Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τελευταία Επανάληψη Μαθηματικών Προσανατολισμού

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ: _____

ΔΙΑΚΟΥΜΑΚΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
Μαθηματικός

ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

έκδοση 2023-1

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ: *Ασκ Σχολ 1/27 σημαίνει «άσκηση 1 σχολικού σελίδα 27»*
Ασκ Φυλ 60 σημαίνει «άσκηση 60 του αντίστοιχου κεφαλαίου του αντίστοιχου φυλλαδίου»
Ασκ επανάληψης 32 σημαίνει «άσκηση 32 του φυλλαδίου ασκήσεων επανάληψης»
*Οι ασκήσεις που έχουν έντονο αριθμό (π.χ. **135**) είναι οι πιο χαρακτηριστικές, που σημαίνει ότι αν δεν θέλουμε να τις λύσουμε όλες, τουλάχιστον ας λύσουμε αυτές.*

	Α. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
1.	Ασκήσεις πεδίου ορισμού (λύση ανίσωσης $\sqrt{x^2+1}-x>0$). Αν το πεδίο ορισμού της f(x) είναι το [3, +∞), τότε το πεδίο ορισμού της f(2x-1) είναι τα x για τα οποία 2x-1 ≥ 3⇔ x ≥ 2, δηλαδή το [2, +∞) (η f(2x-1) είναι σύνθετη).
	*Ασκ Σχολ 1/27, Ασκ Φυλ 127, 159, **160***
2.	Ασκήσεις Συνόλου τιμών (δύο τρόποι: Κλασσικός – Συνέχεια, μονοτονία)
	*Ασκ Φυλ 78 (ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ), **257, 258** (ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ)*
3.	Ασκήσεις συναρτησιακών σχέσεων, να βρεθεί το f(x)
	*Ασκ Φυλ 70, **71***
4.	• Προσοχή χρειάζεται στο για ποιες τιμές ισχύει η κάθε σχέση που δίνεται (για κάθε x; για μια τιμή μόνο; για κάποιες;). • Είναι άλλο να μου λέει "δίνεται η f(x)=συνx, x∈R" και άλλο "να λυθεί η εξίσωση f(x)=συνx", μια που στη δεύτερη δεν σημαίνει ότι γνωρίζω τον τύπο της f. • Επίσης αν μου λέει "δίνεται η σχέση …. για κάθε x∈R*" προφανώς δεν μπορώ να θέσω όπου x το 0. • Προσοχή χρειάζεται και στο τι τιμές παίρνουν παράμετροι οι οποίες μπορεί να συμμετέχουν στην άσκηση. Μήπως το α δεν ανήκει στο R (όπως έχουμε συνηθίσει), αλλά στο Z; Τότε οι τιμές που μπορεί να πάρει είναι πιο περιορισμένες και ίσως υπολογίζονται.
5.	**Δεν ξεχνώ ποτέ την περίπτωση απόδειξης με απαγωγή σε άτοπο.** **Παραδείγματα:** • Για να δείξω ότι είναι αληθής η πρόταση "η σχέση …… ισχύει για κάθε x", αρκεί να υποθέσω (με απαγωγή σε άτοπο) ότι "υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε η σχέση να μην ισχύει", και να καταλήξω σε κάτι άτοπο. • Για να δείξω ότι μια συνάρτηση παίρνει ετερόσημες τιμές, αρκεί να υποθέσω ότι f(x) ≥ 0 ή f(x) ≤ 0 για κάθε x και να αποδείξω ότι αυτό είναι άτοπο.
6.	Άρτιες-περιττές
	*Ασκ Φυλ **94***
7.	Θεωρητικές ασκήσεις αρτίων, περιττών, μονοτονίας, σύνθεσης
	*Ασκ Σχολ 4/39, Ασκ Φυλ 101, 110, 113, **151, 153**, 162, **168**, **169**, 184*
8.	Με τη μονοτονία μπορώ να λύσω ανισώσεις. Με το "1-1" μπορώ να λύσω εξισώσεις και σχέσεις "διάφορου". Αν f(x) ≥ α, για κάθε x∈D_f, το α είναι ελάχιστο της συνάρτησης, **μόνο** αν είναι τιμή της (δηλαδή αν αποδείξω ότι υπάρχει x_0∈D_f τέτοιο ώστε f(x_0)=α).
	*Ασκ Φυλ **105, 106, 108***
9.	Ασκήσεις συνθέσεων Ασκήσεις που μου δίνουν την f και την fog και μου ζητούν τη g. Ασκήσεις που μου δίνουν την f και την gof και μου ζητούν τη g.
	*Ασκ Σχολ 6/30, Ασκ Φυλ **126**, 155, **156**, **157***
10.	Ασκήσεις αντιστρόφων-"1-1". Αν x=y τότε f(x)=f(y) γιατί η f είναι συνάρτηση. Αντίστροφα αν f(x)=f(y), τότε x=y μόνο αν η f είναι "1-1". Για τις παραπάνω δύο συνεπαγωγές φυσικά ισχύουν και οι αντιθετοαντίστροφές τους.

