

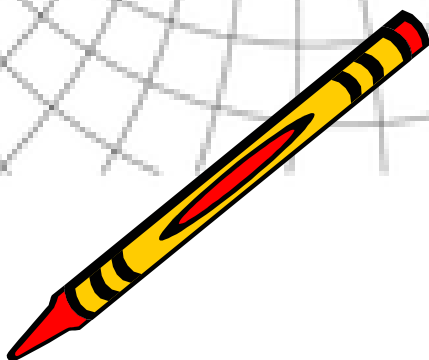
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Θεωρία
Μεθοδολογία
Λυμένα παραδείγματα
Ασκήσεις



ΔΙΑΚΟΥΜΑΚΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
Μαθηματικός

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ:

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	ΣΕΛΙΔΑ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ	
1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ	1
<i>Μέτρο διανύσματος</i>	1
<i>Διεύθυνση διανύσματος</i>	2
<i>Φορά διανύσματος</i>	2
<i>Ίσα διανύσματα</i>	3
<i>Αντίθετα διανύσματα</i>	3
<i>Γωνία δύο διανυσμάτων</i>	3
1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ – ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ	4
<i>Διάνυσμα θέσης</i>	6
<i>Μέτρο αθροίσματος διανυσμάτων</i>	6
1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΕΠΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑ	7
<i>Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων</i>	8
<i>1η συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων</i>	8
<i>Διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος</i>	9
1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ	9
<i>Υπολογισμός μέτρου διανύσματος από τις συντεταγμένες του</i>	12
<i>2η συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων</i>	12
<i>Γωνία διανύσματος με τον άξονα x'x</i>	12
<i>Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος</i>	13
<i>3η συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων</i>	13
1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ	14
<i>Αναλυτική έκφραση εσωτερικού γινομένου</i>	17
<i>Συνημίτονο γωνίας δύο διανυσμάτων</i>	17
<i>Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα</i>	17
ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗΣ	19
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ	22
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	29
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ	
2.1 Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ	38
<i>Γωνία κλίσης ευθείας</i>	38
<i>Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας</i>	39
<i>Συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας ευθειών</i>	39
<i>Ειδικές μορφές εξίσωσης ευθείας</i>	40
2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ	41
<i>Διάνυσμα παράλληλο ή κάθετο σε ευθεία</i>	41
2.3 ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ – ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ	43
ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗΣ	44
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ	45
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	50

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ	57
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ	60

ΑΣΚΗΣΕΙΣ	67
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ	144
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ	146

Στις ασκήσεις το Σύμβολο	Σημαίνει
✓	• άσκηση η οποία πρέπει οπωσδήποτε να διδαχθεί
➡	• άσκηση για την οποία υπάρχει υπόδειξη στο τέλος του φυλλαδίου (οι ασκήσεις αυτές είναι κατά κανόνα δυσκολότερες από τις άλλες)

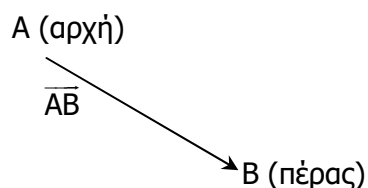
1. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1.1 Η έννοια του διανύσματος

Τα μεγέθη στις επιστήμες χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

- Σε **μονόμετρα** ή **βαθμωτά** τα οποία είναι πλήρως ορισμένα αν γνωρίζουμε μόνο το μέτρο τους και την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης (όπως η μάζα, ο όγκος, ο χρόνος, η θερμοκρασία, η πυκνότητα κ.τ.λ.) και
- Σε **διανυσματικά** ή απλά **διανύσματα** για τον προσδιορισμό των οποίων εκτός από το μέτρο τους και τη μονάδα μέτρησης χρειαζόμαστε επιπλέον τη διεύθυνση και τη φορά τους (όπως είναι η μετατόπιση, η δύναμη, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος κ.τ.λ.).

Κάθε διανυσματικό μέγεθος παριστάνεται με ένα **διάνυσμα** το οποίο είναι ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο σημείο λέγεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** και το δεύτερο λέγεται **πέρας** του διανύσματος. Στην παράσταση του διανύσματος χρησιμοποιούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα που το πέρας του έχει τη μορφή βέλους. Στο διπλανό σχήμα παριστάνεται ένα διάνυσμα με αρχή το σημείο A και πέρας το σημείο B, το οποίο συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$.



Εναλλακτικά για το συμβολισμό ενός διανύσματος μπορούμε να χρησιμοποιούμε πεζά γράμματα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφαβήτου επιγραμμισμένα με ένα βέλος, όπως $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ κ.τ.λ.

Μέτρο διανύσματος

Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB που έχει άκρα την αρχή και το πέρας του διανύσματος ονομάζεται **μέτρο** ή **μήκος του διανύσματος** και συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$.

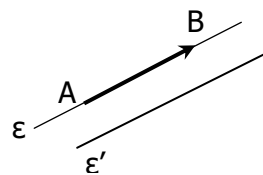
Ένα διάνυσμα του οποίου αρχή και πέρας συμπίπτουν, όπως το $\overrightarrow{AA}$, λέγεται **μηδενικό διάνυσμα**, έχει μέτρο ίσο με 0 και μπορεί να συμβολιστεί ως $\vec{0}$.

Ένα διάνυσμα που έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα μέτρησης λέγεται **μοναδιαίο διάνυσμα**.

Διεύθυνση διανύσματος

Φορέας ενός μη μηδενικού διανύσματος $\overline{AB}$ ονομάζεται η ευθεία ε πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα.

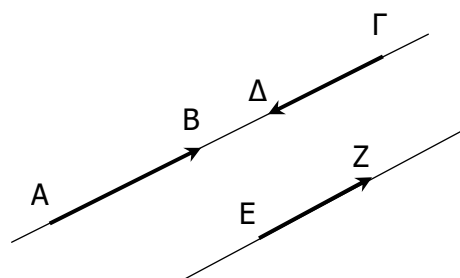
Αν ο φορέας του $\overline{AB}$ συμπίπτει ή είναι παράλληλος με μια ευθεία ε' , λέμε ότι το $\overline{AB}$ είναι παράλληλο με την ε' και γράφουμε $\overline{AB} // \varepsilon'$.



Ως **διεύθυνση** ενός διανύσματος $\overline{AB}$ ονομάζουμε τον φορέα του ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη σ' αυτόν.

Δύο διανύσματα που έχουν ίδια διεύθυνση ονομάζονται **παράλληλα ή συγγραμμικά** και για να το δηλώσουμε συμβολικά, γράφουμε τα δύο διανύσματα με το σύμβολο της παραλληλίας ($//$) ανάμεσά τους.

Έτσι στο διπλανό σχήμα έχουμε $\overline{AB} // \overline{\Gamma\Delta}$ και $\overline{AB} // \overline{EZ}$.



Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος $\overline{AA}$ θεωρούμε οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από το A.

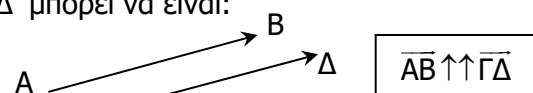
Φορά διανύσματος

Ως **φορά** του διανύσματος $\overline{AB}$ ονομάζουμε την πορεία που ακολουθούμε, μετακινούμενοι πάνω στον φορέα του, από την αρχή A προς το πέρας B του διανύσματος.

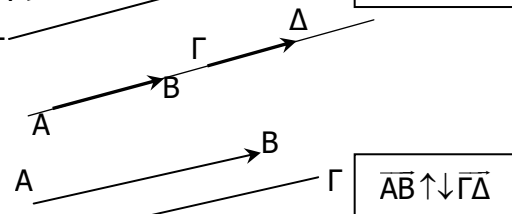
Ως φορά ενός μηδενικού διανύσματος μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε.

Δύο μη μηδενικά συγγραμμικά διανύσματα $\overline{AB}$ και $\overline{\Gamma\Delta}$ μπορεί να είναι:

α) Ομόρροπα, όταν βρίσκονται προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΓ που διέρχεται από τις αρχές τους (δηλαδή όταν έχουν την ίδια φορά) ή όταν έχουν ίδιο φορέα και μία από τις ημιευθείες AB, ΓΔ περιέχει την άλλη και



β) Αντίρροπα, όταν δεν είναι ομόρροπα (αντίθετη φορά).



ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι έννοιες «ομόρροπα» και «αντίρροπα» αφορούν μόνο σε συγγραμμικά διανύσματα (ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς).

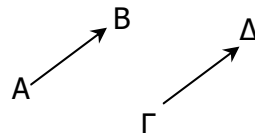
Δύο διανύσματα $\overline{AB}$ και $\overline{\Gamma\Delta}$ που είναι ομόρροπα (ίδια διεύθυνση και φορά) λέμε ότι έχουν **ίδια κατεύθυνση** και γράφουμε συμβολικά $\overline{AB} \uparrow \uparrow \overline{\Gamma\Delta}$, ενώ αν είναι αντίρροπα

(ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετες φορές) λέμε ότι έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** και γράφουμε συμβολικά $\overrightarrow{AB} \updownarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Το μηδενικό διάνυσμα μπορεί να θεωρηθεί ως ομόρροπο ή αντίρροπο με κάθε άλλο διάνυσμα.

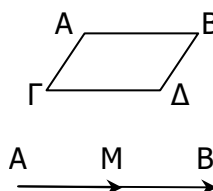
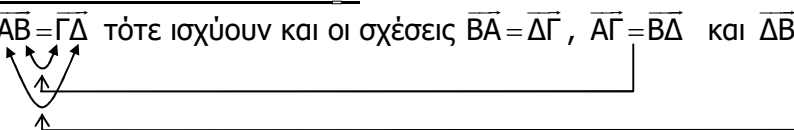
Ίσα διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ίσα** αν έχουν ίσα μέτρα και ίδια κατεύθυνση (δηλαδή ίδια διεύθυνση και φορά-ομόρροπα). Συμβολικά τότε γράφουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ▼

- Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε ισχύουν και οι σχέσεις $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$ και $\overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{\Gamma A}$.



- Αν M είναι το μέσον του τμήματος AB, τότε $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ και αντίστροφα.

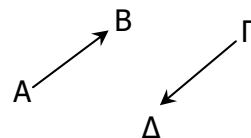
Αντίθετα διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **αντίθετα** αν έχουν ίσα μέτρα αλλά αντίθετη κατεύθυνση (ίσα μέτρα αλλά αντίρροπα).

Συμβολικά τότε γράφουμε $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Είναι προφανείς οι ιδιότητες:

- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ και
- αν $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$



Γωνία δύο διανυσμάτων

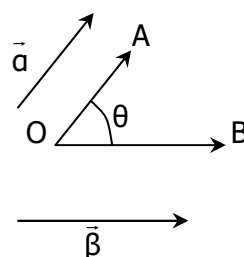
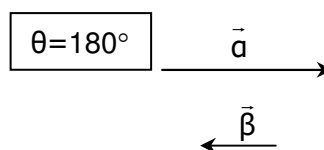
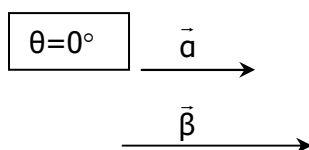
Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και ένα σημείο O του επιπέδου. Με αρχή το O κατασκευάζουμε διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (δηλαδή μεταφέρουμε τα αρχικά διανύσματα παράλληλα ώστε να προκύψουν διανύσματα ίσα με αυτά με κοινή αρχή το O).

Ως **γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$** ονομάζουμε την κυρτή γωνία AOB που σχηματίζουν οι ημιευθείες OA και OB.

Η γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ συμβολίζεται ως $(\vec{a}, \vec{b})$ ή $(\vec{b}, \vec{a})$ ή θ σε περίπτωση που δεν προκαλείται σύγχυση.

Ισχύουν:

- $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$
- $\vec{a} \upuparrows \vec{b} \Leftrightarrow \theta = 0^\circ$
- $\vec{a} \updownarrow \vec{b} \Leftrightarrow \theta = 180^\circ$



Δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ ονομάζονται **ορθογώνια ή κάθετα** αν σχηματίζουν γωνία $\theta = 90^\circ$. Τότε συμβολικά γράφουμε $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Αν ένα από τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ως γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ οποιαδήποτε θ , με $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα είναι επίσης κάθετο με κάθε άλλο διάνυσμα.

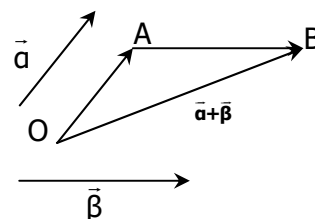
1.2 Πρόσθεση – Αφαίρεση διανυσμάτων

Μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε διανύσματα και το «αποτέλεσμα» καθεμιάς από αυτές τις πράξεις είναι ένα διάνυσμα.

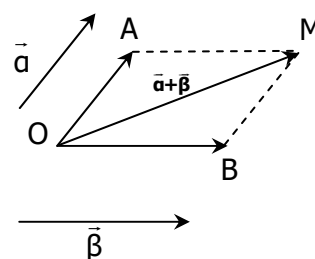
Α. ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Η πρόσθεση δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

α) Καθιστώντας τα διαδοχικά: Με αρχή σημείο O του επιπέδου θεωρούμε διάνυσμα $\vec{OA} = \vec{a}$ και με αρχή το πέρας A αυτού διάνυσμα $\vec{AB} = \vec{b}$. Τότε το διάνυσμα $\vec{OB}$ είναι το **άθροισμα** ή αλλιώς η **συνισταμένη** των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και συμβολίζεται με $\vec{a} + \vec{b}$.



β) Με τον κανόνα του παραλληλογράμμου: Με κοινή αρχή σημείο O του επιπέδου θεωρούμε δύο διανύσματα $\vec{OA} = \vec{a}$ και $\vec{OB} = \vec{b}$. Τότε το άθροισμα $\vec{a} + \vec{b}$ ορίζεται από τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου που έχει προσκείμενες πλευρές τις OA και OB , δηλαδή είναι το διάνυσμα $\vec{OM}$.



Και στους δύο παραπάνω τρόπους αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του σημείου O .

Ιδιότητες της πρόσθεσης

Αν $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα, τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ Αντιμεταθετική
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{\gamma} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{\gamma})$ Προσεταιριστική

3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

Ιδιότητα Ουδετέρου στοιχείου

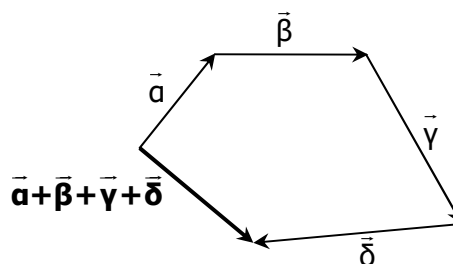
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Ιδιότητα Αντιθέτου διανύσματος

Επειδή κατά την πρόσθεση τριών ή περισσότερων διανυσμάτων δεν παίζει ρόλο η σειρά των προσθετέων, μπορούμε αντί της πρόσθεσης $(\vec{a} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}$ ή $\vec{a} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ να γράφουμε απλά $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$.

Μια απλή μέθοδος πρόσθεσης πολλών διανυσμάτων

Αν έχουμε να προσθέσουμε περισσότερα των δύο διανυσμάτων, τότε αντί να βρούμε το άθροισμα των δύο πρώτων και μετά το άθροισμα αυτού με το τρίτο κ.τ.λ., μπορούμε να βρούμε το άθροισμα όλων απ' ευθείας με δύο βήματα:



- Τα καθιστούμε διαδοχικά με τη σειρά που μας τα δίνουν (ή όποια άλλη σειρά επιθυμούμε) και
- το άθροισμά τους είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου (βλέπε σχήμα).

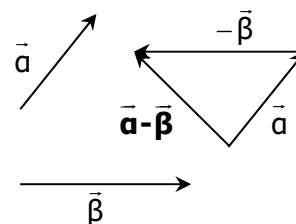
Β. ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Ως **διαφορά** $\vec{a} - \vec{\beta}$ δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ορίζουμε το διάνυσμα που προκύπτει από το άθροισμα του $\vec{a}$ με το αντίθετο του $\vec{\beta}$. Έτσι:

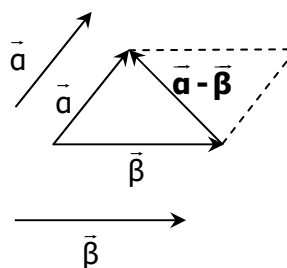
$$\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{a} + (-\vec{\beta})$$

Αν μας δώσουν δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ μπορούμε να βρούμε τη διαφορά $\vec{a} - \vec{\beta}$:

α) Προσθέτοντας στο $\vec{a}$ το $-\vec{\beta}$ όπως περιγράψαμε κατά την περιγραφή της πρόσθεσης διανυσμάτων (καθιστώντας διαδοχικά τα $\vec{a}$ και $-\vec{\beta}$) ή



β) Να τα καταστήσουμε με κοινή αρχή, οπότε το $\vec{a} - \vec{\beta}$ είναι το διάνυσμα της «άλλης» διαγωνίου του παραλληλογράμμου, αυτής που έχει ως αρχή το πέρας του αφαιρετέου ($\vec{\beta}$) και ως πέρας το πέρας του μειωτέου ($\vec{a}$).



Διάνυσμα θέσης

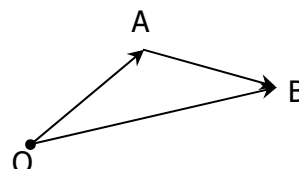
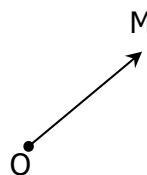
Έστω O σταθερό σημείο του χώρου. Τότε για κάθε σημείο M του χώρου ορίζεται ένα μοναδικό διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ το οποίο ονομάζεται **διάνυσμα θέσης του σημείου M** ή **διανυσματική ακτίνα του M** .

Το σταθερό σημείο O ως προς το οποίο ορίζουμε τις διανυσματικές ακτίνες κάθε σημείου, ονομάζεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.

Επειδή για δύο σημεία A και B του χώρου ισχύει ότι $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ προκύπτει μια σχέση πολύ χρήσιμη σε ασκήσεις, γιατί μας επιτρέπει να αναλύουμε κάθε διάνυσμα με τη βοήθεια των διανυσματικών ακτίνων των άκρων του:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

δηλαδή κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφεί ως διαφορά της διανυσματικής ακτίνας του πέρατός του μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής του.

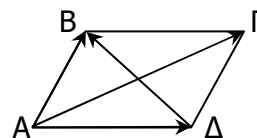
**ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ▽**

1. Σε πολλές περιπτώσεις συναντάμε διαφορά διανυσμάτων με κοινό πέρας π.χ. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO}$. Για συντομία μπορούμε να θυμόμαστε πρακτικά το αποτέλεσμα μιας τέτοιας διαφοράς, το οποίο είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ που προκύπτει από τις αρχές των διανυσμάτων με τη σειρά που δίνονται. Έτσι συμβολικά $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AB}$

2. Ισχύει ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB}$ όπου X οποιοδήποτε σημείο του καρτεσιανού επιπέδου.

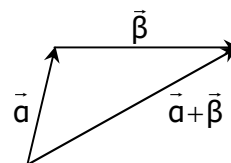
3. Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ το άθροισμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ είναι η διαγώνιος $\overrightarrow{AG}$, ενώ η διαφορά $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ είναι η άλλη διαγώνιος $\overrightarrow{DB}$.

4. **Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D\Gamma}$ (σχηματικά $\overrightarrow{AB} \overrightarrow{\Gamma\Delta}$).**

**Μέτρο Αθροίσματος Διανυσμάτων**

Καθιστώντας διαδοχικά δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ και σχεδιάζοντας το διάνυσμα $\vec{a} + \vec{\beta}$, από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο που προκύπτει, θα ισχύει για τα μέτρα τους η σχέση:

$$\|\vec{a} - \vec{\beta}\| \leq \|\vec{a} + \vec{\beta}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{\beta}\|$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**

- Από την προηγούμενη σχέση θέτοντας όπου $\vec{\beta}$ το $-\vec{\beta}$ και αφού $|\vec{\beta}| = |-\vec{\beta}|$, εύκολα προκύπτει και η $\|\vec{a}\| - \|\vec{\beta}\| \leq \|\vec{a} - \vec{\beta}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{\beta}\|$.
- Γενικά για n διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ισχύει: $|\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n| \leq |\vec{a}_1| + |\vec{a}_2| + \dots + |\vec{a}_n|$

- Ισχύουν (προσοχή: Αφού τις αποδείξουμε πρώτα, καθόσον δεν αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο) οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\vec{a} \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$$

$$\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow ||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| = |\vec{a} - \vec{\beta}|$$

$$\vec{a} = \vec{0} \text{ ή } \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow ||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| = |\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$$

Η απόδειξη μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της θεωρίας του εσωτερικού γινομένου (βλέπε §1.5)

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Έστω λ πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{a}$ μη μηδενικό διάνυσμα. Ως γινόμενο $\lambda \cdot \vec{a}$ ορίζουμε **ένα διάνυσμα** το οποίο:

- Είναι ομόρροπο του $\vec{a}$ αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{a}$ αν $\lambda < 0$ και
- Έχει μέτρο $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$

Έτσι $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

Στην περίπτωση που $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$, τότε ως γινόμενο $\lambda \cdot \vec{a}$ ορίζουμε το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

Ένα γινόμενο μορφής $\frac{1}{\lambda} \cdot \vec{a}$ (με $\lambda \neq 0$) μπορούμε να το συμβολίζουμε και με $\frac{\vec{a}}{\lambda}$.

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα

Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

1. $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{\beta}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{\beta}$
2. $\lambda \cdot (\vec{a} - \vec{\beta}) = \lambda \cdot \vec{a} - \lambda \cdot \vec{\beta}$
3. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$
4. $(\lambda - \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} - \mu \cdot \vec{a}$
5. $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
6. $(-\lambda \cdot \vec{a}) = -(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot (-\vec{a})$

Ιδιότητες χρήσιμες σε εξισώσεις με διανύσματα

1. $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{a} = \vec{0}$
2. Αν $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$
3. Αν $\lambda \cdot \vec{a} = \mu \cdot \vec{a}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$.

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

Αν δοθούν δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ κάθε διάνυσμα $\vec{v}$ που παράγεται από το άθροισμα των διανυσμάτων $\kappa \cdot \vec{a}$ και $\lambda \cdot \vec{\beta}$ όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. Έτσι $\vec{v} = \kappa \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{\beta}$.

Μπορούμε ανάλογα να έχουμε γραμμικούς συνδυασμούς περισσοτέρων από δύο διανυσμάτων, όπως για παράδειγμα το διάνυσμα $\vec{u} = 3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\delta}$ που είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$.

1η Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ (με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$) να είναι παράλληλα (συγγραμμικά, ίδια διεύθυνση) είναι να υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$. Άρα αν $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ (με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$) δύο διανύσματα ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Στην περίπτωση που τα διανύσματα είναι συγγραμμικά αποδεικνύεται εύκολα ότι ο αριθμός λ είναι **μοναδικός**.
- Ειδικότερα η παραπάνω ισοδυναμία ισχύει ως εξής:

$$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}, \text{ με } \lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{\beta}|} > 0$$

$$\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}, \text{ με } \lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{\beta}|} < 0$$

- Αν δοθεί $\vec{a} \neq \vec{0}$ τότε μπορούμε εύκολα να σχηματίσουμε **δύο μοναδιαία διανύσματα συγγραμμικά του $\vec{a}$** , ένα ομόρροπο και ένα αντίρροπο με το $\vec{a}$, που είναι αντίστοιχα τα $\vec{a}_1 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ και $\vec{a}_2 = -\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$.
- Στην παραπάνω συνθήκη παραλληλίας υπάρχει η προϋπόθεση $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, γιατί αν $\vec{\beta} = \vec{0}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$ δεν υπάρχει αριθμός λ τέτοιος ώστε $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$, αλλά παρ' όλα αυτά τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά, καθώς το μηδενικό διάνυσμα ($\vec{0}$) μπορεί να θεωρηθεί ως συγγραμμικό οποιουδήποτε διανύσματος.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ▼

1. Μπορούμε να αποδείξουμε (καθώς δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο) ότι:

Αν $\vec{a} // \vec{\beta}$, με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε τα διανύσματα $\vec{a} + \vec{\beta}$, $\vec{a} - \vec{\beta}$ αλλά και γενικότερα κάθε γραμμικός συνδυασμός $\mu \cdot \vec{a} + \nu \cdot \vec{\beta}$ των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι διάνυσμα συγγραμμικό με αυτά.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θα αποδείξουμε τη γενική περίπτωση του γραμμικού συνδυασμού.

Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι συγγραμμικά. Τότε θα υπάρχει αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$. Έτσι $\mu \cdot \vec{a} + \nu \cdot \vec{b} = \mu \cdot (\lambda \cdot \vec{b}) + \nu \cdot \vec{b} = (\mu\lambda + \nu) \cdot \vec{b} = \kappa \cdot \vec{b}$, όπου $\kappa = \mu\lambda + \nu$. Η τελευταία αυτή σχέση δηλώνει ότι το διάνυσμα $\mu \cdot \vec{a} + \nu \cdot \vec{b}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{b}$ (οπότε και του $\vec{a}$).

2. Αποδεικνύεται ότι (δεν το χρησιμοποιούμε καθώς δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο):

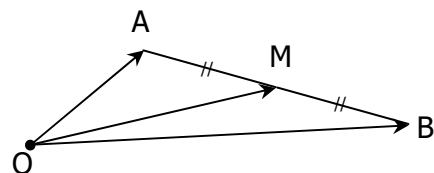
Αν $\vec{a}$ και $\vec{b}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα και $\kappa, \lambda, \kappa', \lambda' \in \mathbb{R}$ τότε:

α) Αν ισχύει $\kappa \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} = \vec{0}$ συμπεραίνουμε ότι $\kappa = \lambda = 0$

β) Αν ισχύει $\kappa \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} = \kappa' \cdot \vec{a} + \lambda' \cdot \vec{b}$ συμπεραίνουμε ότι $\kappa = \kappa'$ και $\lambda = \lambda'$.

Διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος

Θεωρώντας ευθύγραμμο τμήμα AB και το μέσον του M, ισχύει ότι **η διανυσματική ακτίνα του μέσου M του τμήματος AB είναι ίση με το ημίαθροισμα των διανυσματικών ακτίνων των άκρων του** (A και B) ως προς το ίδιο σημείο αναφοράς, δηλαδή:



$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

Ισχύει επίσης και η αντίστροφη πρόταση, δηλαδή αν για τρία σημεία A, B και M ισχύει η σχέση $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$, τότε το M είναι το μέσον του AB.

1.4 Συντεταγμένες στο επίπεδο

Καρτεσιανό επίπεδο - συντεταγμένες

Άξονας x'x ονομάζεται μια ευθεία x'x πάνω στην οποία έχουμε ορίσει ένα σημείο O και ένα διάνυσμα $\vec{OI} = \vec{i}$ που ανήκει στην ημιευθεία Ox και έχει μέτρο 1.

Το σημείο O λέγεται **αρχή του άξονα** και το διάνυσμα $\vec{i}$ **μοναδιαίο διάνυσμα**.

Η ημιευθεία Ox λέγεται **θετικός ημιάξονας** και η Ox' **αρνητικός ημιάξονας**.

Για κάθε σημείο M του άξονα,

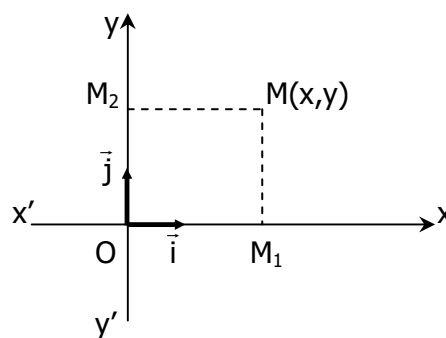
επειδή $\vec{OM} // \vec{i}$, υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός x τέτοιος



ώστε $\vec{OM} = x \cdot \vec{i}$. Αντίστροφα για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει ένα μοναδικό σημείο M του άξονα, τέτοιο ώστε $\vec{OM} = x \cdot \vec{i}$. Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** του M και το σημείο M συμβολίζεται με M(x).

Καρτεσιανό επίπεδο ονομάζεται ένα σύστημα δύο αξόνων $x'x$ και $y'y$ κάθετων μεταξύ τους, που έχουν κοινή αρχή O και αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$.

Ένα τέτοιο επίπεδο συμβολίζεται με **Oxy** και λέγεται αλλιώς **σύστημα συντεταγμένων**. Συνήθως θεωρούμε ως ισομήκη τα μοναδιαία διανύσματα στους δύο άξονες οπότε το



σύστημα συντεταγμένων λέγεται **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων**. Επίσης συνηθίζεται να σχεδιάζουμε τον άξονα $x'x$ οριζόντιο και τον άξονα $y'y$ κατακόρυφο.

Κάθε σημείο M στο καρτεσιανό επίπεδο έχει δύο προβολές M_1 και M_2 πάνω στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Η τετμημένη x του M_1 (ως προς τον άξονα $x'x$) λέγεται **τετμημένη του σημείου M** και η τετμημένη y του M_2 (ως προς τον άξονα $y'y$) λέγεται **τεταγμένη του σημείου M**. Η τετμημένη και η τεταγμένη του M λέγονται **συντεταγμένες** του M .

Κάθε σημείο M στο καρτεσιανό επίπεδο έχει ένα μοναδικό ζεύγος συντεταγμένων (x,y) , αλλά και αντίστροφα κάθε ζεύγος συντεταγμένων (x,y) ορίζει ένα μοναδικό σημείο.

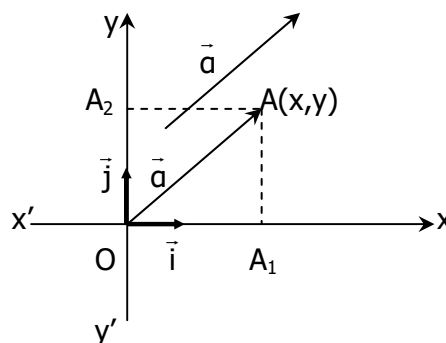
Στο εξής κάθε σημείο M με συντεταγμένες (x,y) θα συμβολίζεται με **$M(x, y)$** ή απλούστερα **(x, y)** .

Συντεταγμένες διανύσματος

Σε σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε σημείο $A(x, y)$ και τις προβολές του A_1 και A_2 στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Αν σχεδιάσουμε το διάνυσμα $\vec{OA} = \vec{a}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$\vec{OA}_1 = x \cdot \vec{i}$, $\vec{OA}_2 = y \cdot \vec{j}$ και $\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2$. Από αυτές συμπεραίνουμε ότι:

$$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$



Έτσι το $\vec{a}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των

$\vec{i}$ και $\vec{j}$ με $\vec{i} = (1, 0)$ και $\vec{j} = (0, 1)$.

Αποδεικνύεται ότι οι παραπάνω αριθμοί x και y είναι μοναδικοί.

Είναι προφανές ότι και κάθε άλλο διάνυσμα ίσο με το $\vec{a}$ γράφεται με τη μοναδική παραπάνω μορφή.

Έτσι τελικά κάθε διάνυσμα του επιπέδου μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$.

Οι αριθμοί x και y λέγονται **συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{a}$** (το x **τετμημένη** και το y **τεταγμένη**), ενώ τα διανύσματα $x \cdot \vec{i}$ και $y \cdot \vec{j}$ λέγονται **συνιστώσες του $\vec{a}$** κατά την διεύθυνση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντίστοιχα.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν είναι ίσες οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους.

Κάθε διάνυσμα με συντεταγμένες x και y μπορούμε να το συμβολίζουμε απλά με το διατεταγμένο ζεύγος **(x, y)** .

