \int_a^\beta f(x) dx < (\beta - a) \cdot \frac{f(a) + f(\beta)}{2}$$



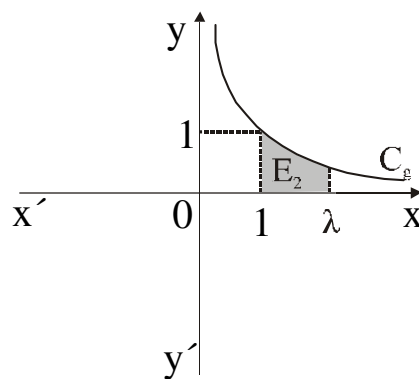
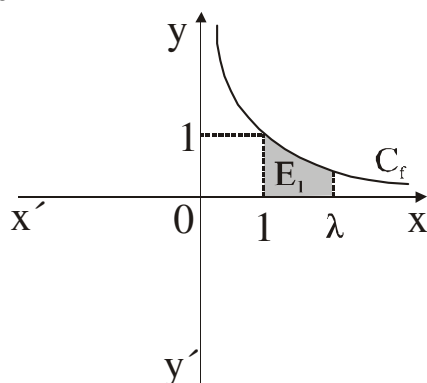
- β) Αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[a, \beta]$ και είναι γνησίως αύξουσα ποια θα είναι η αντίστοιχη σχέση;

- ➡ γ) Αν $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$, να δείξετε ότι το I ανήκει στο

διάστημα $(1, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$.

$$\text{ΑΠ: } \beta) (\beta - a) \cdot \left(\frac{f(a) + f(\beta)}{2} \right) < \int_a^\beta f(x) dx < (\beta - a) \cdot f(\beta)$$

- 201.** Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$, $x>0$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $x>0$.



- α) Να βρείτε τα εμβαδά E_1 και E_2 .

- β) Να βρείτε τα όρια: $I_1 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\lambda f(x) dx$ και $I_2 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\lambda g(x) dx$.

$$\text{ΑΠ: } \alpha) E_1 = \ln \lambda, E_2 = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \beta) I_1 = +\infty, I_2 = 1$$

- 202.** Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν $f(x) = x^2 \cdot f'(x)$ και $f(1) = \frac{2004}{e}$.

- α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=2004 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

$$\text{ΑΠ: } \beta) 2004 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e} \right)$$

203. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=e^x$.

- α) Να βρείτε μια άρτια συνάρτηση f και μια περιττή συνάρτηση g στο $\mathbb{R}$, τέτοιες ώστε $f(x)+g(x)=h(x)$.
 β) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα των f, g .
 γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τις f, g και τις ευθείες $x=0$ και $x=\lambda>1$.
 δ) Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

$$\text{ΑΠ: } \alpha) f(x)=\frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ και } g(x)=\frac{e^x - e^{-x}}{2}, \gamma) E(\lambda)=1-\frac{1}{e^\lambda}, \delta) 1$$

204. ✓ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+1$.

- α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
 ➡ β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$

$$\text{ΑΠ: } \beta) \frac{5}{4} \text{ τ.μ.}$$

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 2ου ΤΕΥΧΟΥΣ

ΚΕΦ. 3 - ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ	
156.	Για $x=x_0$ έχουμε $f(x_0) \leq h(x_0) \leq g(x_0)$ και αφού $f(x_0)=g(x_0)$, θα είναι $h(x_0)=f(x_0)=g(x_0)$.
157.	Η g είναι συνεχής στο 1, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)=g(1)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, άρα: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1}$, αφού $f(1)=0$. Το πρώτο όριο δίνει $g(1)$ ενώ το δεύτερο $-g(1)$, άρα $g(1)=-g(1)$, δηλαδή $g(1)=0$
163.	$f(1)=\lim_{x \rightarrow 0} f(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x)}{x} \cdot x = 0$
166.	Είναι $f(x)-g(x)-(f(1)-g(1)) \leq x^2-1$. Άρα για $x>1$ είναι $\frac{f(x)-f(1)-[g(x)-g(1)]}{x-1} \leq x+1$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)-[g(x)-g(1)]}{x-1} \leq 2$, οπότε $f'(1)-g'(1) \leq 2$ (1). Όμοια για $x<1$ είναι $\frac{f(x)-f(1)-[g(x)-g(1)]}{x-1} \geq x+1$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)-[g(x)-g(1)]}{x-1} \geq 2$, οπότε $f'(1)-g'(1) \geq 2$ (2). Από (1) και (2) είναι $f'(1)-g'(1)=2$
167.	Βρίσκουμε τα όρια του λόγου μεταβολής από αριστερά και δεξιά του 1 που είναι $7f'(2)$ και $2f'(2)$ αντίστοιχα και απαιτούμε να είναι ίσα. Ειδικά για το από αριστερά όριο έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{f(x^3+1)-f(2)}{x^3+1-2}}{\frac{x-1}{x^3+1-2}} = \lim_{u \rightarrow 2^-} \frac{f(u)-f(2)}{u-2} = \dots$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2+x+1}$
168.	Για το α) θέσατε στην τρίτη σχέση όπου x το 1 και y το 4
178.	Θέτουμε $u = \frac{1}{x} + 1$, οπότε το όριο γίνεται $\lim_{u \rightarrow 1} (1 - \frac{1}{u-1}) \cdot f(u) = \lim_{u \rightarrow 1} (u-2) \cdot \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u)}{u-1}$
183.	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) \cdot f(h) - f(x_0)}{h} = f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-1}{h}$. Όμως από τη $\beta)$ για $x=h$ έχουμε $h \cdot g(h) = \frac{f(h)-1}{2021} \Leftrightarrow f(h)-1 = 2021 \cdot h \cdot g(h)$ κ.τ.λ.
188.	Παραγωγίζουμε τη δοσμένη σχέση ως προς y και στη συνέχεια θέτουμε $y=1$
199.	Είναι g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = (2x-2) \cdot f(x) + (x^2-2x+3) \cdot f'(x)$. Άρα $g'(1) = 2f'(1)$ (1). Όμως $(f(2x-1))' = f'(x) \Leftrightarrow 2f'(2x-1) = f'(x)$ η οποία για $x=1$ δίνει $f'(1)=0$. Άρα από (1) είναι $g'(1)=0$.
207.	Αφού F παρ/μη στο x_0 με $F'(x_0)=0$ είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g(x_0) \cdot (x-x_0)} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{1}{g(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{g(x) \cdot (x-x_0)} = 0 \Leftrightarrow$

	$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) \cdot [f(x) - f(x_0)] - f(x_0) \cdot [g(x) - g(x_0)]}{g(x) \cdot (x - x_0)} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(x_0)}{g(x)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f(x_0)}{g(x)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] = 0$ επειδή όλα τα όρια $\Leftrightarrow$ υπάρχουν και δεν καταλήγουν σε α.μ. $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \cdot g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \dots$
208.	$f'(\rho) = 0 \Leftrightarrow 2a\rho + \beta = 0 \Leftrightarrow \rho = -\frac{\beta}{2a} \quad (1)$ $f(\rho) = 0 \Leftrightarrow a\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0 \Leftrightarrow a\left(-\frac{\beta}{2a}\right)^2 + \beta\left(-\frac{\beta}{2a}\right) + \gamma = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{-\beta^2 + 4a\gamma}{4a} = 0 \Leftrightarrow -(\beta^2 - 4a\gamma) = 0 \Leftrightarrow \text{η διακρίνουσα της } f \text{ είναι } 0$
212.	Αν $P(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε είναι δεκτό. Αν $P(x)$ νιοστού βαθμού, τότε περιπτώσεις αν $v = 0$ ή 1 που απορρίπτονται και μετά αν $v \geq 2$, οπότε η δοσμένη σχέση δίνει (με εξίσωση των βαθμών) ότι $v = 2$
213.	Αφού το $P(x)$ είναι μη σταθερό θάνατι βαθμού $v \neq 0$, οπότε το $P'(x)$ θάνατι βαθμού $v - 1$. Τότε η σχέση δίνει $2(v - 1) = v \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow v = 2$. Άρα $P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, οπότε η σχέση δίνει τα a, β, γ
214.	Είναι $f(x) = (x - 3) \cdot \pi(x) + ax + \beta \quad (1)$. Για $x = 3$ δίνει $3a + \beta = 4$. Στη συνέχεια παραγωγίζουμε την (1) και θέτουμε πάλι όπου x το 3.
217.	β) Παρατηρούμε ότι $f(0) = 1$, άρα $f^{-1}(1) = 0$. Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$ και $f^{-1}(a) \geq f^{-1}(\beta)$ θα είχαμε $f(f^{-1}(a)) \geq f(f^{-1}(\beta)) \Rightarrow a \geq \beta$ (άτοπο) ή καλύτερα $f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(0) \Leftrightarrow x = 1$. γ) Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ έχουμε : $f(f^{-1}(y)) = y \Rightarrow f'(f^{-1}(y)) (f^{-1})'(y) = (y)' \Rightarrow$ $\Rightarrow f'(f^{-1}(1)) (f^{-1})'(1) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$ ΛΛΛΙΩΣ: (βλέπε ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΕΥΧΟΥΣ ΙΙ) Έστω $y = f(x)$ και $1 = f(0)$. Αφού f^{-1} είναι "1-1" για $y \neq 1$ θα είναι $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(1)$ Όμως η f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη, οπότε $\lim_{y \rightarrow 1} f^{-1}(y) = f^{-1}(1) \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow 1} x = 0$, δηλαδή όταν $y \rightarrow 1$, τότε $x \rightarrow 0$. Έτσι έχουμε $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(1)}{y - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{f(x) - f(0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}} = \frac{1}{f'(0)} \in \mathbb{R}$ Άρα η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $1 = f(0)$ και ισχύει ότι $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$.
218.	α) Βλέπε ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ φυλλαδίου
232.	$x(t) > 0$ και $x'(t) > 0$