	Ισχύει $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, οπότε αν $f(0)=1$ τότε $f^{-1}(1)=0$, δηλαδή μπορούμε να βρούμε ρίζα της αντίστροφης, χωρίς να υπολογίσουμε την αντίστροφη, βρίσκοντας το f(0). Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την y=x. Αν η C_f δεν έχει κοινό σημείο με την y=x, τότε ούτε η $C_{f^{-1}}$ έχει κοινό σημείο με την y=x. $f(f^{-1}(y))=y$ για κάθε $y \in R_f$ και $f^{-1}(f(x))=x$ για κάθε $x \in D_f$ <u>Με αποδείξεις:</u> • Αν f γνησίως μονότονη, τότε και η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας • Αν f γνησίως αύξουσα, τότε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} είναι ακριβώς τα ίδια με τα κοινά σημεία των C_f και y=x.
	*Ασκ Σχολ 2,3/38, Ασκ Φυλ 163, **164, 165,** 170*
ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ	

Β. ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ	
1.	Βασικά όρια και ιδιαίτερα τριγωνομετρικά. Μεθοδολογία ορίων. Σε περίπτωση α.μ. $\frac{a}{0}$ παίρνουμε γινόμενο ορίων. Η περίπτωση $\frac{0}{\infty}$ δεν είναι α.μ. αλλά δίνει αποτέλεσμα 0. Απροσδιόριστες μορφές που καταλήγουν σε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ μπορούν να αντιμετωπισθούν και με θεώρημα De l' Hospital (αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του). Αν γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to 1} f(x)=8$ για να δείξουμε ότι $\lim_{x\to 2} f(x-1)=8$, χρειάζεται αλλαγή μεταβλητής. Το ίδιο ισχύει για τα $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu ax}{ax}=1,\ a\neq 0,\ \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu ax}{x}=a,\ a\neq 0,\ \lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}=1$ με βάση το $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$.
	*Ασκ Σχολ 3/56, 4,5,6,7/57, 1,2/58, 2/63, 1/68, **2,3**/69, **4(Β ΟΜ)**/69, Ασκ Φυλ 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 65, 130, 131, 133, 135, 137, **142, 145**, 147, 148*
2.	Όρια που υπολογίζονται με τη βοήθεια του λόγου μεταβολής (παράγωγος) π.χ. Αν f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $a\in R$ να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu a-f(a)\cdot\sigma\upsilon\nu x}{x-a}$ Προσθαφαιρούμε στον αριθμητή κατάλληλη ποσότητα (το συνδυασμό που λείπει) ώστε να προκύψει ο λόγος μεταβολής της f (εδώ το $f(a)\cdot\sigma\upsilon\nu a$ ή $f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x$). Έτσι: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu a-f(a)\cdot\sigma\upsilon\nu x}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu a-f(a)\cdot\sigma\upsilon\nu x-f(a)\cdot\sigma\upsilon\nu a+f(a)\cdot\sigma\upsilon\nu a}{x-a}=$ $=\lim_{x\to a}\frac{[f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu a-f(a)\cdot\sigma\upsilon\nu a]-[f(a)\cdot\sigma\upsilon\nu x-f(a)\cdot\sigma\upsilon\nu a]}{x-a}=$ $=\sigma\upsilon\nu a\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu a}{x-a}=f'(a)\cdot\sigma\upsilon\nu a+f(a)\cdot\eta\mu a$, καθώς το $\lim_{x\to a}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu a}{x-a}$ είναι η παράγωγος της συνx στο α.
	*Ασκ Σχολ 7/122, Ασκ Φυλ (**ΤΕΥΧ ΙΙ**) **171 έως 176, 178***
3.	Αν $\lim_{x\to\xi} f^2(x)=25$ δεν ισχύει ότι $\lim_{x\to\xi} f(x)=\pm 5$, παρά μόνο αν το όριο της f υπάρχει. Όμοια αν $\lim_{x\to\xi}\lvert f(x)\rvert=5$ ή αν $\lim_{x\to\xi}\sqrt[\nu]{f(x)}=5$. Αντίθετα αν $\lim_{x\to\xi} f^2(x)=0$, $\lim_{x\to\xi}\lvert f(x)\rvert=0$ ή $\lim_{x\to\xi}\sqrt[\nu]{f(x)}=0$, τότε σίγουρα το όριο της f υπάρχει και μάλιστα $\lim_{x\to\xi} f(x)=0$.

4.	Οι ιδιότητες $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\xi}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to\xi} f(x) + \lim\limits_{x\to\xi} g(x) \\ \lim\limits_{x\to\xi}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to\xi} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\xi} g(x) \\ \lim\limits_{x\to\xi}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to\xi} f(x)}{\lim\limits_{x\to\xi} g(x)} \end{cases}$ ισχύουν μόνο αν τα όρια των f και g υπάρχουν και η αντίστοιχη πράξη τους δεν καταλήγει σε α.μ. Αν κάποιο από τα παραπάνω όρια των πρώτων μελών υπάρχει π.χ. το $\lim\limits_{x\to\xi}(f(x)\cdot g(x))$, **δεν** σημαίνει ότι υπάρχουν οπωσδήποτε και τα όρια των f και g. Επίσης αν υπάρχει το όριο της μιας (π.χ. της f) και το όριο της πράξης τους (π.χ. της f·g) **δεν** σημαίνει οπωσδήποτε ότι υπάρχει και το όριο της άλλης (της g).
5.	"Όρια και διάταξη (βλέπε θεωρία σελ 59 φυλλαδίου).
	*Ασκ επανάληψης **32, 35***
6.	Παραμετρικά όρια (δύο ειδών ασκήσεις).
	*Ασκ Σχολ 9/57, 3/64, 1,2,3 (Β ΟΜ)/69, Ασκ Φυλ 67 έως 70, **81 έως 98**, 168 έως 185*
7.	Όρια αλληλοεξαρτώμενων συναρτήσεων (π.χ. Μας δίνουν π.χ. το $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{2f(x)-x}{x+1}$ και ζητάμε το $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$).
	*Ασκ Σχολ 4/58, 4/64, Ασκ Φυλ 100, 105, 107, **112, 113, 115, 128, 129, 189, 193, 194***
8.	Κριτήριο παρεμβολής και εφαρμογή του ("μυριζόμαστε" αν μια συνάρτηση έχει όριο το 0). Δεν ξεχνάμε ότι κατά την εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής για μηδενικές συναρτήσεις, ίσως αποδειχθεί χρήσιμη η σχέση $\lvert f(x)\rvert = \sqrt{f^2(x)}$
	*Ασκ Σχολ 8/57, Ασκ Φυλ 120 έως **123**, 124, 125, **126**, 142 έως 144, Ασκ επανάληψης **33, 34***
9.	Το κριτήριο παρεμβολής <u>στην περίπτωση απείρων ορίων</u> εκφράζεται με τις παρακάτω προτάσεις: **α)** Αν $f(x)\le g(x)$ σε γειτονιά του ξ και $\lim\limits_{x\to\xi} g(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = -\infty$ **β)** Αν $f(x)\le g(x)$ σε γειτονιά του ξ και $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to\xi} g(x) = +\infty$ Οι προτάσεις αυτές, αν και δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο, μπορούν να χρησιμοποιούνται χωρίς απόδειξη.
	*Ασκ Φυλ **165, 166,** Ασκ επανάληψης **104 Β***
10.	Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}-2x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{x^2+2x+2}-3x+2)$ Στην α) «σπάμε» το 2x σε -x και -x και παίρνουμε το κάθε -x με ένα ριζικό, δημιουργώντας δύο όρια που είναι α.μ. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το καθένα. Όμοια στο β) «σπάμε» το -3x σε -2x και -x.
	*Ασκ επανάληψης **31***
11.	• Ορισμός συνέχειας σε x_0, (α, β) και [α, β] • Για να δείξουμε ότι f συνεχής σε σύνολο (α, β) ή το D_f και δεν είναι γνωστός ο τύπος της f, αρκεί να δείξουμε ένα από τα παρακάτω για κάθε $x_0\in(α, β)$ ή για κάθε $x_0\in D_f$: ➢ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ή ➢ $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ (θέτοντας στην παραπάνω όπου x το x_0+h) ιδιαίτερα όταν μας δίνουν συναρτησιακή σχέση μορφής f(x+y)=… ή