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Επειδή με τον παραπάνω τρόπο συμβολίζουμε και ένα σημείο στο καρτεσιανό επίπεδο, το αν το ζεύγος (x, y) σε μια πρόταση παριστάνει σημείο ή διάνυσμα θα φαίνεται από τα συμφραζόμενα της πρότασης (το νόημα της πρότασης).

Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων

Αν δοθούν δύο διανύσματα $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$, $\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$ και δύο αριθμοί $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε για τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{a} + \vec{b}$, $\lambda \cdot \vec{a}$ αλλά και κάθε γραμμικού συνδυασμού $\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$ των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2) \cdot \vec{i} + (y_1 + y_2) \cdot \vec{j}$$

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda x_1 \cdot \vec{i} + \lambda y_1 \cdot \vec{j}$$

$$\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = (\lambda x_1 + \mu x_2) \cdot \vec{i} + (\lambda y_1 + \mu y_2) \cdot \vec{j}$$

ή απλούστερα

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\lambda \cdot (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

$$\lambda \cdot (x_1, y_1) + \mu \cdot (x_2, y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$$

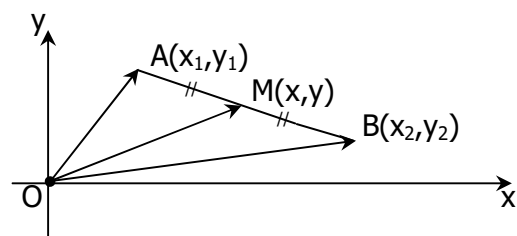
Συντεταγμένες μέσου τμήματος

Ας υποθέσουμε ότι δίνονται δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και $M(x, y)$ το μέσον του τμήματος AB . Επειδή ισχύει

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}, \text{ για τις συντεταγμένες του } M \text{ θα}$$

έχουμε:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ και } y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα

Ας υποθέσουμε ότι δίνονται δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου. **Οι συντεταγμένες (x, y) του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$** δίνονται από τις σχέσεις:

$$x = x_2 - x_1 \text{ και } y = y_2 - y_1$$

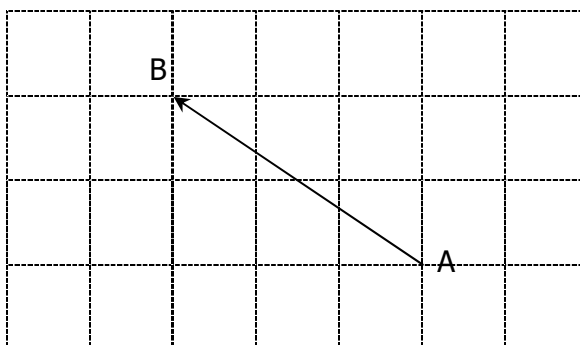
δηλαδή

τετμημένη διανύσματος = τετμημένη πέρατος – τετμημένη αρχής

τεταγμένη διανύσματος = τεταγμένη πέρατος – τεταγμένη αρχής

Παρατήρηση

Οι συντεταγμένες (x, y) διανύσματος μας δείχνουν τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να μεταβούμε από την αρχή στο πέρας ενός διανύσματος, κινούμενοι μόνο οριζόντια (παράλληλα με τον x') και κατακόρυφα (παράλληλα με τον y'). Έτσι αν π.χ.



$\overrightarrow{AB} = (-3, 2)$, για να μεταβούμε από το A στο B θα πρέπει να κινηθούμε 3 μονάδες αριστερά (λόγω του «-») και 2 μονάδες επάνω (ή αντίστροφα 2 επάνω και 3 αριστερά).

Υπολογισμός του μέτρου διανύσματος από τις συντεταγμένες του

- Αν δοθεί ένα διάνυσμα $\vec{a} = (x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου, τότε το μέτρο του δίνεται με τη βοήθεια των συντεταγμένων του από τη σχέση:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Αν δοθούν δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου, τότε η απόστασή τους AB (δηλαδή το μέτρο του $\overrightarrow{AB}$) δίνεται από τη σχέση:

$$(AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2η Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

Ονομάζουμε **ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$** και τη συμβολίζουμε με

$\det(\vec{a}, \vec{b})$ την ορίζουσα $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ που έχει ως πρώτη γραμμή τις συντεταγμένες του $\vec{a}$

και ως δεύτερη γραμμή τις συντεταγμένες του $\vec{b}$.

Ισχύει ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν η ορίζουσά τους είναι ίση με μηδέν, δηλαδή:

$$\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$$

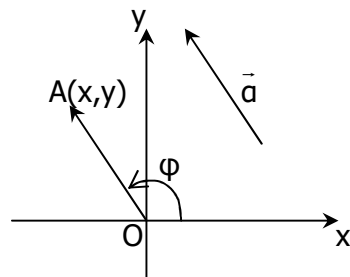
Γωνία διανύσματος με τον άξονα x'x

Έστω $\vec{a} = (x, y)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου και A ένα σημείο για το οποίο ισχύει $\vec{OA} = \vec{a}$.

Ονομάζουμε **γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{a}$ με τον άξονα x'x** τη γωνία φ που πρέπει να διαγράψει ο θετικός ημιάξονας Ox, αν στραφεί κατά τη θετική φορά για να συμπίσει με την ημιευθεία OA.

Προφανώς είναι $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$.

ΠΡΟΣΟΧΗ να μη γίνεται σύγχυση της προηγούμενης έννοιας της γωνίας φ διανύσματος με τον άξονα x'x, με την έννοια «γωνία δύο διανυσμάτων θ » που αναφέραμε στην §1.1. Για την θ ισχύει ότι $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, ενώ για την φ ισχύει ότι $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$.



Συντελεστής διεύθυνσεως διανύσματος

Έστω διάνυσμα $\vec{a} = (x, y)$ με $x \neq 0$. Ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης λ του $\vec{a}$ το πηλίκο $\frac{y}{x}$. Αν φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{a}$ με τον άξονα x'x τότε ισχύει:

$$\lambda = \frac{y}{x} = \tan \varphi$$

Είναι προφανές ότι αν $\vec{a} // x'x$ τότε $y=0$ οπότε $\lambda=0$ και αντίστροφα.

Στην περίπτωση που για το διάνυσμα $\vec{a} = (x, y)$ ισχύει $x=0$, δηλαδή $\vec{a} // y'y$ τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.

3η Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

Αν θεωρήσουμε δύο διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με αντίστοιχους συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 , ισχύει ότι τα διανύσματα είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, δηλαδή:

$$\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

Προφανώς για τα π.χ. $\vec{a} = (0, 1)$ και $\vec{\beta} = (0, 4)$ ισχύει $\vec{a} // \vec{\beta} // y'y$, ενώ δεν ορίζεται για αυτά συντελεστής διεύθυνσης.

1.5 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ του καρτεσιανού επιπέδου.

Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$** και το συμβολίζουμε με $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ τον **πραγματικό αριθμό** που ορίζεται ως εξής:

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \begin{cases} |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \varphi, & \text{αν } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ και } \vec{\beta} \neq \vec{0} \\ 0, & \text{αν } \vec{a} = \vec{0} \text{ ή } \vec{\beta} = \vec{0} \end{cases}$$

(1η μορφή εσωτερικού γινομένου)

όπου $\varphi = (\vec{a}, \vec{\beta})$ η γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, σε αντίθεση με τις υπόλοιπες πράξεις των διανυσμάτων, δεν δίνει ως αποτέλεσμα ένα διάνυσμα αλλά έναν πραγματικό αριθμό. Έτσι ενώ μια πράξη μορφής $\vec{a} + 2$ δεν έχει νόημα, η πράξη $\vec{a} \cdot \vec{\beta} + 2$ είναι μια πρόσθεση δύο πραγματικών αριθμών.

Προφανώς αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ μη μηδενικά, ισχύουν οι ισοδυναμίες $\vec{a} \cdot \vec{\beta} > 0 \Leftrightarrow \varphi \text{ οξεία}$ και

$\vec{a} \cdot \vec{\beta} < 0 \Leftrightarrow \varphi \text{ αμβλεία}$, καθώς το πρόσημο του $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ καθορίζεται από το πρόσημο του $\cos \varphi$.

Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου

1. $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$

Αντιμεταθετική ιδιότητα

2. $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

3. $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

4η συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

4. $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$

1η συνθήκη καθετότητας διανυσμάτων

5. $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1,$

2η συνθήκη καθετότητας διανυσμάτων

όπου λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ αντίστοιχα με την προϋπόθεση ότι αυτοί ορίζονται (δηλαδή ότι $\vec{a}, \vec{\beta} \nparallel y'y$)

6. $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{\beta}) = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{\beta})$

7. $\vec{a} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$

Επιμεριστική ιδιότητα

8. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

Τετράγωνο του $\vec{a}$

9. $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$ και $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ▼

1. Λόγω της ιδιομορφίας του εσωτερικού γινομένου, **δεν ισχύουν γενικά** κάποιες ιδιότητες που χρησιμοποιούμε συχνά σε άλλες πράξεις όπως π.χ. στον πολλαπλασιασμό αριθμών (όλες οι ιδιότητες που θα αναφερθούν εδώ και οι οποίες δεν ισχύουν γενικά, δεν αποκλείεται να ισχύουν για κάποιες ειδικές περιπτώσεις διανυσμάτων, κάτι που συνήθως αναφέρεται ως «ΣΗΜΕΙΩΣΗ»).

Έτσι:

α) Δεν ισχύει γενικά η προσεταιριστική ιδιότητα, δηλαδή $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$

Μη συγχέουμε την παραπάνω σχέση με την ιδιότητα **6.** του εσωτερικού γινομένου μια που εκεί το λ ήταν πραγματικός αριθμός και όχι διάνυσμα. Έτσι ισχύει ότι $(\vec{b}^2 \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{b}^2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

μια που το $\vec{b}^2$ είναι πραγματικός αριθμός.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η προσεταιριστική ιδιότητα με την παραπάνω σειρά των διανυσμάτων ισχύει μόνο αν $\vec{a} // \vec{b}$.

Άμεσες συνέπειες της μη ισχύος της προσεταιριστικής ιδιότητας είναι και οι παρακάτω σχέσεις:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b} \neq \vec{a} \cdot \vec{b}^2$$

,

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \neq \vec{b}^2 \cdot \vec{a}$$

,

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \neq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν ως ισότητες αν και μόνο αν $\vec{a} // \vec{b}$.

Ειδικά για την τελευταία ισχύει πάντα ότι :

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2.$$

β) Γενικά είναι:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \neq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η προηγούμενη σχέση ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $\vec{a} // \vec{b}$.

Σε κάθε περίπτωση ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwartz δηλαδή ότι $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

γ) Δεν ισχύει ο νόμος της διαγραφής στον πολλαπλασιασμό (καθώς το εσωτερικό γινόμενο δεν είναι η γνωστή μας πράξη του πολλαπλασιασμού).

Έτσι:

$$\bullet \text{ Αν } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \not\Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \text{ ή } \vec{b} = \vec{0}$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \text{Αν } \vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \vec{x} \\ \text{και } \vec{x} \neq \vec{0} \end{array} \right\} \not\Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \text{Αν } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \text{και } \vec{a} \neq \vec{0} \end{array} \right\} \not\Rightarrow \vec{b} = \vec{0}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ο νόμος της διαγραφής στον πολλαπλασιασμό ισχύει μόνο αν όλα τα διανύσματα που συμμετέχουν στην ιδιότητα είναι συγγραμμικά.

2. Οι δυνάμεις ενός διανύσματος $\vec{a}$ είναι άλλοτε διανύσματα και άλλοτε πραγματικοί αριθμοί και μάλιστα εναλλάξ. Έτσι $\vec{a}$ διάνυσμα, $\vec{a}^2$ αριθμός, $\vec{a}^3$ διάνυσμα, $\vec{a}^4$ αριθμός κ.τ.λ.

3. Στα διανύσματα **ισχύουν οι ταυτότητες με άρτιους εκθέτες**

$$(\vec{a} + \vec{\beta})^2 = \vec{a}^2 + \vec{\beta}^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta}$$

αλλά όχι και οι ταυτότητες με περιττούς εκθέτες

$$(\vec{a} + \vec{\beta})^3 \neq \vec{a}^3 + 3\vec{a}^2\vec{\beta} + 3\vec{a}\vec{\beta}^2 + \vec{\beta}^3$$

4. Αν $\vec{a} = \vec{\beta}$ τότε $\vec{a}^2 = \vec{\beta}^2$ αλλά όχι αντίστροφα.

5. Προσοχή χρειάζεται επίσης στο ότι αν ισχύει $\vec{a} = \vec{\gamma}$ τότε $\vec{a} - \vec{\gamma} = \vec{0}$ (διάνυσμα), ενώ αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} - \vec{\gamma} \cdot \vec{\delta} = 0$ (αριθμός) γιατί οι $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$ είναι αριθμοί.

6. Για τα μέτρα δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η σχέση (αποδεικνύεται εύκολα):

$$|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{a} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2$$

η οποία ονομάζεται **κανόνας του παραλληλογράμμου**.

Έτσι, με τη βοήθειά της, αν μου δώσουν κάποιες πληροφορίες για τα τρία από τα τέσσερα παραπάνω μέτρα μπορώ να έχω πληροφορίες για το 4^ο μέτρο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ που αναφέραμε στην §1.2.

$$1. \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$$

$$2. \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow ||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| = |\vec{a} - \vec{\beta}|$$

$$3. \vec{a} = \vec{0} \text{ ή } \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow ||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| = |\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$$

$$1. |\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{\beta}|^2 = (|\vec{a}| + |\vec{\beta}|)^2 \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{\beta})^2 = \vec{a}^2 + \vec{\beta}^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\vec{a}^2} + \cancel{\vec{\beta}^2} + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \cancel{\vec{a}^2} + \cancel{\vec{\beta}^2} + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \text{ από ιδιότητα 2. του εσωτερικού γινομένου.}$$

2. Παρόμοια

3. Παίρνοντας τη σχέση $||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| = |\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$ με ισοδυναμίες και υψώνοντας στο τετράγωνο τα τρία μέλη, καταλήγουμε στη σχέση $-|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| = \vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ η οποία με βάση τις ιδιότητες 2. και 3. του εσωτερικού γινομένου καταλήγει ισοδύναμα στο

σύστημα $\left. \begin{matrix} \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \\ \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \end{matrix} \right\}$ και ισοδύναμα $\vec{a} = \vec{0} \text{ ή } \vec{\beta} = \vec{0}$, γιατί μόνο το μηδενικό διάνυσμα μπορεί

να είναι ταυτόχρονα ομόρροπο και αντίρροπο ως προς ένα άλλο διάνυσμα.

Αναλυτική έκφραση εσωτερικού γινομένου

Έστω δύο διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ στο καρτεσιανό επίπεδο. Μια άλλη έκφραση του εσωτερικού τους γινομένου με τη βοήθεια των συντεταγμένων τους είναι η:

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \quad (2\text{η μορφή εσωτερικού γινομένου})$$

και ονομάζεται αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

Διανύσματα κάθετα στο $\vec{a}(x_1, y_1)$

Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$, με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης μπορούμε να δείξουμε ότι δύο διανύσματα κάθετα στο $\vec{a}$ είναι τα $\vec{a}_1 = (-y_1, x_1)$ και $\vec{a}_2 = (y_1, -x_1)$.

Συνημίτονο γωνίας δύο διανυσμάτων

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ στο καρτεσιανό επίπεδο τα οποία σχηματίζουν γωνία $\theta = (\vec{a}, \vec{\beta})$. Τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \theta$ και επομένως:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|} \quad \text{ή με τη βοήθεια των συντεταγμένων τους} \quad \cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ▼

Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$ δύο διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ συνήθως υπολογίζεται με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

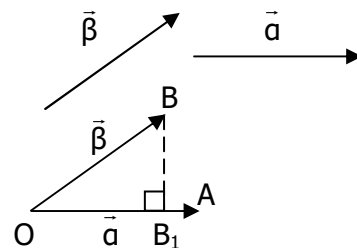
α) $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

β) $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ όπου (x_1, y_1) και (x_2, y_2) οι συντεταγμένες των $\vec{u}$ και $\vec{v}$

γ) με τη βοήθεια άλλων διανυσμάτων με τα οποία εκφράζονται τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$, κάνοντας την πράξη $\vec{u} \cdot \vec{v}$ με επιμεριστική ιδιότητα (π.χ. αν $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{a} + \vec{\beta}$ τότε $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{a} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{a} + \vec{\beta})$)

Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα

Έστω δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ του καρτεσιανού επιπέδου με $\vec{a} \neq \vec{0}$. Με αρχή ένα σημείο O του επιπέδου θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{a}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$. Από το B φέρνουμε κάθετη στη διεύθυνση $\vec{OA}$ και έστω B_1 το ίχνος της κάθετης.



Το διάνυσμα $\vec{OB_1}$ ονομάζεται **προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{a}$** και συμβολίζεται με **$\text{προβ}_{\vec{a}}\vec{\beta}$** .

Έτσι $\vec{OB_1} = \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{\beta}$.

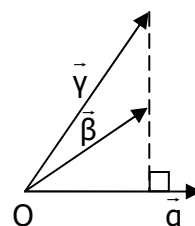
Αποδεικνύεται ότι η προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{a}$ είναι ανεξάρτητη από τη θέση του σημείου O .

Τότε μια άλλη έκφραση του εσωτερικού γινομένου των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι η παρακάτω:

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{\beta} \quad (\text{3η μορφή εσωτερικού γινομένου})$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Φυσικά ισχύει και η σχέση $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{a}$
- Σύμφωνα με τα παραπάνω αν οι προβολές κάποιων διανυσμάτων π.χ. $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ πάνω σε ένα διάνυσμα $\vec{a}$ είναι ίσες, τότε θα ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ (βλέπε σχήμα).



ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗΣ

Στον παρακάτω πίνακα εννοείται ότι τα κεφαλαία γράμματα παριστάνουν σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και **τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ έχουν συντεταγμένες (x_1, y_1) και (x_2, y_2) αντίστοιχα και σχηματίζουν γωνία φ** . Όταν σε μια ιδιότητα αναφέρεται μόνο το διάνυσμα $\vec{a}$ προς χάριν απλούστευσης ως συντεταγμένες του θεωρούνται οι (x, y) .

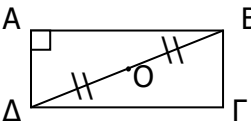
ΑΘΡΟΙΣΜΑ - ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ	• Αν $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$ τότε $\vec{AG} = \vec{BD}$ και $\vec{\Gamma A} = \vec{DB}$ • $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ • $\vec{AO} - \vec{BO} = \vec{AB}$ • $\vec{a} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ • $\vec{a} - \vec{\beta} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$
ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ	• $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2}$ • $\vec{a} - \vec{\beta} \leq \vec{a} + \vec{\beta} \leq \vec{a} + \vec{\beta}$
ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ A(x₁,y₁) και B(x₂,y₂)	$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ	$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda x, \lambda y)$ <u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u> 1. $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$ 2. Αν $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$ 3. Αν $\lambda \cdot \vec{a} = \mu \cdot \vec{a}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$.
ΜΕΣΟ Μ ΤΜΗΜΑΤΟΣ AB	• $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$, όπου O σημείο αναφοράς • Αν A(x₁, y₁) και B(x₂, y₂) τότε $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$
ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ	Αν A(x ₁ , y ₁) και B(x ₂ , y ₂) δύο σημεία, τότε $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ δηλαδή τετμημ. διανύσματος = τετμημ. πέρατος – τετμημ. αρχής τεταγμ. διανύσματος = τεταγμ. πέρατος – τεταγμ. αρχής
ΙΣΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ	$\vec{a} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$
ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΩΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ $\vec{a}$	$\lambda = \frac{y}{x} = \tan \varphi$ όπου φ η γωνία του διανύσματος με τον άξονα x'x $(0^\circ \leq \varphi < 360^\circ)$

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ	• $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow$ υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ ($\vec{\beta} \neq \vec{0}$) • $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$ • $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, όπου λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης • $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \pm \vec{a} \cdot \vec{\beta}$ και μάλιστα $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = - \vec{a} \cdot \vec{\beta}$ • <u>ΜΕ ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{\beta} = \vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{\beta} = \vec{a} + \vec{\beta}$
ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΑ ΤΟΥ $\vec{a}$	$\vec{a}_1 = \frac{1}{ \vec{a} } \cdot \vec{a}$, ομόρροπο του $\vec{a}$ και $\vec{a}_2 = -\frac{1}{ \vec{a} } \cdot \vec{a}$, αντίρροπο του $\vec{a}$
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΘΕΤΑ ΣΤΟ $\vec{a}$	Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$, δύο διανύσματα κάθετα στο $\vec{a}$ είναι τα $\vec{a}_1 = (-y_1, x_1)$ και $\vec{a}_2 = (y_1, -x_1)$
ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ	• $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{\beta} \cdot \cos \varphi, & \text{αν } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ και } \vec{\beta} \neq \vec{0} \\ 0, & \text{αν } \vec{a} = \vec{0} \text{ ή } \vec{\beta} = \vec{0} \end{cases}$ όπου φ η γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ($0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$) • $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ • $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\beta}$
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ	1. $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$ Αντιμεταθετική ιδιότητα 2. $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\beta}$ 3. $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = - \vec{a} \cdot \vec{\beta}$ 4. $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$ 5. $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, όπου λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ αντίστοιχα με την προϋπόθεση ότι αυτοί ορίζονται (δηλαδή ότι $\vec{a}, \vec{\beta} \nparallel y'y$) 6. $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{\beta}) = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{\beta})$ 7. $\vec{a} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ Επιμεριστική ιδιότητα 8. $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = \vec{a} ^2$ Τετράγωνο του $\vec{a}$ 9. $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$ και $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα

	ΠΡΟΣΟΧΗ Γενικά • $(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} \neq \vec{a} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$ • $(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} \neq \vec{a} \cdot \vec{\beta}^2$ • $\vec{\beta} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \neq \vec{\beta}^2 \cdot \vec{a}$ • $(\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 \neq \vec{a}^2 \cdot \vec{\beta}^2$ αλλά $(\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{\beta}^2$ • Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \nRightarrow \vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ • $\left. \begin{array}{l} \text{Αν } \vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{\beta} \cdot \vec{x} \\ \text{και } \vec{x} \neq \vec{0} \end{array} \right\} \nRightarrow \vec{a} = \vec{\beta}$ • $\left. \begin{array}{l} \text{Αν } \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \\ \text{και } \vec{a} \neq \vec{0} \end{array} \right\} \nRightarrow \vec{\beta} = \vec{0}$ • $\vec{a} \cdot \vec{\beta} \neq \vec{a} \cdot \vec{\beta}$ αλλά $\vec{a} \cdot \vec{\beta} \leq \vec{a} \cdot \vec{\beta}$ Οι παραπάνω ιδιότητες, εκτός της πρώτης, ισχύουν ως ισότητες ή συνεπαγωγές αντίστοιχα, αν τα διανύσματα που συμμετέχουν σε αυτές είναι συγγραμμικά. Η πρώτη ισχύει ως ισότητα αν είναι συγγραμμικά τα $\vec{a}$ και $\vec{\gamma}$.		
ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ ΓΩΝΙΑΣ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ($\varphi = (\vec{a}, \vec{\beta})$)	<table> <tr> <td data-bbox="632 1064 1002 1158"> • $\text{συνφ} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{ \vec{a} \cdot \vec{\beta} }$ </td><td data-bbox="1002 1064 1469 1158"> • $\text{συνφ} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$ </td></tr> </table>	• $\text{συνφ} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{ \vec{a} \cdot \vec{\beta} }$	• $\text{συνφ} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$
• $\text{συνφ} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{ \vec{a} \cdot \vec{\beta} }$	• $\text{συνφ} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$		
ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ	• $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$ • $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, με την προϋπόθεση ότι $\vec{a}, \vec{\beta} \nparallel \gamma, \gamma$ • $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$		

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

	<i>ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ</i>	<i>ΜΕΘΟΔΟΙ</i>
1.	Συγγραμμικότητα Έστω ότι ζητάμε να δείξουμε πως $\vec{a} // \vec{\beta}$ (με $\vec{a}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$) <u>Παραδείγματα 1,2,3</u>	- Δείχνουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$. Ειδικότερα αν $\lambda > 0$ τότε $\vec{a} \uparrow \vec{\beta}$, ενώ αν $\lambda < 0$ τότε $\vec{a} \downarrow \vec{\beta}$. - Δείχνουμε ότι $\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$ - Δείχνουμε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\beta}$ (οπότε $\vec{a} \uparrow \vec{\beta}$) ή $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = - \vec{a} \cdot \vec{\beta}$ (οπότε $\vec{a} \downarrow \vec{\beta}$) - Δείχνουμε ότι το συνημίτονο της γωνίας τους είναι 1 (οπότε $\vec{a} \uparrow \vec{\beta}$) ή -1 (οπότε $\vec{a} \downarrow \vec{\beta}$). - Δείχνουμε ότι $\lambda_{\vec{a}} = \lambda_{\vec{\beta}}$. - Δείχνουμε ότι $\vec{a} // \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} // \vec{\gamma}$ όπου $\vec{\gamma}$ κατάλληλο διάνυσμα.
2.	Καθετότητα 1 Έστω ότι ζητάμε να δείξουμε πως $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ ή ζητάμε να υπολογίσουμε τις τιμές κάποιων παραμέτρων ώστε να συμβαίνει αυτό. <u>Παραδείγματα 4,5</u>	Χρησιμοποιούμε κάποια από τις ισοδυναμίες: $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$ $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, με την προϋπόθεση ότι $\vec{a}, \vec{\beta} \nparallel \gamma$ $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$

	ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ	ΜΕΘΟΔΟΙ
3.	Καθετότητα 2 Σε γεωμετρικές ασκήσεις που περιέχουν ορθές γωνίες <u>Παράδειγμα 6</u>	Μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την ορθή γωνία ενός σχήματος με δύο κυρίως τρόπους: • Ή για τη γραφή του εσωτερικού γινομένου με τη βοήθεια προβολών • Ή εκφράζοντας το εσωτερικό γινόμενο των κάθετων διανυσμάτων (που είναι 0) με τη μορφή $(\vec{\kappa} - \vec{\lambda}) \cdot (\vec{\kappa} + \vec{\lambda}) = \vec{\kappa}^2 - \vec{\lambda}^2$ χρησιμοποιώντας διανυσματικές ακτίνες. Έτσι στο παρακάτω σχήμα έχουμε:  • $\vec{BA} \cdot \vec{B\Gamma} = \vec{BA} \cdot \text{προβ}_{\vec{BA}} \vec{B\Gamma} = \vec{BA} \cdot \vec{BA} = \vec{BA}^2$ • $\vec{AB} \perp \vec{AD} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\vec{OB} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OD} - \vec{OA}) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\vec{OB} - \vec{OA}) \cdot (-\vec{OB} - \vec{OA}) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\vec{OB} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OB} + \vec{OA}) = 0 \Leftrightarrow \vec{OB}^2 - \vec{OA}^2 = 0$ κτλ
4.	Ισότητα Έστω ότι ζητάμε να δείξουμε πως $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$ <u>Παράδειγμα 7</u>	• Αρκεί να δείξουμε ότι έχουν ίδιες συντεταγμένες. • Αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{AB} \uparrow \vec{\Gamma\Delta}$ και $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$ • Αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$. • Αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$. • Αρκεί να δείξουμε, συνήθως με υπολογισμούς, ότι τα διανύσματα αυτά είναι ίσα προς ένα τρίτο διάνυσμα ή ότι είναι ίσα με την ίδια παράσταση. • Αρκεί να δείξουμε ότι το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο
5.	• Απόδειξη σχέσεων με μέτρα • Προσδιορισμός μέτρου <u>Παράδειγμα 8, 9</u>	• Συνήθως υψώνουμε τα μέλη της σχέσης στο τετράγωνο για να «φύγουν» τα μέτρα και κάνουμε τις πράξεις. • Για να υπολογίσουμε το μέτρο διανύσματος ή εφαρμόζουμε τη γνωστή σχέση $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (αν έχουμε συντεταγμένες) ή υπολογίζουμε το τετράγωνο του μέτρου ($\vec{a} ^2 = \vec{a}^2$) και στη συνέχεια το μέτρο

	ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ	ΜΕΘΟΔΟΙ
6.	Απόδειξη γραμμικών σχέσεων 1 Έστω ότι ζητάμε να δείξουμε πως $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_v = v \cdot \vec{a}$, $v \in \mathbb{N}^*$, δηλαδή το πλήθος των προσθετέων ίσο με το συντελεστή του $\vec{a}$. Παράδειγμα 10	Συνήθως εκφράζουμε το $\vec{a}$ με v διαφορετικούς τρόπους, κάθε φορά με τη βοήθεια ενός εκ των $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_v$.
7.	Απόδειξη γραμμικών σχέσεων 2 Έστω ότι ζητάμε να δείξουμε πως $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_k = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 + \dots + \vec{\beta}_\lambda$ με $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$ Παράδειγμα 11	- Γράφουμε τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_\lambda$ ως διαφορές των διανυσματικών ακτίνων των άκρων τους, αναλύοντάς τα με τη βοήθεια σημείου αναφοράς(*) π.χ. Ο $(\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA})$ και αποδεικνύουμε τη σχέση που προκύπτει. - Κάνουμε πράξεις στο ένα μέλος και καταλήγουμε στο άλλο. - Δείχνουμε ότι $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_k) - (\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 + \dots + \vec{\beta}_\lambda) = \vec{0}$ - Δείχνουμε ότι $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_k = k \cdot \vec{a}$, $\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 + \dots + \vec{\beta}_\lambda = \lambda \cdot \vec{\beta}$ και $k \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ (βλέπε μεθοδολογία 6).
8.	Συγγραμμικότητα 3 σημείων Έστω ότι ζητάμε να δείξουμε πως τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά. Παραδείγματα 12,13	Αρκεί να αποδείξουμε ότι δύο από τα $\vec{AB}, \vec{B\Gamma}$ ή $\vec{A\Gamma}$ είναι συγγραμμικά (βλέπε μεθοδολογία 1). ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Ειδικά στην περίπτωση που δίνεται σχέση μορφής $k \cdot \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{OB} + \mu \cdot \vec{OG} = \vec{0}$ (1) με $k + \lambda + \mu = 0$ χωρίς τα k, λ, μ να είναι όλα μηδέν, τότε τα A, B, Γ είναι πάντα συνευθειακά. Η απόδειξη μπορεί να γίνει εκφράζοντας έναν από τους συντελεστές της (1) (π.χ. το μ) με τη βοήθεια των άλλων ($\mu = -k - \lambda$). Για να δείξουμε ότι περισσότερα από τρία σημεία είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνευθειακά ανά τρία.

(*) Η ανάλυση ενός διανύσματος σε διαφορά διανυσμάτων με τη βοήθεια σημείου αναφοράς, είναι μια πολύ χρήσιμη μέθοδος, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλές ασκήσεις. Ως σημείο αναφοράς συνήθως εξυπηρετεί να χρησιμοποιήσουμε ένα από τα σημεία της άσκησης.

	ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ	ΜΕΘΟΔΟΙ
9.	Ταύτιση δύο σημείων Έστω ότι ζητάμε να δείξουμε πως τα σημεία A και B ταυτίζονται. <u>Παραδείγματα 14,15</u>	• Αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{AB} = \vec{0}$ • Αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{OA} = \overline{OB}$ όπου O τυχαίο σημείο του χώρου. <u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:</u> Η παραπάνω μεθοδολογία εφαρμόζεται και στην περίπτωση που ζητάμε να δείξουμε πως δύο ή περισσότερα τμήματα έχουν κοινό μέσο. Έτσι αν $M_1, M_2, \dots, M_n$ τα μέσα των τμημάτων, αρκεί αν δείξουμε ότι $\overline{OM_1} = \overline{OM_2} = \dots = \overline{OM_n}$
10.	Προσδιορισμός σημείου P το οποίο επαληθεύει δοσμένη γραμμική διανυσματική σχέση <u>Παράδειγμα 16</u>	• Υπολογίζουμε με τη βοήθεια γνωστών (σταθερών) διανυσμάτων τη διανυσματική ακτίνα $\overline{OP}$ του P, όπου O κατάλληλο (δοσμένο) σημείο του σχήματος.
11.	Προσδιορισμός των συντεταγμένων σημείων τα οποία έχουν κάποια ιδιότητα <u>Παράδειγμα 17</u>	• Συμβολίζουμε με αγνώστους τις συντεταγμένες των σημείων αυτών, εκφράζουμε με συντεταγμένες τις ιδιότητες που έχουν τα σημεία και λύνουμε τις σχέσεις που προκύπτουν
12.	Ανάλυση γνωστού διανύσματος $\vec{v} = (x_v, y_v)$ σε δύο συνιστώσες $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με γνωστές διευθύνσεις. <u>ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ</u> A. Να αναλυθεί το $\vec{v} = (x_v, y_v)$ σε δύο συνιστώσες παράλληλες προς δύο γνωστά διανύσματα $\vec{a} = (x_a, y_a)$ και $\vec{b} = (x_b, y_b)$ (Ή αλλιώς: Να γραφεί το $\vec{v}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}$ και $\vec{b}$). <u>Παράδειγμα 18</u>	Γράφουμε το $\vec{v}$ με τη βοήθεια συντεταγμένων ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}$ και $\vec{b}$, δηλαδή $\vec{v} = \kappa \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$ και προσδιορίζουμε τα κ και λ. Δύο διανύσματα παράλληλα προς τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι τα $\kappa \cdot \vec{a}$ και $\lambda \cdot \vec{b}$ αντίστοιχα. Έστω ότι υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\vec{v} = \kappa \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$. Με τη βοήθεια των συντεταγμένων και της προηγούμενης ισότητας, δημιουργούμε σύστημα, από όπου υπολογίζουμε τα κ και λ. Τότε οι ζητούμενες συνιστώσες είναι η $\kappa \cdot \vec{a}$ και η $\lambda \cdot \vec{b}$.

	Β. Να αναλυθεί το $\vec{v} = (x_v, y_v)$ σε δύο συνιστώσες κάθετες προς δύο γνωστά διανύσματα $\vec{a} = (x_a, y_a)$ και $\vec{b} = (x_b, y_b)$ Παράδειγμα 19	Δύο διανύσματα κάθετα προς τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι τα $\vec{a}_1 = (-y_a, x_a)$ και $\vec{b}_1 = (-y_b, x_b)$ αντίστοιχα (γιατί $\lambda_a \cdot \lambda_{a_1} = -1$ και $\lambda_b \cdot \lambda_{b_1} = -1$). Γράφουμε το $\vec{v}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}_1$ και $\vec{b}_1$, $\vec{v} = \kappa \cdot \vec{a}_1 + \lambda \cdot \vec{b}_1$. Μετατρέπουμε τη σχέση αυτή σε σχέση συντεταγμένων. Προσδιορίζουμε με λύση συστήματος τα κ και λ, οπότε οι ζητούμενες συνιστώσες είναι η $\kappa \cdot \vec{a}_1$ και η $\lambda \cdot \vec{b}_1$.
	Γ. Να αναλυθεί το $\vec{v} = (x_v, y_v)$ σε δύο συνιστώσες, μία παράλληλη και μία κάθετη προς γνωστό διάνυσμα $\vec{a} = (x_a, y_a)$ Παράδειγμα 20	Με ανάλογο συλλογισμό, ένα διάνυσμα κάθετο με το $\vec{a}$ είναι το $\vec{a}_1 = (-y_a, x_a)$. Άρα $\vec{v} = \kappa \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{a}_1$. Μετατρέπουμε τη σχέση αυτή σε σχέση συντεταγμένων. Προσδιορίζουμε με λύση συστήματος τα κ και λ, οπότε οι ζητούμενες συνιστώσες είναι η $\kappa \cdot \vec{a}$ και η $\lambda \cdot \vec{a}_1$.
13.	Ασκήσεις που αφορούν στη γωνία δύο διανυσμάτων Παραδείγματα 21, 22	Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} }$ ή τη σχέση $\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$. Ειδικά για την πρώτη σχέση, πολλές φορές, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε απ' ευθείας τα μέτρα των διανυσμάτων. Τότε υπολογίζουμε τα τετράγωνά τους και από εκεί προσδιορίζουμε τα μέτρα. Αν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι δύο γωνίες είναι ίσες, υπολογίζουμε με τις παραπάνω σχέσεις το συνημίτονο της καθεμιάς.
14.	Ασκήσεις που μας δίνουν τα $\vec{a} , \vec{v}$ και $(\vec{a}, \vec{v})$ και μας ζητούν την $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$ Παράδειγμα 23	Επειδή $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} // \vec{a}$ θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} = \lambda \cdot \vec{a}$ (1). Άρα θα ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \lambda \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{a}^2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{a} ^2$. Από τη σχέση αυτή βρίσκουμε το λ και από την (1) την $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$.

	ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ	ΜΕΘΟΔΟΙ
15.	Ασκήσεις γεωμετρικών τόπων Έστω ότι ζητάμε το γεωμετρικό τόπο (γ.τ.) σημείου M το οποίο επαληθεύει κάποια σχέση που περιέχει διανύσματα ή μέτρα διανυσμάτων. <u>Παραδείγματα 24, 25, 26, 27</u>	Η αντιμετώπιση τέτοιων ασκήσεων εξαρτάται από τη μορφή της σχέσης: • Αν η σχέση εκφράζεται με μέτρα διανυσμάτων και έχει μορφή: ➤ $\vec{MA} = \vec{MB}$, όπου A και B σταθερά σημεία, τότε ο γ.τ. του M είναι η μεσοκάθετος του AB. ➤ $\vec{MA} = \rho > 0$, όπου A σταθερό σημείο, τότε ο γ.τ. του M είναι ο κύκλος (A, ρ). • Αν η σχέση έχει μορφή $\vec{AM} = \lambda \cdot \vec{a}$, όπου A σταθερό σημείο, $\vec{a}$ γνωστό διάνυσμα και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε ο γ.τ. του M είναι η ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει τη διεύθυνση του $\vec{a}$. • Αν A,B δοσμένα σημεία και η σχέση εκφράζεται με εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων της μορφής: ➤ $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ τότε (με απόδειξη*) ο γ.τ. του M είναι κύκλος διαμέτρου AB ➤ $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = 0$ τότε (με απόδειξη*) ο γ.τ. του M είναι η κάθετη ευθεία στην AB στο A

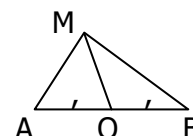
*** ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ ΤΕΛΕΥΤΑΙΩΝ Γ.Τ.**

- Έστω O το μέσον του AB. Τότε $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \Leftrightarrow (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OB}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} - \vec{OA}) = 0 \Leftrightarrow \vec{MO}^2 - \vec{OA}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{MO}^2 = \vec{OA}^2 \Leftrightarrow$$

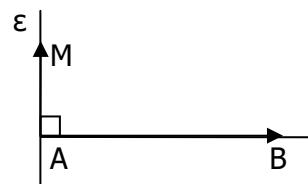
$$\Leftrightarrow |\vec{MO}|^2 = |\vec{OA}|^2 \Leftrightarrow |\vec{MO}| = |\vec{OA}|. \text{ Έτσι το M απέχει σταθερή απόσταση από το σταθερό}$$

O και επομένως ο γ.τ. είναι ο κύκλος με διάμετρο AB.



ΑΛΛΙΩΣ: Η σχέση $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ σημαίνει ότι $\vec{MA} \perp \vec{MB}$, οπότε $\hat{AMB} = 90^\circ$. Άρα το M «βλέπει» με ορθή γωνία το σταθερό τμήμα AB και επομένως ανήκει σε κύκλο με διάμετρο το AB.

- Αφού $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = 0$, τα $\vec{AM}$ και $\vec{AB}$ είναι κάθετα και επειδή έχουν κοινή αρχή το A, ο γ.τ. του M είναι η σταθερή ευθεία ε που είναι κάθετη στην AB στο A.

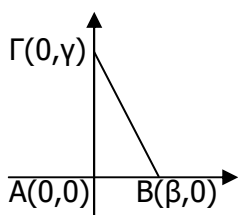
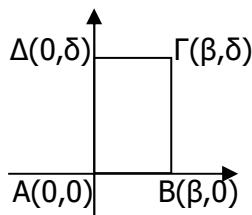
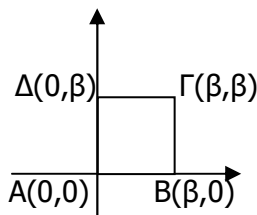
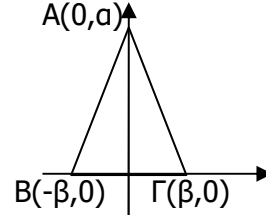
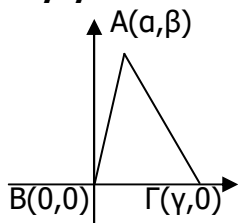
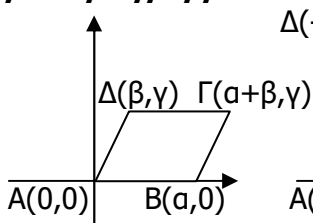
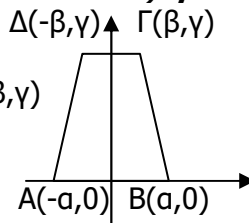
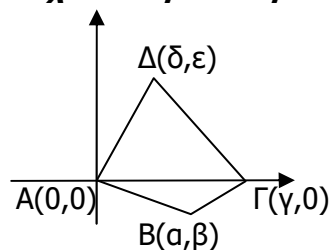


ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ – ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ▼

Πολλές φορές η λύση μιας άσκησης επιτυγχάνεται ευκολότερα αν κατασκευάσουμε και εργαστούμε πάνω σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (ιδιαίτερα αν τα διανύσματα μας δίνονται με συντεταγμένες) ή όπως λέμε εφαρμόζοντας την **αναλυτική μέθοδο απόδειξης**. Έτσι:

- Κατασκευάζουμε ένα σύστημα συντεταγμένων
- Τοποθετούμε πάνω σε αυτό όλα τα σημεία στα οποία αναφέρεται η άσκηση. Σε σημεία που δεν είναι δοσμένα θέτουμε παραμετρικές συντεταγμένες. Η τοποθέτηση καλό είναι να γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε όσο το δυνατόν περισσότερα σημεία να έχουν τετμημένες ή τεταγμένες μηδέν.
- Εκφράζουμε τα δεδομένα και τα ζητούμενα με συντεταγμένες και προσπαθούμε να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Μερικές ιδέες για τη δημιουργία συστημάτων συντεταγμένων σε διάφορα βασικά σχήματα είναι οι παρακάτω:

Ορθογ. τρίγωνο**Ορθογώνιο****Τετράγωνο****Ισοσκελές τρίγωνο****Τρίγωνο****Παραλληλόγραμμο****Ισοσκελές τραπέζιο****Τυχαίο τετράπλευρο**

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- 1.** Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και Δ με διανύσματα θέσης $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $4\vec{a} - \vec{\beta}$ και $\vec{a} + 2\vec{\beta}$ ως προς σημείο αναφοράς Ο αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι συγγραμμικά.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{\beta} - \vec{a}$$

$$\vec{\Gamma\Delta} = \vec{OD} - \vec{OG} = \vec{a} + 2\vec{\beta} - (4\vec{\beta} - \vec{\beta}) = 3\vec{\beta} - 3\vec{a} = 3 \cdot (\vec{\beta} - \vec{a})$$

Άρα $\vec{\Gamma\Delta} = 3 \cdot \vec{AB}$ οπότε $\vec{\Gamma\Delta} // \vec{AB}$.

- 2.** Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε τα διανύσματα $\vec{a}(x, 2)$ και $\vec{\beta}(16, 2x)$ να είναι ομόρροπα.

Για να είναι ομόρροπα τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ πρέπει και αρκεί $\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$ και να υπάρχει θετικός αριθμός λ έτσι ώστε $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.

$$\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 2 \\ 16 & 2x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4.$$

Για $x=4$ είναι $\vec{a} = (4, 2)$ και $\vec{\beta} = (16, 8) = 4 \cdot (4, 2) = 4 \cdot \vec{a}$ οπότε $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ομόρροπα.

Για $x=-4$ είναι $\vec{a} = (-4, 2)$ και $\vec{\beta} = (16, -8) = -4 \cdot (-4, 2) = -4 \cdot \vec{a}$ οπότε $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ αντίρροπα.

Άρα η ζητούμενη τιμή του x είναι το 4.

- 3.** Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $|\vec{\gamma}| = 3$ και $2\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ να δείξετε ότι $\vec{\beta} \uparrow \vec{\gamma}$.

Είναι $2\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = -2\vec{a}$ οπότε **(*)**

$$\begin{aligned} (\vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 &= (-2\vec{a})^2 \Leftrightarrow \vec{\beta}^2 + 2 \cdot \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma}^2 = 4 \cdot \vec{a}^2 \Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2 + 2 \cdot \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + |\vec{\gamma}|^2 = 4 \cdot |\vec{a}|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + 2 \cdot \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + 9 = 16 \Leftrightarrow 2 \cdot \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 6 \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 3. \end{aligned}$$

Όμως και $|\vec{\beta}| \cdot |\vec{\gamma}| = 3$ οπότε $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = |\vec{\beta}| \cdot |\vec{\gamma}|$ επομένως $\vec{\beta} \uparrow \vec{\gamma}$.

(*)ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι σχέσεις $(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = -2\vec{a}$ και $(\vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 = (-2\vec{a})^2$ συνδέονται με συνεπαγωγή και όχι ισοδυναμία γιατί γενικά αν $\vec{a} = \vec{\beta}$ τότε $\vec{a}^2 = \vec{\beta}^2$ αλλά όχι αντίστροφα.

- 4.** Έστω $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ δύο κάθετα διανύσματα με $\vec{OA} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{OB} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$. Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 6$ και $|\vec{\beta}| = 5$ να υπολογιστεί το $|\vec{a}|$.

$$\vec{OA} \perp \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a} + 2\vec{\beta}) \cdot (2\vec{a} - \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 + 3 \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta} - 2\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 + 3 \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta} - 2|\vec{\beta}|^2 = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 = 2|\vec{\beta}|^2 - 3 \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 = 2 \cdot 25 - 3 \cdot 6 \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 = 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |\vec{a}| = 4 \end{aligned}$$

5. Έστω τα διανύσματα $\vec{a} = i - 2j$, $\vec{\beta} = 6i + yj$ και $\vec{\gamma} = -2i + 4j$. Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ τότε:

α) Να προσδιοριστεί το $\vec{\beta}$

β) Να δείξετε ότι $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$

α) $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 6 + (-2) \cdot y = 0 \Leftrightarrow 6 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 3$. Άρα $\vec{\beta} = 6i + 3j$.

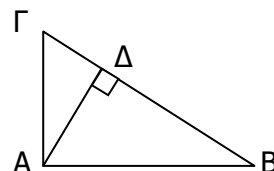
β) $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 6 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 = 0$. Άρα $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το ότι $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$ θα μπορούσε να προκύψει και αλλιώς αν παρατηρήσουμε ότι $\vec{\gamma} = -2 \cdot \vec{a}$. Έτσι $\vec{\gamma} \parallel \vec{a}$ και αφού $\vec{a} \perp \vec{\beta}$, τότε προφανώς $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$.

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και AD το ύψος του. Δείξτε ότι ισχύει η
ισοδυναμία: $\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \overline{B\Gamma} \cdot \overline{B\Delta}$

ΕΥΘΥ: Έστω $\hat{A} = 90^\circ$. Θα δείξουμε ότι $\overline{AB}^2 = \overline{B\Gamma} \cdot \overline{B\Delta}$.

Έχουμε κατά σειρά $\overline{AB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AB} = \overline{AB} \cdot (\overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma B}) =$
 $= \overline{AB} \cdot \overline{A\Gamma} + \overline{AB} \cdot \overline{\Gamma B} = 0 + \overline{AB} \cdot \overline{\Gamma B} = \text{προβ}_{\overline{AB}} \overline{AB} \cdot \overline{\Gamma B} =$
 $= \overline{AB} \cdot \overline{\Gamma B} = -\overline{B\Delta} \cdot (-\overline{B\Gamma}) = \overline{B\Gamma} \cdot \overline{B\Delta}$.



ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ: Έστω ότι ισχύει $\overline{AB}^2 = \overline{B\Gamma} \cdot \overline{B\Delta}$ (1). Θα δείξουμε ότι $\hat{A} = 90^\circ$.

$\overline{AB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AB} = (\overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma B}) \cdot (\overline{A\Delta} + \overline{\Delta B}) = \overline{A\Gamma} \cdot \overline{A\Delta} + \overline{A\Gamma} \cdot \overline{\Delta B} + \overline{\Gamma B} \cdot \overline{A\Delta} + \overline{\Gamma B} \cdot \overline{\Delta B} =$
 $= \overline{A\Gamma} \cdot \overline{A\Delta} + \overline{A\Gamma} \cdot \overline{\Delta B} + 0 + \overline{\Gamma B} \cdot \overline{\Delta B} = \overline{A\Gamma} \cdot \overline{A\Delta} + \overline{A\Gamma} \cdot \overline{\Delta B} + \overline{\Gamma B} \cdot \overline{\Delta B} = \overline{A\Gamma} \cdot (\overline{A\Delta} + \overline{\Delta B}) + \overline{\Gamma B} \cdot \overline{\Delta B} =$
 $= \overline{A\Gamma} \cdot \overline{AB} + \overline{B\Gamma} \cdot \overline{B\Delta}$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε: $\overline{B\Gamma} \cdot \overline{B\Delta} = \overline{A\Gamma} \cdot \overline{AB} + \overline{B\Gamma} \cdot \overline{B\Delta} \Leftrightarrow \overline{A\Gamma} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow \overline{A\Gamma} \perp \overline{AB} \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$.

7. Έστω τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και A_1, A_2 τα συμμετρικά του A ως προς Δ και Γ αντίστοιχα. Αν B_1, B_2 τα συμμετρικά του B ως προς Δ και Γ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ και $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2}$.

Τα τετράπλευρα ABA_1B_1 και ABA_2B_2 είναι παραλληλόγραμμα για τι οι διαγωνιές τους διχοτομούνται. Άρα ισχύουν:

$|\overline{A_1B_1}| = |\overline{AB}|$ και $\overline{A_1B_1} \parallel \overline{AB}$

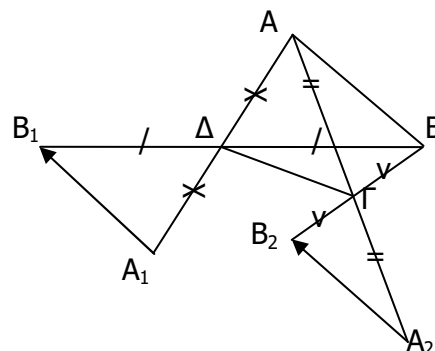
οπότε $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$

και

$|\overline{A_2B_2}| = |\overline{AB}|$ και $\overline{A_2B_2} \parallel \overline{AB}$

οπότε $\overline{A_2B_2} = \overline{AB}$

Επομένως $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ άρα $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2}$.



8. Αν $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{a} + \vec{\beta}|$ ναδειχθεί ότι $|\vec{a} - \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot \sqrt{3}$.

$$\text{Είναι } |\vec{a}| = |\vec{a} + \vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 = |\vec{a} + \vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 = (\vec{a} + \vec{\beta})^2 \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 \stackrel{|\vec{a}|=|\vec{\beta}|}{\Leftrightarrow} \cancel{|\vec{a}|^2} = \cancel{|\vec{a}|^2} + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta} + |\vec{a}|^2 \Leftrightarrow 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{a}|^2 \quad (1)$$

Τότε

$$|\vec{a} - \vec{\beta}|^2 = (\vec{a} - \vec{\beta})^2 = \vec{a}^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{a}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 \stackrel{|\vec{a}|=|\vec{\beta}|}{=} |\vec{a}|^2 + |\vec{a}|^2 + |\vec{a}|^2 \stackrel{(1)}{=} 3|\vec{a}|^2$$

$$\text{Άρα } |\vec{a} - \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot \sqrt{3}.$$

9. α) Αν $\vec{a} = (3, -4)$ και $\vec{\beta} = (-1, 0)$ να υπολογιστεί το $|\vec{a} - 2\vec{\beta}|$.

β) Αν $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \hat{} \varphi = 60^\circ$, να υπολογιστεί το $|\vec{a} - 2\vec{\beta}|$

$$\alpha) \text{ Είναι } \vec{a} - 2\vec{\beta} = (3, -4) - 2 \cdot (-1, 0) = (3, -4) - (-2, 0) = (5, -4).$$

$$\text{Άρα } |\vec{a} - 2\vec{\beta}| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$$

β) (Παίρνουμε να υπολογίσουμε το τετράγωνο του μέτρου)

$$|\vec{a} - 2\vec{\beta}|^2 = (\vec{a} - 2\vec{\beta})^2 = \vec{a}^2 - 4 \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = |\vec{a}|^2 - 4 \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta} + 4|\vec{\beta}|^2 \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \varphi = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

$$\text{Έτσι από (1) έχουμε: } |\vec{a} - 2\vec{\beta}|^2 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 = 12. \text{ Άρα } |\vec{a} - 2\vec{\beta}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

10. Αν M και N τα μέσα των πλευρών AB και ΓΔ τετραπλεύρου ABΓΔ να δείξετε ότι

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BG} = 2 \cdot \overrightarrow{MN}.$$

Ισχύουν:

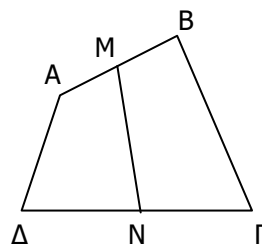
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GN}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GN} =$$

$$= \cancel{\overrightarrow{MA}} + \overrightarrow{AD} + \cancel{\overrightarrow{DN}} - \cancel{\overrightarrow{MA}} + \overrightarrow{BG} + -\cancel{\overrightarrow{DN}} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BG}$$

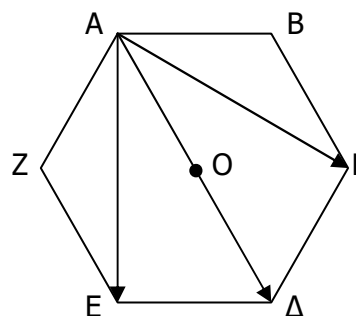


11. Αν ABΓΔΕΖ κανονικό εξαγώνο δείξτε ότι $\overrightarrow{AΓ} + \overrightarrow{AΕ} = \overrightarrow{AΔ} + \overrightarrow{BΓ}$

Με κέντρο αναφοράς το κέντρο O του εξαγώνου έχουμε:

$$\overrightarrow{AΓ} + \overrightarrow{AΕ} = \overrightarrow{OΓ} - \overrightarrow{OΑ} + \overrightarrow{OΕ} - \overrightarrow{OΑ} \stackrel{\overrightarrow{OΕ} = -\overrightarrow{OΒ}}{=} \overrightarrow{OΓ} - \overrightarrow{OΒ} - 2 \cdot \overrightarrow{OΑ} =$$

$$= \overrightarrow{BΓ} + 2 \cdot \overrightarrow{AΟ} \stackrel{2 \cdot \overrightarrow{AΟ} = \overrightarrow{AΔ}}{=} \overrightarrow{BΓ} + \overrightarrow{AΔ}.$$



12. Δίνονται τρία σημεία A, B, Γ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{OB} + 4 \cdot \overrightarrow{OG} = 5 \cdot \overrightarrow{OA}$, όπου O τυχαίο σημείο αναφοράς. Να δείξετε ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

$$\overrightarrow{OB} + 4 \cdot \overrightarrow{OG} = 5 \cdot \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} + 4 \cdot \overrightarrow{OG} - 5 \cdot \overrightarrow{OA} = \vec{0} \quad (1)$$

Επειδή οι συντελεστές (1, 4, -5) έχουν άθροισμα 0, σύμφωνα με τη μεθοδολογία, διασπάμε το -5 με τη βοήθεια των 1 και 4. Έτσι:

$$(1) \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} + 4 \cdot \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} - 4 \cdot \overrightarrow{OA} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + 4 \cdot (\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA}) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + 4 \cdot \overrightarrow{AG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = -4 \cdot \overrightarrow{AG} \text{ που σημαίνει ότι } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG} \text{ συγγραμμικά, οπότε A, B, Γ συνευθειακά.}$$

13. Σε τρίγωνο ABΓ προεκτείνουμε τις διαμέσους ΒΚ και ΓΛ κατά τμήματα ΚΔ=BΚ και ΛΕ=ΓΛ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα σημεία E, A και Δ είναι συνευθειακά.

Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τα $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{AD}$ με στόχο να δείξουμε ότι

$$\overrightarrow{AE} = \lambda \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\text{Είναι } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AG} + 2 \cdot \overrightarrow{GL}.$$

$$\text{Όμως Λ μέσο AB οπότε } 2 \cdot \overrightarrow{GL} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}.$$

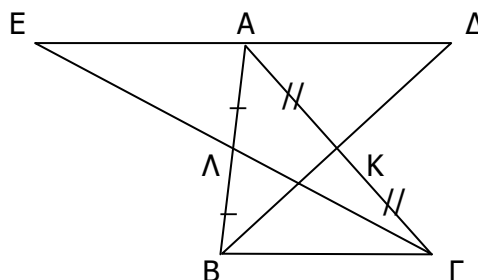
$$\text{Άρα } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GB} \quad (1).$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{BK} \stackrel{\text{Κ μέσο AG}}{=} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BG} = \\ &= \overrightarrow{BG} \quad (2). \end{aligned}$$

$$\text{Από (1) και (2) προκύπτει ότι } \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD}$$

οπότε $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{AD}$ και επομένως E, A, Δ συνευθειακά.



14. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ για τα οποία ισχύει η σχέση $\overrightarrow{AB} + 2004 \cdot \overrightarrow{AG} = (\lambda + 2) \cdot \overrightarrow{BG}$ (1). Να προσδιοριστεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα A και Γ να συμπίπτουν.

Για να συμπίπτουν τα A και Γ πρέπει και αρκεί

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} = \vec{0} &\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{AB} + \vec{0} = (\lambda + 2) \cdot \overrightarrow{BG} \quad \begin{array}{c} \text{προσθετούμε} \\ \text{στα δύο μέλη} \\ \text{το } \overrightarrow{BG} \end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = (\lambda + 2) \cdot \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = (\lambda + 3) \cdot \overrightarrow{BG} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{0} = (\lambda + 3) \cdot \overrightarrow{BG} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 3 = 0 \\ \text{ή} \\ \overrightarrow{BG} = \vec{0} \end{cases} \quad \begin{array}{c} B \neq G \\ \Leftrightarrow \lambda + 3 = 0 \end{array} \Leftrightarrow \lambda = -3. \end{aligned}$$

15. Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν άκρα τα μέσα των απέναντι πλευρών κυρτού τετραπλεύρου διχοτομούνται (έχουν κοινό μέσο)

Μία μέθοδος επίλυσης της άσκησης αυτής είναι με συντεταγμένες ορίζοντας ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων όπως αυτό που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Έστω Κ, Λ, Μ και Ν τα μέσα των απέναντι πλευρών του τετραπλεύρου (βλέπε σχήμα), O_1 το μέσον της ΚΝ και O_2 το μέσον της ΝΛ.

Θα δείξουμε ότι $O_1 \equiv O_2$.

Έχουμε κατά σειρά:

Συντεταγμένες Κ: $(\frac{a+\gamma}{2}, \frac{\beta+\delta}{2})$

Συντεταγμένες Μ: $(\frac{0+\varepsilon}{2}, \frac{0+0}{2}) = (\frac{\varepsilon}{2}, 0)$

Άρα συντεταγμένες του μέσου O_1 του ΚΜ: $(\frac{\frac{a+\gamma}{2} + \frac{\varepsilon}{2}}{2}, \frac{\frac{\beta+\delta}{2} + 0}{2}) = (\frac{a+\gamma+\varepsilon}{4}, \frac{\beta+\delta}{4})$.

Συντεταγμένες Ν: $(\frac{0+a}{2}, \frac{0+\beta}{2}) = (\frac{a}{2}, \frac{\beta}{2})$

Συντεταγμένες Λ: $(\frac{\gamma+\varepsilon}{2}, \frac{\delta+0}{2}) = (\frac{\gamma+\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2})$

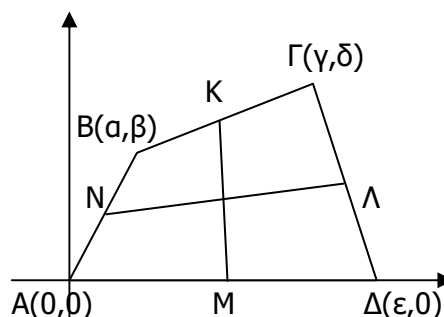
Άρα συντεταγμένες του μέσου O_2 του ΝΛ: $(\frac{\frac{a}{2} + \frac{\gamma+\varepsilon}{2}}{2}, \frac{\frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2}}{2}) = (\frac{a+\gamma+\varepsilon}{4}, \frac{\beta+\delta}{4})$.

Επομένως $O_1 \equiv O_2$ αφού έχουν τις ίδιες συντεταγμένες.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Φυσικά μπορούμε να λύσουμε την άσκηση χωρίς να χρησιμοποιήσουμε

συντεταγμένες, όπως να υπολογίσουμε τα $\overline{ΚΛ}$ και $\overline{ΝΜ}$ δείχνοντας ότι $\overline{ΚΛ} = \overline{ΝΜ} = \frac{1}{2} \overline{ΑΓ}$,

οπότε το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο και επομένως οι διαγώνιές του ΚΜ και ΝΛ διχοτομούνται.



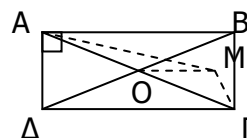
16. Αν ΑΒΓΔ ορθογώνιο να προσδιορίσετε σημείο Μ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\overline{ΜΑ} + \overline{ΜΒ} + \overline{ΜΓ} = \overline{ΜΔ}$$

Έχουμε κατά σειρά:

$$\overline{ΜΑ} + \overline{ΜΒ} + \overline{ΜΓ} = \overline{ΜΔ} \Leftrightarrow \overline{ΜΑ} + \overline{ΜΓ} = \overline{ΜΔ} - \overline{ΜΒ} \Leftrightarrow 2 \cdot \overline{ΜΟ} = \overline{ΒΔ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \overline{ΜΟ} = 2 \cdot \overline{ΒΟ} \Leftrightarrow \overline{ΜΟ} = \overline{ΒΟ}. \text{ Άρα το Μ ταυτίζεται με το } \text{σημείο } Β.$$



17. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(0,3), Β(-1,3) και Γ(1,1). Να βρεθούν οι συντεταγμένες:

α) Σημείου Κ για το οποίο ισχύει $2 \cdot \overline{ΓΚ} = \overline{ΒΓ}$

β) Σημείου Λ της ευθείας ΑΓ για το οποίο ισχύει $ΚΛ // ΑΒ$.