233.	$y - \ln a = \frac{1}{a} \cdot (x - a) \Leftrightarrow y = \frac{x}{a} + \ln a - 1$. Για $y=0$ είναι $x_M = (1 - \ln a) \cdot a$. Άρα $x'_M(t) = \dots = -\ln a(t) \cdot a'(t) = -\ln a(t) \cdot 2a(t)$ και για $t=t_0$ είναι $x'_M(t_0) = -\ln a(t_0) \cdot 2a(t_0) = -\ln \frac{1}{e} \cdot 2 \cdot \frac{1}{e} = \frac{2}{e}$ μον/μονάδα χρόνου
240.	Ισχύουν: $V = \frac{1}{3} \pi \cdot x^2 \cdot y$ και τριγ.ΒΔΚ~τριγ.ΑΓΚ 1ος τρόπος: Ζητάμε $\left. \frac{dy}{dt} \right _{t=t_0}$. Είναι: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dy}}$ και θέτουμε $t=t_0$ 2ος τρόπος: $\frac{y(t)}{20} = \frac{x(t)}{10}$, άρα $x(t_0) = \frac{y(t_0)}{2} = \frac{5}{2}$ και $2x'(t) = y'(t)$. Παραγωγίζουμε την $V(t) = \frac{1}{3} \pi \cdot x^2(t) \cdot y(t)$ και θέτουμε $t=t_0$
242.	α) Αν $h \geq 2$ τότε $V = V_1 + V_2$, $V_1 = 20 \cdot 8 \cdot (h-2)$, V_2 είναι ο μισός όγκος του αντίστοιχου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων 20, 8, 2. Άρα $V_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 20 \cdot 2$. Έτσι $V(t) = 160 \cdot (h(t) - 1)$ οπότε $V'(t) = 160 \cdot h'(t)$, επομένως $V'(t_0) = 160 \cdot h'(t_0)$ άρα $h'(t_0) = \dots$ β) Αν $h < 2$ τότε $V = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 8 \cdot x$. Όμως τριγ.ΙΛΜ~τριγ.ΙΘΕ, άρα $x = 10 \cdot h$ Έτσι $V(t) = 40 \cdot h^2(t)$ οπότε $V'(t) = 40 \cdot 2 \cdot h(t) \cdot h'(t)$, επομένως $V'(t_0) = 40 \cdot 2 \cdot h(t_0) \cdot h'(t_0)$, άρα $h'(t_0) = \dots$
243.	$x'(t) = -9 \text{ km/h}$, $y'(t) = 10 \text{ km/h}$ Ζητάμε $S'(t_0)$ με $x(t_0) = 4 \text{ km}$ και $y(t_0) = 3 \text{ km}$. $S^2(t_0) = x^2(t_0) + y^2(t_0) = 25 \Leftrightarrow$ $S(t_0) = 5 \text{ km}$. Γενικά $S^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$ Άρα $2 \cdot S(t) \cdot S'(t) = 2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + 2 \cdot y(t) \cdot y'(t)$ $\Leftrightarrow S(t) \cdot S'(t) = x(t) \cdot x'(t) + y(t) \cdot y'(t)$ και θέτουμε $t=t_0$

257.	Στα σημεία A, B οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες προς τον $x'x$ άρα τα x_1, x_2 είναι ρίζες της $f'(x)=3x^2+2kx+1$, όμως $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{a}$
280.	Έστω ε_1 εφαπτομένη της C_f στη θέση x_1 και ε_2 εφαπτομένη της C_g στη θέση x_2 . Για να είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ π.κ.α. $f'(x_1)=g'(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2+1$ (1) Βρίσκουμε την ε_1 , απαιτούμε το $(x_2, g(x_2))$ να την επαληθεύει και αντικαθιστούμε το x_1 από την (1). Έτσι βρίσκουμε το x_2 .
283.	1η Λύση: Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y^3 + 8x^3 = 2x \cdot y \\ y = -2x + 1 \end{cases}$ και βρίσκουμε διπλή λύση $x = \frac{1}{4}$ 2η Λύση: Για να εφάπτεται η ε στην C_f πρέπει και αρκεί η ε και η C_f να έχουν κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 > 0$ και επιπλέον να ισχύει $f'(x_0) = -2$, δηλαδή $f(x_0) = -2x_0 + 1$ (1) και $f'(x_0) = -2$ (2). Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση έχουμε $3f^2(x) \cdot f'(x) + 24x^2 = 2f(x) + 2x \cdot f'(x)$. Θέτοντας όπου x το x_0 και με τη βοήθεια των (1) και (2) βρίσκουμε ότι $x_0 = \frac{1}{4}$
289.	Θέτοντας στην ευθεία $y = -5$, βρίσκουμε $x = -2$. Άρα $f(-2) = -5$ και $f'(-2) = -2$. Έτσι $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^2(x) - 25}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(f(x) - 5) \cdot (f(x) + 5)}{x^2 + 2x} =$ $= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} \cdot \frac{f(x) + f(-2)}{x} = f'(-2) \cdot \frac{2f(-2)}{-2} = 10$
292.	Αρκεί να δείξουμε ότι $f(2) = 1$ και $f'(2) = 2$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2x + 3}{x - 2} \cdot (x - 2) + 2x - 3 = 1$. Άρα $f(2) = 1$. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - 2x + 3}{x - 2} + \frac{2x - 3 - 1}{x - 2} \right) = \dots = 2$
294.	Υπολογίζουμε τα $f(x_0)$ και $f'(x_0)$ και την εφαπτομένη ε στη θέση x_0 . Στη συνέχεια απαιτώντας η ε να διέρχεται από το $(0, 0)$ καταλήγουμε να δείξουμε ότι ισχύει $\ln x_0 + 2x_0^2 - 1 = 0$, κάτι που γίνεται με Θεώρημα Bolzano
296.	α) Με τη βοήθεια της συνέχειας και της μονοτονίας της f βρίσκουμε ότι αντιστρέφεται και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης. β) Έστω $\kappa \in \mathbb{R}$ με $f^{-1}(-9) = \kappa \Leftrightarrow f(\kappa) = -9$. Προφανής ρίζα και μοναδική το -1 . Άρα, λόγω συμμετρίας, η ζητούμενη εφαπτομένη ε θα είναι η συμμετρική της εφαπτομένης ε' της C_f στη θέση -1 ως προς την ευθεία $y = x$. ε' : $y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1) \Leftrightarrow y + 9 = 7 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow y = 7x - 2$. Άρα ε : $x = 7y - 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = \frac{1}{7}x + \frac{2}{7}$
297.	Αν ο βαθμός της f είναι n τότε η f' έχει βαθμό $n-1$, άρα $2(n-1) = n$, δηλαδή $n = 2$.

298.	α) Ο άξονας συμμετρίας της C_f είναι η ευθεία $x = -\frac{\beta}{2a} = 3$ και οι εικόνες των ριζών ρ_1, ρ_2 είναι συμμετρικές ως προς αυτή την ευθεία, αφού $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = 4$. β) Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες του τριωνύμου. Τότε η $f(x) = a(x-\rho_1) \cdot (x-\rho_2)$ έχει $f'(x) = a(x-\rho_1) + a(x-\rho_2)$, οπότε $f'(\rho_1) = a(\rho_1 - \rho_2)$, $f'(\rho_2) = a(\rho_2 - \rho_1)$. Οι εφαπτόμενες στα σημεία τομής με τον y' είναι: $(\varepsilon_1): y = a(\rho_2 - \rho_1) \cdot (x - \rho_1)$ και $(\varepsilon_2): y = a(\rho_2 - \rho_1) \cdot (x - \rho_2)$ για $x = -\frac{\beta}{2a}$ (επειδή $-\frac{\beta}{2a} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$) οι δυο εξισώσεις δίνουν το ίδιο y, άρα οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ τέμνονται πάνω στην $x = -\frac{\beta}{2a}$
299.	$f(a) = \frac{a}{2e}$ και $f(a) = \frac{\ln a}{a}$ Άρα $\frac{a}{2e} = \frac{\ln a}{a} \Leftrightarrow 2e = \frac{a^2}{\ln a}$ Όμοια για το β. Άρα $2e = \frac{\beta^2}{\ln \beta}$. Άρα $\frac{a^2}{\ln a} = \frac{\beta^2}{\ln \beta} \Leftrightarrow \dots$
310.	Παίρνουμε τα όρια στο $-\infty$ και $+\infty$ για Bolzano. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι για το Rolle έχουμε $f'(x) = a^x \cdot \ln a - 1 < 0$
317.	Εφαρμόζουμε τρεις φορές Θ. Rolle για την f και δύο για την f' . Θα βρούμε ότι η δευτεροβάθμια f'' έχει δύο διαφορετικές ρίζες. Άρα $\Delta > 0$
319.	Το Θ. Bolzano στα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$, ενώ για το Θ. Rolle έχουμε $a\xi^2 + 2\xi - a = 0 \Leftrightarrow 2\xi = a \cdot (1 - \xi^2)$. Όμως $1 - \xi^2 > 0$. Άρα αν $a > 0$ τότε $\xi > 0$ δηλ. $\xi \in (0, 1)$, ενώ αν $a < 0$ τότε $\xi < 0$ δηλ. $\xi \in (-1, 0)$
323.	Εφαρμόζουμε Θ. Rolle στην $h(x) = f(x) \cdot g(\lambda) - g(x) \cdot f(\lambda)$ στο $[\kappa, \lambda]$
324.	Θ. Rolle στην $h(x) = x \cdot f(x) - x \cdot f(1)$ στο $[0, 1]$.
325.	Για το β) γράφουμε τι πρέπει να δείξουμε και κατά την απόδειξη χρησιμοποιούμε το x_0 του α) όπου $g'(x_0) = 0$
326.	Εφαρμόζουμε Θ. Rolle α) στην $h(x) = (x^2 + 2021) \cdot f(x)$ στο $[a, \beta]$, β) στην $\varphi(x) = \ln x \cdot f(x)$ στο $[a, \beta]$, γ) στην $\rho(x) = e^{-x} \cdot f(x)$ στο $[a, \beta]$
328.	Υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε Θ. Rolle στην f' στα $[a, \xi]$ και $[\xi, \beta]$. Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της f'' που προέκυψαν, εφαρμόζουμε Θ. Rolle στην f'' στο $[\rho_1, \rho_2]$.
329.	Θ. Rolle στην $f(x) = a \frac{x^5}{5} + \beta \frac{x^3}{3} + \gamma x$ στο $[0, 1]$
331.	Ορίστε την $g(x) = f(x) - \eta \mu x$ στο $[a, \beta]$
333.	Η δοσμένη σχέση καταλήγει σε $f(a) \cdot e^{g(a)} = f(\beta) \cdot e^{g(\beta)}$. Ορίζουμε $h(x) = f(x) \cdot e^{g(x)}$ και Θ. Rolle. ΑΛΛΙΩΣ: Η ζητούμενη σχέση γίνεται $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -g'(\xi) \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + g'(\xi) = 0$. Ορίζουμε την $\varphi(x) = \ln(f(x)) + g(x)$ και Θ. Rolle.
334.	Θ. Rolle για την $h(x) = f(x) + a^x$ στο $[0, 2]$
337.	α) Εφαρμογή του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[a, \beta]$: $f'(\xi) = \lambda \cdot (\xi - a)^{\mu-1} \cdot (\xi - \beta)^{\nu-1} \cdot [\mu \cdot (\xi - \beta) + \nu \cdot (\xi - a)]$. Επειδή $\lambda \neq 0$ και $a < \xi < \beta$ για να είναι $f'(\xi) = 0$ π.κ.α. $\mu \cdot (\xi - \beta) + \nu \cdot (\xi - a) = 0$ β) $P(x) = \lambda \cdot (x - 4)^k \cdot (x - 6)^k$, οπότε κάνουμε εφαρμογή του (α) για $\mu = \nu = k$ και $a = 4$, $\beta = 6$