	➢ $\lim_{h\to 1} f(x_0 \cdot h) = f(x_0)$, αν $x_0 \neq 0$, (θέτοντας στην πρώτη σχέση όπου x το $x_0 \cdot h$) ιδιαίτερα όταν μας δίνουν συναρτησιακή σχέση μορφής $f(x \cdot y)=\ldots$ • Όλες οι συναρτήσεις "μονού τύπου" είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους. • Πιθανά σημεία ασυνέχειας σε κλαδωτές. • Για να βρούμε το $\lim_{x\to 2} f(2x-1)$ δεν μπορούμε να θέσουμε στην f(2x-1) όπου x το 2 παρά μόνο αν η f(2x-1) είναι συνεχής στο 2. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει και αρκεί η 2x-1 να είναι συνεχής στο 2 (που είναι) και η f να είναι συνεχής στο 3 (καθώς η τιμή της 2x-1 για x=2 είναι το 3 – βλέπε θεωρία «συνέχεια και σύνθεση»)
	Ασκ Σχολ 2/79, 3/80, 3/81, Ασκ Φυλ 195 έως 198
12.	Παραμετρικές ασκήσεις συνέχειας
	Ασκ Σχολ 1,2/81, Ασκ Φυλ 203, ***206***
13.	Ασκήσεις συναρτησιακών σχέσεων που ζητάνε συνέχεια.
	Ασκ Φυλ 227 έως 229, Ασκ επανάληψης ***67, 68***
14.	Για να βρω το $f(x_0)$, όπου η f είναι συνεχής, αν δεν μπορώ αλλιώς, εκμεταλλεύομαι τη συνέχεια και το βρίσκω ως $f(x_0)= \lim_{x\to x_0} f(x)$.
	Ασκ Φυλ 212, 214
15.	Θεωρήματα συνέχειας (3). • Με το Θ**. Bolzano** μπορώ: α) να δείξω ότι μια συνάρτηση f έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε διάστημα (α, β) ή [α, β] ή ακόμα και στο R. Επίσης μπορώ να δείξω ότι έχει τουλάχιστον δύο ή τρεις κ.τ.λ. ρίζες. (Δεν ξεχνώ ότι μπορώ να δείξω ότι υπάρχουν ρίζες βρίσκοντας προφανείς ρίζες ή με τη βοήθεια του συνόλου τιμών ή και όλες τις ρίζες λύνοντας εξίσωση f(x)=0). β) να δείξω ότι **διατηρεί σταθερό πρόσημο σε ένα διάστημα**. γ) **να βρω τα πρόσημά της, αν ξέρω (ή μπορώ να βρω) όλες τις ρίζες της.** • Με το **Θ. ενδιαμέσων τιμών** μπορώ να αποδείξω ότι κάποια συνάρτηση παίρνει σίγουρα κάποια συγκεκριμένη τιμή σε ένα διάστημα. • Με το **Θ. Μεγίστου-Ελαχίστου** (<u>πονηρό θεώρημα</u>) μπορώ να δείξω ότι η συνάρτηση παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή σε ένα διάστημα. Στη συνέχεια, αν για παράδειγμα, τα x_1 και x_2 όπου παίρνει αυτές τις τιμές είναι εσωτερικά του διαστήματος και η f είναι παραγωγίσιμη, τότε από Θ. Fermat είναι $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$, δηλαδή εξασφαλίζουμε δύο ρίζες της f'. Επίσης με βάση τα παραπάνω γνωρίζω ότι η εικόνα ενός διαστήματος με συνεχή **και μη σταθερή** συνάρτηση είναι διάστημα (και όχι ένωση διαστημάτων) και μάλιστα η <u>εικόνα κλειστού διαστήματος</u> με συνεχή συνάρτηση και μη σταθερή συνάρτηση είναι <u>κλειστό διάστημα</u>, οπότε παίρνει σίγουρα ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Επίσης όπως ήδη αναφέραμε παραπάνω μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης αν γνωρίζουμε τη μονοτονία της. <u>Ισχύει επίσης (χωρίς απόδειξη) η παρακάτω πρόταση:</u> Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ανοικτό διάστημα (ξ_1, ξ_2) με $\xi_1, \xi_2 \in \bar{R}$ και ισχύουν ότι $\lim_{x\to \xi_1} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to \xi_2} f(x) = +\infty$ ή αντίθετα, τότε $\mathbf{R_f=R}$.
	Ασκ Σχολ 6/80, 8,9,10/81, 4(Β ΟΜ)/81, 5,6/82, Ασκ Φυλ ***231,*** *236,* ***241,*** *243, 250, 253 έως 258, 261, 265,* ***271,*** *274,* ***275, 276, 277, 283, 284, 285, 291, 296, 298, 299, 303, 304*** *Ασκ επανάληψης* ***54 έως 68, 78, 79, 83, 86, 87***
ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ ΤΥΠΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ	