α) Έστω Κ(x,y). Τότε $\overline{ΓΚ} = (x-1, y-1)$ και $\overline{ΒΓ} = (1+1, 1-3) = (2, -2)$. Έτσι:

$$2 \cdot \overrightarrow{FK} = \overrightarrow{BF} \Leftrightarrow 2 \cdot (x-1, y-1) = (2, -2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=2 \\ 2y-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \text{ . Άρα } K(2,0).$$

β) Έστω $\Lambda(a, \beta)$.

Για να ανήκει το Λ στην ευθεία $A\Gamma$ πρέπει και αρκεί $\overline{A\Lambda} // \overline{A\Gamma} \Leftrightarrow \det(\overline{A\Lambda}, \overline{A\Gamma}) = 0$.

Για να ισχύει $\overline{K\Lambda} // \overline{AB}$ πρέπει και αρκεί $\overline{K\Lambda} // \overline{AB} \Leftrightarrow \det(\overline{K\Lambda}, \overline{AB}) = 0$

Όμως $\overline{K\Lambda} = (a-2, \beta)$, $\overline{AB} = (-1, 0)$, $\overline{A\Lambda} = (a, \beta-3)$ και $\overline{A\Gamma} = (1, -2)$.

$$\text{Έτσι: } \begin{cases} \det(\overline{A\Lambda}, \overline{A\Gamma}) = 0 \\ \det(\overline{K\Lambda}, \overline{AB}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} a & \beta-3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} a-2 & \beta \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \text{ .}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε ότι
 $a = \frac{3}{2}$ και $\beta = 0$. Άρα $\Lambda = (\frac{3}{2}, 0)$.

18. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (2, -3)$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις τις διευθύνσεις των διανυσμάτων $\vec{a} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

Έστω $\vec{u}$ και $\vec{v}$ οι ζητούμενες συνιστώσες του $\vec{\gamma}$ με $\vec{u} // \vec{a}$ και $\vec{v} // \vec{\beta}$. Τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ και λ , τέτοιοι ώστε $\vec{u} = \kappa \cdot \vec{a}$, $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} = \kappa \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2, -3) = \kappa \cdot (1, -2) + \lambda \cdot (2, 3) \Leftrightarrow (2, -3) = (\kappa + 2\lambda, -2\kappa + 3\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa + 2\lambda = 2 \\ -2\kappa + 3\lambda = -3 \end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε ότι $\kappa = \frac{12}{7}$ και $\lambda = \frac{1}{7}$.

Άρα $\vec{u} = \frac{12}{7} \cdot (1, -2)$ και $\vec{v} = \frac{1}{7} \cdot (2, 3)$.

19. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (2, -3)$ σε δύο συνιστώσες κάθετες στις διευθύνσεις των διανυσμάτων $\vec{a} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

Ένα διάνυσμα κάθετο προς το $\vec{a} = (1, -2)$ είναι το $\vec{a}_1 = (2, 1)$ και ένα διάνυσμα κάθετο προς το $\vec{\beta} = (2, 3)$ είναι το $\vec{\beta}_1 = (-3, 2)$.

Έστω ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ και λ τέτοιοι ώστε $\vec{\gamma} = \kappa \cdot \vec{a}_1 + \lambda \cdot \vec{\beta}_1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2, -3) = \kappa \cdot (2, 1) + \lambda \cdot (-3, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\kappa - 3\lambda = 2 \\ \kappa + 2\lambda = -3 \end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε ότι $\kappa = -\frac{5}{7}$ και $\lambda = -\frac{8}{7}$.

Άρα $\vec{u} = -\frac{5}{7} \cdot (2, 1)$ και $\vec{v} = -\frac{8}{7} \cdot (-3, 2)$.

20. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (2, -3)$ σε δύο συνιστώσες, μιας παράλληλης προς το διάνυσμα $\vec{a} = (1, -2)$ και μιας κάθετης σ' αυτό.

Η μέθοδος είναι ανάλογη εκείνης που εφαρμόσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα.

Έτσι:

Ένα διάνυσμα παράλληλο με το $\vec{a} = (1, -2)$ είναι το $\vec{u} = \kappa \cdot \vec{a}$, όπου κ πραγματικός αριθμός.

Ένα διάνυσμα κάθετο στο $\vec{a} = (1, -2)$ είναι το $\vec{a}_1 = (2, 1)$ και ένα τυχαίο διάνυσμα παράλληλο με το $\vec{a}_1$ (άρα κάθετο στο $\vec{a}$) είναι το $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{a}_1$, όπου λ πραγματικός αριθμός. Άρα $\vec{\gamma} = \kappa \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{a}_1 \Leftrightarrow (2, -3) = \kappa \cdot (1, -2) + \lambda \cdot (2, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa + 2\lambda = 2 \\ -2\kappa + \lambda = -3 \end{cases}$.

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι $\kappa = \frac{8}{5}$ και $\lambda = \frac{1}{5}$.

Άρα $\vec{u} = \frac{8}{5}(1, -2)$ και $\vec{v} = \frac{1}{5}(2, 1)$.

21. Έστω $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \varphi = 30^\circ$. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = \vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{a} - \vec{\beta}$.

Αν είναι θ η γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ τότε $\text{συν}\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ (1). Άρα αρκεί να υπολογίσουμε

το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$ και τα μέτρα των $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Είναι: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{a} - \vec{\beta}) = \vec{a}^2 - \vec{\beta}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = 3 - 1 = 2$ (2).

Για να υπολογίσουμε τα μέτρα των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ πρέπει πρώτα να βρούμε τα τετράγωνα των μέτρων αυτών.

$|\vec{u}|^2 = \vec{u}^2 = (\vec{a} + \vec{\beta})^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \text{συν}\varphi + |\vec{\beta}|^2 = 3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \text{συν}30^\circ + 1 = 4 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7$. Άρα $|\vec{u}| = \sqrt{7}$ (3).

Όμοια: $|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2 = (\vec{a} - \vec{\beta})^2 = \dots = 1$. Άρα $|\vec{v}| = \sqrt{1} = 1$ (4).

(1) $\stackrel{(2),(3)}{\Leftrightarrow} \text{συν}\theta = \frac{2}{\sqrt{7} \cdot 1} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \approx 0,756$ οπότε η γωνία θ είναι περίπου 41° .

22. Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{w}$ και $\vec{v}$ διανύσματα με $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 1$, $\vec{w} = 3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{\beta}$, $\vec{v} = -7 \cdot \vec{a} + 8 \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{w} \perp \vec{v}$. Να βρεθεί η γωνία $(\vec{a}, \vec{\beta})$.

Αφού $\vec{w} \perp \vec{v}$ είναι $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (3\vec{a} + 2\vec{\beta}) \cdot (-7\vec{a} + 8\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow -21\vec{a}^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{\beta} + 16\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -21|\vec{a}|^2 + 10|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \text{συν}(\vec{a}, \vec{\beta}) + 16|\vec{\beta}|^2 = 0 \Leftrightarrow -21 \cdot 1 + 10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \text{συν}(\vec{a}, \vec{\beta}) + 16 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -21 + 10 \cdot \text{συν}(\vec{a}, \vec{\beta}) + 16 = 0 \Leftrightarrow \text{συν}(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{1}{2}$ και αφού $0^\circ \leq (\vec{a}, \vec{\beta}) \leq 180^\circ$ έχουμε ότι

$(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$.

23. Αν $|\vec{a}|=2$, $|\vec{v}|=1$ και $(\vec{a}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ να εκφραστεί με τη βοήθεια του $\vec{a}$ η προβολή του $\vec{v}$ πάνω στο $\vec{a}$.

Επειδή $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} // \vec{a}$ θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} = \lambda \cdot \vec{a}$ (1). Άρα θα ισχύει

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{v} &= \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \lambda \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{a}^2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot |\vec{a}|^2 \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{v}) = \lambda \cdot |\vec{a}|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \lambda \cdot 2^2 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} = 4\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}. \text{ Άρα από (1) } \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} = \frac{1}{4} \cdot \vec{a}. \end{aligned}$$

24. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $|\vec{MA} + \vec{MD}| = |\vec{MB} + \vec{MG}|$.

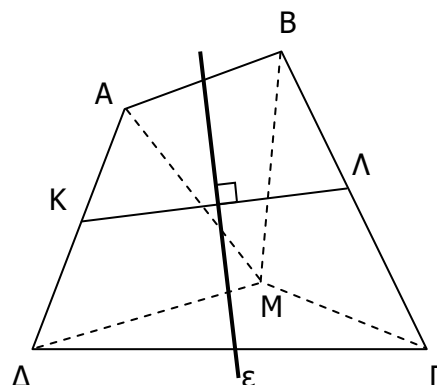
Έστω Κ μέσον της ΑΔ και Λ μέσον της ΒΓ. Τότε:

$$\vec{MA} + \vec{MD} = 2 \cdot \vec{MK} \text{ και } \vec{MB} + \vec{MG} = 2 \cdot \vec{ML}.$$

Έτσι η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$|2 \cdot \vec{MK}| = |2 \cdot \vec{ML}| \Leftrightarrow 2 \cdot |\vec{MK}| = 2 \cdot |\vec{ML}| \Leftrightarrow |\vec{MK}| = |\vec{ML}|.$$

Άρα το Μ ισαπέχει από τα σταθερά σημεία Κ και Λ οπότε ο γεωμετρικός του τόπος είναι η μεσοκάθετος ε του ΚΛ.



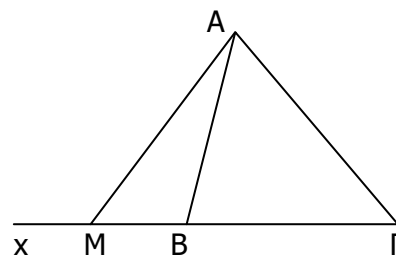
25. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\vec{AM} = 3\lambda \cdot \vec{GA} + (1 + 3\lambda) \cdot \vec{AB}$ με $\lambda > 0$.

Είναι:

$$\vec{AM} = 3\lambda \cdot \vec{GA} + (1 + 3\lambda) \cdot \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AM} = 3\lambda \cdot \vec{GA} + \vec{AB} + 3\lambda \cdot \vec{AB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} - \vec{AB} = 3\lambda \cdot (\vec{GA} + \vec{AB}) \Leftrightarrow \vec{BM} = 3\lambda \cdot \vec{GB}. \text{ Άρα } \vec{BM} // \vec{GB}$$

και μάλιστα $\vec{BM} \uparrow \vec{GB}$ αφού $3\lambda > 0$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι η ημιευθεία Bx.



26. Έστω ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Οxy και σταθερό σημείο Α του επιπέδου με $|\vec{OA}| = 3$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία είναι $\vec{OM} \cdot (\vec{OM} - 2 \cdot \vec{OA}) = 7$.

ΘΕΜΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Προσπαθούμε να εμφανίσουμε στη δοσμένη σχέση το μέτρο του $\vec{OA}$ που είναι γνωστό καθώς και κάποιο άλλο διάνυσμα που να περιέχει ως άκρο το μεταβλητό σημείο Μ.

$$\begin{aligned} \vec{OM} \cdot (\vec{OM} - 2 \cdot \vec{OA}) &= 7 \Leftrightarrow (\vec{OA} + \vec{AM}) \cdot (\vec{OA} + \vec{AM} - 2 \cdot \vec{OA}) = 7 \Leftrightarrow (\vec{OA} + \vec{AM}) \cdot (\vec{AM} - \vec{OA}) = 7 \Leftrightarrow \\ &(\vec{AM})^2 - (\vec{OA})^2 = 7 \Leftrightarrow |\vec{AM}|^2 - |\vec{OA}|^2 = 7 \Leftrightarrow |\vec{AM}|^2 - 3^2 = 7 \Leftrightarrow |\vec{AM}|^2 = 16 \Leftrightarrow |\vec{AM}| = 4. \end{aligned}$$

Άρα το Μ απέχει από το σταθερό σημείο Α σταθερή απόσταση 4, οπότε ανήκει στον κύκλο (Α,4).

27. Δίνονται τρία σταθερά σημεία A, B, Γ και δύο μεταβλητά σημεία M και K. Αν ισχύει ότι $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MG}$, δείξτε ότι η MK διέρχεται από σταθερό σημείο.

Αν είναι Λ το μέσον του AB τότε: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2 \cdot \overrightarrow{ML}$ οπότε η δοσμένη σχέση γίνεται ισοδύναμα:

$$\overrightarrow{MK} = 2 \cdot \overrightarrow{ML} + 2 \cdot \overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} = 2 \cdot (\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MG}).$$

Αν είναι Ρ το μέσον της του ΛΓ τότε $\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MG} = 2 \cdot \overrightarrow{MP}$ και η προηγούμενη σχέση γίνεται ισοδύναμα:

$\overrightarrow{MK} = 4 \cdot \overrightarrow{MP} \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} // \overrightarrow{MP}$. Άρα τα σημεία M, K και P είναι συνευθειακά και μάλιστα το P είναι σταθερό. Άρα η MK διέρχεται από το σταθερό σημείο P.

2. Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

2.1 Η εξίσωση της ευθείας

Εξίσωση γραμμής C στο επίπεδο, ονομάζεται μια εξίσωση με δύο αγνώστους x, y την οποία επαληθεύουν οι συντεταγμένες των σημείων της C , και μόνο αυτές.

Λέγοντας «γραμμή» εννοούμε κάποια από τις γνωστές μας γραμμές, ευθείες, παραβολές, υπερβολές κ.τ.λ. ή οποιαδήποτε άλλη.

Αναφερόμενοι στην εξίσωση μιας γραμμής π.χ. παραβολής, πρέπει να λέμε: «Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y=x^2$ ». Στη συνέχεια όμως για συντομία θα μπορούμε επίσης να λέμε: «Δίνεται η παραβολή $y=x^2$ ».

Οι μεταβλητές x και y σε κάθε εξίσωση γραμμής C συμβολίζουν τις συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου της γραμμής.

Για να διαπιστώσουμε αν ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ ανήκει στη γραμμή C αρκεί να ελέγξουμε αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν (αν τεθούν στην θέση των μεταβλητών x και y) την εξίσωση της C .

Λέγοντας π.χ. «έχουμε τις γραμμές $C_1: y=3x^2+5$ και $C_2: y=4x+5$ », πρέπει να γνωρίζουμε ότι το ζεύγος των μεταβλητών (x, y) (αν και χρησιμοποιούμε τα ίδια σύμβολα) δεν παίρνει τις ίδιες τιμές και για τις δύο γραμμές παρά μόνο αν πρόκειται για το τυχόν σημείο τομής τους.

Έτσι στη μόνη περίπτωση που μπορούμε να συνδυάσουμε τις παραπάνω εξισώσεις με βάση τα x και y , είναι όταν ζητάμε τα σημεία τομής των γραμμών. Τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) βρίσκονται από τις λύσεις (x, y) του συστήματος των εξισώσεών τους. Αν το σύστημα είναι αδύνατο, τότε δεν υπάρχει σημείο τομής.

Σχετικά με την εξίσωση μιας ευθείας γραμμής έχουμε τα παρακάτω:

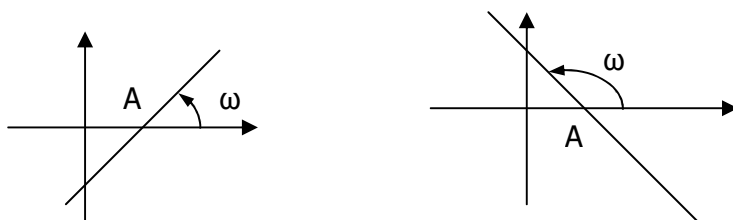
Γωνία κλίσης ευθείας

Έστω ευθεία ε η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο A .

Γωνία κλίσης ω της ε ονομάζεται η θετική κυρτή γωνία που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί γύρω από το A μέχρι να συμπίψει με την ε .

Αν $\varepsilon // x'x$, τότε ορίζουμε ότι η γωνία κλίσης ω είναι 0° .

Έτσι για κάθε ευθεία ε είναι: $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$ ή σε ακτίνια $0 \leq \omega < \pi$



Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας ε ονομάζεται η εφαπτομένη της ω .

Έτσι: **$\lambda = \varepsilon \varphi \omega$**

Προφανώς ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\lambda = 0 \Leftrightarrow \omega = 0^\circ \quad (\varepsilon // x'x)$$

$$\lambda > 0 \Leftrightarrow 0^\circ < \omega < 90^\circ$$

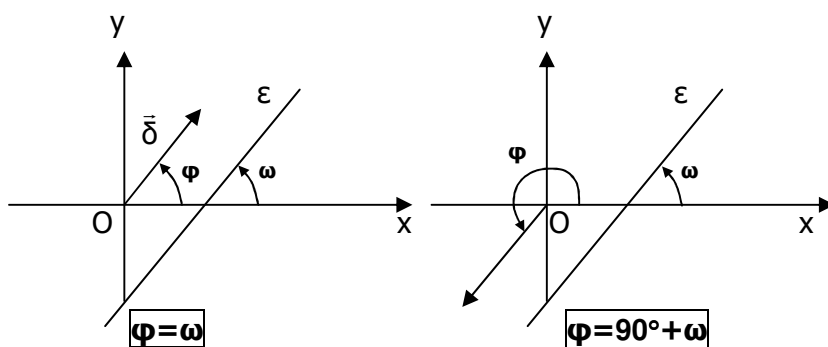
$$\lambda < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \omega < 180^\circ$$

Οι ευθείες που είναι παράλληλες στον άξονα $y'y$ (κατακόρυφες ευθείες) είναι οι μόνες ευθείες που γι' αυτές δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης (αφού δεν ορίζεται η $\varepsilon \varphi 90^\circ$).

Προφανώς ο λ καθορίζει τη διεύθυνση της ευθείας.

Όταν μια ευθεία ε και ένα διάνυσμα $\vec{d}$ είναι παράλληλα, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

Τότε η γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα με τον $x'x$ και η γωνία ω που σχηματίζει η ε με τον $x'x$, είναι ή ίσες ($\varphi = \omega$) ή έχουν διαφορά 90° ($\varphi = 90^\circ + \omega$).



Ο συντελεστής λ μιας ευθείας που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ και δεν είναι κατακόρυφη ($x_1 \neq x_2$) είναι:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας ευθειών

Έστω δύο μη κατακόρυφες ευθείες ε_1 και ε_2 με αντίστοιχους συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 .

Ισχύουν:

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

και

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

Ειδικές μορφές εξίσωσης ευθείας

Μια μη κατακόρυφη ευθεία είναι πλήρως ορισμένη σε ένα σύστημα αναφοράς του επιπέδου όταν είναι γνωστά ένα σημείο της και ο συντελεστής διεύθυνσής της ή δύο σημεία της.

Μια κατακόρυφη ευθεία είναι πλήρως ορισμένη σε ένα σύστημα αναφοράς του επιπέδου όταν είναι γνωστό ένα σημείο της.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις εξισώσεις διαφόρων ευθειών ανάλογα με τις πληροφορίες που έχουμε για καθεμιά:

- Εξίσωση μη κατακόρυφης ευθείας που έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης λ και διέρχεται από γνωστό σημείο $A(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$$

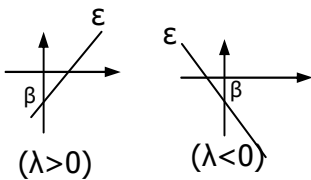
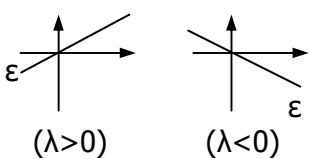
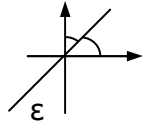
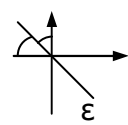
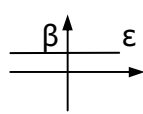
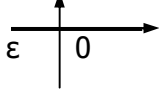
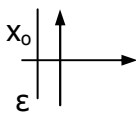
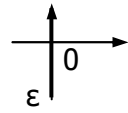
- Εξίσωση μη κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ (με $x_1 \neq x_2$)

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

- Εξίσωση **κατακόρυφης** ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$

$$x = x_0$$

Παρακάτω παραθέτουμε ειδικές περιπτώσεις τέτοιων ευθειών:

ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΕΥΘΕΙΑΣ		ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
1. Πλάγια $y = \lambda x + \beta$ με $\lambda \neq 0$		Τέμνει τον άξονα γ'γ στο σημείο $(0, \beta)$
<u>Ειδική μορφή</u> $y = \lambda \cdot x$ με $\lambda \neq 0$ (πλάγια με $\beta = 0$)		Διέρχεται από την αρχή των αξόνων
<u>Ειδική μορφή</u> $y = x$ (πλάγια με $\lambda = 1$ & $\beta = 0$)		Διχοτόμος της 1 ^{ης} και 3 ^{ης} γωνίας των αξόνων
<u>Ειδική μορφή</u> $y = -x$ (πλάγια με $\lambda = -1$ & $\beta = 0$)		Διχοτόμος της 2 ^{ης} και 4 ^{ης} γωνίας των αξόνων
2. Οριζόντια $y = \beta$ με $\beta \neq 0$ (πλάγια με $\lambda = 0$)		Διέρχεται από το $(0, \beta)$
<u>Ειδική μορφή</u> $y = 0$ (πλάγια με $\lambda = 0$ & $\beta = 0$)		Ο άξονας x'x
3. Κατακόρυφη $x = x_0$ (x_0 συγκεκριμένος αριθμός)		Διέρχεται από το $(x_0, 0)$
$x = 0$ (κατακόρυφη με $x_0 = 0$)		Είναι ο άξονας γ'γ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Μπορούμε να δείξουμε ότι μια ευθεία που δεν διέρχεται από το (0,0) αλλά τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία (α,0) και (0,β) αντίστοιχα, έχει εξίσωση

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

- Αν η εξίσωση μιας μη κατακόρυφης ευθείας λυθεί ως προς y τότε ο λ είναι πάντα ο συντελεστής του x. Για παράδειγμα στην ευθεία $5y=2x+3$ είναι $y=\frac{2x+3}{5}$ οπότε

$$\lambda = \frac{2}{5} \text{ αφού } y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}.$$

2.2 Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

Κάθε ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου έχει εξίσωση μορφής:

$$\mathbf{A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0} \quad \text{με } \mathbf{A \neq 0} \text{ ή } \mathbf{B \neq 0} \quad (\text{ή αλλιώς } |A| + |B| \neq 0)$$

και αντίστροφα κάθε εξίσωση της παραπάνω μορφής παριστάνει ευθεία γραμμή.

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται γενική μορφή εξίσωσης ευθείας γιατί όλες οι εξισώσεις των ευθειών που αναφέραμε παραπάνω προκύπτουν από τη γενική μορφή της εξίσωσης ευθείας αν θέσουμε όπου A, B και Γ κατάλληλες τιμές.

Έτσι για A, B ≠ 0 προκύπτει μια πλάγια ευθεία, για A=0 και B≠0 μια οριζόντια, για B=0 και A≠0 μια κατακόρυφη, ενώ αν Γ=0 μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ▼

Μια εξίσωση της παραπάνω μορφής παριστάνει ευθεία μόνο αν πρώτα εξασφαλίσουμε ότι οι συντελεστές A και B δεν είναι ταυτόχρονα και οι δύο ίσοι με μηδέν.

Διάνυσμα παράλληλο ή κάθετο σε ευθεία

Ισχύουν τα ακόλουθα:

Ένα διάνυσμα **παράλληλο** στην ευθεία ε: $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ είναι το $\vec{d} = (B, -A)$

και

ένα διάνυσμα **κάθετο** στην ευθεία ε: $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ είναι το $\vec{n} = (A, B)$

Τα παραπάνω μας επιτρέπουν να αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα που αφορά στους συντελεστές διεύθυνσης ευθειών ή γενικότερα στις διευθύνσεις ευθειών, ως πρόβλημα που αφορά στις διευθύνσεις κατάλληλων διανυσμάτων.

Ειδικά στην περίπτωση που αναζητούμε τη γωνία που σχηματίζουν δύο ευθείες $\varepsilon_1: A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + \Gamma_1 = 0$ και $\varepsilon_2: A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + \Gamma_2 = 0$, αυτή είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας που σχηματίζουν τα αντίστοιχα διανύσματα $\vec{\delta}_1 = (B_1, -A_1)$ και $\vec{\delta}_2 = (B_2, -A_2)$ που είναι παράλληλα με αυτές.

Έτσι αν ζητάμε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_2 και η γωνία φ των $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$ που θα υπολογιστεί είναι οξεία ($\sin \varphi > 0$), τότε αυτή είναι και η ζητούμενη. Αν η φ είναι αμβλεία ($\sin \varphi < 0$), τότε η γωνία των ευθειών είναι η παραπληρωματική της φ (δηλαδή $180^\circ - \varphi$).

Υπενθυμίζουμε ότι η γωνία των διανυσμάτων αυτών μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου τους.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Αντί του $\vec{\delta} = (B, -A)$ ως διάνυσμα παράλληλο με την ευθεία ε μπορούμε να θεωρήσουμε και το $\vec{w} = (-B, A)$ μια που $\lambda_{\vec{\delta}} = \lambda_{\vec{w}} = -\frac{A}{B}$.
- Αν δοθούν δύο ευθείες $\varepsilon_1: A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + \Gamma_1 = 0$ και $\varepsilon_2: A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + \Gamma_2 = 0$, τότε ως γνωστόν η σχετική τους θέση (αν τέμνονται, αν ταυτίζονται ή αν είναι παράλληλες), εξαρτάται από το **πόσες λύσεις έχει το σύστημά τους**. Με βάση αυτό είναι:

α) $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τεμνόμενες αν και μόνο αν $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ δηλαδή αν $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, οπότε το σύστημά τους θα έχει μοναδική λύση.

β) $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ αν και μόνο αν $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ και $(\begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ή } \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0)$, δηλαδή αν

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$, οπότε το σύστημά τους θα είναι αδύνατο

γ) ε_1 ταυτίζεται με ε_2 αν και μόνο αν $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0$, δηλαδή αν

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$, οπότε το σύστημά τους έχει άπειρες λύσεις.

Άρα συνοπτικά

$$\text{αν } \begin{cases} \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} & \text{τότε οι } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ τέμνονται } (*) \\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} & \text{τότε οι } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ είναι παράλληλες } (*) \\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} & \text{τότε οι } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ ταυτίζονται } (*) \end{cases}$$

(*) Φυσικά τα παραπάνω κλάσματα έχουν νόημα μόνο αν $A_2, B_2, \Gamma_2 \neq 0$

- Από την περίπτωση β) της προηγούμενης παρατήρησης αντιλαμβανόμαστε ότι **για να προσδιορίσουμε εξίσωση ευθείας ε_1 η οποία να είναι παράλληλη σε ευθεία ε : $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$, αρκεί να διατηρήσουμε ίδιους τους συντελεστές A και B και να τροποποιήσουμε τον συντελεστή Γ .**

Έτσι π.χ. οι ευθείες $2x + 3y + 2 = 0$ και $2x + 3y - 7 = 0$ είναι παράλληλες.

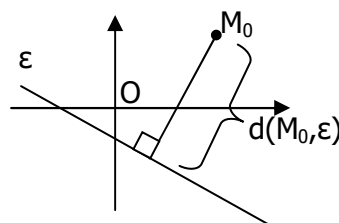
Επίσης αν η ευθεία δοθεί με τη μορφή $\varepsilon: y = ax + \beta$, για να προσδιορίσουμε μια εξίσωση ευθείας παράλληλης με αυτήν αρκεί να τροποποιήσουμε το β . Έτσι η ευθεία $\varepsilon_1: y = ax + \beta_1$ είναι παράλληλη με την ε και προκύπτει από την ε με **μετατόπιση της ε κατά $\beta_1 - \beta$ μονάδες παράλληλα με τον y '.**

2.3 Απόσταση σημείου από ευθεία – Εμβαδόν τριγώνου

Απόσταση σημείου M_0 από ευθεία ε

Αν δοθεί ευθεία $\varepsilon: A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ ($A \neq 0$ ή $B \neq 0$) και σημείο $M_0(x_0, y_0)$ του καρτεσιανού επιπέδου, η απόσταση του M_0 από την ε συμβολίζεται με $d(M_0, \varepsilon)$ και δίνεται από τη σχέση:

$$d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Εμβαδόν τριγώνου ABΓ

Αν δοθούν τρία σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ του καρτεσιανού επιπέδου μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ με τη βοήθεια της παρακάτω σχέσης:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot |\det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma})|$$

όπου $|\det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma})|$ η απόλυτη τιμή της ορίζουσας των διανυσμάτων $\overline{AB}$ και $\overline{A\Gamma}$.

Φυσικά αντί των $\overline{AB}$ και $\overline{A\Gamma}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα ζεύγη $\overline{BA}$ και $\overline{BF}$ ή $\overline{GA}$ και $\overline{GB}$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗΣ

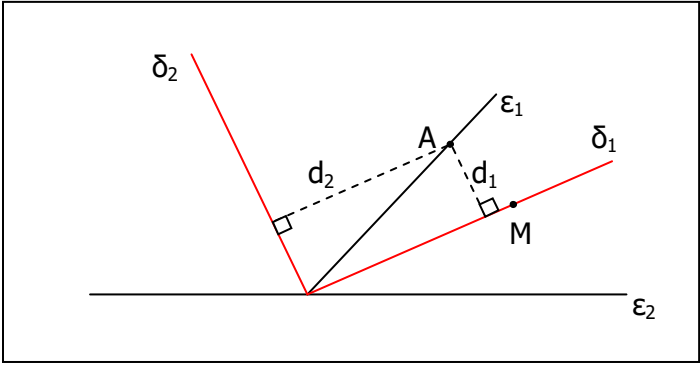
ΓΕΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ	$A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ (ή αλλιώς $ A + B \neq 0$)
ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΩΣ ΕΥΘΕΙΑΣ	- Αν είναι γνωστή η γωνία ω που σχηματίζει με τον x': $\lambda = \varepsilon \varphi \omega$ - Αν είναι γνωστά δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ από τα οποία διέρχεται και δεν είναι κατακόρυφη ($x_1 \neq x_2$): $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ - Αν είναι κατακόρυφη (παράλληλη με τον $y'y$): δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης
ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ ΕΥΘΕΙΩΝ	$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$
ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ	- Εξίσωση μη κατακόρυφης ευθείας που έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης λ και διέρχεται από γνωστό σημείο $A(x_0, y_0)$ $y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$ - Εξίσωση μη κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ (με $x_1 \neq x_2$) $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$ - Εξίσωση κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ $x = x_0$
ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ ε: $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$	$\vec{d} = (B, -A)$
ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΚΑΘΕΤΟ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ ε: $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$	$\vec{n} = (A, B)$
ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ $M_0(x_0, y_0)$ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ ε: $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$	$d(M_0, \varepsilon) = \frac{ Ax_0 + By_0 + \Gamma }{\sqrt{A^2 + B^2}}$
ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ $AB\Gamma$	$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) $

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

	ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ	ΜΕΘΟΔΟΙ
1.	Ασκήσεις που αφορούν στον προσδιορισμό του συντελεστή διεύθυνσης ευθείας ε όταν: α) Είναι παράλληλη προς διάνυσμα $\vec{\delta} = (a, \beta)$ β) Είναι παράλληλη προς ευθεία ε_1 γ) Είναι κάθετη προς διάνυσμα $\vec{\delta} = (a, \beta)$ δ) Είναι κάθετη προς ευθεία ε_1 ε) Σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία ω ζ) Διέρχεται από δύο γνωστά σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ Παράδειγμα 1	Σε όλες τις περιπτώσεις αν από την εκφώνηση προκύπτει ότι η ε είναι παράλληλη προς τον $x'x$, έχει συντελεστή διεύθυνσης 0, ενώ αν προκύπτει ότι $\varepsilon \perp x'x$, δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης. Σε κάθε άλλη περίπτωση έχουμε: α) $\lambda_\varepsilon = \lambda_{\vec{\delta}} = \frac{\beta}{a}$ β) $\lambda_\varepsilon = \lambda_{\varepsilon_1}$ γ) $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{\vec{\delta}} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{a}{\beta}$ δ) $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = -1$ ε) $\lambda = \tan \omega$ ζ) $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
2.	Ασκήσεις που αφορούν στον προσδιορισμό της εξίσωσης ευθείας ε όταν δίνονται γι' αυτήν κάποιες πληροφορίες. Παράδειγμα 2	Για να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας ε ακολουθούμε έναν από του δύο παρακάτω τρόπους: → A. Γράφουμε την εξίσωση της ε ως: 1. $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ (με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$) 2. $y = \lambda \cdot x + \beta$ ή $x = x_0$ ιδιαίτερα αν γνωρίζουμε το λ 3. $y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$ ή $x = x_0$ αν διέρχεται από γνωστό σημείο (x_0, y_0) 4. $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$ ή $x = x_1$ αν διέρχεται από δύο γνωστά σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2). Παρατηρείστε ότι ενώ η μορφή 1 περιλαμβάνει όλες τις ευθείες, στις υπόλοιπες μορφές πρέπει να γίνει ξεχωριστή έρευνα αν η ευθεία είναι κάθετη στον $x'x$ ↓ B. Γράφουμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ισχύουν, ώστε ένα σημείο το $M(x, y)$ του επιπέδου να ανήκει στην ε και τις «μεταφράζουμε» με τη βοήθεια των συντεταγμένων του M. Η εξίσωση που θα προκύψει είναι η εξίσωση της ε.

	ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ	ΜΕΘΟΔΟΙ
3.	Ασκήσεις που αφορούν στο να δείξουμε ότι τρία σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά. Παράδειγμα 3	Εκτός της απόδειξης με διανύσματα που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ($\overline{AB} // \overline{AG}$), μπορούμε να δείξουμε ότι το ένα από αυτά ανήκει στην ευθεία ε που ορίζουν τα άλλα δύο (δηλαδή ότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ε)
4.	Ασκήσεις που αφορούν στο αν μια εξίσωση μορφής $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ (1) παριστάνει ευθεία. Παράδειγμα 4	Η (1) παριστάνει ευθεία αν οι συντελεστές A και B δεν είναι ταυτόχρονα ίσοι με μηδέν. Αν πρόκειται για παραμετρική εξίσωση, αφού την φέρουμε στη μορφή $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$, αρκεί να βρούμε τις τιμές της παραμέτρου για τις οποίες η (1) δεν παριστάνει ευθεία (δηλαδή να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$) και να τις εξαιρέσουμε.
5.	Ασκήσεις που αφορούν στη σχετική θέση κάποιων ευθειών και στον προσδιορισμό του σημείου τομής τους, αν υπάρχει. Παράδειγμα 5	Αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0), αυτή αποτελεί το σημείο τομής τους.
6.	Ασκήσεις που αφορούν στον προσδιορισμό της γωνίας δύο ευθειών $\varepsilon_1: A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + \Gamma_1 = 0$ και $\varepsilon_2: A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + \Gamma_2 = 0$. Παράδειγμα 6	Δύο ευθείες σχηματίζουν πάντα δύο γωνίες, οι οποίες μεταξύ τους είναι παραπληρωματικές. Οι γωνίες αυτές είναι η μία ίση και η άλλη παραπληρωματική της γωνίας φ που σχηματίζουν τα αντίστοιχα διανύσματα $\vec{\delta}_1 = (B_1, -A_1)$ και $\vec{\delta}_2 = (B_2, -A_2)$ που είναι παράλληλα με αυτές. Το συνφ μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση $\text{συνφ} = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{ \vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 }$.
7.	Ασκήσεις που αφορούν στο να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση μορφής $Ax^2 + Bxy + \Gamma y^2 + \Delta x + E y + Z = 0$ (1) παριστάνει δύο ευθείες Παράδειγμα 7	Αρκεί να παραγοντοποιήσουμε το 1ο μέλος της, καταλήγοντας σε μορφή (παράγοντας 1)·(παράγοντας 2)=0. Στη συνέχεια οι σχέσεις (παράγοντας 1)=0 ή (παράγοντας 2)=0 θα μας δώσουν τις ζητούμενες ευθείες. Η παραγοντοποίηση ίσως επιτευχθεί με "συμπλήρωση τετραγώνου" και τη δημιουργία κατάλληλων ταυτοτήτων, καταλήγοντας σε μορφή $(a \pm \beta)^2 - (\gamma \pm \delta)^2 = 0$ και στη συνέχεια εφαρμογής της διαφοράς τετραγώνων που προκύπτει. Αν δυσκολευόμαστε να παραγοντοποιήσουμε το 1^ο μέλος της (1), μπορούμε να τη λύσουμε, θεωρώντας την ως δευτεροβάθμια ως προς έναν άγνωστο (το x ή το y). Οι λύσεις της θα μας δώσουν τις εξισώσεις των ζητούμενων ευθειών.

	ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ	ΜΕΘΟΔΟΙ
8.	Ασκήσεις που αφορούν στο να αποδείξουμε ότι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο (συντρέχουν) ή σε παραμετρική εξίσωση ευθειών (οικογένεια ευθειών) π.χ. $x+3+\lambda \cdot (x-2y+1)=0$ οι οποίες πρέπει να συντρέχουν. Παράδειγμα 8, 9	• Για τις τρεις ευθείες, αρκεί να προσδιορίσουμε το σημείο τομής δύο εξ αυτών και να αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την τρίτη εξίσωση. • Αν έχουμε παραμετρική οικογένεια ευθειών, θέτουμε στην παράμετρο δύο επιθυμητές τιμές, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που θα προκύψουν και στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου που προσδιορίσαμε επαληθεύουν την παραμετρική εξίσωση. Ένας άλλος τρόπος είναι να μετασχηματίσουμε την παραμετρική εξίσωση σε πολωνυμική με άγνωστο το λ και (αφού πρέπει το πολυώνυμο να είναι μηδέν για κάθε τιμή του λ) να απαιτήσουμε όλοι οι συντελεστές του πολωνύμου να είναι ίσοι με το μηδέν. Θα προκύψει ένα σύστημα με αγνώστους x και y, η λύση του οποίου θα μας δώσει τις συντεταγμένες του ζητούμενου σημείου.
9.	Ασκήσεις που αφορούν στην απόσταση σημείου από ευθεία και συγκεκριμένα: α) Απόσταση σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από ευθεία ε: $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ β) Απόσταση παραλλήλων ευθειών ε_1 και ε_2 γ) Μεσοπαράλληλη ε δύο παραλλήλων ε_1 και ε_2 Παράδειγμα 10	α) Η απόσταση αυτή υπολογίζεται από τη σχέση $d(M_0, \varepsilon) = \frac{ Ax_0 + By_0 + \Gamma }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ β) Θεωρούμε ένα συγκεκριμένο σημείο της μιας ευθείας (απλά βρίσκουμε ένα ζεύγος τιμών των x και y που να επαληθεύουν την εξίσωσή της) και υπολογίζουμε την απόστασή του από την άλλη, με τη βοήθεια του παραπάνω τύπου. Αποδεικνύεται ότι αν $\varepsilon_1: y=\lambda x+\beta_1$ και $\varepsilon_2: y=\lambda x+\beta_2$, τότε η απόστασή τους δίνεται από τη σχέση $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{ \beta_1 - \beta_2 }{\sqrt{1 + \lambda^2}}$ γ) 1ος τρόπος Η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα σημείο $N(x, y)$ να ανήκει στη μεσοπαράλληλη ε δύο παραλλήλων ε_1 και ε_2, είναι να ισαπέχει από αυτές, δηλαδή $d(N, \varepsilon_1) = d(N, \varepsilon_2)$ (1). Η (1) θα μας δώσει την εξίσωση της ε. 2ος τρόπος Θεωρούμε δύο συγκεκριμένα σημεία A και B με το A να ανήκει στην ε_1 και το B στην ε_2 (βρίσκουμε δικά μας σημεία ώστε οι συντεταγμένες τους να επαληθεύουν τις εξισώσεις των ε_1 και ε_2 αντίστοιχα). Βρίσκουμε το μέσον M του AB, το οποίο θα είναι σημείο της ζητούμενης ε. Με τη βοήθεια της παραλληλίας ($\varepsilon // \varepsilon_1 // \varepsilon_2$) και του M, προσδιορίζουμε την ε.

	ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ	ΜΕΘΟΔΟΙ
	δ) Σημείο ευθείας ε που ισαπέχει από δύο γνωστά σημεία A και B ε) Προσδιορισμός των εξισώσεων των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν δύο ευθείες $\varepsilon_1: A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + \Gamma_1 = 0$ και $\varepsilon_2: A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + \Gamma_2 = 0$. Παράδειγμα 10 Πώς θα βρούμε ποια από τις δ_1, δ_2 είναι διχοτόμος της οξείας και ποια της αμβλείας γωνίας που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_2;	Μπορούμε να δείξουμε (χρειάζεται απόδειξη) ότι η μεσοπαράλληλη των ευθειών $\varepsilon_1: A \cdot x + B \cdot y + \Gamma_1 = 0$ και $\varepsilon_2: A \cdot x + B \cdot y + \Gamma_2 = 0$ είναι η $\varepsilon: \mathbf{Ax + By + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} = 0}$ ΣΗΜΕΙΩΣΗ Όλες οι παράλληλες ευθείες έχουν εξισώσεις μορφής $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$, στις οποίες διαφέρει μόνο ο συντελεστής Γ. δ) Το σημείο αυτό είναι η τομή της ε με τη μεσοκάθετη του τμήματος AB ε) Θεωρούμε τυχαίο σημείο $M(x, y)$. Αυτό ανήκει σε κάποια από τις δύο διχοτόμους των δύο γωνιών που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_2 αν και μόνο αν $d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$. Αντικαθιστώντας τους τύπους στα δύο μέλη, θα προκύψουν δύο εξισώσεις (λόγω της απόλυτης τιμής που περιέχει ο τύπος της απόστασης) που είναι και οι εξισώσεις των ζητούμενων διχοτόμων. Μπορούμε να δείξουμε (δεν θεωρείται γνωστό) ότι οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν δύο ευθείες $\varepsilon_1: A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + \Gamma_1 = 0$ και $\varepsilon_2: A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + \Gamma_2 = 0$ δίνονται από τη σχέση: $\frac{A_1 x + B_1 y + \Gamma_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2 x + B_2 y + \Gamma_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$  Θεωρούμε σημείο A που ανήκει σε μία από τις δύο ευθείες (βλέπε σχήμα). Υπολογίζουμε τις αποστάσεις d_1, d_2 του A από τις δ_1 και δ_2 αντίστοιχα: • Αν $d_1 < d_2$ τότε η δ_1 είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας. • Αν $d_2 < d_1$ τότε η δ_2 είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας. • Αν $d_1 = d_2$ τότε οι ε_1 και ε_2 ήταν κάθετες.
10.	Ασκήσεις που αφορούν στο εμβαδόν τριγώνου ABΓ Παράδειγμα 11	Αντιμετωπίζονται με τη βοήθεια της σχέσης $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma}) $

	ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ	ΜΕΘΟΔΟΙ
11.	Ασκήσεις γεωμετρικών τόπων <u>Παράδειγμα 12, 13</u>	Ζητώντας τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου έχουμε γενικά δύο κατηγορίες ασκήσεων: α) Ασκήσεις στις οποίες δίνεται κάποια <u>ιδιότητα</u> για το <u>άγνωστο</u> σημείο M. Σε αυτές τις περιπτώσεις θεωρούμε $M(x, y)$ τυχαίο τέτοιο σημείο και εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα που δίνεται, προσπαθούμε να βρούμε μια εξίσωση μεταξύ των συντεταγμένων x και y του M, η οποία θα μας δώσει τον γεωμετρικό τόπο. β) Ασκήσεις κατά τις οποίες δίνεται το M με παραμετρικές συντεταγμένες: β₁) Αν η παράμετρος είναι μία, π.χ. $M(2\lambda-1, 5\lambda)$, τότε θέτουμε $x=2\lambda-1$ και $y=5\lambda$, κάνουμε απαλοιφή της παραμέτρου καταλήγοντας σε μια νέα εξίσωση μεταξύ των x και y, που είναι και η εξίσωση του γ.τ. του M. β₂) Αν οι παράμετροι είναι δύο, π.χ. $M(2\lambda-1, 3\mu)$, τότε θα μας δίνεται σίγουρα (άμεσα ή έμμεσα) και κάποια άλλη σχέση μεταξύ τους (π.χ. $2\lambda+\mu=1$). Χρησιμοποιώντας τη σχέση που δίνεται εκφράζουμε τη μια παράμετρο με τη βοήθεια της άλλης, οπότε καταλήγουμε σε συντεταγμένες του M με μια παράμετρο. Στη συνέχεια ακολουθούμε την πορεία που περιγράψαμε στην περίπτωση β_1).

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με πλευρές AB, ΑΓ και ΒΓ παράλληλες αντίστοιχα προς τα διανύσματα $\vec{\gamma} = (-2, 1)$, $\vec{\beta} = (1, 1)$ και $\vec{\alpha} = (3, 0)$. Να προσδιορίσετε:

- α) Το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB
- β) Το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ
- γ) Το συντελεστή διεύθυνσης του ύψους ΒΔ
- δ) Το συντελεστή διεύθυνσης του ύψους ΓΕ
- ε) Τη γωνία ω που σχηματίζει το ύψος ΒΔ με τον άξονα $x'x$

α) Αφού $AB // \vec{\gamma}$ θα είναι $\lambda_{AB} = \lambda_{\vec{\gamma}} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$.

β) Επειδή $BΓ // \vec{\alpha}$ και το $\vec{\alpha}$ είναι παράλληλο προς τον $x'x$, θα είναι $\lambda_{BΓ} = 0$.

γ) Είναι $BD \perp \vec{\beta}$. Άρα $\lambda_{BD} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{BD} \cdot \frac{1}{1} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{BD} = -1$.

δ) Είναι $GE \perp AB$ οπότε $\lambda_{GE} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{GE} \cdot -\frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{GE} = 2$.

ε) Είναι $\epsilon\phi\omega = \lambda_{BD} \Leftrightarrow \epsilon\phi\omega = -1 \Leftrightarrow \omega = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.

2. Το τρίγωνο του παραπάνω παραδείγματος 1. έχει στο καρτεσιανό επίπεδο κορυφή $A(3, 2)$. Να προσδιορίσετε μία συγκεκριμένη από τις θέσεις που μπορεί να πάρει το σημείο Β. Στη συνέχεια και με τη βοήθεια του σημείου Β που προσδιορίσατε να βρείτε:

- α) Τη θέση της κορυφής Γ
- β) Την εξίσωση του ύψους ΒΔ
- γ) Την εξίσωση της διαμέσου ΓΜ

Ο φορέας ϵ_{AB} του AB διέρχεται από το $A(3, 2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{1}{2}$ (από

το παράδ. 1.). Έτσι $\epsilon_{AB}: y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ (1).

Αφού $B \in \epsilon_{AB}$, οι συντεταγμένες του Β θα επαληθεύουν την (1). Έτσι για παράδειγμα μία θέση του Β θα προσδιοριστεί αν θέσουμε στην (1) όπου x το 1, οπότε

$y = -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{7}{2} = 3$. Άρα μία θέση του Β είναι το $(1, 3)$.

α) Η θέση της κορυφής Γ θα βρεθεί ως η λύση του συστήματος ϵ_{AG} και ϵ_{BG} .

Όμως η ϵ_{AG} διέρχεται από το $A(3, 2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\beta} = (1, 1)$ (βλέπε παράδ.1.), οπότε $\lambda_{AG} = \lambda_{\vec{\beta}} = 1$. Έτσι $\epsilon_{AG}: y - 2 = 1 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y = x - 1$.

Η ϵ_{BG} διέρχεται από το $B(1, 3)$ και είναι παράλληλη προς τον $x'x$ (βλέπε παράδ.1.). Άρα $\epsilon_{BG}: y = 3$.

Επομένως οι συντεταγμένες του Γ θα είναι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} y = 3 \\ y = x - 1 \end{cases}$. Λύνοντας

το σύστημα εύκολα προκύπτει ότι $\Gamma(4, 3)$.

β) Το ύψος ΒΔ διέρχεται από το Β(1, 3) και έχει $\lambda_{BD} = -1$ (βλέπε παράδ.1.).

Άρα $\varepsilon_{BD}: y-3 = -1 \cdot (x-1) \Leftrightarrow y = -x+4$.

γ) Το Μ είναι το μέσο του ΑΒ οπότε θα έχει συντεταγμένες $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$ και

$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$. Έτσι η ε_{GM} διέρχεται από το Γ(4,3) και το Μ(2, $\frac{5}{2}$). Άρα θα

$$\text{είναι: } \varepsilon_{GM}: y - y_G = \frac{y_M - y_G}{x_M - x_G} \cdot (x - x_G) \Leftrightarrow y - 3 = \frac{\frac{5}{2} - 3}{2 - 4} \cdot (x - 4) \Leftrightarrow y - 3 = \frac{1}{4} \cdot (x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + 2$$

3. Δίνονται τα σημεία Α(α, γ), Β(β, α) και Γ(γ, β) όπου α, β, γ πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί ανά δύο. Δείξτε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν ισχύει $a^2 + b^2 + \gamma^2 = a\beta + a\gamma + \beta\gamma$.

Είναι $\varepsilon_{AB}: y - a = \frac{\gamma - a}{a - \beta} (x - \beta)$ (1). Για να είναι συνευθειακά πρέπει και αρκεί $\Gamma \in \varepsilon_{AB}$

δηλαδή οι συντεταγμένες του Γ να επαληθεύουν την (1).

Άρα η ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι:

$$\beta - a = \frac{\gamma - a}{a - \beta} (\gamma - \beta) \Leftrightarrow -(a - \beta)^2 = (\gamma - a) \cdot (\gamma - \beta) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a\beta + a\gamma + \beta\gamma.$$

4. Δίνεται η εξίσωση $(x+3y) \cdot \mu + (x-y) \cdot \nu - 3x - y + 2\mu^2 = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε τις τιμές των παραμέτρων μ και ν ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία.

β) Στη συνέχεια να δείξετε ότι η ευθεία αυτή δεν είναι δυνατόν να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

α) Φέρνουμε την (1) στη μορφή $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ και έχουμε:

(1) $\Leftrightarrow (\mu + \nu - 3) \cdot x + (3\mu - \nu - 1) \cdot y + 2\mu^2 + 1 = 0$ (2). Επειδή δεν είναι πάντα εύκολο να βρούμε τις τιμές των μ, ν ώστε οι παραστάσεις $(\mu + \nu - 3)$ και $(3\mu - \nu - 1)$ να μην είναι ταυτόχρονα μηδέν, σύμφωνα με τη μεθοδολογία λέμε: **Για να μην παριστάνει η (2) ευθεία**

πρέπει και αρκεί $\begin{cases} \mu + \nu - 3 = 0 \\ 3\mu - \nu - 1 = 0 \end{cases}$. Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε εύκολα ως λύση

την $(\mu, \nu) = (1, 2)$. Άρα η (1) παριστάνει ευθεία αν και μόνο αν τα μ και ν δεν παίρνουν ταυτόχρονα τις τιμές 1 και 2 αντίστοιχα.

β) Για να διέρχεται η παραπάνω ευθεία από την αρχή των αξόνων, παρατηρώντας τη μορφή (2), αντιλαμβανόμαστε ότι πρέπει και αρκεί $2\mu^2 + 1 = 0$ (δηλαδή το Γ της να είναι 0). Η τελευταία αυτή σχέση είναι όμως αδύνατη. Άρα η ευθεία δεν είναι δυνατόν να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

5. Δίνονται οι εξισώσεις $(\lambda - 1) \cdot x - y - 4\lambda = 0$ και $\lambda x - 2y - 4 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αυτές παριστάνουν ευθείες για κάθε τιμή του λ.

β) Να προσδιοριστεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι παραπάνω ευθείες να είναι παράλληλες.

α) Οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν ευθείες για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, καθώς οι συντελεστές του γ είναι μη μηδενικοί (-1 και -2 αντίστοιχα).

β) 1ος τρόπος: Για να είναι παράλληλες οι ευθείες οι ευθείες πρέπει τα διανύσματα $\vec{a} = (1, \lambda - 1)$ και $\vec{\beta} = (2, \lambda)$ που είναι παράλληλα με αυτές αντίστοιχα, να είναι συγγραμμικά, δηλαδή $\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$. Στη συνέχεια είναι δεκτές εκείνες οι τιμές του λ για τις οποίες οι ευθείες δεν ταυτίζονται.

$$\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 \cdot (\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Για $\lambda = 2$ οι ευθείες αποκτούν εξισώσεις $x - y - 8 = 0$ και $2x - 2y - 4 = 0$, οι οποίες προφανώς δεν ταυτίζονται. Άρα $\lambda = 2$

2ος τρόπος: Για να είναι οι ευθείες παράλληλες πρέπει και αρκεί το σύστημα

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x - y - 4\lambda = 0 \\ \lambda x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \text{ να είναι αδύνατο. Έχουμε:}$$

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x - y - 4\lambda = 0 \\ \lambda x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda - 1)x - y = 4\lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda - 1) + \lambda = -\lambda + 2. \text{ Για να είναι το σύστημα αδύνατο πρέπει (δεν αρκεί}$$

όμως) $D = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

Για $\lambda = 2$ το σύστημα γράφεται ισοδύναμα $\begin{cases} x - y = 8 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$ που είναι πράγματι αδύνατο. Άρα $\lambda = 2$.

6. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις $\varepsilon_1: \lambda x - y + \beta = 0$ και $\varepsilon_2: (\lambda - 1)x - (\lambda + 1)y + \alpha(\lambda + 1) = 0$. με $\lambda \neq -1$. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν.

Ένα διάνυσμα παράλληλο προς την ε_1 είναι το $\vec{\delta}_1 = (-1, -\lambda)$ και ένα διάνυσμα παράλληλο προς την ε_2 είναι το $\vec{\delta}_2 = (-(\lambda + 1), -(\lambda - 1))$. Αν φ η γωνία των $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$

$$\begin{aligned} \text{είναι: } \cos \varphi &= \frac{|\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2|}{|\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2|} = \frac{\lambda + 1 + \lambda \cdot (\lambda - 1)}{\sqrt{1 + \lambda^2} \cdot \sqrt{(\lambda + 1)^2 + (\lambda - 1)^2}} = \frac{\lambda^2 + 1}{\sqrt{1 + \lambda^2} \cdot \sqrt{2 \cdot (\lambda^2 + 1)}} = \\ &= \frac{\lambda^2 + 1}{\sqrt{1 + \lambda^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{(\lambda^2 + 1)}} = \frac{\cancel{\lambda^2 + 1}}{\sqrt{2} \cdot (\cancel{\lambda^2 + 1})} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Άρα $\varphi = 45^\circ$, οπότε η γωνία των ε_1 και ε_2 είναι 45° ή $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Έτσι η οξεία γωνία των ε_1 και ε_2 είναι 45° .

7. Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^2 - 8yx + 4y - 1 = 0$ (1) παριστάνει δύο ευθείες.

Η κεντρική ιδέα, όπως αναφέραμε στη μεθοδολογία, είναι να παραγοντοποιήσουμε το 1ο μέλος της (1). Εδώ θα ακολουθήσουμε δύο μεθόδους που, αν και δεν είναι εμφανές, ουσιαστικά παραγοντοποιούν το 1ο μέλος της (1).

1ος τρόπος: Προσθαφαιρούμε στα δύο μέλη κατάλληλες ποσότητες, ώστε να γίνει "συμπλήρωση τετραγώνου". Έτσι:

$$4x^2 - 8yx + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 8yx + 4y^2 + 4y - 1 = 4y^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 8yx + 4y^2 = 4y^2 - 4y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x-2y)^2=(2y-1)^2 \Leftrightarrow 2x-2y=\pm(2y-1) \Leftrightarrow 2x-2y=2y-1 \text{ ή } 2x-2y=-2y+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-4y+1=0 \text{ ή } x=\frac{1}{2}$$

2ος τρόπος: Θεωρώντας την εξίσωση αυτή ως **δευτεροβάθμια ως προς x** έχουμε:

$$\Delta=(-8y)^2-4\cdot 4\cdot(4y-1)=64y^2-64y+16=16\cdot(4y^2-4y+1)=16\cdot(2y-1)^2 \geq 0$$

$$\text{Άρα: } x = \frac{8y \pm \sqrt{16(2y-1)^2}}{8} = \frac{8y \pm 4(2y-1)}{8} = \begin{cases} \frac{16y-4}{8} \\ \text{ή} \\ \frac{4}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2y - \frac{1}{2} \\ \text{ή} \\ \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Έτσι η δοσμένη εξίσωση παριστάνει τις ευθείες $2x-4y+1=0$ και $x=\frac{1}{2}$.

8. Να προσδιοριστεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x+y-4=0$, $\varepsilon_2: 5x-2y+3=0$ και $\varepsilon_3: ax+3y-2=0$ να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 θα προσδιοριστεί ως λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ 5x-2y+3=0 \end{cases} \text{ η οποία είναι } (x,y) = \left(\frac{5}{9}, \frac{26}{9}\right). \text{ Για να συντρέχουν οι } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ και } \varepsilon_3 \text{ πρέπει}$$

$$\text{και αρκεί το σημείο αυτό να ανήκει και στην } \varepsilon_3 \text{ δηλαδή } a \cdot \frac{5}{9} + 3 \cdot \frac{26}{9} - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5a+78-18=0 \Leftrightarrow a=-12.$$

9. Δείξτε ότι όλες οι ευθείες μορφής $x+ay+2a=0$ (1), $a \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο για κάθε τιμή του a .

1ος τρόπος: Για να βρούμε δύο τέτοιες ευθείες αρκεί να θέσουμε στο a δύο επιθυμητές τιμές. Έτσι:

Για $a=0$ έχουμε την ευθεία $\varepsilon_1: x=0$ και για $a=1$ έχουμε την ευθεία $\varepsilon_2: x+y+2=0$.

Το σύστημά τους δίνει ως λύση $(0, -2)$ που αποτελεί και το σημείο τομής τους.

Θέτοντας στην (1) όπου x το 0 και y το -2 έχουμε ότι: $0+a \cdot (-2)+2a=0$ αληθές.

Άρα όλες οι ευθείες της μορφής (1) συντρέχουν στο $(0, -2)$.

2ος τρόπος: Φέρνουμε την (1) σε μορφή πολυωνύμου με μεταβλητή την παράμετρο.

Έτσι: $(1) \Leftrightarrow (y+2) \cdot a + x = 0$

Για να είναι το πολυώνυμο $(y+2) \cdot a + x$ ίσο με 0 για κάθε τιμή της μεταβλητής a , πρέπει

$$\text{και αρκεί } \begin{cases} y+2=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=0 \end{cases}. \text{ Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το } (0, -2).$$

10. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B(1, 1)$, $\Gamma(2, 2)$ και το σημείο $A(x_0, y_0)$, $x_0 < y_0$, να είναι σημείο της ευθείας $\varepsilon: (\sqrt{2}-1)x + y - (\sqrt{2}+2) = 0$ (1) και να απέχει από τη $B\Gamma$ απόσταση $\sqrt{2}$.

α) Να προσδιορίσετε το A

β) Να δείξετε ότι μια από τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν οι AB και $B\Gamma$ είναι παράλληλη στην ε

γ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των δύο παραλλήλων του προηγούμενου ερωτήματος.

δ) Να βρείτε σημείο του $x'y'$ που να ισαπέχει από τα Β και Γ.

α) Η ΒΓ θα έχει εξίσωση ϵ_{BG} : $y - y_B = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} \cdot (x - x_B) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{2-1}{2-1} \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x - y = 0.$$

Αφού $d(A, \epsilon_{BG}) = \sqrt{2}$ θα είναι

$$\frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |x_0 - y_0| = 2 \stackrel{x_0 < y_0}{\Leftrightarrow} y_0 - x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = y_0 - 2 \quad (2).$$

Όμως το Α είναι σημείο της ϵ οπότε οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την (1).

Έτσι: $(1) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} (\sqrt{2} - 1) \cdot (y_0 - 2) + y_0 - (\sqrt{2} + 2) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y_0 = 3$ οπότε από (2) έχουμε $x_0 = 1$.

Άρα το Α έχει συντεταγμένες (1,3).

β) Σύμφωνα με τη μεθοδολογία θεωρούμε τυχαίο σημείο $M(x,y)$. Αυτό ανήκει σε κάποια από τις δύο διχοτόμους των δύο γωνιών που σχηματίζουν οι ϵ_{AB} και ϵ_{BG} αν και μόνο αν $d(M, \epsilon_{AB}) = d(M, \epsilon_{BG})$.

Είναι ϵ_{AB} : $x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ και ϵ_{BG} : $x - y = 0$, οπότε:

$$d(M, \epsilon_{AB}) = d(M, \epsilon_{BG}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x - y|}{\sqrt{2}} = \frac{|x|}{1} \Leftrightarrow |x - y| = \sqrt{2} \cdot |x| \Leftrightarrow x - y = \sqrt{2} \cdot x \quad \text{ή} \quad x - y = -\sqrt{2} \cdot x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{2}) \cdot x - y = 0 \quad \text{ή} \quad (1 + \sqrt{2}) \cdot x - y = 0.$$

Από αυτές η πρώτη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{1}{1 - \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \lambda_\epsilon$. Άρα η

διχοτόμος που είναι παράλληλη στην ϵ είναι η ϵ_1 : $(1 - \sqrt{2}) \cdot x - y = 0$.

γ) Ένα σημείο $N(x,y)$ ανήκει στη μεσοπαράλληλη των ϵ και ϵ_1 αν και μόνο αν

$$d(N, \epsilon) = d(N, \epsilon_1) \Leftrightarrow \frac{|(\sqrt{2} - 1)x + y - (\sqrt{2} + 2)|}{\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 + 1^2}} = \frac{|(1 - \sqrt{2})x - y|}{\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(\sqrt{2} - 1)x + y - (\sqrt{2} + 2)| = |(1 - \sqrt{2})x - y| \Leftrightarrow |(\sqrt{2} - 1)x + y - (\sqrt{2} + 2)| = -[(\sqrt{2} - 1)x + y] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(\sqrt{2} - 1)x + y - (\sqrt{2} + 2)| = (\sqrt{2} - 1)x + y \Leftrightarrow (\sqrt{2} - 1)x + y - (\sqrt{2} + 2) = (\sqrt{2} - 1)x + y \quad \text{ή}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} - 1)x + y - (\sqrt{2} + 2) = -[(\sqrt{2} - 1)x + y].$$

Από αυτές η πρώτη είναι αδύνατη αφού καταλήγει σε $\sqrt{2} + 2 = 0$. Από τη δεύτερη

έχουμε: $2(\sqrt{2} - 1)x + 2y - (\sqrt{2} + 2) = 0$ που είναι και η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ϵ και ϵ_1 .

δ) Έστω $K(x_1, 0)$ σημείο του $x'y'$ που ισαπέχει από τα Β και Γ. Τότε το Κ είναι το σημείο τομής του $x'y'$ και της μεσοκάθετης του ΒΓ.