338.	Αρχικά λόγω της δοσμένης σχέσης δεν είναι δυνατόν κάποια από τις α, β να είναι ίση με κάποια από τις γ, δ. Στη συνέχεια αρκεί να αποκλείσουμε τις περιπτώσεις $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ και $\gamma, \delta, \alpha, \beta$ και $\gamma, \alpha, \beta, \delta$ και $\alpha, \gamma, \delta, \beta$. Για τις τρεις πρώτες περιπτώσεις: Ορίζουμε $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ στο $[a, \beta]$ με $h(\alpha)=h(\beta)=0$. Από Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot g(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0)$, άτοπο. Για την τέταρτη περίπτωση: Ορίζουμε $\varphi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ στο $[\gamma, \delta]$
339.	Αρχικά λόγω της σχέσης είναι $x_1 \neq 1$ και $x_2 \neq 1$ Αρκεί να αποκλείσουμε τις περιπτώσεις $x_1, x_2, 1$ και $1, x_1, x_2$. Ορίζουμε την $h(x) = \frac{f(x)}{\ln x}$ στο $[x_1, x_2]$. Είναι $h(x_1)=h(x_2)=0$, οπότε με Θ. Rolle καταλήγουμε σε άτοπο.
348.	β) i) Αν $x > 0$, ii) Αν $x > 0$ ΘΜΤ στο $[0, x]$, iii) Αν $x < 0$ ΘΜΤ στο $[x, 0]$ γ) Όμοια με τη β) ως προς το 1
352.	α) ΘΜΤ στην $f(x) = \ln x$ στο $[2, e]$ γ) ΘΜΤ στην $f(\omega) = \ln \omega$ στο $[\eta \mu x, x]$ για $x \in (0, \pi)$ και στο $[x, \eta \mu x]$ για $x \in (-\pi, 0)$ ε) Λογαριθμίζουμε και μετά ΘΜΤ στην $f(\omega) = \ln \omega$ στο $[1, x+1]$
353.	Έστω $x \in (0, 1)$. Στο $[0, x]$ εφαρμόζω ΘΜΤ. Άρα υπάρχει $\xi \in (0, x)$ με $f'(\xi) = \frac{f(x)-2}{x}$. Όμως $f'(\xi) = \left \frac{f(x)-2}{x} \right \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{f(x)-2}{x} \leq 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -x \leq f(x) - 2 \leq x \Leftrightarrow -x + 2 \leq f(x) \leq x + 2$. Αρκεί $1 < -x + 2$ και $x + 2 < 3 \Leftrightarrow x < 1$ αλ.
356.	$3f(5) - 3f(3) > 2f(3) - 2f(0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3 \frac{f(5) - f(3)}{6} > 2 \frac{f(3) - f(0)}{6} \Leftrightarrow \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} > \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$ κ.τ.λ.
357.	Μετατρέπουμε τη ζητούμενη σχέση στη μορφή $\frac{f(a+1) - f(a)}{(a+1) - a} > f(a)$ και εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[a, a+1]$.
358.	Για $x > 1$ η σχέση γράφεται $\frac{f(x^3) - f(x^2)}{x^2} < f(x) - f(1) \Leftrightarrow \frac{f(x^3) - f(x^2)}{x^2 \cdot (x-1)} < \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ και ΘΜΤ στα $[1, x]$ και $[x^2, x^3]$. Όμοια αν $0 < x < 1$.
359.	α) ΘΜΤ στην f στα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ ή Θ. Rolle στην $g(x) = f(x) - (\lambda x + \beta)$ όπου $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ στα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$
361.	α) ΘΜΤ για την f στα $[a, \frac{a+\beta}{2}]$ και $[\frac{a+\beta}{2}, \beta]$ β) Εφαρμογή του α)
362.	ΘΜΤ για την f στο $[0, x]$
363.	Θ.Μ.Τ. στα $[a, \frac{a+\beta}{2}]$ και $[\frac{a+\beta}{2}, \beta]$.
364.	ΘΜΤ για την f στα $[-5, -4], [-4, -3] \dots [4, 5]$.
365.	ΘΜΤ για την f στα $[0, 1]$ και $[1, 2]$ και Θ. Bolzano στην f' στο $[\xi_1, \xi_2]$.
366.	ΘΜΤ για την f στα $[2021, 2022]$ και $[2022, 2023]$ και Θ. Bolzano στην f' στο $[\xi_1, \xi_2]$.
369.	Θ. Rolle στην $h(x) = f(x) \cdot [g(\beta) - g(\alpha)] - g(x) \cdot [f(\beta) - f(\alpha)]$

371.	Για την αριστερή ανισότητα Θ.Μ.Τ. στο $[a, x]$. Για το δεξιό σκέλος Θ.Μ.Τ. στο $[a, x]$ και όταν χρειαστεί είναι $f(\beta) > f(a)$, αφού $f'(x) > 0$, οπότε f γνησίως αύξουσα.
372.	<u>1ος τρόπος:</u> Θ.Μ.Τ. στο $[x, 2]$. <u>2ος τρόπος:</u> Αφού $f'(x) > 4 > 0$ είναι f γνησίως αύξουσα, οπότε για $x \in (1, 2)$ είναι $f(x) - f(2) < 0$, ενώ $4 \cdot (x-1) > 0$. Έτσι ισχύει η ζητούμενη σχέση.
375.	Θ. Rolle για την $h(x) = f(x) \cdot (x-a) \cdot (x-\beta)$ στο $[a, \beta]$.
376.	Εφαρμόζουμε δύο ΘΜΤ στα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$, όπου $\gamma = a + 2 \cdot \frac{\beta - a}{7}$.
377.	Εφαρμόζουμε δύο ΘΜΤ στα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$, όπου $\gamma = a + 2 \cdot \frac{\beta - a}{5}$ και προκύπτει ότι $2 \cdot f'(\kappa) + 3f'(\lambda) = 5 \cdot \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$, όπου $\frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = f'(\mu)$ από ΘΜΤ στο $[a, \beta]$
378.	Από Θ. Bolzano υπάρχει ρίζα ρ της f στο (a, β) . Μετά εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την f στα $[a, \rho]$ και $[\rho, \beta]$.
379.	α) Αφού $f'(x) \neq 0$, η f είναι "1-1" (με απόδειξη, βλέπε παράρτημα φυλλαδίου), οπότε $f(a) \neq f(\beta)$ και επειδή $\frac{3f(a) + 2f(\beta)}{5}$ μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$, από ΘΕΤ υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ κ.τ.λ. β) Έστω $f(a) < f(\beta)$. Από ΘΜΤ στο $[a, \xi]$ υπάρχει $\xi_1 \in (a, \xi)$ ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} = \dots = \frac{\frac{2}{5} \cdot (f(\beta) - f(a))}{\xi - a} \cdot \text{Άρα } \frac{2}{f'(\xi_1)} = \frac{5 \cdot (\xi - a)}{f(\beta) - f(a)}.$ Όμοια από ΘΜΤ στο $[\xi, \beta]$ υπάρχει $\xi_2 \in (\xi, \beta)$ ώστε $\dots \frac{3}{f'(\xi_2)} = \frac{5 \cdot (\beta - \xi)}{f(\beta) - f(a)}.$ Έτσι $\frac{3}{f'(\xi_2)} + \frac{2}{f'(\xi_1)} = 5 \cdot \frac{\beta - a}{f(\beta) - f(a)}$ (1). Όμως από ΘΜΤ στο $[a, \beta]$ υπάρχει $\xi_3 \in (a, \beta)$ ώστε $f'(\xi_3) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$. Άρα η (1) γράφεται κ.τ.λ.
380.	Έστω ότι υπάρχει σημείο (a, β) με $a < \beta$ (άλλη περίπτωση αν $a > \beta$) που να ανήκει στις C_f και $C_{f^{-1}}$. Τότε $f(a) = \beta$ και $f^{-1}(a) = \beta$ δηλ. $f(\beta) = a$. Άρα $a, \beta \in \Delta$, οπότε στο $[a, \beta]$ ισχύει για την f το Θ.Μ.Τ. και υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = \frac{a - \beta}{\beta - a} = -1$, άτοπο.
381.	α) Από Θ.Μ.Τ. στο $[a, \beta]$ καταλήγουμε ότι $\dots (\beta - 2)^2 + (a - 1)^2 \leq 0$, άρα ... β) Για $a = 1$ και $\beta = 2$ παίρνουμε Θ.Μ.Τ. στα $[1, x]$ και $[x, 2]$, με $1 < x < 2$, θέτουμε $f'(\xi_1) \leq 4$ και $f'(\xi_2) \leq 4$ και λύνουμε αυτές τις σχέσεις ως προς $f(x)$. Προκύπτει ότι $f(x) = 4x$, για κάθε $x \in (1, 2)$. Στη συνέχεια παρατηρούμε από το $f(a)$ για $a = 1$ και από το $f(\beta)$ για $\beta = 2$ ότι $f(1) = 4 = 4 \cdot 1$ και $f(2) = 8 = 4 \cdot 2$, άρα $f(x) = 4x$ και για $x = 1$ και $x = 2$. Άρα $f(x) = 4x$, για κάθε $x \in [1, 2]$.

382.	Αν $x_1=x_2$ απλό. Αν $x_1 \neq x_2$ υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$. Παίρνουμε Θ.Μ.Τ. για την $f(x)=\ln(g(x))$ στα $[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}]$ και $[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2]$ και βρίσκουμε τα $\left(\frac{g'}{g}\right)(\xi_1)$ και $\left(\frac{g'}{g}\right)(\xi_2)$. Όμως $\xi_1 < \xi_2$ οπότε $\left(\frac{g'}{g}\right)(\xi_1) < \left(\frac{g'}{g}\right)(\xi_2) \Leftrightarrow \dots$
383.	Εφαρμόζουμε ΘΜΤ στα $[a, \frac{a+(a+1)}{2}]$ και $[\frac{a+(a+1)}{2}, a+1]$ σύμφωνα με τη μεθοδολογία 7α) στο ΘΜΤ.
389.	β) Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $h(x)=(F(x)-f(x))^2+(G(x)-g(x))^2$ είναι σταθερή
392.	$(f(-x) \cdot f(x))' = -f'(-x) \cdot f(x) + f(-x) \cdot f'(x)$. Όμως $f'(-x) \cdot f(x) = 1$ και αν θέσουμε όπου x το $-x$ είναι $f'(x) \cdot f(-x) = 1$. Άρα $(f(-x) \cdot f(x))' = 0$ κ.τ.λ.
395.	β) Βρίσκουμε ότι $g(x)=0$ οπότε $f'(x) \cdot \ln x - f(x) \cdot \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot \ln x - f(x) \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\ln x} = c \text{ κ.τ.λ.}$
397.	α) $(\ln f(x))' = \ln f(x)$, β) $f'(x) \cdot f(x) = x+2 \Leftrightarrow 2 f'(x) \cdot f(x) = 2x+4 \Leftrightarrow (f^2(x))' = (x^2+4x)' \Leftrightarrow f^2(x) = x^2+4x+c$ με $c=5$. Άρα $f^2(x) = x^2+4x+5$. Όμως f συνεχής με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε διατηρεί πρόσημο κ.τ.λ. γ) Η σχέση γίνεται $\eta \mu x \cdot f'(x) - \sigma \upsilon \nu x \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{\eta \mu x \cdot f'(x) - \sigma \upsilon \nu x \cdot f(x)}{\eta \mu^2 x} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\eta \mu x}\right)' = 0 \Leftrightarrow f(x) = c \cdot \eta \mu x, \text{ για κάθε } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$ Όμως από τη δοσμένη σχέση είναι $f'(\frac{\pi}{6}) - \sigma \phi \frac{\pi}{6} \cdot f(\frac{\pi}{6}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \cdot f(\frac{\pi}{6}) = 0 \Leftrightarrow f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}.$ Άρα $c=1$, οπότε $f(x) = \begin{cases} \eta \mu x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ f(\frac{\pi}{2}), & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$ Όμως f συνεχής στο $\frac{\pi}{2}$, άρα κ.τ.λ. δ) $(e^{f(x)} - e^{-f(x)})' = (2x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$ $\stackrel{c=0}{\Leftrightarrow} e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Leftrightarrow (e^{f(x)})^2 - 2x \cdot e^{f(x)} - 1 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (e^{f(x)})^2 - 2x \cdot e^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow (e^{f(x)} - x)^2 = x^2 + 1.$ Όμως $x^2+1 \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε και η παράσταση $e^{f(x)} - x$ δεν μηδενίζεται, άρα διατηρεί πρόσημο και μάλιστα θετικό αφού $e^{f(0)} - 0 = 1 > 0$. Άρα $e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2+1}$ κ.τ.λ. ε) $e^{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = (x - \ln x)'$ κ.τ.λ. ζ) $(4+2f'(x)) \cdot (2x+f(x)) = 3x \Leftrightarrow 8x+4f(x)+4xf'(x)+2f(x) \cdot f'(x) = 3x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (4x \cdot f(x) + f^2(x))' = (-\frac{5}{2}x^2)' \Leftrightarrow 4x \cdot f(x) + f^2(x) = -\frac{5}{2}x^2 + c \text{ με } c=1. \text{ Έτσι}$ $4x \cdot f(x) + f^2(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x \cdot f(x) + f^2(x) = \frac{3}{2}x^2 + 1 \Leftrightarrow$