	Γ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ
1.	• Παράγωγος συνάρτηση σε x_0, σε (α, β) και σε [α, β]. • Ποιες συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο Π.Ο. τους; • Ειδικές παρατηρήσεις για **(βλέπε σελίδες 11-12 φυλλαδίου ΙΙ)**: Συνάρτηση που έχει η περιέχει τη μορφή $[g(x)]^{\alpha}$, $\alpha\in(0, 1)$ Συνάρτηση μορφής $f(x)=[g(x)]^{h(x)}$, $g(x)>0$ Συνάρτηση μορφής $f(x)=\sqrt[\nu]{[g(x)]^{2\kappa}}$ • Πώς δείχνουμε ότι μια f που δεν ξέρουμε τον τύπο της είναι παραγωγίσιμη σε (α, β) ή στο D_f; Δείχνοντας ανάλογα την περίπτωση ότι το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ή το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ή το $\lim\limits_{h\to 1}\frac{f(x_0\cdot h)-f(x_0)}{x_0\cdot(h-1)}$ (αν $x_0\neq 0$) κ.τ.λ. υπάρχει για κάθε $x_0\in(\alpha, \beta)$ ή για κάθε $x_0\in D_f$ και είναι πραγματικός αριθμός. Τα δύο τελευταία όρια τα χρησιμοποιούμε ειδικά σε συναρτησιακές σχέσεις μορφών f(x+y)=… και f(x·y)=… αντίστοιχα. • Ασκήσεις προσδιορισμού ορίων που στηρίζονται στις παραγώγους • Αν f παραγωγίσιμη σε x_0 ή σε Δ τότε και συνεχής και ίσως ισχύουν τα Θ. Συνέχειας (Το αντίστροφο δεν ισχύει)
	Ασκ Σχολ 2,3,4,1,2,4(Β ΟΜ)/102, 5,6,7,8/103, 7/122, *Ασκ Φυλ 162, 163, 164, 166, 167,* ***168, 170, 173, 174, 176***
2.	Παραμετρικές ασκήσεις "να βρεθεί η τιμή του α ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 1" κ.τ.λ. Απαιτούμε πρώτα η f να είναι συνεχής στο 1
	Ασκ Σχολ 1/110, Ασκ Φυλ 179, 180, ***182, 183***
3.	Ασκήσεις παραγώγισης – κανόνες παραγώγισης
	Ασκ Σχολ 2,3,4/120, 12,13,14/121, 15/122, 9(Β ΟΜ)/122, Ασκ Φυλ 192 έως 196
4.	Αν δίνεται η συνάρτηση π.χ. f(ημx) που είναι παραγωγίσιμη και μας ζητούν π.χ. το $f'(\frac{1}{2})$, παραγωγίζουμε την f(ημx) ως σύνθετη και στη συνέχεια θέτουμε όπου x το $\frac{\pi}{6}$.
	Ασκ Φυλ 199, 215, ***216***
5.	Ασκήσεις κίνησης (ταχύτητα, επιτάχυνση κ.τ.λ.) Σελ. 4-5 φυλλαδίου ΙΙ και γενικά ασκήσεις στο ρυθμό μεταβολής. Διαδικασία αντιμετώπισής τους.
	Ασκ Σχολ 9/103, ***3/139****, ασκήσεις στις σελίδες* ***125 έως 127****,* *Ασκ Φυλ 224 έως 243 και ιδιαίτερα τις* ***233, 234, 235, 236, 237, 238***
6.	Ασκήσεις εφαπτομένων και όλα τα σχετικά <u>ΒΗΜΑΤΑ</u> Είναι η f παραγωγίσιμη εκεί; Τότε "Έστω ε (*η*) εφαπτομένη της C_f σε (*στο*) σημείο $M(x_0, f(x_0))$" Ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε δύο γραφικές παραστάσεις να δέχονται κοινή εφαπτομένη α) σε κοινό τους σημείο ή β) σε διαφορετικά σημεία **(ΣΕΛΙΔΑ 17-18 παρατηρήσεις 10 και 11 φυλλαδίου ΙΙ)**
	*Ασκ Σχολ 3(Β ΟΜ)/102, 3/110 ,2,3,****4(Β ΟΜ)****/110, 5/120,* ***7 έως 11/121****,* *Ασκ Φυλ 244, 249, 250, 252, 257, 270,273, 275 έως 278,* ***287, 288, 289, 296***
7.	Παράγωγος αντίστροφης σε σημείο y_0, χωρίς να μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίστροφη. Με αφετηρία μία από τις γνωστές σχέσεις $f(f^{-1}(x))=x$ ή $f^{-1}(f(x))=x$ παραγωγίζουμε τα μέλη της.
	Ασκ *Φυλ* ***217, 218***
8.	• Θ. Rolle. • Απόδειξη ότι κάποια συνάρτηση έχει τουλάχιστον μία, δύο κ.τ.λ. ρίζες σε ένα διάστημα. • Απόδειξη ότι κάποια συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα με απαγωγή σε άτοπο.
	Ασκ Σχολ 1/131, 1(Β ΟΜ)/131, 2,3,7/132, *Ασκ Φυλ 300, 301, 305, 307, 309,* ***325, 326, 327, 338***