Είναι ε_{BF} : $y=x$ και το μέσον Λ του $B\Gamma$ θα έχει συντεταγμένες

$$x_{\Lambda} = \frac{x_B + x_{\Gamma}}{2} = \frac{3}{2} \text{ και } y_{\Lambda} = \frac{y_B + y_{\Gamma}}{2} = \frac{3}{2}. \text{ Η μεσοκάθετη } \varepsilon_2 \text{ του } B\Gamma \text{ θα έχει συντελεστή}$$

διεύθυνσης -1 (αφού $\lambda_{BF}=1$) και θα διέρχεται από το $\Lambda(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

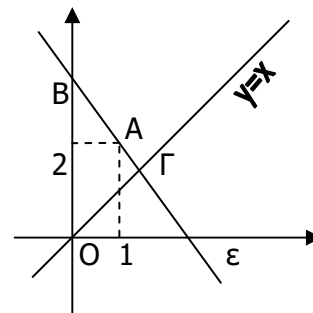
$$\text{Άρα } \varepsilon_2: y - \frac{3}{2} = -(x - \frac{3}{2}) \Leftrightarrow y = -x + 3.$$

Το K ανήκει στην ε_2 αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ε_2 , οπότε $0 = -x_1 + 3 \Leftrightarrow x_1 = 3$. Άρα το K είναι το $(3, 0)$.

11. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$, έχει ακέραιο συντελεστή διεύθυνσης και ορίζει με τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $y=x$ τρίγωνο εμβαδού $\frac{9}{4}$ τετραγωνικών μονάδων.

Οι ευθείες που διέρχονται από το $A(1, 2)$ θα είναι της μορφής $y-2=\lambda \cdot (x-1)$ ή η κατακόρυφη $x=1$ (*). Άρα η ζητούμενη ευθεία ε θα έχει ως εξίσωση κάποια από τις δύο παραπάνω. Η δεύτερη όμως αποκλείεται, γιατί αν η ευθεία είχε αυτή τη μορφή θα ήταν παράλληλη προς τον $y'y$, οπότε δεν θα σχημάτιζε τρίγωνο με αυτόν. Άρα $\varepsilon: y-2=\lambda \cdot (x-1)$ (1).

Η ε τέμνει τον $y'y$ σε σημείο $B(0, y_0)$ του οποίου οι συντεταγμένες θα επαληθεύουν την (1), οπότε $y_0 - 2 = -\lambda \Leftrightarrow y_0 = 2 - \lambda$.



Επίσης οι ευθείες $\varepsilon_1: y=x$ και $y'y$ τέμνονται στο σημείο $O(0, 0)$ και οι ευθείες ε και ε_1 τέμνονται σε σημείο Γ που οι συντεταγμένες του είναι λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y-2=\lambda \cdot (x-1) \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda x+2-\lambda \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda x+2-\lambda \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x=2-\lambda \\ y=x \end{cases}.$$

Αν $\lambda=1$ η πρώτη εξίσωση οδηγεί σε $0=1$, αδύνατο. Άρα $\lambda \neq 1$ οπότε από την πρώτη εξίσωση έχουμε $x = \frac{2-\lambda}{1-\lambda}$ και στη συνέχεια από τη δεύτερη $y = \frac{2-\lambda}{1-\lambda}$.

Έτσι $\Gamma(\frac{2-\lambda}{1-\lambda}, \frac{2-\lambda}{1-\lambda})$. Άρα το σχηματιζόμενο τρίγωνο $OB\Gamma$ για να έχει εμβαδόν $\frac{9}{4}$ πρέπει

$$\text{και αρκεί: } \frac{1}{2} |\det(\overline{OB}, \overline{O\Gamma})| = \frac{9}{4} \Leftrightarrow |\det(\overline{OB}, \overline{O\Gamma})| = \frac{9}{2} \quad (2).$$

Είναι $\overline{OB} = (0, 2-\lambda)$ και $\overline{O\Gamma} = (\frac{2-\lambda}{1-\lambda}, \frac{2-\lambda}{1-\lambda})$. Άρα

$$(2) \Leftrightarrow \left| \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda \\ \frac{2-\lambda}{1-\lambda} & \frac{2-\lambda}{1-\lambda} \end{vmatrix} \right| = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \left| -\frac{(2-\lambda)^2}{1-\lambda} \right| = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{(2-\lambda)^2}{1-\lambda} = \pm \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{(2-\lambda)^2}{1-\lambda} = \frac{9}{2}$$

(*) Προσοχή χρειάζεται στο γεγονός ότι θα πρέπει να εξετάσουμε και τις δύο περιπτώσεις, γιατί αλλιώς πιθανόν να χάσουμε κάποια λύση.

$$\text{ή } \frac{(2-\lambda)^2}{1-\lambda} = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \text{ ή } 2\lambda^2 - 17\lambda + 17 = 0.$$

Από αυτές μόνο η πρώτη έχει ακέραια ρίζα, τη $\lambda = -1$.

Έτσι η (1) γίνεται: $\varepsilon: y-2 = -1 \cdot (x-1) \Leftrightarrow y = -x+3$ που είναι και η ζητούμενη.

12. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου αν:

α) Σχηματίζουν με τα σημεία $A(2, 0)$ και $B(-1, 1)$ τρίγωνο εμβαδού 12 τ.μ.

β) $M(3\lambda-2, \lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

γ) $M(3\lambda-2, \lambda+1)$, $\lambda \geq 0$

α) Έστω $M(x, y)$ σημείο του ζητούμενου γ.τ.

Τότε $\overline{MA} = (2-x, -y)$ και $\overline{MB} = (-1-x, 1-y)$.

$$\text{Όμως } (MAB) = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{2} |\det(\overline{MA}, \overline{MB})| = 12 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-x & -y \\ -1-x & 1-y \end{vmatrix} = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(2-x) \cdot (1-y) + y \cdot (-1-x)| = 24 \Leftrightarrow |2-2y-x+xy-y-xy| = 24 \Leftrightarrow |2-x-3y| = 24 \Leftrightarrow 2-x-3y=24 \text{ ή } 2-x-3y=-24 \Leftrightarrow x+3y+22=0 \text{ ή } x+3y-26=0.$$

Άρα ο γ.τ. του M είναι οι παραπάνω δύο (παράλληλες) ευθείες.

β) Έστω $x=3\lambda-2$ και $y=\lambda+1$. Έχουμε κατά σειρά:

$$\begin{cases} x=3\lambda-2 \\ y=\lambda+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3\lambda-2 \\ \lambda=y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \cdot (y-1)-2 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-5 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Άρα ο γ.τ. του M είναι η ευθεία $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

(*) Αφού $y=\lambda+1$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, θα είναι $y \in \mathbb{R}$ και αφού $x=3y-5$, θα είναι και $x \in \mathbb{R}$.

γ) Το ερώτημα αυτό αντιμετωπίζεται όπως το προηγούμενο με τη διαφορά ότι έχοντας $\lambda \geq 0$ θα είναι $3\lambda \geq 0 \Leftrightarrow 3\lambda-2 \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -2$. Άρα ο γ.τ. δεν είναι ολόκληρη η ευθεία

$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$, αλλά τα σημεία (x, y) εκείνα για τα οποία είναι $x \geq -2$, δηλαδή η ημιευθεία

$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ με $x \geq -2$.

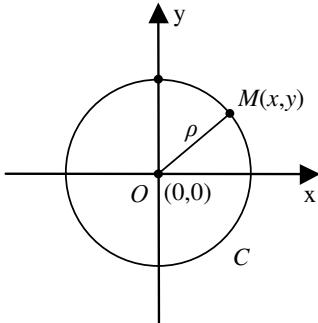
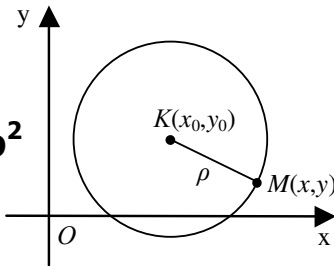
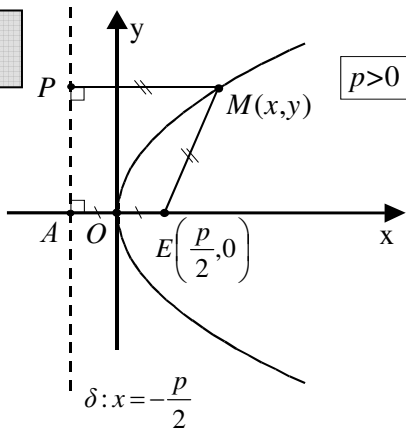
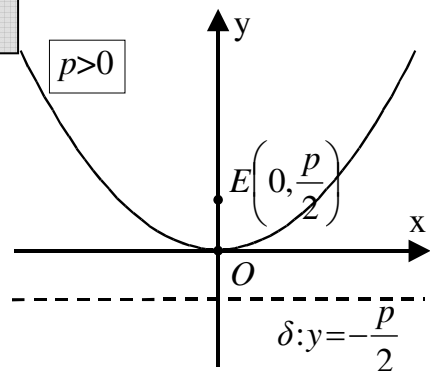
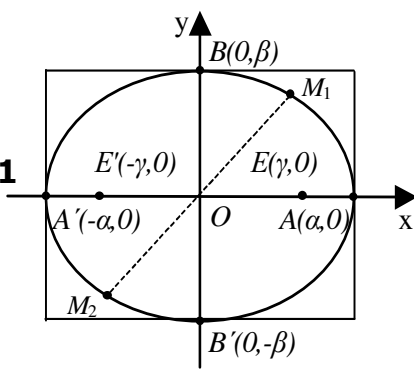
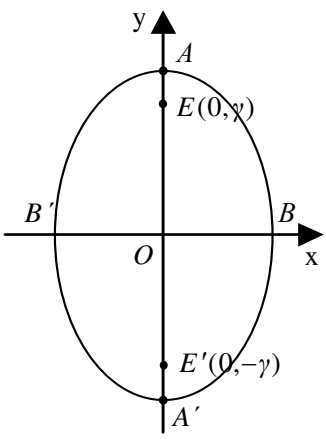
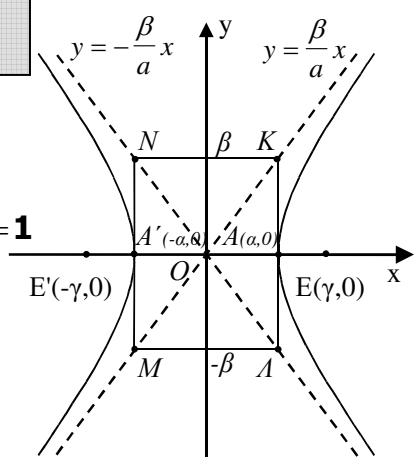
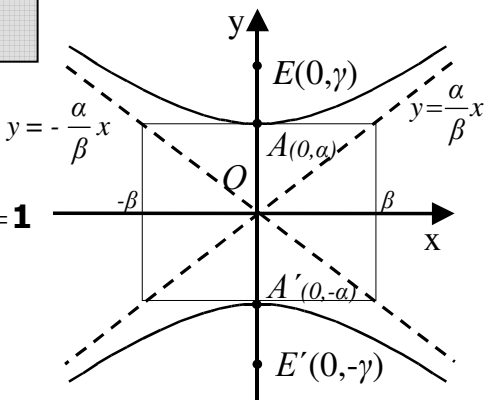
13. Να βρείτε την ευθεία στην οποία κινείται σημείο M του επιπέδου αν $M(2\lambda, 3\mu+1)$ με $\lambda+\mu=2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\text{Έστω } x=2\lambda \text{ και } y=3\mu+1. \text{ Έχουμε κατά σειρά: } \begin{cases} x=2\lambda \\ y=3\mu+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x}{2} \\ \mu = \frac{y-1}{3} \end{cases}. \text{ Τις τιμές των } \lambda$$

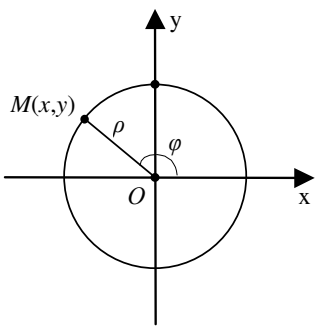
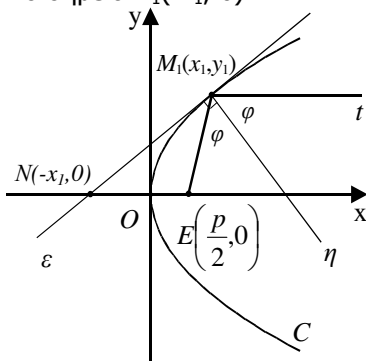
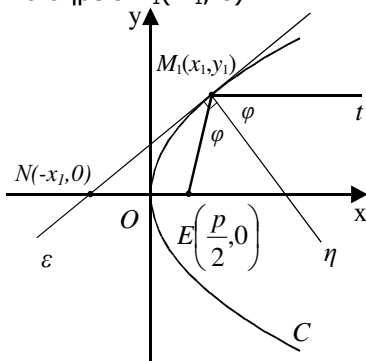
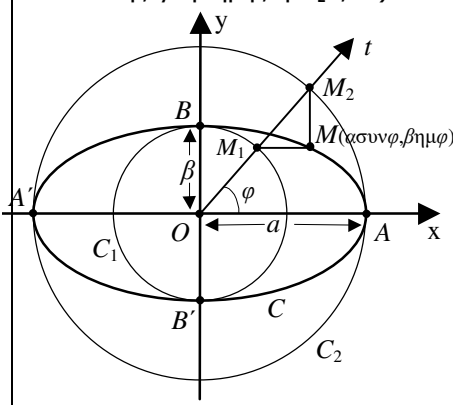
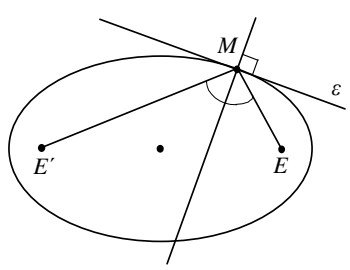
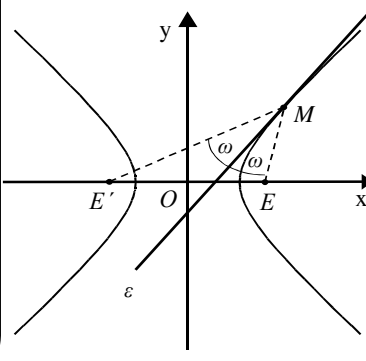
και μ που προσδιορίσαμε τις αντικαθιστούμε στη δοσμένη σχέση και έχουμε

$$\frac{x}{2} + \frac{y-1}{3} = 2 \Leftrightarrow 3x + 2y - 2 = 12 \Leftrightarrow 3x + 2y = 14.$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση είναι η εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία κινείται το M .

ΕΞΙΣΩΣΗ	
ΚΥΚΛΟΣ	ΣΧΗΜΑ 1 $x^2 + y^2 = \rho^2$ 
	ΣΧΗΜΑ 2 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ 
ΠΑΡΑΒΟΛΗ	ΣΧΗΜΑ 3 $y^2 = 2px$ 
	ΣΧΗΜΑ 4 $x^2 = 2py$ 
ΕΛΛΕΙΨΗ	ΣΧΗΜΑ 5 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 
	ΣΧΗΜΑ 6 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ 
ΥΠΕΡΒΟΛΗ	ΣΧΗΜΑ 7 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 
	ΣΧΗΜΑ 8 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 

	ΣΤΟΙΧΕΙΑ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ	ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ
ΚΥΚΛΟΣ	- Κέντρο Κ - Ακτίνα ρ	$\rho > 0$	Είναι ο γ.τ. των σημείων του επιπέδου που απέχουν από σταθερό σημείο Κ σταθερή απόσταση ρ	- Κέντρο συμμετρίας το κέντρο Κ του κύκλου. - Άξονας συμμετρίας κάθε διάμετρός του.
ΠΑΡΑΒΟΛΗ	- Παράμετρος ρ παραβολής - Εστία Ε - Διευθετούσα δ - Κορυφή Ο - Άξονας παραβολής η κάθετη από το Ε στη δ	- ρ ομόσημο του x (σχήμα 3) - ρ ομόσημο του y (σχήμα 4)	Είναι ο γ.τ. των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από το σημείο Ε και την ευθεία δ	Άξονας συμμετρίας ο άξονας της παραβολής
ΕΛΛΕΙΨΗ	- Εστίες Ε', Ε - Κέντρο έλλειψης Ο - Μεγάλος άξονας $A'A=2a$ - Μικρός άξονας $B'B=2b$ - Κορυφές Α', Α, Β', Β - Διάμετρος(*) M_1M_2 με $2b \leq (M_1M_2) \leq 2a$ - Εκκεντρότητα ε με $0 \leq \varepsilon = \frac{b}{a} < 1$ - Όμοιες ελλείψεις λέγονται αυτές που έχουν ίδιο ε	$a, b > 0, \gamma \geq 0$ $a \geq b, a > \gamma$ $b = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$ $E'E = 2\gamma$ εστιακή απόσταση $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ όπου ε η εκκεντρότητα - Αν $\varepsilon \rightarrow 0$ τότε έλλειψη $\rightarrow$ κύκλος, ενώ αν $\varepsilon \rightarrow 1$ τότε έλλειψη $\rightarrow$ ευθ. τμήμα	Είναι ο γ.τ. των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα Ε', Ε είναι σταθερό και μεγαλύτερο του Ε'Ε (ίσο με 2a) (*) Γενικά διάμετρος μιας κωνικής τομής ονομάζεται η ευθεία ή το ευθ. τμήμα (ανάλογα την κωνική τομή) που διέρχεται από τα μέσα των παράλληλων προς μια διεύθυνση χορδών της κωνικής τομής.	- Κέντρο συμμετρίας το κέντρο Ο της έλλειψης - Άξονες συμμετρίας οι ευθείες του μικρού και του μεγάλου άξονα Άρα αν ένα σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη, τότε θα ανήκουν και τα $M_2(-x_1, -y_1)$, $M_3(-x_1, y_1)$ και $M_4(x_1, -y_1)$
ΥΠΕΡΒΟΛΗ	- Εστίες Ε', Ε - Κέντρο υπερβολής Ο - Κορυφές Α, Α' - ΚΛΜΝ ορθογώνιο βάσης - Ασύμπτωτες ευθείες (βλέπε σχήματα 7,8) - Εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{b}{a} > 1$	$a, b, \gamma > 0$ $a < \gamma, b < \gamma$ $b = \sqrt{\gamma^2 - a^2}$ $E'E = 2\gamma$ εστιακή απόσταση $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ - Αν $a=b$ τότε έχουμε την ισοσκελή υπερβολή $x^2 - y^2 = a^2$ με $\varepsilon = \sqrt{2}$ - Όσο $\varepsilon \rightarrow 1$ τόσο πιο «κλειστή» είναι η υπερβολή	Είναι ο γ.τ. των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα Ε', Ε είναι σταθερή και μικρότερη του Ε'Ε (ίση με 2a)	- Κέντρο συμμετρίας το κέντρο Ο της υπερβολής - Άξονες συμμετρίας είναι η ευθεία των εστίων και η μεσοκάθετη του Ε'Ε

	ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΤΟ $M_1(x_1, y_1)$	ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	ΆΛΛΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
ΚΥΚΛΟΣ	- Για το σχήμα 1 που ο κύκλος έχει κέντρο το $O(0,0)$ η εφαπτομένη είναι $\varepsilon: x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$ - Για το σχήμα 2 αποδεικνύεται (δεν χρησιμοποιείται χωρίς απόδειξη) ότι η εφαπτομένη είναι $\varepsilon: (x-x_0) \cdot (x_1-x_0) + (y-y_0) \cdot (y_1-y_0) = \rho^2$	Για το σχήμα 1: $x = \rho \cdot \cos \varphi, y = \rho \cdot \sin \varphi, \varphi \in [0, 2\pi)$ 	<u>Ανακλαστική</u> Η κάθετη στην εφαπτομένη παραβολής στο σημείο επαφής διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία M_1E και η M_1t που είναι ομόρροπη της OE. Για να φέρουμε την εφαπτομένη στο $M_1(x_1, y_1)$ αρκεί να ενώσουμε το M_1 με το σημείο $N_1(-x_1, 0)$ 
ΠΑΡΑΒΟΛΗ	- Για το σχήμα 3 είναι $\varepsilon: y \cdot y_1 = p(x+x_1)$ - Για το σχήμα 4 είναι $\varepsilon: x \cdot x_1 = p(y+y_1)$		
ΕΛΛΕΙΨΗ	- Για το σχήμα 5 είναι $\varepsilon: \frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1$ - Για το σχήμα 6 είναι $\varepsilon: \frac{y \cdot y_1}{a^2} + \frac{x \cdot x_1}{b^2} = 1$	Για το σχήμα 5: $x = a \cdot \cos \varphi, y = b \cdot \sin \varphi, \varphi \in [0, 2\pi)$ 	<u>Ανακλαστική</u> Η κάθετη ευθεία στην εφαπτομένη ε έλλειψης στο σημείο επαφής M διχοτομεί την $E'ME$ 
ΥΠΕΡΒΟΛΗ	- Για το σχήμα 7 είναι $\varepsilon: \frac{x \cdot x_1}{a^2} - \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1$ - Για το σχήμα 8 είναι $\varepsilon: \frac{y \cdot y_1}{a^2} - \frac{x \cdot x_1}{b^2} = 1$	ΓΕΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ Κάθε εξίσωση μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ (1) με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο κέντρου $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ και ακτίνας $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$. Αποδεικνύεται (δεν χρησιμοποιείται χωρίς απόδειξη) ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου της μορφής (1) στο $M_1(x_1, y_1)$ είναι η $x_1 \cdot x + y_1 \cdot y + \frac{A}{2} \cdot (x_1 + x) + \frac{B}{2} \cdot (y_1 + y) + \Gamma = 0$ Μια εξίσωση μορφής $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$ μπορεί με κατάλληλους μετασχηματισμούς να καταλήξει σε εξίσωση κωνικής τομής.	<u>Ανακλαστική</u> Η εφαπτομένη ε σε σημείο M διχοτομεί την $E'ME$ 

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Επειδή υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία ασκήσεων στις κωνικές τομές, οι οποίες αντιμετωπίζονται κατά περίπτωση, θα περιοριστούμε να αναφέρουμε μερικές χρήσιμες επισημάνσεις για την αντιμετώπιση των ασκήσεων στις κωνικές τομές:

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΕ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ	
1.	Τις περισσότερες φορές, για να αντιμετωπίσουμε σωστά μια άσκηση, είναι σχεδόν απαραίτητη η κατασκευή ενός κατάλληλου (έστω και πρόχειρου) σχήματος .
2.	Πολλές φορές είναι χρήσιμο να αξιοποιούμε με τη βοήθεια της γεωμετρίας μια ιδιότητα (I) που δίνεται, μεταφράζοντάς την ισοδύναμα και με άλλους τρόπους.
3.	Μια ευθεία ε είναι εφαπτομένη μιας κωνικής τομής C αν και μόνο αν το σύστημα των εξισώσεων των ε και C έχει διπλή λύση . Για παράδειγμα στην προσπάθεια να βρούμε τα κοινά σημεία του κύκλου $x^2+y^2=10$ και της ευθείας $y=-3x+10$, θα οδηγηθούμε να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ y=-3x+10 \end{cases}$. Κατά την πορεία της λύσης θα χρειαστεί να λύσουμε την εξίσωση $10 \cdot (x^2-6x+9)=0$, η οποία έχει ως διπλή λύση το 3 και τελικά θα διαπιστώσουμε ότι το σύστημα έχει διπλή λύση την $(3, 1)$, οπότε πρόκειται για επαφή κύκλου και ευθείας και μάλιστα το $(3, 1)$ είναι το σημείο επαφής.
4.	Πολλές φορές καταλήγουμε σε παραμετρική δευτεροβάθμια (και πολύπλοκη) εξίσωση, μορφής $a \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$, της οποίας δεν ζητάμε τις ρίζες της x_1 και x_2 , αλλά μας αρκεί το άθροισμα x_1+x_2 ή το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ ή η διαφορά x_1-x_2 των ριζών αυτών. Αντί να τη λύσουμε με τη χρήση δύσκολων αλγεβρικών λογισμών, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις παραπάνω παραστάσεις των ριζών με τη βοήθεια των τύπων του Vieta . Έτσι $x_1+x_2=S=-\frac{\beta}{a}$, $x_1 \cdot x_2=P=\frac{\gamma}{a}$, ενώ για τη διαφορά x_1-x_2 εργαζόμαστε με τη βοήθεια της ταυτότητας $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1 \cdot x_2$, δηλαδή $(x_1-x_2)^2=S^2-4P$.
5.	Όταν ζητάμε να βρούμε εξίσωση γραμμής που διέρχεται από το μέσο $M(x_0, y_0)$ χορδής με άκρα $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ μιας κωνικής τομής και η οποία ικανοποιεί κάποια ιδιότητα (I) , τότε ένας απλός τρόπος εργασίας είναι ο εξής: – Γράφουμε τις δύο ισότητες που προκύπτουν από την εξίσωση της κωνικής τομής επειδή τα A και B ανήκουν στην κωνική τομή. – Αφαιρούμε κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες και καταλήγουμε σε μια νέα ισότητα στην οποία προκύπτουν διαφορές τετραγώνων μορφής $x_1^2 - x_2^2$ ή $y_1^2 - y_2^2$. – Παραγοντοποιούμε αυτές τις διαφορές τετραγώνων και διαιρούμε τα μέλη της ισότητας που προέκυψε με x_1-x_2, παίρνοντας περιπτώσεις, αν χρειάζεται, για την τιμή του x_1-x_2 (ίσο ή διάφορο του μηδενός). – Στη συνέχεια γνωρίζοντας ότι $x_1+x_2=2x_0$, $y_1+y_2=2y_0$ και χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα (I), προκύπτει η ζητούμενη εξίσωση.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τυχαία χορδή ΒΓ ο φορέας της οποίας διέρχεται από το σημείο Α(-6, 1) κύκλου C: $x^2 + y^2 = 25$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου της Μ(x_0, y_0).

Λύση

Αναζητούμε μια εξίσωση με μεταβλητές x_0 και y_0 , τέτοια ώστε να ικανοποιείται από όλα τα (x_0, y_0) και μόνο από αυτά.

Αφού $B, \Gamma \in C$ είναι $\left. \begin{matrix} x_1^2 + y_1^2 = 25 \\ x_2^2 + y_2^2 = 25 \end{matrix} \right\}$ Με αφαίρεση

κατά μέλη έχουμε $x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2) + (y_1 - y_2) \cdot (y_1 + y_2) = 0$$

Αν $x_1 = x_2$ τότε η ΒΓ θα ήταν κατακόρυφη οπότε δεν θα διερχόταν από το Α καθώς το Α βρίσκεται εκτός του κύκλου (*), πράγμα άτοπο. Άρα $x_1 \neq x_2$. Διαιρούμε τα μέλη της παραπάνω

ισότητας με $x_1 - x_2$ και έχουμε: $(x_1 + x_2) + \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot (y_1 + y_2) = 0$ (1)

Όμως $x_1 + x_2 = 2x_0$, $y_1 + y_2 = 2y_0$ και $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \lambda_{B\Gamma} = \lambda_{AM} = \frac{y_0 - 1}{x_0 + 6}$.

Άρα η (1) γράφεται $2x_0 + \frac{y_0 - 1}{x_0 + 6} \cdot 2y_0 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_0^2 + 6x_0 + y_0^2 - y_0 = 0$ που όπως θα δούμε

παρακάτω (στη μεθοδολογία 1. του κύκλου) είναι **γενικά** ένας κύκλος C_1 με κέντρο $K\left(-3, \frac{1}{2}\right)$

και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{37}}{2}$.

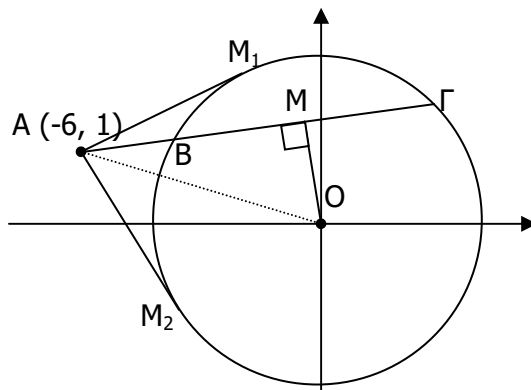
Όμως εδώ δύο ακραίες (οριακές) θέσεις του Μ είναι οι M_1 και M_2 , που είναι τα σημεία επαφής των εφαπτομένων από το Α στον κύκλο C. Άρα ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι το τόξο $\overline{M_1 M_2}$ του κύκλου C_1 που βρίσκεται εντός του κύκλου C.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΣΚΗΣΗ

1. (*) Το ότι το Α βρίσκεται εκτός του κύκλου αποδεικνύεται γιατί $(OA) = \sqrt{37} > 5 = \rho$ του C.

2. Αν το Α βρισκόταν εντός του C, τότε κατά την λύση θα έπρεπε να εξετάσουμε και την περίπτωση που $x_1 = x_2$, αποδεικνύοντας ότι και πάλι το Μ (που τότε θα είχε τετμημένη x_A και τεταγμένη 0, καθώς το μέσον της ΒΓ θα βρισκόταν στον $x'x$) ανήκει πάνω στον C_1 .

3. Η άσκηση μπορεί να λυθεί απλούστερα με γεωμετρικό τρόπο, αν παρατηρήσουμε ότι το Μ «βλέπει» το σταθερό τμήμα ΟΑ πάντα με ορθή γωνία. Άρα θα ανήκει στο μέρος εκείνο του κύκλου με κέντρο το μέσον του ΟΑ και ακτίνα $\frac{OA}{2}$, που βρίσκεται εντός του C.



ΚΥΚΛΟΣ

1. Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ είναι εξίσωση

κύκλου, αρκεί να αποδείξουμε ότι $A^2+B^2-4\Gamma>0$. Τότε ο κύκλος αυτός έχει κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

Ένας άλλος τρόπος για να βρούμε το κέντρο και την ακτίνα κάποιου κύκλου που η εξίσωσή του δίνεται στη μορφή $ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$, $a \neq 0$, είναι να φέρουμε την εξίσωση αυτή στη μορφή $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$. Αυτό το πετυχαίνουμε με τη βοήθεια της συμπλήρωσης τετραγώνου, δηλαδή της δημιουργίας καταλλήλων ταυτοτήτων. Έτσι:

- Αν οι συντελεστές των x^2 και y^2 δεν είναι 1 διαιρούμε τη σχέση με κατάλληλο αριθμό ώστε τα x^2 και y^2 να αποκτήσουν συντελεστή 1.
- Ομαδοποιούμε τις δυνάμεις του x και τις δυνάμεις του y και προσθέτουμε στα δύο μέλη κατάλληλους αριθμούς ώστε να δημιουργηθούν ταυτότητες μορφής $(x-x_0)^2$ και $(y-y_0)^2$.
- Αν μετά τη δημιουργία των ταυτοτήτων αυτών, απομένει στο δεύτερο μέλος ένας θετικός αριθμός, αυτός είναι το τετράγωνο της ακτίνας (ρ^2), ενώ το (x_0, y_0) είναι το κέντρο του κύκλου. Αν στο δεύτερο μέλος απομένει μη θετικός αριθμός, τότε η αρχική εξίσωση δεν ήταν εξίσωση κύκλου.

Παράδειγμα

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + 6x + y^2 - y = 0$ είναι εξίσωση κύκλου και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

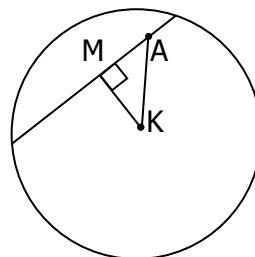
Λύση

$$x^2+6x+y^2-y=0 \Leftrightarrow x^2+2\cdot 3\cdot x+y^2-2\cdot \frac{1}{2}\cdot y=0 \quad \begin{array}{c} \text{προσθετούμε} \\ \text{το} \\ 3^2 \text{ και το } \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2+y^2-2\cdot \frac{1}{2}\cdot y+\left(\frac{1}{2}\right)^2=3^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x+3)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{37}{4}$$

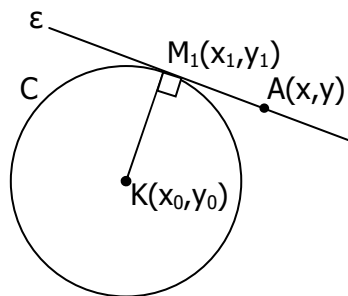
Άρα είναι κύκλος με κέντρο $K\left(-3, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{37}}{2}$.