	$\Leftrightarrow (2x+f(x))^2 = \frac{3}{2}x^2 + 1 \Leftrightarrow 2x+f(x) = \sqrt{\frac{3}{2}x^2 + 1}$. Επειδή η παράσταση $\sqrt{\frac{3}{2}x^2 + 1}$ δεν μηδενίζεται, δεν μηδενίζεται και η παράσταση $2x+f(x)$ και αφού είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο κ.τ.λ. η) $f'(x^2) = \frac{3}{2}x + 1 \Leftrightarrow \stackrel{x>0}{2x \cdot f'(x^2)} = 3x^2 + 2x \Leftrightarrow (f(x^2))' = (x^3 + x^2)' \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x^2) = x^3 + x^2 + c \Leftrightarrow \stackrel{c=1}{f(x^2)} = x^3 + x^2 + 1$. Θέτουμε $u=x^2>0$, οπότε $f(u) = u\sqrt{u} + u + 1$, άρα $f(x) = x\sqrt{x} + x + 1, x > 0$ θ) $f''(x) - 2f(x) = 2x \cdot f'(x) \Leftrightarrow (f'(x) - 2x \cdot f(x))' = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 2x \cdot f(x) = c$ με $c=0$. Έτσι $f'(x) - 2x \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} \cdot f'(x) - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} \cdot f(x) = c_1$, οπότε για $x=1$ είναι $c_1 = \frac{1}{e}$ κ.τ.λ. ι) $f''(x) + f'(x) = f'(x) + f(x) \Leftrightarrow (f'(x) + f(x))' = f'(x) + f(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f'(x) + f(x) = c \cdot e^x$ με $c=2$. Έτσι $f'(x) + f(x) = 2 \cdot e^x \Leftrightarrow e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow e^x \cdot f(x) = e^{2x} + c_1$ με $c_1=0$. κ) $(f(x) \cdot f'(x))' = (\frac{f^2(x)}{2})' \Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) = \frac{f^2(x)}{2} + c$, με $c=0$. Έτσι $2f(x) \cdot f'(x) = f^2(x) \Leftrightarrow (f^2(x))' = f^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) = c_1 \cdot e^x$. Για $x=0$ είναι $c_1=4$. Έτσι $f^2(x) = 4 \cdot e^x$ και διατήρηση προσήμου.
399.	Ξεκινάμε από την $f^{(3)}(x) = -x^2 - 4x^3$ και αποπαράγωγιζοντας βρίσκουμε την f .
400.	Η σχέση γίνεται $2f(x) \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \stackrel{\cdot \ln x}{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot f(x) + \ln^2 x \cdot f'(x)} = 0 \Leftrightarrow (\ln^2 x \cdot f(x))' = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ln^2 x \cdot f(x) = c \text{ κ.λ.π.}$
403.	$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{e}$
405.	Είναι για $x \neq 0$: $x \cdot f'(x) + 2f(x) = 2 \sin x^2 \Leftrightarrow x^2 \cdot f'(x) + 2xf(x) = 2x \cdot \sin x^2 \Leftrightarrow$ $(x^2 \cdot f(x))' = (\eta \mu x^2)' \quad (1)$. Ορίζοντας $g(x) = x^2 \cdot f(x)$ είναι $g(0) = 0$, οπότε από (1) είναι $g(x) = \begin{cases} \eta \mu x^2 + c_1, & x < 0 \\ \eta \mu x^2 + c_2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ Όμως g συνεχής στο 0, άρα $c_1 = c_2 = 0$, οπότε $g(x) = \eta \mu x^2 \Leftrightarrow x^2 \cdot f(x) = \eta \mu x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Άρα για } x \neq 0 \text{ είναι } f(x) = \frac{\eta \mu x^2}{x^2} \text{ και}$ επειδή f συνεχής στο 0, είναι $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots = 0$
406.	Η δοσμένη σχέση γίνεται: $f'(x) - \frac{1}{x^2} \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \cdot f'(x) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (e^{\frac{1}{x}} \cdot f(x))' = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \text{ κ.τ.λ.}$

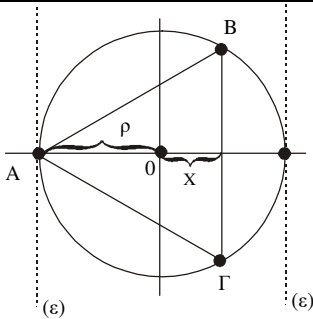
407.	α) Είναι $f'(x) = -f(\frac{\pi}{4} - x)$, οπότε $f''(x) = f'(\frac{\pi}{4} - x)$. Αν στη σχέση που δίνεται θέσουμε όπου x το $\frac{\pi}{4} - x$ έχουμε ότι $f(x) = -f'(\frac{\pi}{4} - x)$ και επομένως $f(x) + f''(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. γ) Είναι $h(x) = c$, οπότε $h(\pi) = c \Leftrightarrow c = 0$. Άρα $h(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = \sin x$
408.	Είναι $\left. \begin{aligned} f'(x) \cdot g(x) &= e^{2x} \quad (1) \\ g'(x) \cdot f(x) &= e^{2x} \quad (2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow (f(x) \cdot g(x))' = (e^{2x})' \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) = e^{2x} + c \text{ με } c = 0. \text{ Έτσι } f(x) \cdot g(x) = e^{2x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \text{ και η (2) γίνεται}$ $\frac{g'(x)}{g(x)} \cdot e^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow (\ln g(x))' = 1 \stackrel{g(x) \neq 0}{\Leftrightarrow}_{g(0)=1>0} (\ln g(x))' = (x)' \Leftrightarrow \ln g(x) = x + c_1 \text{ με}$ $c_1 = 0. \text{ Έτσι } g(x) = e^x. \text{ Όμοια προκύπτει ότι } f(x) = e^x.$ Στη συνέχεια χρειάζεται έλεγχος αν οι f, g που προσδιορίστηκαν είναι δεκτές λόγω του $\Rightarrow$ στην αρχή της λύσης.
415.	β) $f(1000) > f(998)$ γ) $f'(x) = v \cdot [(x-a)^{v-1} + x^{v-1}]$, μια προφανής ρίζα της f' είναι η $x_0 = \frac{a}{2}$ (αφού $v=2\rho$) που είναι μοναδική, αφού $f''(x) > 0$, άρα $f'(x) \uparrow$. Η μονοτονία της f είναι: $f \downarrow$ στο $(-\infty, \frac{a}{2}]$ και $f \uparrow$ στο $[\frac{a}{2}, +\infty)$. δ) Ορίζουμε $f(x) = (x-10000)^{100} + x^{100}$ και έχουμε $f(10000) > f(9000)$
418.	γ) Είναι περιττού βαθμού, άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα. $P'(x) = 3x^2 + 6x + 6 > 0$, άρα $P(x)$ γνησίως αύξουσα, άρα η ρίζα είναι μοναδική. δ) <u>1η ΛΥΣΗ</u>: $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ και $P(0) = 6$, άρα η ρίζα είναι αρνητική. <u>2η ΛΥΣΗ</u>: Ισχύει ότι $P(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$. Άρα η ρίζα μόνο αρνητική μπορεί να είναι. <u>3η ΛΥΣΗ</u>: Αν x_0 η ρίζα τότε $P(x_0) = P'(x_0) + x_0^3 \Leftrightarrow 0 = P'(x_0) + x_0^3 \Leftrightarrow x_0^3 = -P'(x_0) < 0$
419.	Έστω ότι το $S(x) = P(x) - Q(x)$ είναι άρτιου βαθμού. Τότε το S' είναι περιττού, άρα έχει πραγματική ρίζα, αν όμως είχε δύο ρίζες, τότε το S'' θα είχε ρίζα (άτοπο). Αν $S(x)$ περιττού βαθμού, τότε και S'' περιττού βαθμού, άρα θα είχε ρίζα (άτοπο).
423.	γ) Από β) ερώτημα είναι $g(x) \geq 1$. Τότε $g(6) = f(6) - 18$, άρα $f(6) = g(6) + 18 \geq 19$
424.	ΘΜΤ για την f στο $[0, x]$
425.	Είναι $g'(x) = \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2}$, οπότε αρκεί $x \cdot f'(x) - f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, δηλαδή $f'(x) > \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Στη συνέχεια εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την } f \text{ στο } [0, x].$