9.	• ΘΜΤ. Πονηρό θεώρημα. Έχει λίγες προϋποθέσεις και είναι "τζάμπα". Μου μιλάει η άσκηση για παραγώγους και ασχολείται με f(α), f(β), f(γ) κ.τ.λ. (τιμές της f;). Ας δοκιμάσω ΘΜΤ. • Απόδειξη ανισώσεων με ΘΜΤ
	Ασκ Σχολ 2,3/131, 4,5,6/132, *Ασκ Φυλ 340, 342, 345, 352, 356, 357, 358, 363, 368, 374,* ***376 έως 379, 382, 505***
10.	Θεώρημα σταθερής, πόρισμα και η εφαρμογή του. $f'(x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^{x}$ και $f'(x)=-f(x) \Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^{-x}$ (αυτό με απόδειξη) **Προσοχή στην εφαρμογή των προτάσεων αυτών σε ένωση διαστημάτων.** Π.χ. Να προσδιορίσετε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $x\cdot f'(x)= e^{x^2} -2f(x)$ για κάθε $x\in R$. • Αν ζητάμε να δείξουμε ότι f(x)=g(x), για κάθε x, ορίζουμε τη συνάρτηση h(x)=f(x)-g(x) δείχνουμε ότι h'(x)=0, οπότε h(x)=c και στη συνέχεια ότι c=0. Π.χ. Αν $f^2(x)\cdot f'(x)+ημx+f^2(x)\cdot ημx+f'(x)=0$ για κάθε $x\in R$ και f(0)=1 να δείξετε ότι f(x)=συνx.
	Εφαρμ Σχολ σελ. 134, Ασκ Σχολ 1/138, 1/139, 5/234 (ολοκληρωμ) *Ασκ Φυλ 385, 390, 393, 394, 395, 397, 398,* ***400, 405 έως 408***
11.	• Μονοτονία – Θεώρημα Αν f παραγωγίσιμη και γν. αύξουσα, τότε σίγουρα η f' δεν είναι παντού αρνητική. • Παραμετρικές ασκήσεις μονοτονίας "Να βρεθεί η τιμή του α ώστε η $f(x)=2x^3-αx^2+x$ να είναι γνησίως αύξουσα στο R". • Λύση ή απόδειξη ανισώσεων. • Αν f γνησίως μονότονη, τότε και "1-1" και έχει μια το πολύ ρίζα. • Αν αλλάζει μια φορά μονοτονία, τότε δύο το πολύ ρίζες κ.τ.λ.
	Ασκ Σχολ 2,3,4,5,6/138, 2,4,5,6/139, 7,8/140, *Ασκ Φυλ 409, 410, 413, 418, 423,* ***427, 430, 432, 437 έως 440***
12.	• Ακρότατα – Θεώρημα • Σύνολο τιμών • Αποδείξεις ανισώσεων ίσως και με τη χρήση διαδοχικών παραγώγων **(βλέπε παράδειγμα σελ. 11 "ΒΑΣΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ")** • Παραμετρικές ασκήσεις ακροτάτων – Αναγκαία συνθήκη αλλά όχι ικανή. • Δείξτε ότι η f δεν έχει τοπικό ακρότατο. • Προβλήματα μεγίστου-ελαχίστου. Διαδικασία αντιμετώπισής τους. • Πιθανές θέσεις ακροτάτων - Κρίσιμα σημεία
	Ασκ Σχολ σελίδων 149 έως 154, Ασκ Φυλ 445, 450, 454, 456, ***463, 466, 467, 468, 470, 478, 479, 480, 481, 484, 486, 488, 489, 506, 512, 516, 517, 518***
13.	Για τη μονοτονία και τα ακρότατα δεν μας ενδιαφέρει αν υπάρχει η f' σε μεμονωμένα σημεία του Π.Ο. αρκεί η f να είναι συνεχής σε αυτά. Έτσι δεν ψάχνουμε σε αυτά την παραγωγισιμότητα.
14.	**Θ. Fermat** **Ισχύει κάποια ανίσωση μορφής h(x) ≥ α**; Τότε ίσως να υπάρχει x_0 (εσωτερικό) όπου h παραγωγίσιμη και $h(x_0)=α$, οπότε $h'(x_0)=0$ και επομένως η h' έχει ρίζα. Με δεδομένη την ισχύ μιας ανίσωσης h(x) ≥ α ζητώ να δείξω μια ισότητα; Τότε ίσως η λύση στο πρόβλημά μου είναι ο Pierre de Fermat.
	Ασκ Σχολ 7/174, Ασκ Φυλ 491, 492, ***494 έως 497, 500, 501***
15.	• Κυρτότητα –Ορισμός – Θεώρημα • Χοντρικά: f κυρτή ⇔ f' γν. αύξουσα (επίσης η γνώση της κυρτότητας εξασφαλίζει την παραγωγισιμότητα της f). $f''(x)>0 \Rightarrow$ f κυρτή (Το αντίστροφο δεν ισχύει, αλλά όμως αν f κυρτή δεν μπορεί να είναι $f''(x)<0$ για κάθε x) • Παραμετρικές ασκήσεις κυρτότητας "Να βρεθεί ο λ ώστε η $f(x)=x^4-3λx^3+x^2+2x-1$ να είναι κυρτή στο R". • Για την κυρτότητα δεν μας ενδιαφέρει αν υπάρχει η f'' σε μεμονωμένα σημεία του Π.Ο. αρκεί η f να είναι συνεχής σε αυτά. • Κυρτότητα και εφαπτομένη – Απόδειξη ανισώσεων.