2. Πολλές φορές και ειδικά στις ασκήσεις γεωμετρικών τύπων, είναι χρήσιμο να **αξιοποιούμε, με τη βοήθεια της γεωμετρίας**, μια ιδιότητα (I) που δίνεται, μεταφράζοντάς την ισοδύναμα και με άλλους τρόπους. Έτσι για παράδειγμα, αν στο διπλανό σχήμα δοθεί ότι M είναι το μέσον μιας μεταβλητής χορδής που διέρχεται από το σταθερό σημείο A του κύκλου με κέντρο K, τότε γνωρίζουμε από τη γεωμετρία ότι $KM \perp MA$. Άρα το M «βλέπει» με ορθή γωνία το σταθερό τμήμα KA και επομένως ανήκει στον κύκλο διαμέτρου KA.



3. Εξίσωση εφαπτομένης ε κύκλου C σε γνωστό σημείο $M_1(x_1, y_1)$

- Αν ο κύκλος έχει εξίσωση μορφής $x^2+y^2=\rho^2$, τότε η εφαπτομένη του ε δίνεται από τη θεωρία ($x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$).
- Αν ο κύκλος έχει εξίσωση μορφής $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ ή $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με γνωστό κέντρο $K(x_0, y_0)$ τότε για να βρούμε την εφαπτομένη του στο $M_1(x_1, y_1)$ εργαζόμαστε ως εξής:
 - Θεωρούμε τυχαίο σημείο $A(x, y)$ του επιπέδου
 - Το A ανήκει στην εφαπτομένη ε **αν και μόνο αν**
 $M_1A \perp KM_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{KM_1} \cdot \overrightarrow{M_1A} = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x_1-x_0, y_1-y_0) \cdot (x-x_1, y-y_1) = 0$, σχέση από την οποία θα προκύψει η εξίσωση της εφαπτομένης ε



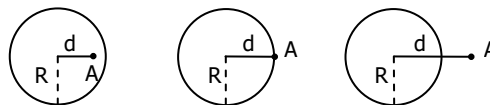
Ένας άλλος τρόπος για τον προσδιορισμό της εξίσωσης της ε, είναι να προσδιορίσουμε το λ_ϵ , καθώς $\epsilon \perp KM_1$, οπότε $\lambda_\epsilon \cdot \lambda_{KM} = -1$ και το λ_{KM} υπολογίζεται. Στη συνέχεια η ε έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης και διέρχεται από το γνωστό σημείο $M_1(x_1, y_1)$, οπότε:
 $\epsilon: y - y_1 = \lambda_\epsilon \cdot (x - x_1).$

Σε κάθε περίπτωση αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ε στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$

- του κύκλου C: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ δίνεται από τη σχέση
 $\epsilon: (x-x_0) \cdot (x_1-x_0) + (y-y_0) \cdot (y_1-y_0) = \rho^2$
- ενώ του κύκλου C: $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ δίνεται από τη σχέση
 $\epsilon: x \cdot x_1 + y \cdot y_1 + \frac{A}{2}(x+x_1) + \frac{B}{2}(y+y_1) + \Gamma = 0$

4. Να θυμίσουμε ότι όσον αφορά στις **σχετικές θέσεις σημείου A και κύκλου (O, R)**, αν d η απόσταση του κέντρου O από το σημείο A, ισχύουν:

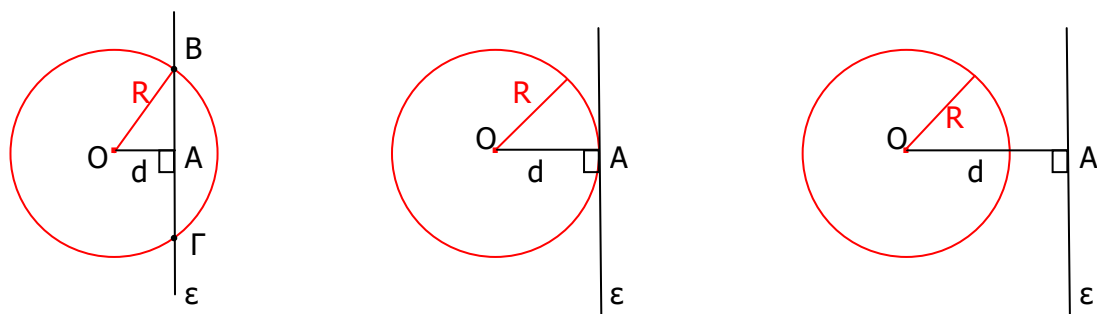
- $d < R \Leftrightarrow$ Το A βρίσκεται εντός του κύκλου
- $d = R \Leftrightarrow$ Το A ανήκει στον κύκλο
- $d > R \Leftrightarrow$ Το A βρίσκεται εκτός του κύκλου



Η δεύτερη περίπτωση μπορεί να επιβεβαιωθεί

ελέγχοντας αν οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου

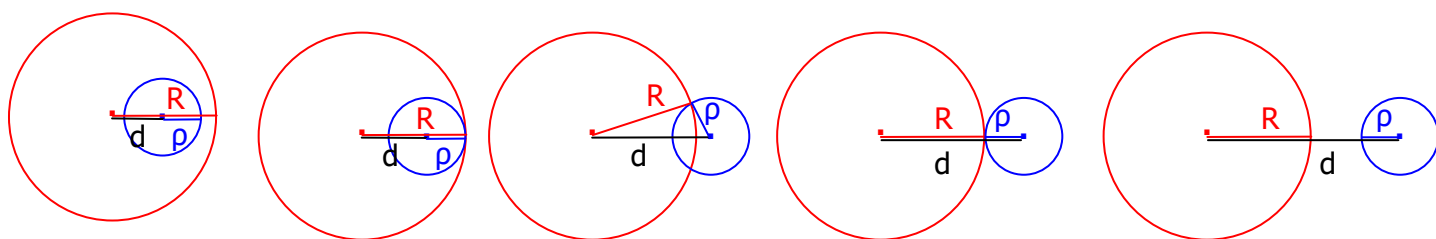
5. Όσον αφορά στις **σχετικές θέσεις ευθείας ϵ και κύκλου (O, ρ)** αυτές καθορίζονται από τη σχέση που έχει η απόσταση d του κέντρου O από την ϵ με την ακτίνα ρ . Έτσι:



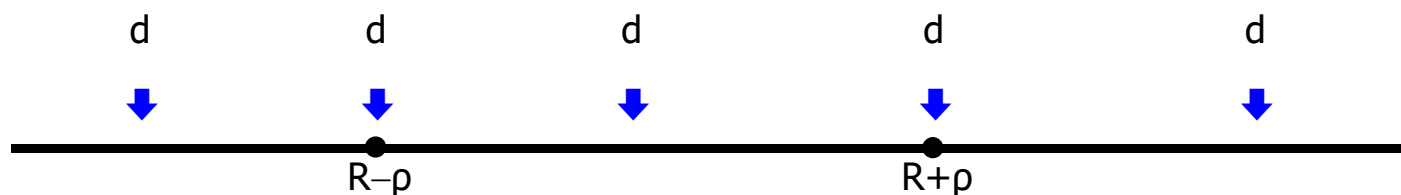
- $d < \rho \Leftrightarrow H \epsilon$ τέμνει τον κύκλο (τότε το σύστημα των εξισώσεων ευθείας και κύκλου έχει δύο διαφορετικές λύσεις)
- $d = \rho \Leftrightarrow H \epsilon$ εφάπτεται στον κύκλο (τότε το σύστημα των εξισώσεων ευθείας και κύκλου έχει μια διπλή λύση)
- $d > \rho \Leftrightarrow H \epsilon$ βρίσκεται εκτός του κύκλου και δεν έχει κοινά σημεία με αυτόν

6. Όσον αφορά στις **σχετικές θέσεις δύο κύκλων** με μήκος διακέντρου d και ακτίνες R και ρ ($R > \rho$) ισχύει η παρακάτω διάταξη, ανάλογα με τη σχέση του αριθμού d ως προς τους $R - \rho$ και $R + \rho$.

Ο ένας (ο μικρός) στο εσωτερικό του άλλου (του μεγάλου) Κανένα κοινό σημείο	Εσωτερική επαφή Ένα κοινό σημείο	Τομή Δύο κοινά σημεία	Εξωτερική επαφή Ένα κοινό σημείο	Ο ένας στο εξωτερικό του άλλου Κανένα κοινό σημείο
---	---	------------------------------	---	--



(Φανταστείτε ότι ο μεγάλος κύκλος στα παραπάνω σχήματα είναι σταθερός, ενώ ο μικρός κύκλος αλλάζει σταδιακά θέση κινούμενος προς τα δεξιά. Τότε καθώς κινείται ο μικρός προς τα δεξιά, κινείται και το d προς τα δεξιά πάνω στον παρακάτω άξονα των πραγματικών αριθμών αλλάζοντας τιμές και θέση σε σχέση με τους αριθμούς $R - \rho$ και $R + \rho$.)



ΠΑΡΑΒΟΛΗ

1. Όταν δίνεται παραβολή $y^2 = a \cdot x$ (1), τότε προφανώς:

- Η παράμετρος p : Είναι $\frac{a}{2}$
- Η εστία E : Είναι το $(\frac{a}{4}, 0)$
- Η διευθετούσα δ : Είναι η $x = -\frac{a}{4}$

Όταν δίνεται παραβολή $x^2 = a \cdot y$ (2), τότε προφανώς:

- Η παράμετρος p : Είναι $\frac{a}{2}$
- Η εστία E : Είναι το $(0, \frac{a}{4})$
- Η διευθετούσα δ : Είναι η $y = -\frac{a}{4}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν η παραβολή δοθεί σε άλλη μορφή (συνήθως η (2) δίνεται με τη μορφή $y = \dots$, δηλαδή λυμένη ως προς y), τότε για να βρούμε εύκολα τα p , E και δ την φέρνουμε στη μορφή (1) ή (2).

ΕΛΛΕΙΨΗ

1. Όταν δίνεται έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\kappa^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$, ένα ερώτημα που μας απασχολεί πάντα είναι αν οι εστίες της βρίσκονται στον άξονα $x'x$ ή στον $y'y$. Το ερώτημα αυτό απαντιέται εύκολα αν βρούμε ποιας παραμέτρου το ρόλο, εκ των α και β , «παίζουν» τα κ και λ . Αν θυμηθούμε ότι στην εξίσωση της παραβολής είναι πάντα $\alpha > \beta$ τότε:

- Αν $\kappa > \lambda$ είναι $\kappa = \alpha$ και $\lambda = \beta$ οπότε οι εστίες βρίσκονται στον $x'x$
- Αν $\kappa < \lambda$ είναι $\kappa = \beta$ και $\lambda = \alpha$ οπότε οι εστίες βρίσκονται στον $y'y$.

2. Αν η εξίσωση δίνεται σε άλλη μορφή όπως για παράδειγμα $3x^2 + 4y^2 = 8$ (1), τότε διαιρούμε και τα δύο μέλη με το 8, οπότε η (1) γράφεται $\frac{3x^2}{8} + \frac{4y^2}{8} = 1$ και στη συνέχεια διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή, σε κάθε κλάσμα χωριστά, με τον συντελεστή που έχει το x^2 και το y^2 αντίστοιχα. Έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση $\frac{x^2}{\frac{8}{3}} + \frac{y^2}{2} = 1$, που παριστάνει έλλειψη με

$$\alpha = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ και } \beta = \sqrt{2}.$$

ΥΠΕΡΒΟΛΗ

1. Παρατηρούμε ότι όταν η υπερβολή έχει εστίες στον άξονα $x'x$ ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - σχήμα 7) οι

ασύμπτωτες έχουν εξίσωση $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$, ενώ όταν η υπερβολή έχει εστίες στον άξονα $y'y$

($\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ - σχήμα 8) οι ασύμπτωτες έχουν εξίσωση $y = \pm \frac{a}{b} \cdot x$, δηλαδή πάντα είναι

$$y = \pm \frac{\text{τετραγωνική ρίζα του παρονομαστή του } y^2}{\text{τετραγωνική ρίζα του παρονομαστή του } x^2} \cdot x.$$

Ένας άλλος, πρακτικός τρόπος, για να βρίσκουμε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων, χωρίς να τις θυμόμαστε απ' έξω σε κάθε περίπτωση, είναι ο εξής:

- Φέρνουμε την εξίσωση της υπερβολής στη μορφή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ή $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
- Παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος της υπερβολής
- Θέτουμε κάθε παράγοντα ίσο με το μηδέν και προκύπτουν οι εξισώσεις των ασυμπτώτων

Παράδειγμα

Να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

Λύση

Σύμφωνα με τον παραπάνω πρακτικό τρόπο έχουμε $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{3}\right) \cdot \left(\frac{y}{2} + \frac{x}{3}\right)$.

$$\left(\frac{y}{2} - \frac{x}{3}\right) \cdot \left(\frac{y}{2} + \frac{x}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{2} - \frac{x}{3} = 0 \text{ ή } \frac{y}{2} + \frac{x}{3} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x \text{ ή } y = -\frac{2}{3}x.$$

2. Μπορούμε να φέρουμε στη μορφή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ή $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ την εξίσωση μιας υπερβολής που δίνεται αρχικά με άλλη μορφή, με ανάλογο τρόπο αυτού που περιγράψαμε στην έλλειψη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

- | | | | |
|-----|--|----------|----------|
| 1. | Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$, τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι οπωσδήποτε συνευθειακά. | Σ | Λ |
| 2. | Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, τότε $\overrightarrow{AD} = \vec{0}$. | Σ | Λ |
| 3. | α) Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$, τότε $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
β) Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG}$, τότε $B \equiv \Gamma$ | Σ | Λ |
| 4. | Αν $\vec{a} = -\vec{\beta}$, τότε $(\vec{a}, \vec{\beta}) + (\vec{\beta}, \vec{a}) = 360^\circ$. | Σ | Λ |
| 5. | Αν $ \vec{a} = \vec{\beta} $, τότε πάντα $\vec{a} = \vec{\beta}$. | Σ | Λ |
| 6. | Τα αντίθετα διανύσματα έχουν οπωσδήποτε ίσα μέτρα. | Σ | Λ |
| 7. | Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ είναι πάντα ίσα. | Σ | Λ |
| 8. | Κάθε διάνυσμα είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατός του συν τη διανυσματική ακτίνα της αρχής του. | Σ | Λ |
| 9. | Αν $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία διανύσματα, είναι δυνατόν να ισχύει $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$. | Σ | Λ |
| 10. | Ισχύει η ισοδυναμία: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow M$ μέσο του $\overrightarrow{AB}$. | Σ | Λ |
| 11. | Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει: $ \vec{a} + \vec{\beta} \leq \vec{a} + \vec{\beta} $. | Σ | Λ |
| 12. | Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει: $ \vec{a} - \vec{\beta} \leq \vec{a} + \vec{\beta} $. | Σ | Λ |
| 13. | Για τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει: $ \vec{a} - \vec{\beta} = \vec{a} + \vec{\beta} $. | Σ | Λ |
| 14. | Το διάνυσμα $\lambda \vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda < 0$ είναι συγγραμμικό του $\vec{a}$. | Σ | Λ |
| 15. | Αν $\lambda \vec{a} = \vec{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε οπωσδήποτε $\vec{a} = \vec{0}$. | Σ | Λ |
| 16. | Η ισότητα $ \lambda \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} $ ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. | Σ | Λ |
| 17. | Αν $\kappa \vec{a} = \lambda \vec{a}$, τότε $\kappa = \lambda$ για κάθε διάνυσμα $\vec{a}$. | Σ | Λ |
| 18. | Αν $\kappa \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{a}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά, τότε $\lambda = \kappa = 0$. | Σ | Λ |

- 19.** Αν $\lambda \vec{a} + \mu \vec{\beta} = \vec{0}$ και $\vec{a}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά, τότε $\lambda = \mu = 0$. **Σ Λ**
- 20.** Αν $|\vec{a}| = \lambda |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{a} // \vec{\beta}$. **Σ Λ**
- 21.** Αν $\vec{a} = \kappa \vec{\beta} + \lambda \vec{\gamma}$ και $\kappa, \lambda > 0$, τότε τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά. **Σ Λ**
- 22.** Αν το $\vec{a} + \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{a}$, τότε το $\vec{a} + \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{\beta}$. **Σ Λ**
- 23.** Αν AM διάμεσος τριγώνου ABΓ τότε $\overline{AM} = \frac{\overline{AB} + \overline{AG}}{2}$. **Σ Λ**
- 24.** Αν για τέσσερα διαφορετικά σημεία A, B, Γ και M ισχύει $\overline{AM} = \frac{\overline{AB} + \overline{AG}}{2}$, τότε το AM είναι διάμεσος του τριγώνου ABΓ. **Σ Λ**
- 25.** Αν $|\overline{MA}| = |\overline{MB}|$ όπου A, B σταθερά σημεία, τότε ο γεωμετρικός τόπος του M είναι η μεσοκάθετη ευθεία του AB. **Σ Λ**
- 26.** Αν $\vec{u} = (x_1, -y_1)$ και $\vec{v} = (-x_1, y_1)$, τότε $\vec{u} = -\vec{v}$. **Σ Λ**
- 27.** Αν $\vec{a} = (1, -3)$, $\vec{\beta} = (-1, -3)$ και $\vec{\gamma} = (2, -6)$ είναι $\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$. **Σ Λ**
- 28.** Το διάνυσμα $\vec{a} = (-2, 2)$ είναι παράλληλο με το $\vec{\beta} = (3, -3)$. **Σ Λ**
- 29.** Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy το διάνυσμα $\overline{OA} = \lambda \vec{i} + \lambda \vec{j}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας xOy. **Σ Λ**
- 30.** Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσεως. **Σ Λ**
- 31.** Δυο διανύσματα με ίσους συντελεστές διεύθυνσεως είναι πάντα ομόρροπα. **Σ Λ**
- 32.** Είναι $\det(\vec{a}, \lambda \vec{a}) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. **Σ Λ**
- 33.** Είναι $\det(\vec{i}, \vec{j}) = 1$ **Σ Λ**
- 34.** Είναι $\det(\vec{a}, -\vec{a}) = 0$ **Σ Λ**

- 35.** Κάθε διάνυσμα παράλληλο στον άξονα $x'x$ έχει τετμημένη μηδέν. **Σ Λ**
- 36.** Αν $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, τότε η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι $\varphi = 45^\circ$ **Σ Λ**
- 37.** Αν $\vec{a} = 3\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$, τότε η γωνία του διανύσματος $\vec{a}$ είναι $\varphi = 30^\circ$ **Σ Λ**
- 38.** Αν $\lambda_{\vec{a}} = \frac{2}{3}$, τότε οπωσδήποτε $\vec{a} = (3, 2)$. **Σ Λ**
- 39.** Αν $A(a, b)$ σημείο του επιπέδου, τότε $\overrightarrow{OA} = (a, b)$. **Σ Λ**
- 40.** Αν $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ τότε $\vec{a} = (2, -3)$. **Σ Λ**
- 41.** Αν $\vec{a} = (-5, 2)$ και για το σημείο A είναι $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, τότε το A έχει συντεταγμένες $(-5, 2)$. **Σ Λ**
- 42.** Το διάνυσμα $\vec{a} = (6, 0)$ είναι παράλληλο στον $x'x$. **Σ Λ**
- 43.** Αν η τεταγμένη του $\vec{a} \neq \vec{0}$ είναι ίση με $|\vec{a}|$, τότε η γωνία που σχηματίζει το $\vec{a}$ με τον $x'x$ είναι 90° . **Σ Λ**
- 44.** Αν $\vec{a} \neq \vec{0}$, με $\vec{a} = (x, y)$ τότε το διάνυσμα $\vec{v} = \left(\frac{x}{|\vec{a}|}, \frac{y}{|\vec{a}|} \right)$ είναι μοναδιαίο. **Σ Λ**
- 45.** Αν $\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$, τότε οπωσδήποτε $\vec{a} = \vec{\beta}$. **Σ Λ**
- 46.** Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, τότε τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι οπωσδήποτε συνευθειακά. **Σ Λ**
- 47.** Το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} = (\sin\theta, \eta\mu\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, είναι 1. **Σ Λ**
- 48.** Δύο διανύσματα με ίσα μέτρα και ίδιο συντελεστή διεύθυνσης είναι πάντα ίσα. **Σ Λ**
- 49.** Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, ισχύει η ισοδυναμία $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$. **Σ Λ**

- | | | | |
|------------|---|----------|----------|
| 50. | Τα ζεύγη $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $-\vec{a}, -\vec{\beta}$ των διανυσμάτων έχουν ίσα εσωτερικά γινόμενα. | Σ | Λ |
| 51. | Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} > 0$, τότε $(\vec{a}, \vec{\beta})$ είναι οξεία. | Σ | Λ |
| 52. | Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} \neq 0$ τότε είναι πάντα $(\vec{a}, \vec{\beta}) \neq 90^\circ$. | Σ | Λ |
| 53. | Αν είναι $(\vec{a}, \vec{\beta}) > 90^\circ$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} < 0$. | Σ | Λ |
| 54. | Το $(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ παριστάνει διάνυσμα. | Σ | Λ |
| 55. | Το $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει διάνυσμα. | Σ | Λ |
| 56. | Το $(\vec{a} \lambda) \cdot \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει διάνυσμα. | Σ | Λ |
| 57. | Αν $ \vec{a} + \vec{\beta} = \vec{a} + \vec{\beta} $ τότε τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι πάντα συγγραμμικά. | Σ | Λ |
| 58. | Μπορούμε να γράφουμε: $\vec{a} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$. | Σ | Λ |
| 59. | Αν $\vec{a} = (3, 5)$ και $\vec{\beta} = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{5})$ τότε $\vec{a} \perp \vec{\beta}$. | Σ | Λ |
| 60. | Τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{\beta} = -\vec{i} + \vec{j}$ είναι κάθετα. | Σ | Λ |
| 61. | Όταν οι συντελεστές δυο διανυσμάτων είναι αντίστροφοι αριθμοί τότε τα διανύσματα είναι πάντα κάθετα. | Σ | Λ |
| 62. | Αν για τυχαίο διάνυσμα $\vec{a}$ ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ τότε $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$. | Σ | Λ |
| 63. | Υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = (x+1, 3)$ και $\vec{\beta} = (x, 1)$ να είναι κάθετα. | Σ | Λ |
| 64. | Υπάρχουν $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{a} (\frac{1}{\sin \theta}, \frac{1}{\eta \mu \theta})$ και $\vec{\beta} (\eta \mu \theta, \sin \theta)$ να είναι κάθετα. | Σ | Λ |
| 65. | Ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{\delta} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{\delta}} \vec{a}$. | Σ | Λ |

66. Για κάθε τετράδα σημείων A, B, Γ, Δ ισχύει (επιλέξτε το σωστό):

- A.** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BD}$ **B.** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$
Γ. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG}$ **Δ.** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BD}$
Ε. $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BD}$

67. Στο παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$ και Μ το μέσον της ΒΓ.

α) Το διάνυσμα $\overrightarrow{AG}$ ισούται με

- A.** $\vec{a} - \vec{\beta}$ **B.** $\vec{\beta} - \vec{a}$ **Γ.** $\frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}$
Δ. $\vec{a} + \vec{\beta}$ **Ε.** $\frac{\vec{a} - \vec{\beta}}{2}$

β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{BD}$ ισούται με

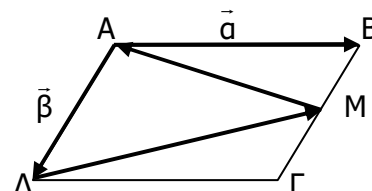
- A.** $\vec{a} + \vec{\beta}$ **B.** $\frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}$ **Γ.** $\frac{\vec{a} - \vec{\beta}}{2}$
Δ. $\frac{\vec{\beta} - \vec{a}}{2}$ **Ε.** $\vec{\beta} - \vec{a}$

γ) Το διάνυσμα $\overrightarrow{DM}$ ισούται με

- A.** $\frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}$ **B.** $\frac{\vec{\beta} - \vec{a}}{2}$ **Γ.** $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$
Δ. $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{\beta}$ **Ε.** $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{\beta}$

δ) Το διάνυσμα $\overrightarrow{MA}$ ισούται με

- A.** $-\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{\beta}$ **B.** $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{\beta}$ **Γ.** $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{\beta}$
Δ. $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$ **Ε.** $\frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}$



68. Αν ισχύει: $k\vec{a} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$, κ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός, τότε ποια από τις παρακάτω προτάσεις ισχύει πάντα;

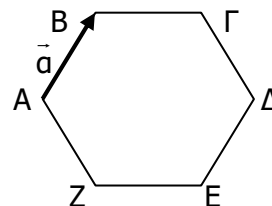
- A.** Τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ έχουν την ίδια φορά
B. Τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα
Γ. Τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα
Δ. Τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ έχουν το ίδιο μέτρο
Ε. Τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ έχουν την ίδια διεύθυνση

69. Αν $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ ομόρροπα διανύσματα, κ, λ $\in \mathbb{R}^*$ διάφοροι του ± 1 και $k\vec{a} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε

- A.** κ, λ θετικοί **B.** κ, λ αρνητικοί **Γ.** κ, λ αντίστροφοι
Δ. κ, λ ετερόσημοι **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

70. Στο κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή;

Α. $\vec{AF} = \vec{AE}$ Β. $\vec{AF} = -\vec{EA}$
 Γ. $\vec{AF} = -2\vec{a}$ Δ. $\vec{AF} = -4\vec{a}$
 Ε. $\vec{AF} = \vec{ZD}$



71. Το διάνυσμα $\vec{a} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$ είναι το μηδενικό με

Α. $\theta = 2\kappa\pi$ Β. $\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ Γ. $\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$
 Δ. $\theta = 2\kappa\pi + \pi$ Ε. καμία τιμή του θ

72. Το διάνυσμα $\vec{a} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$, είναι παράλληλο στο $\vec{\beta} = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ με

Α. $\theta = 0$ Β. $\theta = \frac{\pi}{4}$ Γ. $\theta = \frac{\pi}{2}$ Δ. $\theta = \pi$ Ε. $\theta = \frac{2\pi}{3}$

73. Τα διανύσματα $\vec{a} = (1, \lambda)$ και $\vec{\beta} = (4, -\lambda)$ είναι παράλληλα με

Α. $\lambda = -1$ Β. $\lambda = 0$ Γ. $\lambda = 1$ Δ. $\lambda = 4$ Ε. $\lambda = -4$

74. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (2, -\sqrt{2})$. Παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{a}$ είναι το

Α. $\vec{x} = (-2, \sqrt{2})$ Β. $\vec{y} = (\frac{1}{2}, \sqrt{2})$ Γ. $\vec{z} = (-\sqrt{2}, 2)$
 Δ. $\vec{\omega} = (1, -\sqrt{2})$ Ε. $\vec{v} = (\sqrt{2}, -2)$

75. Αν $|\vec{k}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, $\vec{k} \cdot \vec{v} = -3$ και $0^\circ \leq \theta = (\vec{k}, \vec{v}) < 180^\circ$, τότε η γωνία θ ισούται με

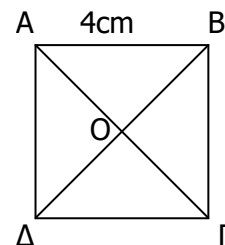
Α. 0° Β. 30° Γ. 60° Δ. 120° Ε. 150°

76. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -2)$, $\vec{\beta} = (1, -1)$ και $\vec{\gamma} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Σωστή είναι η σχέση

Α. $\vec{a} = \vec{\beta}$ Β. $\vec{a} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta}$ Γ. $\vec{a} // \vec{\beta} // \vec{\gamma}$ Δ. $\vec{a} \perp \vec{\gamma}$ Ε. $\vec{a} = \vec{\beta} - 2\vec{\gamma}$

77. Στο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά 4 cm. Ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι λανθασμένη;

Α. $\vec{AB} \cdot \vec{GB} = 0$ Β. $\vec{AO} \cdot \vec{AB} = 8$
 Γ. $\vec{AB} \cdot \vec{AF} = 16$ Δ. $\vec{AB} \cdot \vec{GD} = -16$
 Ε. $\vec{OB} \cdot \vec{BA} = 8$



- 78.** Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του παρακάτω πίνακα έχει μέτρο έναν αριθμό που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α - διάνυσμα	στήλη Β - μέτρο
1. $-\sqrt{8} \vec{i} + \vec{j}$ 2. $x \vec{i} + \psi \vec{j}$ 3. $(2\eta\mu\theta) \vec{i} - (2\sigma\upsilon\nu\theta) \vec{j}$ 4. $(x-\psi) \vec{i} + 2\sqrt{x\psi} \vec{j}$	A. $\sqrt{2}$ B. $\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta$ Γ. 3 Δ. $\sqrt{x^2 + \psi^2}$ E. $\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta$ Z. 2 H. $ x + \psi $

- 79.** Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του παρακάτω πίνακα έχει συντελεστή διεύθυνσης έναν αριθμό που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών.

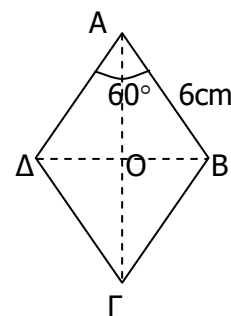
στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β συντελεστής διεύθυνσης
1. $2 \vec{i} + 2 \vec{j}$ 2. $2 \vec{i}$ 3. $\frac{2}{\sqrt{2}} \vec{j}$ 4. $2 \vec{i} - 2 \vec{j}$	A. $\sqrt{2}$ B. 2 Γ. 0 Δ. 4 E. δεν ορίζεται Z. 1 H. -1

- 80.** Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του παρακάτω πίνακα σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Οx γωνία θ , η οποία γράφεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α διάνυσμα $\vec{u}$	στήλη Β θ
1. $-3 \vec{i} + 3\sqrt{3} \vec{j}$ 2. (1, 1) 3. (1, $\sqrt{3}$) 4. (-1, 1)	A. 135° B. 60° Γ. 120° Δ. 45° E. 150° Z. 30°

- 81.** Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος με γωνία Α=60° και πλευρά 6 cm. Αν Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του, να αντιστοιχίσετε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης Α του παρακάτω πίνακα με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης Β.