426.	Για $x > 1$ είναι $g'(x) = \frac{(x-1) \cdot f'(x) - f(x)}{(x-1)^2}$. Ισχύουν οι ισοδυναμίες: $(x-1) \cdot f'(x) - f(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \stackrel{\text{ΘΜΤ στο } [1, x]}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) \Leftrightarrow x > \xi,$ αληθές. Άρα $g'(x) < 0$, για κάθε $x > 1$ και g συνεχής στο 1, γιατί $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = f'(1) = 1 = g(1)$, οπότε g γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.
427.	β) Αν $A(x_0, 0)$ το σημείο τομής της C_h με τον άξονα x', θα είναι $f(x_0) = 0$. Τότε $\lambda_\varepsilon = h'(x_0) = \frac{(f'(x_0))^2 - f(x_0) \cdot f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} \stackrel{f(x_0)=0}{=} 1$
428.	β) $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi)$ από το Θ.Μ.Τ. με $\xi \in (0, x)$. Επειδή όμως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα $f'(x) > f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$ για κάθε ξ στο διάστημα $(0, x)$, άρα $g'(x) > 0$, από β) ερώτημα.
430.	$f'(x) < 2x \cdot e^{-x-f(x)} - 1 \Leftrightarrow (f(x)+x)' < 2x \cdot e^{-x-f(x)} \Leftrightarrow e^{x+f(x)} \cdot (f(x)+x)' < 2x \Leftrightarrow (e^{x+f(x)} - x^2)' < 0$. Ορίζοντας τη συνάρτηση $g(x) = e^{x+f(x)} - x^2$, $x \geq 0$, είναι $g'(x) < 0$, για $x > 0$ και g συνεχής στο 0, άρα g γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Έτσι $g(x) < g(0)$ για κάθε $x > 0$ κ.τ.λ.
431.	Είναι $(f(x)+2021)^{f(x)} = 2022x \Leftrightarrow e^{f(x) \cdot \ln(f(x)+2021)} = 2022x$. Παραγωγίζοντας έχουμε τελικά $(f(x)+2021)^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot [\ln f(x) + 2021 + \frac{f(x)}{f(x)+2021}] = 2022.$ Επειδή όλες οι άλλες παραστάσεις είναι θετικές, θα είναι και $f'(x) > 0$
432.	Είναι $f'(x) = \frac{x-1-x \ln x}{x(x-1)^2}$, $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Ορίζουμε $g(x) = x-1-x \ln x$, $x > 0$ και με τη βοήθεια της μονοτονίας της παρατηρούμε ότι $g(x) < g(1) = 0$ για κάθε $x > 0$ με $x \neq 1$. Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Έτσι f γν. φθίνουσα και συνεχής στο $(0, 1)$, άρα $f((0, 1)) = (\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)) = \dots = (1, +\infty)$ και όμοια $f(1, +\infty) = (0, 1)$. Επειδή $f \ll 1-1$ στα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$ ως γνησίως φθίνουσα και επιπλέον τα $f((0, 1))$ και $f(1, +\infty)$ είναι ξένα μεταξύ τους, είναι $f \ll 1-1$.
436.	Έστω ότι η f αλλάζει πρόσημο στο (α, β). Αφού είναι συνεχής, θα μηδενίζεται σε κάποιο $\rho \in (\alpha, \beta)$ (Bolzano). Με Rolle στα $[\alpha, \rho]$ και $[\rho, \beta]$ θα υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \rho)$ και $\xi_2 \in (\rho, \beta)$, ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$, άτοπο αφού λόγω της $f''(x) < 0$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, β), άρα και "1-1".
437.	Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = f'(x) - f'(x+1) < 0$, άρα $g \ll 1-1$. Η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα $g(x+e) = 0 \Leftrightarrow g(x+e) = g(1) \Leftrightarrow x+e = 1 \Leftrightarrow x = 1-e$
438.	Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Έτσι η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $g(x) = g(2x+2021)$ (1) Είναι $g'(x) = f'(x+1) - f'(x) < 0$, άρα $g \ll 1-1$, οπότε (1) $\Leftrightarrow x = 2x+2021 \Leftrightarrow x = -2021$

439.	α) $x^2+2>1 \Leftrightarrow \ln(x^2+2)>0$ (1), επίσης $x^2+2 \geq 2$, άρα $e^{x^2+2} \geq e^2 > 2$. Άρα $e^{x^2+2} > 2$ (2). Από (1)+(2) κ.τ.λ. β) Προφανείς ρίζες οι 2 και 4. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln 4}{4} = 0$. Ορίζουμε $f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln 4}{4}$ στο $(0, +\infty)$. Βρίσκοντας τη μονοτονία της παρατηρούμε ότι έχει το πολύ δύο ρίζες. γ) Προφανής ρίζα 2. $3^x+4^x=5^x \Leftrightarrow (\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x = 1$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = (\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x$ στο $\mathbb{R}$ και αποδεικνύουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και «1-1», οπότε παίρνει την τιμή 1 μόνο μία φορά. δ) Η σχέση γράφεται ισοδύναμα $\frac{6^x-5^x}{6-5} = \frac{4^x-3^x}{4-3}$ (1). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=t^x$ με $t>0$ και $f'(t)=x \cdot t^{x-1}$. Η f είναι παρ/μη στα $[3, 4]$ και $[5, 6]$ οπότε από ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1 \in (3, 4)$ και $\xi_2 \in (5, 6)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} \Leftrightarrow x \cdot \xi_1^{x-1} = \frac{4^x-3^x}{4-3}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(6)-f(5)}{6-5} \Leftrightarrow x \cdot \xi_2^{x-1} = \frac{6^x-5^x}{6-5}$. Άρα η (1) $\Leftrightarrow x \cdot \xi_1^{x-1} = x \cdot \xi_2^{x-1} \Leftrightarrow x \cdot (\xi_1^{x-1} - \xi_2^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow x=0$ ή $\xi_1^{x-1} = \xi_2^{x-1} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x=0$ ή $(\frac{\xi_1}{\xi_2})^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x=0$ ή $x-1=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$.
440.	α) $e^{x^2-4} + x^2 - 5 < 0 \Leftrightarrow e^{x^2-4} + (x^2-4) - 1 < 0$ (1). Ορίζουμε $f(x) = e^x + x - 1$ στο $\mathbb{R}$, η οποία εύκολα είναι γνησίως αύξουσα. Παρατηρούμε ότι (1) $\Leftrightarrow f(x^2-4) < f(0) \Leftrightarrow \dots$ β) $e^{x^2-1} \cdot x^x < 1 \Leftrightarrow e^{x^2-1} \cdot e^{x \cdot \ln x} < 1 \Leftrightarrow e^{x^2-1+x \cdot \ln x} < e^0 \Leftrightarrow x^2-1+x \cdot \ln x < 0$. Παρατηρούμε ότι για $x=1$ είναι $x^2-1+x \cdot \ln x = 0$, για $x>1$ είναι $x^2-1+x \cdot \ln x > 0$ και για $0<x<1$ είναι $x^2-1+x \cdot \ln x < 0$ γ) $e^{x^3} + x^3 > e^x + x \Leftrightarrow f(x^3) > f(x)$ κ.τ.λ., δ) $f(x) < f(\frac{1}{x})$ με $f(x)=2x+\eta\mu x$ ε) $f(x^2-2x) \leq f(x-2)$ με $f(x)=\pi^x+x$
441.	Η δεύτερη παράγωγος της $f(x) = x \cdot \ln^2 x - (x-1)^2$ είναι $f''(x) = 2 \frac{\ln x - (x-1)}{x} \leq 0$, με το «$\Rightarrow$» να ισχύει μόνο για $x=1$. Έτσι βρίσκουμε τη μονοτονία και τα πρόσημα της f.
442.	$e^x \leq (x+1)^{x+1} \Leftrightarrow x \leq (x+1) \cdot \ln(x+1)$. Ορίζουμε $f(x) = (x+1) \cdot \ln(x+1) - x$, $x>-1$, προσδιορίζουμε τη μονοτονία της και από εκεί τα πρόσημά της.
443.	Η προς απόδειξη σχέση γίνεται $\frac{a \cdot \ln a}{a-1} < \frac{\beta \cdot \ln \beta}{\beta-1}$
444.	α) Προφανής ρίζα και μονοτονία, β) Θ Bolzano και μονοτονία, γ) Μονοτονία και σύνολο τιμών
475.	β) Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1}{2e} < \frac{e}{2} \Leftrightarrow \dots$ αληθές

476.	$f'(x) = \frac{e^x - 1}{f^2(x) + 1}$ Ρίζα 0, για $x > 0$..., για $x < 0$... κ.τ.λ.
477.	$f''(x) = e^x + 2 > 0$. Άρα f' γνησίως αύξουσα με $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$. Άρα $f'(R) = R \ni 0$. Έτσι η f' μηδενίζεται σε κάποιο $x_0 \in R$, για $x < x_0$ είναι $f'(x) < f'(x_0) = 0$ και για $x > x_0$ είναι $f'(x) > f'(x_0) = 0$ κ.τ.λ.
478.	γ) Για κάθε $x > 0$ είναι $e^x \geq x+1 > x$ και $\ln x \leq x-1 < x$. Άρα $e^x \geq \ln x$.
479.	β) Ισχύει ότι $\ln x \neq x+1$ για κάθε $x > 0$, αφού $\ln x \leq x-1 < x+1$ δ) Ισχύει ότι $e^x \neq x-1$, για κάθε $x \in R$, αφού $e^x \geq x+1 > x-1$ ε) Ισχύει ότι $e^x \geq x+1 > x-1 \geq \ln x$, για κάθε $x > 0$.
480.	α) $e^x > x+1$ και $x = \sqrt{2}$ και στο 2ο μέλος πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή παράσταση, ζ) Θέτουμε $x = \frac{1}{u}$, $u > 0$
481.	α) όριο αριθμητή: $e^\pi - \pi > 0$, όριο παρονομαστή: $-\infty$ β) όριο αριθμητή: $\ln \frac{\pi}{2} - e^{\frac{\pi}{2}} < 0$, όριο παρονομαστή: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x)^2 = 0^+$
482.	$\ln(e^x - x) = \sin x \Leftrightarrow e^x - x = e^{\sin x} \Leftrightarrow e^x - x - e^{\sin x} = 0$. Ορίζουμε $f(x) = e^x - x - e^{\sin x}$ στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ και εφαρμόζουμε Θ. Bolzano
483.	α) Ένας τρόπος: $f(x) = \{e^{x-1} - [(x-1)+1]\} + \{(x-1) - \ln x\} + 2$. Καθώς τα δύο άγκιστρα είναι καθένα ≥ 0 και καθένα μηδενίζεται μόνο στο 1 (βλέπε βασικές ανισώσεις), θα είναι $f(x) \geq 2$ με το « $=$ » να ισχύει μόνο για $x=1$. γ) $f(x^2-3) \geq 2$ με το « $=$ » να ισχύει μόνο αν $x^2-3=1$ και $f(x+3) \geq 2$ με το « $=$ » να ισχύει μόνο αν $x+3=1$. Άρα κ.τ.λ.
484.	B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ είναι η παράγωγος τιμή της e^x στο 0 Γ. α) Ισχύει $f'(x_0) = 0$. Αν αντικαταστήσουμε το x_0 στην αρχική σχέση, θα προκύψει $f''(x_0) = \frac{1}{e^{x_0}} \cdot \frac{e^{x_0} - 1}{x_0} > 0$ και αυτό γιατί $e^x - 1$ και x είναι ομόσημοι αριθμοί για κάθε $x \neq 0$, από Α. ερώτημα. β) Αφού η f'' είναι συνεχής συνάρτηση στο 0, θα είναι $f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x \cdot e^x} - (f'(x))^2 \right) = 1 > 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, από Β.
485.	β) $\beta = 1 - \alpha$ με $\alpha \in (0, 1)$. Άρα $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta = \alpha^\alpha \cdot (1-\alpha)^{1-\alpha} \geq \frac{1}{2}$, αφού δείξαμε στο α) ερώτημα ότι $x^x \cdot (1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in (0, 1)$.
486.	Αν η f είχε τοπ. ακρότατο στο x_0 θα ίσχυε ότι $f'(x_0) = 0$. Παραγωγίζοντας όμως τη σχέση και θέτοντας $f'(x_0) = 0$, προκύπτει ότι $3e^{2x_0} + 9e^{x_0} + 8 = 0$, άτοπο.
487.	Από Θ. Fermat $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ και Θ. Bolzano για την g στο $[x_1, x_2]$.
488.	Για να δέχεται τέτοια εφαπτομένη πρέπει η f' να μπορεί να πάρει την τιμή -2021. Βρίσκοντας το σύνολο τιμών της f' παρατηρούμε ότι παίρνει την τιμή -2021