	*Ασκ Σχολ 1,2,3/159, 5/160, 3(Β ΟΜ)/160, Ασκ Φυλ 522, **523**, 524, 526, 527, 531 έως 534, 536*
16.	• Σημεία καμπής – Ορισμός – Θεώρημα • Πιθανές θέσεις σημείων καμπής • Παραμετρικές ασκήσεις Σ.Κ. –Αναγκαία συνθήκη αλλά όχι ικανή • Δείξτε ότι η f δεν παρουσιάζει σημείο καμπής • Εφαπτομένη και Σ.Κ. • Για τα Σ.Κ. δεν μας ενδιαφέρει αν υπάρχει η f'' σε μεμονωμένα σημεία του Π.Ο. αρκεί η C_f να έχει εφαπτομένη σε αυτά.
	*Ασκ Σχολ 4/159, 1,2,3,4/160, 5/161, Ασκ Φυλ 537, 538, **540, 543,** 551*
17.	Θ. De l' Hospital, μόνο για απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ και όσες μετασχηματίζονται σε τέτοιες. Το εφαρμόζουμε όσες φορές επιτρέπει η α.μ. μόνο όμως αν οι συναρτήσεις του νέου πηλίκου είναι παραγωγίσιμες σε κατάλληλη γειτονιά. Μετατροπή παραστάσεων α.μ. ώστε να καταλήγουν σε α.μ. για de l' Hospital – δοκιμές π.χ. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^x,\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$
	Ασκ Σχολ 4/167, 3,6i),ii)/168, Ασκ Φυλ 555, 556, 561
18.	Ασύμπτωτες – Είδη – Ορισμοί – Σειρά έρευνας – Πού ψάχνω; Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις υπάρχει ασύμπτωτη; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to1} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x-1]=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=1,\ \lim\limits_{x\to2} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$
	*Ασκ Σχολ 1,2,3/167, 1(Β ΟΜ)/167, 2/168, Ασκ Φυλ 562, 565, 567, **569, 571, 572***
19.	Μου ζητούν να μαντέψω από τη γ.π. της f' τη γ.π. της f ή αντίστροφα.
	*Ασκ Σχολ **4/159**, Ασκ Φυλ 579, 580*
20.	Μελέτη συνάρτησης – Γ.Π. - Σειρά βημάτων
	Ασκ Σχολ σελ. 172, Ασκ Φυλ 573, 574, 578
ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ ΤΥΠΟΥΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΟΓΚΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	

Δ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ	
1.	• Αν μου δώσουν f' και μια πληροφορία, βρίσκω f • Προβλήματα που από το ρυθμό μεταβολής βρίσκω τη συνάρτηση
	*Ασκ Σχολ σελίδες 189 έως 191 και 198 έως 199, Ασκ Φυλ 127 έως 129, **131***
2.	• Ορισμένο ολοκλήρωμα = Διαφορά τιμών οποιασδήποτε παράγουσας • Αν f συνεχής τότε και ολοκληρώσιμη (υπάρχει το ορισμένο ολοκλήρωμά της) • Αν μου δώσουν f' βρίσκω διαφορά τιμών της f • Προβλήματα που από το ρυθμό μεταβολής βρίσκω μια τιμή της f
	*Ασκ Σχολ 5/190, 2(Β ΟΜ)/190, 3/191, Ασκ **Φυλ 130***
3.	• Μέθοδοι υπολογισμού ολοκληρωμάτων (3 και τεχνάσματα) • Υπολογισμός ολοκληρωμάτων δυνάμεων του x ($2x\cdot\sqrt{x-1}$ κ.τ.λ.), ρητών, τριγωνομετρικών (περιττών ως προς ημx ή συνx, δυνάμεων της εφx κ.τ.λ.), εκθετικών ($e^x\cdot x^2$, $e^x\cdot$συνx κ.τ.λ.), λογαριθμικών (ln2x, $(x^2-1)\cdot$ln2x κ.τ.λ.). Στα δύσκολα, κάνουμε αλλαγή μεταβλητής. • Παράγουσες των $f\cdot f'$, $f^{\nu}\cdot f'$, συν$f\cdot f'$, $\frac{f'}{f}$ κ.τ.λ. • Ασκήσεις που βγαίνουν με παραγοντική ολοκλήρωση.
	*Ασκ Σχολ 1/220, 7,8,9/221, 11,12/222, Ασκ Φυλ 85, **86**, 88, **91, 93**, 107, **108**, 116 έως **118***

4. **<u>Υπολογισμός της f από μια σχέση που περιέχει παραγώγους της f</u>** (διαφορική εξίσωση), όπως οι σχέσεις 2x·f(x)+f΄(x)=x, g΄(x)+g(x)=ημx+συνx, $\frac{\ln x}{x}\cdot f'(x)-\frac{f(x)}{x^2}=\frac{\ln^2 x}{x}$, $x>0$ κ.τ.λ.

εργαζόμενοι πάντα σε **διάστημα** (και όχι ένωση διαστημάτων) καταλήγοντας σε μία από τις
(A(f(x))΄=0
(A(f(x))΄=(B(x))΄
(A(f(x))΄=(A(f(x))

*Ασκ Φυλ 163, **164** έως **166***

5. **<u>Συνάρτηση ορισμένη από ολοκλήρωμα</u>** $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$

Δεν είναι απαραίτητο να παραγωγίσουμε παρά μόνο αν χρειάζεται. Μπορεί να χρειαστεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα.
Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ, τότε αμέσως **γνωρίζω μια παράγουσά της**, η οποία είναι η $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$, $\alpha\in\Delta$.

Γενικά το $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$ μπορεί να προκύψει από την ολοκλήρωση των μελών μιας σχέσης ή

ως **η τιμή της F(x) =** $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ **στο β**, δηλαδή το **F(β)**.

6. **<u>Ανισώσεις με ολοκληρώματα</u>**
Η κεντρική ιδέα είναι με κάποιο τρόπο να καταλήξω σε μια σχέση μορφής $A \le f(x) \le B$ και στη συνέχεια να ολοκληρώσω τα μέλη της. Δεν ξεχνώ ότι εκτός των άλλων, μια σχέση μορφής $f(x) \le$ ή $\ge A$ μπορεί να προκύψει και από τη θέση της εφαπτομένης ευθείας, αν γνωρίζουμε την κυρτότητα της f.
Βασικές προτάσεις:

1. Αν $f(x) \ge 0$ και συνεχής για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \ge 0$.