489.	γ) Η εξίσωση γράφεται $f(x) = \frac{1}{c}$ με $\frac{1}{3} < \frac{1}{c} < \frac{1}{e}$. Από τα επί μέρους πεδία τιμών και τη μονοτονία βρίσκουμε ότι η f παίρνει την τιμή $1/c$ ακριβώς 3 φορές.
490.	Βρίσκουμε την f' και δείχνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα. Βρίσκουμε επίσης το σύνολο τιμών της και δείχνουμε ότι το 0 ανήκει σε αυτό. Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$
494.	α) Από το Θ. μέγιστης-ελάχιστης τιμής η f παίρνει ακρότατα στο $[a, \beta]$ που δεν είναι τα $f(a)$ και $f(\beta)$ αφού $f(a), f(\beta) \in (f(x_1), f(x_2))$. Άρα τα ακρότατα παρουσιάζονται σε εσωτερικά σημεία του $[a, \beta]$, έστω στα $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$. Άρα από Θ. Fermat $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.
497.	Ορίζουμε $g(x) = (x^2 - 1) \cdot f(x) - \ln \frac{x^2 + 1}{2}$, όπου παρατηρούμε ότι $g(-1) = g(1) = 0$. Άρα η δοσμένη σχέση δίνει $g(x) \leq g(-1)$ και $g(x) \leq g(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε από Θ. Fermat είναι $g'(-1) = 0$ και $g'(1) = 0$, σχέσεις που δίνουν ότι $f(-1) = 1/2$ και $f(1) = 1/2$. Στη συνέχεια Θ. Rolle για την f στο $[-1, 1]$.
498.	Παρατηρούμε ότι $f(x) \geq 0 = f(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0, οπότε από Θ. Fermat είναι $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left \frac{\eta \mu x}{x} - a \right = 0 \Leftrightarrow 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1.$ Άρα $f(x) = \eta \mu x - x $ και στη συνέχεια προσδιορίζουμε τα πρόσημα του $\eta \mu x - x$.
499.	Αφού η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα θα παίρνει ελάχιστη m και μέγιστη τιμή M , οι οποίες θα έχουν θέσεις το a ή το β ή κάποιο $\xi \in (a, \beta)$ όπου $f'(\xi) = 0$ (από Θ. Fermat). Τότε όμως από τη σχέση προκύπτει ότι $f(a) = f(\beta) = f(\xi) = 0$. Άρα $m = M = 0$, οπότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
500.	Αφού η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα θα παίρνει ελάχιστη m και μέγιστη τιμή M , οι οποίες θα έχουν θέσεις το 2021 ή το 2023 ή κάποιο $\xi \in (2021, 2023)$ όπου $f'(\xi) = 0$ (από Θ. Fermat). Τότε όμως από τη σχέση προκύπτει ότι $f(2021) = f(2023) = f(\xi) = 2022$. Άρα $m = M = 2022$, οπότε $f(x) = 2022$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
501.	Το α) από Θ. Fermat, καθώς η f παρουσιάζει ελάχιστη και μέγιστη τιμή αλλά όχι στα άκρα του $[e, \pi]$. Το β) από Θ. Rolle στο $[x_1, x_2]$
502.	α) Υπάρχει η απόδειξη στο παράρτημα του φυλλαδίου
503.	α) Υπάρχει η απόδειξη στο παράρτημα του φυλλαδίου β) $f(\eta \mu x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(\eta \mu x) = f(x) \Leftrightarrow \eta \mu x = x$, αφού η f είναι "1-1". Προφανής ρίζα το 0. Για $x \neq 0$ γνωρίζουμε ότι $ \eta \mu x < x \Leftrightarrow - x < \eta \mu x < x $ (2). Έτσι για $x > 0$ από την (2) έχουμε ότι $\eta \mu x < x$ και για $x < 0$ από την (2) έχουμε ότι $x < \eta \mu x$. Άρα η (1) δεν έχει άλλη ρίζα από το 0.
504.	Αρχικά με Θ. Bolzano στην $h(x) = f(x) - e^x + 1$ στο $[0, 1]$ είναι $h(0) = f(0) \geq 0$ και $h(1) = f(1) - e + 1 \leq 1 - e + 1 = 2 - e < 0$. Άρα υπάρχει ρίζα στο $[0, 1]$. Στη συνέχεια αφού $h'(x) = f'(x) - e^x \neq 0$ (με απόδειξη – βλέπε παράρτημα φυλλαδίου), η h είναι "1-1"
505.	α) $(f(2-x))' = f'(x) \Leftrightarrow -f'(2-x) = f'(x)$. Για $x=1$ δίνει $f'(1) = 0$. Όμως f'' συνεχής και μη μηδενική, οπότε διατηρεί πρόσημο (1). Άρα f' γνησίως μονότονη, άρα και «1-1». Επομένως η ρίζα 1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$. β) 1^{ος} τρόπος: Καθώς η f' είναι συνεχής και έχει μοναδική ρίζα το 1, θα διατηρεί πρόσημο στα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$. Από ΘΜΤ για την f στο $[0, 1]$, υπάρχει $\xi_1 \in (0, 1)$: $f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} < 0$. Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$.

	Η σχέση $f(2-x)=f(x)$ για $x=0$ δίνει $f(2)=f(0)$. Όμοια από ΘΜΤ στο $[1, 2]$, υπάρχει $\xi_2 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) > 0$. Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ κ.τ.λ. 2ος τρόπος: Από ΘΜΤ για την f στο $[0, 1]$, υπάρχει $\xi \in (0, 1)$: $f'(\xi) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} < 0.$ Από ΘΜΤ για την f' στο $[\xi, 1]$, υπάρχει $x_0 \in (\xi, 1)$: $f''(x_0) = \frac{f'(\xi)-f'(1)}{1-\xi} = -\frac{f'(\xi)}{1-\xi} > 0$. Άρα από (1) $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έτσι για $x < 1$ είναι $f'(x) < f'(1) = 0$ και για $x > 1$ είναι $f'(x) > f'(1) = 0$ κ.τ.λ.
506.	ε) Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα. Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$ κ.τ.λ.
516.	Είναι $u=R+x$ και $\rho^2=R^2+x^2$
521.	Έστω $A(-\rho, 0)$ το σημείο επαφής. Τότε το B έχει συντεταγμένες $(x, \sqrt{\rho^2-x^2})$, άρα $(AB\Gamma) = (\rho+x) \cdot \sqrt{\rho^2-x^2} = f(x)$ ($-\rho \leq x \leq \rho$). $f'(x) = \frac{-2x^2 - \rho x + \rho^2}{\sqrt{\rho^2-x^2}} \text{ και όταν } x = \frac{\rho}{2},$ η f παρουσιάζει μέγιστο, άρα η $B\Gamma$ πρέπει να απέχει $3 \cdot \frac{\rho}{2}$ από το A. 
523.	α) Μελετώντας τα ακρότατα της f βρίσκουμε ότι παρουσιάζει μέγιστο στο e το $\frac{1}{e}$. Άρα $f(x) \leq \frac{1}{e} < 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ΚΑΛΥΤΕΡΑ: Είναι $\ln x \leq x-1 < x$ για κάθε $x > 0$, άρα $\frac{\ln x}{x} < 1$ β) $g'(x) = 2 + \frac{1-\ln x}{x^2} \stackrel{\ln x < x}{\text{από α)}} > 2 + \frac{1-x}{x^2} = \frac{2x^2-x+1}{x^2} > 0$ γιατί το $2x^2-x+1$ έχει $\Delta < 0$.
533.	α) Η πρώτη με δύο τρόπους: Με ΘΜΤ για την $\ln w$ στο $[1, x+1]$ ή με τα ακρότατα, ορίζοντας $h(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$ στο $[0, +\infty)$ Για τη δεύτερη λογαριθμίζοντας προκύπτει η προηγούμενη
534.	Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι κυρτή ή κοίλη στο $\mathbb{R}$
536.	Θεωρούμε την εφαπτομένη ε στο $M(x_0, f(x_0))$ και τα σημεία $A(x, f(x))$ της C_f και $B(x, y)$ της ε . Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) > y$ για κάθε $x \neq x_0 \in (a, \beta)$
543.	Αρκεί η f'' να αλλάζει πρόσημο οπότε $\Delta > 0$
546.	β) Χρησιμοποιείστε ότι $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$
553.	γ) Είναι $\left. \begin{matrix} P'(x_1) = 0 \\ P'(x_2) = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} 3ax_1^2 + 2\beta x_1 + \gamma = 0 \\ 3ax_2^2 + 2\beta x_2 + \gamma = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ $3a \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2) + 2\beta \cdot (x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (3ax_1 + \beta) + 2 \cdot (3ax_2 + \beta) = 0 \Leftrightarrow P''(x_1) + P''(x_2) = 0$

554.	Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) > y$ για $x \neq x_0$ όπου $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, άρα αρκεί $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > f'(x_0)$ για $x > x_0$ και από Θ.Μ.Τ. η σχέση γίνεται $f'(\xi) > f'(x_0)$ με $\xi > x_0$, που ισχύει, αφού $f''(x) > 0$, άρα $f' \uparrow$. Όμοια για $x < x_0$.
555.	19) Ανάλυση της εφχ σε $\frac{\eta \mu x}{\sigma \nu \nu x}$ 22) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln^2 x \cdot \ln(x+1)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln^2 x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}$
556.	γ) Αφού κάνουμε ομώνυμα και εφαρμόσουμε De l' Hospital καταλήγουμε στο $\frac{2e^x - 1}{2e^x - 2 + 2e^x \cdot x}$. Ο αριθμητής τείνει στο 1 και ο παρονομαστής στο 0^+ , καθώς $2e^x - 2 + 2e^x \cdot x = 2 \cdot (e^x - 1) + 2e^x \cdot x > 0$, όταν $x > 0$
561.	Είναι $\frac{0}{0}$. Παραγωγίζουμε ως προς h και καταλήγουμε σε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) + 8f'(x-2h) - 9f'(x-3h)}{2h} \overset{\substack{\text{προσθαφαιρούμε} \\ \text{κατάλληλα το } f'(x)}}{=} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} 8 \frac{f'(x-2h) - f'(x)}{2h} - \lim_{h \rightarrow 0} 9 \frac{f'(x-3h) - f'(x)}{2h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} - \lim_{-2h \rightarrow 0} 8 \frac{f'(x-2h) - f'(x)}{-2h} + \lim_{-3h \rightarrow 0} \frac{27}{2} \frac{f'(x-3h) - f'(x)}{-3h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} - \lim_{\omega \rightarrow 0} 8 \frac{f'(x+\omega) - f'(x)}{\omega} + \lim_{u \rightarrow 0} \frac{27}{2} \frac{f'(x+u) - f'(x)}{u} = \\ = \frac{1}{2} f''(x) - 8f''(x) + \frac{27}{2} f''(x) = 6f''(x)$
564.	α) $\left \frac{\sigma \nu \nu(x-1)}{e^{x-1}} \right \leq \frac{1}{e^{x-1}} \rightarrow 0$
567.	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + \beta - f(x)) = 0$ ή αλλιώς $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + \beta)) = 0$ οπότε η $y = ax + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Άρα $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$
577.	Αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \in \mathbb{R}^*$ θα είναι $g(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ και τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{ax^2} = \frac{2}{a}$ Επομένως $\frac{2}{a} = 2 \Leftrightarrow a = 1$

ΚΕΦ. 4 - ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

86.	6) Θέτουμε $u = \sqrt{x+1}$
89.	3) Αλλαγή μεταβλητής $u = \sqrt{x+1}$
91.	24) $u = 1 + 2\sigma \nu \nu x$ 27) $\frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} = (\epsilon \phi x)'$ και ΠΟ 29) Θεωρούμε ως f την e^x , εφαρμόζουμε ΠΟ, σπάμε το τελικό ολοκλήρωμα και υπολογίζουμε καθένα χωριστά

	40) $\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} = (1 + \varepsilon \varphi^2 x) \cdot (\varepsilon \varphi x)'$ 41) $\sqrt{1 + \sin x} = \sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2} \cdot \left \sin \frac{x}{2} \right$ 42) $\sqrt{1 - \sin 2x} = \sqrt{2 \eta \mu^2 x} = \sqrt{2} \cdot \eta \mu x$
93.	17) Με αλλαγή μεταβλητής $u = e^x$, αλλά καλύτερα ως εξής: $\int_0^1 \frac{1 + e^{x+1}}{1 + e^x} dx = \int_0^1 \frac{1 + e^x + e^{x+1} - e^x}{1 + e^x} dx = \int_0^1 \frac{1 + e^x}{1 + e^x} dx + \int_0^1 \frac{e^{x+1} - e^x}{1 + e^x} dx =$ $= \int_0^1 1 dx + \int_0^1 \frac{e^x(e-1)}{1 + e^x} dx = 1 + (e-1) \cdot \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} dx = 1 + (e-1) \cdot \int_0^1 \frac{(1 + e^x)'}{1 + e^x} dx \text{ κ.τ.λ.}$ 19) $u = \sqrt{2 - e^x}$ 20) $u = 3^x$ 24) Θέτουμε $u = \ln x$ 46) Σπάμε
98.	β) Το εμβαδόν που οριζόταν από τη C_f, τον $x'x$ και τις $x=a$ και $x=\beta$, προφανώς είναι ίσο με το νέο εμβαδόν που θα ορίζεται από τη C_f, τον $x'x$ και τις $x=a+\gamma$ και $x=\beta+\gamma$, αν έχουμε μεταφέρει τη C_f κατά γ παράλληλα με τον $x'x$.
100.	Θέτουμε $u = a + \beta - x \Leftrightarrow x = a + \beta - u$ και $du = -dx$, $u_1 = \beta$ και $u_2 = a$. Τότε: $I = \int_a^\beta x \cdot f(x) dx = - \int_\beta^a (a + \beta - u) \cdot f(a + \beta - u) du = \int_a^\beta (a + \beta - x) \cdot f(a + \beta - x) dx =$ $= \int_a^\beta (a + \beta - x) \cdot f(x) dx = \int_a^\beta (a + \beta) \cdot f(x) dx - \int_a^\beta x \cdot f(x) dx =$ $= \int_a^\beta (a + \beta) \cdot f(x) dx - I \text{ κ.τ.λ.)}$
102.	Γ. γ) Δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ και μετά παίρνουμε τη σχέση $\mu \cdot (\beta - a) \leq \int_a^\beta f(t) dt \leq M \cdot (\beta - a)$ <u>ΑΛΛΙΩΣ:</u> Υπολογίζουμε το $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{1+ t } dt$ και «βγαίνει» 0 ή αλλιώς βγαίνει 0 επειδή η $f(t) = \frac{t}{1+ t }$ είναι περιττή στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. δ) 1ος τρόπος: Για $x=1$ προφανές. Για $x>1$ και $t \in [1, x]$ είναι $e^{t^2} \leq t \cdot e^{t^2}$ και επειδή οι $y = e^{t^2}$ και $y = t \cdot e^{t^2}$ δεν είναι ίσες στο $[1, x]$ θα είναι $\int_1^x e^{t^2} dt < \int_1^x t \cdot e^{t^2} dt \Leftrightarrow \int_1^x e^{t^2} dt < \frac{1}{2}(e^{x^2} - e)$ Για $x<1$ και $t \in [x, 1]$ είναι $e^{t^2} \geq t \cdot e^{t^2}$ και επειδή οι $y = e^{t^2}$ και $y = t \cdot e^{t^2}$ δεν είναι ίσες στο $[x, 1]$ θα είναι $\int_x^1 e^{t^2} dt > \int_x^1 t \cdot e^{t^2} dt \Leftrightarrow \int_1^x e^{t^2} dt < \int_1^x t \cdot e^{t^2} dt \Leftrightarrow \dots$ <u>2ος τρόπος (καλύτερος):</u> Αρκεί να δείξουμε ότι $2 \cdot \int_1^x e^{t^2} dt - e^{x^2} + e \leq 0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = 2 \cdot \int_1^x e^{t^2} dt - e^{x^2} + e$ και προσδιορίζουμε τα ακρότατά της.
105.	Είναι $f'(t) \geq 2t \Leftrightarrow f'(t) - 2t \geq 0$. Άρα για $x \geq 0$ είναι

	$\int_0^x (f'(t) - 2t) dt \geq 0 \Leftrightarrow f(x) - x^2 \geq 0, \text{ οπότε } \int_0^3 (f(x) - x^2) dx \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \int_0^3 f(x) dx \geq \int_0^3 x^2 dx \Leftrightarrow \int_0^3 f(x) dx \geq \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 \text{ κ.τ.λ.}$
106.	<u>Τρεις τρόποι:</u> <u>1ος:</u> Εφαρμόζουμε ΘΜΤ δύο φορές για την παράγουσα F της f, μία στο $[0, 1]$ και μία στο $[1, 2005]$. Βγαίνει ένα $\xi_1 \in (0, 1)$ και ένα $\xi_2 \in (1, 2005)$ κ.τ.λ. Όμως $f(\xi_2) > f(\xi_1)$, αφού f γνησίως αύξουσα κ.τ.λ. <u>2ος:</u> Προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $\int_0^1 f(x) dx$ και η σχέση γίνεται $\int_0^{2005} f(x) dx > 2005 \cdot \int_0^1 f(x) dx \quad (1).$ Στο 2ο μέλος θέτουμε $u=2005x$, οπότε (1) $\Leftrightarrow \int_0^{2005} f(x) dx > \int_0^{2005} f\left(\frac{u}{2005}\right) du \Leftrightarrow \int_0^{2005} \left[f(x) - f\left(\frac{x}{2005}\right) \right] dx > 0 \text{ που είναι}$ αληθής για κάθε $x \in [0, 2005]$, αφού $x \geq \frac{x}{2005}$ για κάθε $x \geq 0$, οπότε $f(x) - f\left(\frac{x}{2005}\right) \geq 0, \text{ χωρίς να είναι παντού } 0.$ <u>3ος:</u> Είναι f γνησίως αύξουσα. Άρα για $x \in [1, 2005]$ είναι $f(1) \leq f(x) \leq f(2005)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει παντού είναι $\int_1^{2005} f(1) dx < \int_1^{2005} f(x) dx < \int_1^{2005} f(2005) dx \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2004 \cdot f(1) < \int_1^{2005} f(x) dx < 2004 \cdot f(2005) \quad (1).$ Όμοια για $x \in [0, 1]$ είναι $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει παντού είναι $\int_0^1 f(0) dx < \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 f(1) dx \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(0) < \int_0^1 f(x) dx < f(1) \Leftrightarrow 2004 \cdot f(0) < 2004 \cdot \int_0^1 f(x) dx < 2004 \cdot f(1) \quad (2).$ Από (1) και (2) είναι $2004 \cdot \int_0^1 f(x) dx < 2004 \cdot f(1) < \int_1^{2005} f(x) dx$
116.	$\int_1^2 [f(x) + f'(x)] \cdot e^x dx = \int_1^2 [f(x) \cdot (e^x)' + f'(x) \cdot e^x] dx = [f(x) \cdot e^x]_1^2 \text{ κ.τ.λ.}$
118.	$\int_0^\pi f(x) \cdot \eta\mu x dx + \int_0^\pi f''(x) \cdot \eta\mu x dx = - \int_0^\pi f(x) \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' dx + \int_0^\pi f''(x) \cdot \eta\mu x dx =$ $= -[\sigma\upsilon\nu x \cdot f(x)]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x dx + \int_0^\pi f''(x) \cdot \eta\mu x dx =$ $= -[\sigma\upsilon\nu x \cdot f(x)]_0^\pi + \int_0^\pi [f'(x) \cdot (\eta\mu x)' + f''(x) \cdot \eta\mu x] dx = \dots$
140.	α) Η δοσμένη σχέση δίνει ολικό ελάχιστο στο 0 το 0. Εφαρμόζουμε Θ. Fermat. β) Εφαρμόζουμε Θ Rolle για την παράγουσα $g(x) = \int_0^x f(t) dt - 2004 \cdot x$ της $f(x) - 2004$ στο $[0, 1]$ ή αλλιώς, αν η C_f δεν έτεμνε την $y=2004$, αφού είναι συνεχής θα ήταν κάτω ή πάνω από αυτήν συνεχώς στο $(0, 1)$. Έτσι αν $f(x) \geq 2004$ για κάθε $x \in [0, 1]$ με $f(x) > 2004$ για κάθε $x \in (0, 1)$, θα είναι $f(x) - 2004 \geq 0$ στο $[0, 1]$, χωρίς η $g(x) = f(x) - 2004$ να είναι παντού 0. Τότε όμως $\int_0^1 [f(t) - 2004] dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt > 2004$ άτοπο. Όμοια αν $f(x) \leq 2004$ για κάθε $x \in [0, 1]$ με $f(x) < 2004$ για κάθε $x \in (0, 1)$