Ειδικά στην περίπτωση που $f(x) \ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$, αλλά δεν είναι παντού ίση με μηδέν, ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0$.

2. (ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗ παρ' όλο που δεν αποτελούν θεωρία του σχολικού βιβλίου) Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα [α, β] με $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \le \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$ και μάλιστα αν οι f και g δεν είναι ίσες στο [α, β] (δηλαδή αν υπάρχει $x_0\in[\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)<g(x_0)$), τότε ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx < \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$.

3. (ΜΕ ΑΠΟΔΕΙΞΗ) Αν f συνεχής στο διάστημα [α, β] και μ, Μ η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της στο [α, β], τότε ισχύει ότι $\mu\cdot(\beta-\alpha) \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \le M\cdot(\beta-\alpha)$.

*Ασκ Σχολ 10/235, Ασκ Φυλ **102, 138***

7. **<u>Όρια ορισμένων ολοκληρωμάτων</u>**

$\lim_{x\to+\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

$\lim_{x\to 1}\int_{1}^{x} h(t)\,dt$ με h συνεχή (αποτέλεσμα 0, καθώς η $y=\int_{1}^{x} h(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και

	συνεχής) $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} h(t)\,dt$. Εφαρμόζουμε κριτήριο παρεμβολής αφού αποδείξουμε ότι κ ≤ h(t)≤ λ και την πρόταση "Αν f(x) ≤ g(x) συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β], τότε και $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \le \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$" ή υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα και μετά το όριο.
	*Ασκ Σχολ 6/221, Ασκ Φυλ **174, 176**, Ασκ επανάληψης **145**, 146, 164*
8.	**<u>Διπλά ολοκληρώματα</u>** $\int_1^x t\left(\int_2^t f(u)\,du\right)dt$. Κανένα πρόβλημα καθώς γράφεται $\int_1^x t\cdot g(t)\,dt$ με g(t)= $\int_2^t f(u)\,du$, δηλαδή το τελικό ολοκλήρωμα είναι συνάρτηση του x.
9.	**<u>Εμβαδά χωρίων</u>** • **Απλά** (καλό είναι να γίνει σχήμα αλλά όχι απαραίτητο). $\mathbf{E=\int_\alpha^\beta \lvert f(x)-g(x)\rvert dx}$ Βρίσκω τα α και β καθώς και το πρόσημο της f(x)-g(x). • **Σύνθετα** (σχήμα απαραίτητο έστω και πρόχειρο) Χωρίζω κατάλληλα το χωρίο σε αθροίσματα (με κατακόρυφες ευθείες από τις κορυφές του) ή διαφορές άλλων απλών χωρίων. Βλέπε λυμένα παραδείγματα φυλλαδίου
	*Ασκ Σχολ σελίδων 231 έως 233, Ασκ Φυλ 178 έως 203 με κυριότερες **180, 181, 185, 195***
10.	**<u>Εμβαδόν που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} χωρίς να είναι γνωστός ο τύπος της</u>**
	*Ασκ Φυλ **204***
ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ ΤΟΥΣ ΒΑΣΙΚΟΥΣ ΤΥΠΟΥΣ ΤΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΥΛΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΤΗΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ	

Ε. "ΣΚΟΡΠΙΕΣ" ΑΛΛΑ ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ισχύει (με απόδειξη) ότι **αν α>0, τότε** $\sqrt{x^2+\alpha} > x$ (1) και $\sqrt{x^2+\alpha} > -x$ (2).
Είναι σχέσεις που μπορούν να φανούν χρήσιμες ιδιαίτερα κατά την εύρεση του πεδίου ορισμού ορισμένων συναρτήσεων (π.χ. f(x)=ln($\sqrt{x^2+9}-x$), αλλά και κατά την εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής στα όρια.
<u>Απόδειξη της (1)</u> (όμοια και για την (2), απλά αλλάζουμε την τελευταία ανισότητα σε |x| ≥ -x):
Έχουμε κατά σειρά $\sqrt{x^2+\alpha} > \sqrt{x^2}$ = |x| ≥ x (από ιδιότητα απολύτων) άρα $\sqrt{x^2+\alpha}$ >x.

2. **<u>"Εφ-ίζω – Αποεφ-ίζω"</u>**: Μπορούμε ίσως να εφ-ίσουμε ή να αποεφ-ίσουμε τα μέλη μιας σχέσης σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

ΕΝΕΡΓΕΙΑ	ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΗ	ΑΡΧΙΚΗ ΣΧΕΣΗ		ΤΕΛΙΚΗ ΣΧΕΣΗ
ΕΦ-ΙΖΩ	Καμία (αφού f συνάρτηση)	$x_1 = x_2$	⇒	$f(x_1) = f(x_2)$
	Αν f "1-1" στο Δ	$x_1 \neq x_2$	⇒	$f(x_1) \neq f(x_2)$
	Αν f γνησίως αύξουσα στο Δ	$x_1 < x_2$	⇒	$f(x_1) < f(x_2)$
ΑΠΟΕΦ-ΙΖΩ	Αν f "1-1" στο Δ	$f(x_1) = f(x_2)$	⇒	$x_1 = x_2$
	Καμία (αφού f συνάρτηση)	$f(x_1) \neq f(x_2)$	⇒	$x_1 \neq x_2$
	Αν f γνησίως αύξουσα στο Δ	$f(x_1) < f(x_2)$	⇒	$x_1 < x_2$

3. **<u>Τι επιτρέπεται να κάνουμε στα μέλη μιας ισότητας και μιας ανισότητας και με ποιες προϋποθέσεις</u>**

▪ Για τις **ισότητες** ισχύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ	ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ
$f(x)=g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\lim\limits_{x\to\xi} g(x)$	Να ορίζονται τα όρια
$f(x)=g(x) \Rightarrow f'(x)=g'(x)$	f, g παραγωγίσιμες στο [α, β]
$f(x)=g(x) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta g(x)dx$	f, g συνεχείς στο [α, β].

ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι αντίστροφες των παραπάνω συνεπαγωγών δεν ισχύουν.

▪ Για τις **ανισότητες** ισχύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ	ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ
$f(x) \geq g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\xi} f(x)\geq\lim\limits_{x\to\xi} g(x)$	Να ορίζονται τα όρια
$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq 0$	f συνεχής στο [α, β]
$f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$	f, g συνεχείς στο [α, β].

ΠΡΟΣΟΧΗ

1. **Οι αντίστροφες των παραπάνω συνεπαγωγών δεν ισχύουν**.
2. **ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ Η ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ** $f(x) \geq g(x) \Rightarrow f'(x) \geq g'(x)$

4.
- **Αν $|f(x)|=|g(x)|$**, για κάθε x σε διάστημα Δ, (π.χ. $|f(x)|=|x|$), **δεν ισχύει οπωσδήποτε ότι $f(x)=\pm g(x)$** αλλά

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & \text{για κάθε } x\in A \\ -g(x), & \text{για κάθε } x\in \Delta-A \end{cases}$$

όπου Α κάποιο σύνολο (όχι απαραίτητα γνωστό). Σε περίπτωση επιπλέον που η f είναι συνεχής και μη μηδενική, σύμφωνα με τη διατήρηση προσήμου, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ, το οποίο μπορούμε να προσδιορίσουμε αν γνωρίζουμε μια τιμή ή ένα όριο της f. Ίσως μετά μπορούμε να αποδείξουμε ότι από τον παραπάνω διπλό τύπο της f, η f παίρνει τις τιμές του ενός κλάδου για κάθε $x\in\Delta$.

Παρόμοια συμπεράσματα ισχύουν αν $f^2(x)=g^2(x)$ ή $f^2(x)=g(x)$, με $g(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\Delta$

- **Αν $f(x)\cdot g(x)=0$**, για κάθε x σε διάστημα Δ, τότε **δεν ισχύει οπωσδήποτε ότι $f(x)=0$ ή $g(x)=0$** αλλά ότι

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{για κάθε } x\in A \\ f_1(x), & \text{για κάθε } x\in \Delta-A \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} g_1(x), & \text{για κάθε } x\in A \\ 0, & \text{για κάθε } x\in \Delta-A \end{cases}$$

όπου Α κάποιο σύνολο (όχι απαραίτητα γνωστό).

Παράδειγμα: Οι συναρτήσεις $f(x)=|x|+x$ και $g(x)=|x|-x$ δεν είναι μηδενικές στο R και όμως ισχύει ότι $f(x)\cdot g(x)=(|x|+x)\cdot(|x|-x)=|x|^2-x^2=x^2-x^2=0$, για κάθε $x\in R$.

	• **Έστω ότι ζητάμε να λύσουμε εξίσωση η οποία περιέχει τις τιμές συνάρτησης π.χ. $f^2(x)-3\cdot f(x)+2=0$ (1), $x\in R$** Οι εκφωνήσεις: • "Να λυθεί η (1) ως προς x" δηλαδή να βρεθούν οι τιμές του x που επαληθεύουν την (1) και • "Να βρεθεί η f" θέλουν διαφορετική αντιμετώπιση. Έτσι στην 1η βρίσκουμε με διακρίνουσα και ρίζες ότι f(x)=1 ή f(x)=2 και αναζητούμε τις τιμές του x που δίνουν στην f αυτές τις τιμές. Στην 2η όμως ζητάμε συνάρτηση, οπότε η λύση είναι $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{για κάθε } x\in A \\ 2, & \text{για κάθε } x\in R-A \end{cases}$, όπου A κατάλληλο υποσύνολο του R.
5.	Ισχύουν οι σχέσεις: $\mathbf{1+x \le e^x \le x\cdot e^x+1}$ **, για κάθε** $\mathbf{x\in R}$ $\mathbf{\frac{x-1}{x} \le \ln x \le x-1}$ **, για κάθε** $\mathbf{x>0}$ x=lnu, $x=e^u$ (Με αυτές τις αλλαγές μεταβλητής, μπορούμε, αν θέλουμε, από τη μία σχέση να αποδείξουμε την άλλη) Οι παραπάνω σχέσεις χρειάζονται απόδειξη (αποδεικνύονται με τη βοήθεια του ΘΜΤ, αλλά και αλλιώς), <u>εκτός των</u>: $\ln x \le x-1$ για κάθε x>0, για την οποία γνωρίζουμε μάλιστα ότι το "=" ισχύει μόνο για x=1 και της $e^x \ge x+1$, για κάθε $x\in R$, για την οποία γνωρίζουμε μάλιστα ότι το "=" ισχύει μόνο για x=0, τις οποίες χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη.
6.	Ξεκινώντας από τη γνωστή ανίσωση $\lvert ημx\rvert \le \lvert x\rvert$, η οποία ισχύει ως ισότητα μόνο για x=0, διακρίνοντας περιπτώσεις αν x>0 ή x<0, μπορούμε να βρούμε τα **πρόσημα των παραστάσεων ημx-x και ημx+x**. Έτσι για κάθε $x\neq 0$ είναι $\lvert ημx\rvert<\lvert x\rvert \Leftrightarrow -\lvert x\rvert<ημx<\lvert x\rvert$ (1). Για x>0 (1) $\Leftrightarrow -x<ημx<x \Leftrightarrow$ ημx+x>0 και ημx-x<0 και για x<0 (1) $\Leftrightarrow x<ημx<-x \Leftrightarrow$ ημx+x<0 και ημx-x>0 Άρα τελικά έχουμε ότι $\mathbf{ημx+x}\begin{cases} <0, & x<0 \\ =0, & x=0 \\ >0, & x>0 \end{cases}$ **και** $\mathbf{ημx-x}\begin{cases} <0, & x>0 \\ =0, & x=0 \\ >0, & x<0 \end{cases}$