141.	Εφαρμόζουμε Θ. Fermat
142.	Αρκεί $\int_x^1 f(t) dt + \int_1^{2x-1} f(t) dt - \int_1^x f(t) dt \geq 0$. Ορίζουμε το α' μέλος ως g, την παραγωγίζουμε και δείχνουμε ότι έχει ελάχιστο στο 1 το 0.
150.	$g'(x)=f(x)$ και $g(\gamma)=0$. ΘΜΤ για την g στα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$. Προκύπτει ότι $f(x_1) = \frac{-g(a)}{\gamma-a} \Leftrightarrow g(a) = -(\gamma-a) \cdot f(x_1) \text{ και}$ $f(x_2) = \frac{-g(\beta)}{\gamma-\beta} \Leftrightarrow g(\beta) = -(\gamma-\beta) \cdot f(x_2).$ Όμως $g(a) \cdot g(\beta) > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. Άρα από Bolzano υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0 \Leftrightarrow g'(x_0)=0$ και αφού f γν. αύξουσα είναι για $x < x_0$ $f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$ και για $x > x_0$ κ.τ.λ.
151.	α) Από θεώρημα ελάχ-μέγ τιμής υπάρχουν $x_1, x_2 \in [1, 4]$ ώστε $g(x_1)$ min και $g(x_2)$ max. Όμως $-2 \leq g(x) \leq 2$, $g(1)=0$ και $g(4)=1$. Άρα τα x_1, x_2 βρίσκονται εντός του $(1, 4)$, οπότε από Fermat $g'(x_1)=0=f(x_1)$ και $g'(x_2)=0=f(x_2)$. Θ. Rolle για την f στο $[x_1, x_2]$. β) $g''(x) = f'(x)$ οπότε $g''(x_0) = 0$
152.	α) $g(x) = \int_x^0 \left(\int_0^\pi g(t) \cdot \eta \mu x \, dx \right) dt + x^2 = - \int_0^x \left(\int_0^\pi g(t) \cdot \eta \mu x \, dx \right) dt + x^2 =$ $= - \int_0^x g(t) \cdot \left(\int_0^\pi \eta \mu x \, dx \right) dt + x^2 = - \int_0^x g(t) \cdot 2 \, dt + x^2$, γιατί $\int_0^\pi \eta \mu x \, dx = \dots = 2$. Παραγωγίζοντας έχουμε $g'(x) + 2g(x) = 2x \Leftrightarrow g'(x) \cdot e^{2x} + 2g(x) \cdot e^{2x} = 2x \cdot e^{2x} \Leftrightarrow (e^{2x} \cdot g(x))' = 2x \cdot e^{2x} \Leftrightarrow e^{2x} \cdot g(x) = \int 2x \cdot e^{2x} \, dx$ κ.τ.λ. γ) Για το $+\infty$, "σπάμε το κλάσμα". Για το $-\infty$ παίρνουμε γινόμενο ορίων και για το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x \cdot e^{2x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^{-2x}} = \dots$ D.L.
153.	α) Α.Μ. $\frac{x}{u} = \omega$, οπότε $d\omega = -\frac{x}{u^2} du$. γ) Από το β) ερώτημα και αφού δείξουμε ότι $g(x)=0$ ή από το α) ερώτημα καταλήγουμε σε $x^2 \cdot f'(x) + 2x \cdot f(x) = -\frac{1}{x}$.
155.	Το $(x-a)$ του παρονομαστή βγαίνει έξω και από το όριο προκύπτει ότι $\frac{f(a)}{a} = 1$, οπότε $f(a)=a$ και $f(\beta)=\beta$. Στη συνέχεια Θ. Rolle στην $y=f(x)-x$ ή ΘΜΤ στην $y=f(x)$.
162.	Παραγωγίζοντας έχουμε ότι $x^2 \cdot f(x) = x \cdot f'(x) - f(x) \Leftrightarrow (x^2+1) \cdot f(x) = x \cdot f'(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow (\ln f(x))' = \left(\frac{x^2}{2} + \ln x \right)'$ κ.τ.λ.
164.	α) Η δοσμένη σχέση καταλήγει σε $(g'(x)-g(x)) \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow g'(x)=g(x)$, για κάθε $x \neq 1$. Άρα $g(x) = \begin{cases} c_1 \cdot e^x, & x < 1 \\ c_2 \cdot e^x, & x > 1 \end{cases}$. Όμως $g(0)=1 \Leftrightarrow c_1=1$ και από τη συνέχεια $g(1), x=1$ στο 1 βρίσκουμε ότι $c_2=1$ και $g(1)=e$. Άρα $g(x)=e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (οπότε έχουμε και ότι $(x \cdot e^x - e^x)' = x \cdot e^x$ που χρειάζεται στην 1η λύση του β)).

	β) 1η ΛΥΣΗ: Για $x \neq 0$ είναι $x \cdot f'(x) = e^x - 2f(x) \Leftrightarrow x \cdot f'(x) + 2f(x) = e^x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 \cdot f'(x) + 2xf(x) = x \cdot e^x \Leftrightarrow (x^2 \cdot f(x))' = x \cdot e^x \Leftrightarrow (x^2 \cdot f(x))' = (x \cdot e^x - e^x)'$ από α) ερώτημα. Για $x < 0$ είναι $x^2 \cdot f(x) = x \cdot e^x - e^x + c_1$ και για $x > 0$ είναι $x^2 \cdot f(x) = x \cdot e^x - e^x + c_2$. Άρα τελικά $x^2 \cdot f(x) = \begin{cases} x \cdot e^x - e^x + c_1, & x < 0 \\ x \cdot e^x - e^x + c_2, & x > 0, \text{ όπου τα } c_1, c_2 \text{ υπολογίζονται από τη συνέχεια} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ της $g(x) = x^2 \cdot f(x)$ στο 0. Στη συνέχεια γράφουμε τον τύπο της f, αφού έχουμε υπολογίσει και το $f(0)$ από τη σχέση που δόθηκε στην εκφώνηση. 2η ΛΥΣΗ: (*) Η συνέχεια από το σημείο αυτό και μετά θα μπορούσε να είναι ως εξής: $f'(x) + \frac{2}{x} f(x) = \frac{e^x}{x} \Leftrightarrow e^{2 \ln x } \cdot f'(x) + e^{2 \ln x } \cdot \frac{2}{x} f(x) = e^{2 \ln x } \cdot \frac{e^x}{x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (e^{2 \ln x } \cdot f(x))' = x^2 \cdot \frac{e^x}{x} \Leftrightarrow (e^{2 \ln x } \cdot f(x))' = x e^x \Leftrightarrow (x^2 \cdot f(x))' = x \cdot e^x + e^x - e^x \text{ κ.τ.λ.}$ 3η ΛΥΣΗ: Αν θέλουμε να λύσουμε την άσκηση χρησιμοποιώντας αόριστο ολοκλήρωμα, τότε η λύση είναι αρκετά πιο απλή, καθώς αποφεύγουμε τα "δύσκολα" τεχνάσματα. Έτσι από το σημείο (**) και μετά έχουμε: $x^2 \cdot f(x) = \int x \cdot e^x dx + c \Leftrightarrow \dots$
166.	Είναι $x \cdot f'(x) = f(x) + x \cdot f(x) \Leftrightarrow x \cdot f'(x) - f(x) = x \cdot f(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x} \text{ κ.τ.λ.}$
171.	Θεώρημα Bolzano για την $g(x) = \int_a^x f(t) dt + \lambda^2 \int_\beta^x f(t) dt, x \in [a, \beta]$
172.	Έστω $\Phi(x) = \left(\int_\beta^x g(t) dt\right)' \cdot \int_a^x f(t) dt - \left(\int_a^x f(t) dt\right)' \cdot \int_x^\beta g(t) dt =$ $= \left(\int_\beta^x g(t) dt\right)' \cdot \int_a^x f(t) dt + \left(\int_a^x f(t) dt\right)' \cdot \int_\beta^x g(t) dt = \left(\int_a^x f(t) dt \cdot \int_\beta^x g(t) dt\right)' \text{ και}$ εφαρμόζουμε Θ. Rolle για την $F(x) = \int_a^x f(t) dt \cdot \int_\beta^x g(t) dt$.
174.	Συνεχόμενα D.H.L.
176.	Είναι $I(x) = \int_e^x \frac{e^2 \cdot (1 - \ln t)}{t^2} dt = e^2 \cdot \int_e^x \left(\frac{\ln t}{t}\right)' dt = e^2 \cdot \frac{\ln x}{x} - e$ και όριο.
178.	A. $\int_0^1 \sqrt{x} dx$, B. $\int_0^1 x^2 dx$, Γ. $\int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx$, Δ. $\int_{-1}^1 x^2 dx$
193.	Το ΟΑΒ έχει εμβαδόν $\frac{1}{2}$ $OB \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot x_1 \cdot ax_1^v$, άρα θα πρέπει $\int_0^{x_1} ax^v dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} x_1 \cdot ax_1^v\right)$
194.	γ) Έστω $\gamma = \lambda x$ η ευθεία. Βρίσκουμε τα σημεία τομής της με τη C_f και απαιτούμε κάποιο εμβαδόν να έχει συγκεκριμένη τιμή.
195.	β) Στο $[1, 2]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα $f(2) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq f(1)$

	$\delta) \int_2^a f(x) dx = \frac{9}{8}$
198.	Μια πρόταση για γεωμετρική ερμηνεία είναι η παρακάτω: Αν το χωρίο E_1 διαιρεθεί σε ορθογώνια με πολύ μικρή βάση, τότε τα ύψη των ορθογωνίων μικραίνουν με τέτοιο ρυθμό, ώστε αν και το πλήθος είναι θεωρητικά άπειρο, το άθροισμα των εμβαδών τους να είναι πραγματικός αριθμός, πράγμα που δεν συμβαίνει στο E_2 .
200.	α) Μια λύση για την αριστερή ανισότητα είναι το ΘΜΤ για την $\int_a^x f(x) dx$ στο $[a, \beta]$. Για τη δεξιά ορίζουμε την $g(x) = \int_a^x f(x) dx - (x-a) \cdot \frac{f(a)+f(x)}{2}$ και μελετάμε μονοτονία και ακρότατα στο $[a, \beta]$. Για τη γεωμετρική ερμηνεία είναι $(\beta-a) \cdot f(a) = \text{εμβαδόν ορθογωνίου}$, $(\beta-a) \cdot \frac{f(a)+f(\beta)}{2} = \text{εμβαδόν τραπεζίου}$ γ) $f \uparrow$ και $f''(x) > 0$ άρα από α) είναι $1 < I < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$
204.	β) Δύο τρόποι: 1ος: $E = \int_1^3 f^{-1}(x) dx$ και στη συνέχεια αλλαγή μεταβλητής $x=f(u)$ 2ος: Αντί να βρούμε το ζητούμενο εμβαδόν, μπορούμε λόγω συμμετρίας σε σχέση με την $y=x$, να προσδιορίσουμε το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $y'x$ και τις ευθείες $y=1$ και $y=3$ και αυτό είναι το ζητούμενο