στήλη Α	στήλη Β
1. $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$	A. 18
2. $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$	B. 36
3. $\overline{AB} \cdot \overline{GD}$	Γ. 0
4. $\overline{AD} \cdot \overline{GD}$	Δ. -36
	Ε. -18
	Ζ. $18 \cdot \sqrt{3}$



- 82.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Με αρχή το σημείο Α να σχεδιάσετε τα διανύσματα:

$$\vec{a} = 2\vec{AB}, \quad \vec{\beta} = -\frac{1}{2}\vec{AG}, \quad \vec{\gamma} = 2\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AG}, \quad \vec{\delta} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AG}$$

- 83.** Αν ΑΒΓΔΕΖ κανονικό εξάγωνο, με $\vec{AB} = \vec{a}$ και $\vec{BF} = \vec{\beta}$

α) Υπολογίστε τα $\vec{GD}$ και $\vec{AE}$ συναρτήσει των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$

β) Δείξτε ότι $\vec{AB} + \vec{AG} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AZ} = 6\vec{BF}$

ΑΠ: α) $\vec{GD} = \vec{\beta} - \vec{a}$, $\vec{AE} = 2\vec{\beta} - \vec{a}$

- 84.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ τέτοιο ώστε $\vec{PF} = -2\vec{PB}$. Να αποδειχτεί ότι: $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PD} + 2\vec{AB} = \vec{0}$

- 85.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Κ, Λ των ΑΒ, ΓΔ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι $\vec{AD} + \vec{BF} = 2\vec{KL}$

- 86.** Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ της διαγωνίου ΑΓ έτσι ώστε: $AE = ZG = \frac{1}{4} \cdot AG$

α) Αν $\vec{AB} = \vec{a}$ και $\vec{BF} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{DE}$ και $\vec{DZ}$ συναρτήσει των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

➡ β) Να δείξετε ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο

ΑΠ: α) $\vec{DE} = \frac{\vec{a} - 3\vec{\beta}}{4}$, $\vec{DZ} = \frac{3\vec{a} - \vec{\beta}}{4}$

- 87.** Αν Α, Β, Γ, Δ σημεία του επιπέδου δείξτε ότι:
 $4\vec{AB} + 3\vec{AG} = 4\vec{DB} + 3\vec{DG} - 7\vec{DA}$

- 88.** ✓ Αν $5\vec{AG} - 2\vec{DB} = 5\vec{BF} - 2\vec{DA}$ δείξτε ότι τα σημεία Α και Β ταυτίζονται

- 89.** ✓ Αν Α, Β, Γ, Δ, Ε σημεία του επιπέδου διαφορετικά ανά δύο και ισχύει ότι $3\vec{AD} + 5\vec{BD} - 8\vec{GD} = \vec{AE} + 3\vec{BE} - 4\vec{GE}$, δείξτε ότι το Γ είναι μέσο του ΑΒ.

- 90.** Αν Α, Β, Γ, Δ σημεία του επιπέδου με $3\vec{BD} - \vec{GA} = 3\vec{BF} - \vec{GB}$ δείξτε ότι $\vec{AB} \uparrow \downarrow \vec{GD}$.

- 91.** Αν $AB\Gamma$ τρίγωνο και M σημείο της πλευράς $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $MB = \frac{3}{2}MG$, να εκφράσετε το $\overrightarrow{AM}$ ως συνάρτηση των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$.
- ΑΠ:** $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AG}$
- 92.** Αν ισχύει $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 5\overrightarrow{PG} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
- 93.** ✓ Να αποδείξετε ότι αν για τρία σημεία A, B, Γ ισχύει $(\kappa+2)\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = (\kappa+5)\overrightarrow{PG}$, $\kappa \in \mathbb{R}$, τότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
- 94.** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία M, N τέτοια ώστε να είναι: $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD}$ και $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία M, Γ και N είναι συνευθειακά.
- 95.** Εάν $2\overrightarrow{AL} + 3\overrightarrow{BL} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{KL}$ και $\overrightarrow{ML}$ είναι αντίρροπα.
- 96.** Δίνονται τέσσερα σημεία O, A, B, Γ τέτοια ώστε τα O, A, B δεν είναι συνευθειακά. Να δείξετε ότι, αν και $\overrightarrow{OG} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
- 97.** Έστω σημεία A, B, Γ και M έτσι ώστε $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = \frac{5}{3}\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MG}$. Δείξτε ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.
- 98.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M του επιπέδου του. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{a} = 5\overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MG}$, είναι ανεξάρτητο του σημείου M .
- 99.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E και Z ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AZ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{BG}$.
- α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{DE}$ και $\overrightarrow{DZ}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$.
 β) Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, E και Z είναι συνευθειακά.
- ΑΠ: α)** $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AG} - \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DZ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AG} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
- 100.** ✓ Στις πλευρές AB και AG τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AG}$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BG}$.
- 101.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ένα σημείο M τέτοιο ώστε να είναι $3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MG} = \vec{0}$. Να αποδείξετε ότι: $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AG}$.
- 102.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν K, Λ, M είναι μέσα αντιστοίχως των πλευρών $AB, AG, B\Gamma$ και Σ σημείο του επιπέδου του τριγώνου να αποδειχθεί ότι:
 $\overrightarrow{SK} + \overrightarrow{SL} + \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SG}$

103. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και για δύο σημεία Δ, Ε του επιπέδου του τριγώνου έχουμε $\vec{AB} + \vec{AG} = \vec{AD} + \vec{AE}$ να αποδείξετε ότι:

α) Το Μ θα είναι μέσο του ΔΕ.

β) Για οποιοδήποτε άλλο σημείο Ν του επιπέδου του τριγώνου θα είναι:

$$\vec{NB} + \vec{NG} = \vec{ND} + \vec{NE}.$$

ΥΠ: α) ΔΒΕΓ #

104. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λάθος:

α) $\frac{5}{3}\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{a}$

β) $-\frac{3}{5}\vec{a} // \vec{a}$

γ) αν $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε οπωσδήποτε $\lambda\vec{a} \neq \vec{0}$

δ) αν $\vec{a} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{0} \uparrow \downarrow \vec{a}$

ε) αν $\vec{a} = -2\vec{\beta}$ τότε $|\vec{a}| = 2|\vec{\beta}|$

ζ) αν $\vec{a} = -2\vec{\beta}$, τότε $(\vec{a}, \vec{\beta}) + (\vec{\beta}, \vec{a}) = 360^\circ$

η) αν $\vec{a} = 3\vec{\beta}$, τότε $(\vec{a}, \vec{\beta}) + (\vec{\beta}, \vec{a}) = 360^\circ$

105. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Έστω Μ το μέσο της ΑΒ και η ΑΓ τέμνει την ΔΜ στο Ν. Αν $\vec{AB} = \vec{a}$ και $\vec{AD} = \vec{\beta}$,

A. να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές:

α) $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{\beta})$

β) $\vec{NO} // (\vec{a} + \vec{\beta})$

γ) $\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{ND} = \vec{0}$

B. να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{NM}$ και $\vec{NO}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$

106. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε Μ το μέσο της ΑΒ, Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του, και Ν σημείο τέτοιο ώστε $\vec{DN} = 2\vec{NG}$. Αν η ΒΝ και η ΔΜ τέμνουν την ΑΓ στα Ζ και Ε αντίστοιχα, να εκφράσετε ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{AB} = \vec{a}$ και $\vec{AD} = \vec{\beta}$ τα διανύσματα $\vec{AM}$, $\vec{DM}$, $\vec{BN}$ και $\vec{AE}$.

107. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΑ να αποδείξετε ότι $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{BA}$

108. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A'B'}$. Αν Μ και Μ' είναι μέσα των $\vec{AB}$ και $\vec{A'B'}$ να αποδείξετε ότι $\vec{AA'} + \vec{BB'} = 2\vec{MM'}$

109. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιοριστεί σημείο Ρ τέτοιο ώστε να ισχύει:
 $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$

ΑΠ: Το $\vec{PA}$ είναι ομόρροπο του $\vec{MA}$, όπου Μ το μέσον του ΒΓ και έχει μέτρο ίσο με τα $\frac{2}{3}$ του $|\vec{MA}|$

110. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να προσδιορίσετε σημείο Μ τέτοιο ώστε να είναι:
 $\vec{AG} + \vec{BM} = \vec{BD} - \vec{CD}$

ΑΠ: $M \equiv A$

111. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε σημείο Ρ τέτοιο ώστε:
 $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{PD}$

ΑΠ: P=B

- 112.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν Μ και Ν είναι αντιστοίχως τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ να αποδείξετε ότι:

α) $4\overline{MN} = \overline{AD} + \overline{AB} + \overline{GD} + \overline{GB}$

β) $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} - \overline{BG}) = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{GD})$

- 113.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(-1, 3)$ και $\vec{v}=(2, -1)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{w}=(x, y)$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

β) $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$

γ) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = \vec{0}$

δ) $\vec{w} = \kappa\vec{u} + \lambda\vec{v}$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

- 114.** Έστω τα διανύσματα $\vec{a}=(x^2+y^2, 4)$ και $\vec{\beta}=(x-y-2, 1)$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Αν $\vec{a} // \vec{\beta}$, να βρείτε τα x, y .

ΑΠ: x=2, y=-2

- 115.** Να βρεθεί το πέρας του διανύσματος $\vec{p}=(1, 2)$, αν η αρχή του είναι το $(0, 3)$.

ΑΠ: (1, 5)

- 116.** Να εξετασθεί αν τα σημεία $M_1(a+\beta, a-\beta)$, $M_2(a, -\beta)$ και $M_3(a+2\beta, 2a-\beta)$ είναι συνευθειακά.

ΑΠ: Είναι

- 117.** Δίνονται τα σημεία $A(2,-1)$, $B(-3,4)$, $\Gamma(\kappa,5)$ και $\Delta(-2,\lambda)$. Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

α) $\overline{AG} // \gamma\gamma$ β) $\overline{AD} // \chi\chi$ γ) Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ να είναι συνευθειακά

ΑΠ: α) $\kappa=2$, β) $\lambda=-1$, γ) $\kappa=-4$ και $\lambda=3$

- 118.** Αν τα σημεία $A(-3,5)$, $B(1,7)$ και $\Gamma(3,-3)$ είναι κορυφές παραλληλογράμμου,
α) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Κ των διαγωνίων του
β) να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού Β' του σημείου Β ως προς το Κ. Ποιο σημείο είναι αυτό (το Β') για το παραλληλόγραμμο;

ΑΠ: α) Κ(0, 1), β) Β'(-1, -5)

- 119.** Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Οχψ θεωρούμε τα σημεία Α, Β του $\chi'\chi$, τα οποία έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $\chi^2 - (\lambda^2 - 5\lambda + 20)\chi - 1998 = 0$. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το μέσο του ΑΒ να έχει τετμημένη 7.

ΑΠ: $\lambda=2$ ή $\lambda=3$

- 120.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(3,2)$ και $\vec{\beta}=(2,1)$

Α. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}=\vec{a}-\vec{\beta}$

Β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{v}$ με το άξονα $\gamma\gamma$

Γ. Να βρείτε τον αριθμό $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{w}=(\mu^2, 2-\mu)$ να είναι παράλληλο του $\vec{v}$

ΑΠ: Α. $\sqrt{2}$, Β. 45° , Γ. $\mu=-2$ ή 1

- 121.** ✓ Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$, $B(-1, 4)$, $\Gamma(-2,1)$ και $K(\lambda + 2, -3\lambda + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες του σημείου Μ ώστε να ισχύει $\overline{AM} = -2 \cdot \overline{MB}$.

β) Την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\overline{AB} // \overline{GK}$.

γ) Το συμμετρικό του σημείου Α ως προς το σημείο Β.

ΑΠ: α) $M(-4, 5)$, β) $\lambda = \frac{1}{2}$, γ) $A'(-4, 5)$

122. ✓ Έστω διάνυσμα $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ με $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot (1, -1) - (2, -1)$.

α) Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του $\vec{a}$

β) Αν $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{a}$ με $|\vec{\beta}| = 3|\vec{a}|$, να υπολογιστεί το $\vec{\beta}$.

γ) Θεωρούμε σημεία $A(\lambda, -2\lambda)$ και $B(1-4\lambda, \lambda+6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν $\overline{AB} \parallel \vec{a}$, να βρείτε:

i) την τιμή του λ

ii) τις συντεταγμένες του σημείου K , ώστε $\overline{AK} = 2 \cdot \overline{BK}$.

ΑΠ: α) $(3, -4)$, β) $(-9, 12)$, γ) i) $\lambda = 2$, ii) $K(-16, 20)$

123. Να υπολογιστεί το γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$

β) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 105^\circ$ αν $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)}{4}$

γ) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{12}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 135^\circ$

ΑΠ: α) $\frac{3}{2}$, β) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$, γ) $-6\sqrt{2}$

124. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 30^\circ$. Αν $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ να βρεθούν:

α) $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

β) $\vec{a}^2 + \vec{\beta}^2$

γ) $(\vec{a} + \vec{\beta})^2$

δ) $|\vec{a} + \vec{\beta}|$

ε) $(2\vec{a} + 3\vec{\beta}) \cdot (4\vec{a} - 5\vec{\beta})$

ΑΠ: α) $2\sqrt{3}$, β) 10 , γ) $10 + 4\sqrt{3}$, δ) $\sqrt{10 + 4\sqrt{3}}$, ε) $4\sqrt{3} - 104$

125. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ αν $(\vec{a}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 45^\circ$ και $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\gamma}| = 2$ ($\vec{a}, \vec{\gamma}$ μη συγγραμμικά).

ΑΠ: $\sqrt{9 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}$

126. Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και θ η μεταξύ τους γωνία, να αποδείξετε

ότι: $|\vec{a} + \vec{\beta}| = 2 \cdot \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$ (Δίνεται ότι $\sin \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1$)

127. Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 45^\circ$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta} - \vec{a}, \vec{a})$.

ΑΠ: 90°

128. ✓ Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}$ διανύσματα με $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = 1$ που σχηματίζουν γωνία $\varphi = 30^\circ$ και τα διανύσματα $\vec{x} = \vec{a} - \vec{\beta}$ και $\vec{y} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$. Να βρεθεί η γωνία $(\vec{x}, \vec{y})$.

ΑΠ: 60°

129. ✓ Αν $|\vec{a}|=|\vec{\beta}|=2$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 120^\circ$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

β) Να υπολογίσετε τα $|\vec{a} + 2\vec{\beta}|$ και $|\frac{\vec{a} - \vec{\beta}}{2}|$

γ) Αν φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \frac{\vec{a} - \vec{\beta}}{2}$, να δείξετε ότι

$\varphi = (\vec{a}, \vec{\beta})$.

ΑΠ: α) -2, β) $2\sqrt{3}$ και $\sqrt{3}$

130. ✓ Αν $|\vec{a}|=4$, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ και $\vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{\beta}) = 28$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

β) Να υπολογίσετε το $|\vec{\beta}|$

γ) Να υπολογίσετε το $(\vec{a} - 2\vec{\beta}) \cdot (2\vec{a} + \vec{\beta})$.

ΑΠ: α) 6, β) 3, γ) -4

131. ✓ Αν $|\vec{a}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$, να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$.

ΑΠ: α) $-\frac{23}{26}$

132. ✓ Έστω $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\gamma}|=\sqrt{2}$ και $\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -2$, $\vec{a} \cdot \vec{\gamma} = 0$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2$

β) Να βρεθεί η γωνία $(\vec{a}, \vec{\beta})$

γ) Να βρεθεί η τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε $(\vec{a} - 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\gamma} + \kappa \cdot \vec{\beta})$

δ) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = 202 \cdot |\vec{a} - \vec{\beta}|^2 - \frac{\vec{\gamma} \cdot (\vec{a} + \vec{\beta})}{2}$

ΑΠ: β) 135° , γ) $-\frac{2}{5}$, δ) 2019

133. Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{a} + \vec{\beta}) \perp (\vec{a} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{a} - \vec{\beta}|=2$, δείξτε ότι $|\vec{a}|=\sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}|=1$.

134. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο ώστε $\vec{x} \parallel (\vec{a} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{a} + \vec{x})$.

ΑΠ: $\vec{x} = -\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{\beta})$

135. ✓ Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 8x)$ και $\vec{\beta} = (3, 4)$

α) Να προσδιοριστεί ο x ώστε τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά.

β) Να προσδιοριστεί ο x ώστε τα $\frac{\vec{a}}{2}$ και $\vec{a} - \vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

$$\text{ΑΠ: α) } x = \frac{1}{3}, \beta) x = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{8}$$

136. ✓ Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda - 1, \lambda^2 - 1)$ και $\vec{\beta} = (\lambda, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Δείξτε ότι αν $\vec{a} // \gamma' \gamma$, τότε $\vec{a} = \vec{0}$.

β) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε $\vec{a} // \gamma' \gamma$ με $|\vec{a}| \neq 0$.

γ) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε $\vec{a} \perp \vec{\beta}$.

δ) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε $\vec{a} // \vec{\beta}$.

ε) Αν $\lambda = 2$, δείξτε ότι

i) $\lambda_{\vec{a}} = 6 \cdot \lambda_{\vec{\beta}}$, όπου $\lambda_{\vec{a}}, \lambda_{\vec{\beta}}$ οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

ii) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (-1, 7)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

$$\text{ΑΠ: β) } \lambda = -1, \gamma) \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -\frac{1}{2}, \delta) \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

137. ✓ Δίνεται το διάνυσμα $\vec{w} = (4, -3)$. Να βρείτε τα διανύσματα που είναι:

α) παράλληλα προς το $\vec{w}$ και έχουν μέτρο ίσο με 1.

β) κάθετα προς το $\vec{w}$ και έχουν μέτρο ίσο με 1.

$$\text{ΑΠ: α) } \pm \frac{1}{5}(4, -3), \beta) \pm \frac{1}{5}(3, 4)$$

138. Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{a} = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta} - \vec{x}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$ για κάθε διάνυσμα $\vec{x}$.

139. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν τα διανύσματα που δίνονται είναι κάθετα μεταξύ τους.

α) $\vec{\beta} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{a}}{\vec{\beta}^2}$ και $\vec{\beta}$

β) $(\vec{\beta} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{\gamma} - (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{a}$

γ) $\vec{\beta} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{a}}{\vec{a}^2}$ και $\vec{a}$

ΑΠ: α) Όχι, β) Ναι, γ) Ναι

140. Αν $\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ με $1 + \vec{a} \cdot \vec{\beta} \neq 0$ να αποδείξετε ότι $\vec{x} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\gamma}}{1 + \vec{a} \cdot \vec{\beta}}$.

141. Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$ με $\vec{p} // \vec{\beta}$ και $\vec{q} \perp \vec{\beta}$ να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις:

α) $\vec{p} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$

β) $\vec{q} = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$

142. Έστω ότι για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $|\vec{a} - \vec{\beta}| = |\vec{a} - \vec{\gamma}|$. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{\beta} - \vec{\gamma}$ και $\vec{v} = \vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

143. Έστω $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ διανύσματα του επιπέδου με $|\vec{a}|=2$ και $|\vec{\beta}|=1$ τα οποία σχηματίζουν γωνία φ και το διάνυσμα $\vec{u}=x\cdot\vec{a}+\vec{\beta}$.

α) Να βρεθεί ο $x\in\mathbb{R}$ συναρτήσει του φ , ώστε το μέτρο του $\vec{u}$ να είναι ελάχιστο.

β) Για την τιμή του x που προσδιορίσατε στο α) ερώτημα, δείξτε ότι $\vec{u}\perp\vec{a}$

ΥΠ: Θυμηθείτε ότι μια συνάρτηση μορφής $f(x)=a\cdot x^2+\beta\cdot x+\gamma$, λέγεται τετραγωνική συνάρτηση, έχει γραφική παράσταση μια παραβολή και αν

$a>0$, τότε παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο με τετμημένη $x_0=-\frac{\beta}{2a}$

$$\text{ΑΠ: α) } x = -\frac{\text{συν}\theta}{2}$$

144. ➔ Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε να είναι:

$$(\lambda\vec{a}+\kappa\vec{\beta})\perp(\kappa\vec{a}-2\lambda\vec{\beta}) \text{ για κάθε } \kappa, \lambda\in\mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a}\perp\vec{\beta}$.

β) Να βρεθεί το $|\vec{\beta}|$ στην περίπτωση που είναι $|\vec{a}|=2$.

$$\text{ΑΠ: β) } |\vec{\beta}|=\sqrt{2}$$

145. ➔ Αν ισχύει $|\vec{a}|=|\vec{\beta}|=|\vec{a}+\vec{\beta}|$ τότε να δείξετε ότι: $|\vec{a}-\vec{\beta}|=|\vec{a}|\cdot\sqrt{3}$

146. ➔ Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $\vec{a}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$. Αν $|\vec{a}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $|\vec{\gamma}|=5$ υπολογίστε το: $\vec{a}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{a}$

$$\text{ΑΠ: } -19$$

147. Αν $|\vec{a}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$ και $\vec{a}-3\vec{\beta}+2\vec{\gamma}=\vec{0}$ να υπολογιστούν τα $\vec{a}\cdot\vec{\beta}$, $\vec{a}\cdot\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$

$$\text{ΑΠ: Όλα } 1$$

148. Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{a}=(-1, 4)$ και $\vec{\beta}=(1, -2)$.

$$\text{ΑΠ: } -\frac{9\sqrt{85}}{85}$$

149. Αν $\vec{a}=(1,\sqrt{3})$ και $\vec{\beta}=(\sqrt{3}, -3)$ να υπολογιστεί η $(\vec{a},\vec{\beta})$.

$$\text{ΑΠ: } 120^\circ$$

150. α) Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{a}\cdot\vec{\beta}|\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{\beta}|$

β) Χρησιμοποιώντας το α) ερώτημα να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A=6x-8\psi$ αν $x^2+\psi^2=36$.

γ) Με τη βοήθεια του α) ερωτήματος αποδείξτε ότι: $|6\cdot\eta\mu x-8\cdot\sigma\upsilon\nu x|\leq 10$

$$\text{ΑΠ: β) } -60 \text{ και } 60$$

151. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(-2, 3)$ και $\vec{v}=(4, -3)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{w}$ ώστε να είναι $\vec{w}\perp(3\vec{v}-5\vec{u})$.

ΑΠ: Υπάρχουν άπειρα τέτοια διανύσματα (x,y) . Αρκεί $22x-24y=0$

152. Δίνονται τα σημεία $A(3, 2)$, $B(7, -4)$. Να βρεθεί σημείο M του $x'x$, ώστε το τρίγωνο MAB να είναι:

α) ισοσκελές με κορυφή το M

β) ορθογώνιο στο M

$$\text{ΑΠ: α) } x_M = \frac{13}{2}, \text{ β) } x_M = 5 \pm 2\sqrt{3}$$

- 153.** ✓ Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 1)$ και $\vec{\beta} = (5, 10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{a}$.

$$\text{ΑΠ: } \vec{\beta} = \frac{15}{2} \cdot (1, 1) + \frac{5}{2} \cdot (-1, 1)$$

- 154.** ✓ Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 3)$ και $\vec{\beta} = (-2, 1)$. Να αναλυθεί το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{a}$.

$$\text{ΑΠ: } \vec{\beta} = \left(-\frac{2}{13}, -\frac{3}{13}\right) + \left(-\frac{24}{13}, \frac{16}{13}\right)$$

- 155.** Έστω διάνυσμα $\overline{AB}$ με $A(0, -1)$ και M το μέσον του. Αν $M(2, 1)$, τότε:
 α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του $\overline{AB}$ και να δείξετε ότι σχηματίζει γωνία κλίσης 45° με τον άξονα $x'x$.
 β) Να βρείτε τις συνιστώσες του $\overline{AB}$, αν τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων είναι τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$.

γ) Να αναλύσετε το $\overline{AB}$ σε δύο συνιστώσες $\vec{a}_1$ και $\vec{\beta}_1$, από τις οποίες η πρώτη είναι παράλληλη στην διεύθυνση του $\vec{a} = (1, 2)$ και η δεύτερη κάθετη στην διεύθυνση του $\vec{\beta} = (0, 1)$.

➔ δ) Να βρεθεί η τιμή του κ , ώστε $\overline{AB} \uparrow \vec{\gamma}$, όπου $\vec{\gamma} = (\kappa, 1-\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

➔ ε) Εξετάστε αν τα σημεία A , B και Γ με $\Gamma(3, 2)$ είναι κορυφές τριγώνου.

$$\text{ΑΠ: } \alpha) \overline{AB} = (4, 4), \gamma) \vec{a}_1 = (2, 4) \text{ και } \vec{\beta}_1 = (2, 0), \delta) \kappa = \frac{1}{2}, \epsilon) \text{ Όχι}$$

- 156.** Αν $\vec{a} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, 4)$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως α) $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$, β) $\vec{p} \parallel \vec{a}$, γ) $\vec{q} \perp \vec{\beta}$

$$\text{ΑΠ: } \vec{p} = (1, 2), \vec{q} = \vec{0}$$

- 157.** Θεωρούμε το τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων M του επιπέδου του για τα οποία ισχύει $\overline{AB} \cdot \overline{AM} + \overline{A\Gamma} \cdot \overline{AM} = 0$.

ΑΠ: Ευθεία ϵ κάθετη στη διάμεσο AD στο A

- 158.** Αν Δ , E , Z είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, ΓA , AB τριγώνου $AB\Gamma$ να δείξετε ότι $\overline{B\Gamma} \cdot \overline{AD} + \overline{\Gamma A} \cdot \overline{BE} + \overline{AB} \cdot \overline{\Gamma Z} = 0$

- 159.** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε το ύψος AD . Να δείξετε ότι $\overline{BA}^2 + \overline{BA} \cdot \overline{A\Gamma} = \overline{BD} \cdot \overline{B\Gamma}$.

- 160.** ➔ Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας και αντιστρόφως: αν η διάμεσος ενός τριγώνου είναι ίση με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτεινούσα την πλευρά αυτή.

- 161.** Δείξτε ότι ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A αν και μόνο αν ισχύει $\overline{AB}^2 + \overline{A\Gamma}^2 = \overline{B\Gamma}^2$.

162. ➔ Αν ΑΔ είναι ύψος τριγώνου ΑΒΓ δείξτε ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \overline{BF} \cdot \overline{BD}$$

163. ➔ Αν ΑΔ είναι ύψος τριγώνου ΑΒΓ, δείξτε ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = \overline{FD} \cdot \overline{DB}.$$

164. ➔ Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ να αποδειχθεί ότι:

$$\alpha) |\overline{AB}|^2 + |\overline{AG}|^2 = 2|\overline{AM}|^2 + \frac{|\overline{BF}|^2}{2}$$

$$\beta) |\overline{AB}|^2 - |\overline{AG}|^2 = 2\overline{DM} \cdot \overline{FB}, \text{ όπου } \Delta \text{ η προβολή του } A \text{ στη } B\Gamma.$$

165. ✓ Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{a}|=1, |\vec{\beta}|=2$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Έστω τα

διανύσματα $\vec{u}=2\vec{a}+\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{a}-\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

β) Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

γ) Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

δ) Την προβ $\vec{u}$.

ε) Την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}^*$, ώστε $\vec{w} \perp \vec{\kappa}\vec{a}$, όπου $\vec{w} = \vec{a} - 2\kappa\vec{\beta}$.

$$\text{ΑΠ: } \alpha) \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 1, \beta) |\vec{u}| = 2\sqrt{3}, |\vec{v}| = \sqrt{3}, \gamma) (\vec{u}, \vec{v}) = 120^\circ,$$

$$\delta) \text{ προβ}_{\vec{u}} \vec{v} = -\frac{1}{4}\vec{u}, \epsilon) \kappa = \frac{1}{2}$$

166. ✓ Έστω διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{a}|=2, |\vec{\beta}|=4$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$. Έστω επίσης παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\overline{AB} = 2\vec{a}$ και $\overline{BG} = \vec{a} - \vec{\beta}$.

α) Να βρεθεί το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

β) Να δείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο

γ) Να δείξετε ότι $\overline{AG} \cdot \overline{BO} = -|\vec{a}|$, όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

δ) Να δείξετε ότι η γωνία $(\widehat{AO, BO})$ είναι αμβλεία.

$$\text{ΑΠ: } \alpha) \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 4$$

167. ✓ Αν $\vec{a}=(2, 3)$ και $\vec{\beta}=(-1, 4)$, να βρείτε την προβολή του $\vec{a}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

$$\text{ΑΠ: } \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a} = \frac{10}{17}(-1, 4)$$

168. ✓ Αν $\vec{a}=(3, 4)$ και $\vec{\beta}=(-1, 2)$ να υπολογίσετε το διάνυσμα:

$$\alpha) \text{ προβ}_{\vec{a}}(\vec{a} - 2\vec{\beta})$$

$$\beta) \text{ προβ}_{\vec{\beta}}(\vec{a} - \vec{\beta}).$$

$$\text{ΑΠ: } \alpha) \frac{3}{5} \cdot (3, 4), \beta) \vec{0}$$

169. Δίνονται τα σημεία $A(2,-6)$, $B(4,2)$, $\Gamma(-3,4)$, $\Delta(0,3)$, $E(x,2)$

α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος AB .

β) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$

γ) Δείξτε ότι $\overrightarrow{\Gamma\Delta} \perp \overrightarrow{\Delta E}$ αν και μόνο αν το Δ να είναι μέσο του $E\Gamma$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \frac{\sqrt{10}}{5} |\overrightarrow{\Gamma\Delta}| = 0$.

ΑΠ: α) (3, -2), β) 4, γ) μόνο αν $x=3$

170. Αν $\vec{a}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$, δείξτε ότι:

α) $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2} \cdot \vec{\beta}$

β) $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} \cdot \vec{\beta}_0$, όπου $\vec{\beta}_0$ μοναδιαίο διάνυσμα συγγραμμικό του $\vec{\beta}$

β) $\text{προβ}_{\vec{\beta}} (\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta}) = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|} \right)^2 \cdot \vec{\beta}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

- | | | | |
|-----|--|----------|----------|
| 1. | Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) είναι η εφαπτομένη της γωνίας κλίσης της (ε), με την προϋπόθεση να μην είναι ορθή. | Σ | Λ |
| 2. | Όλα τα διανύσματα με κοινό φορέα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. | Σ | Λ |
| 3. | Συντελεστής διεύθυνσης λ ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ ορίζεται πάντα και είναι ο $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. | Σ | Λ |
| 4. | Η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_1, y_2)$ με $y_1 \neq y_2$, έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν. | Σ | Λ |
| 5. | Η εξίσωση $y = x + \beta$ με $\beta \in \mathbb{R}$ παριστάνει οικογένεια ευθειών παράλληλων προς την ευθεία $y = x$. | Σ | Λ |
| 6. | Υπάρχουν δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει συγχρόνως $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. | Σ | Λ |
| 7. | Οι ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{1}{ \lambda }x$ και $y = -\lambda x$ είναι κάθετες για κάθε $\lambda \neq 0$. | Σ | Λ |
| 8. | Η εξίσωση της ευθείας ε που είναι κάθετη στην ευθεία ε': $x + 3 = 0$ και περνά από το σημείο (3, 2), είναι $y = 3$. | Σ | Λ |
| 9. | Η συμμετρική της ευθείας $y = 3x$ ως προς τον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $y = 3x + 3$. | Σ | Λ |
| 10. | Οι ευθείες $2x - 3y = 11$ και $4y + 3x + 9 = 0$ έχουν κοινό σημείο το (-1, 3). | Σ | Λ |
| 11. | Η ευθεία $y = \lambda x + 3$ έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. | Σ | Λ |
| 12. | Το σημείο Α (ημθ, 0) με $\theta = 12^\circ$ ανήκει στην ευθεία $2x + ky = 3$. | Σ | Λ |
| 13. | Οι ευθείες $2x + y = 1$ και $x - 2y = 1$ τέμνονται. | Σ | Λ |
| 14. | Οι ευθείες $y = 3x + 1$ και $3x - y = 4$ τέμνονται. | Σ | Λ |
| 15. | Ορίζεται τρίγωνο με πλευρές που έχουν εξισώσεις $3x - y = 4$, $y = -5x - 4$, $y = 3x + 5$. | Σ | Λ |
| 16. | Το σύστημα των εξισώσεων δύο παράλληλων ευθειών είναι αδύνατο. | Σ | Λ |

- | | | | |
|------------|---|----------|----------|
| 17. | Η ευθεία $x+\lambda(x-y)-\lambda=0$ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας xOy για κάθε τιμή του αριθμού λ . | Σ | Λ |
| 18. | Οι ευθείες $y=-\frac{\kappa}{3}x+1$ και $y=-\lambda x+2$ είναι παράλληλες. Τότε ισχύει $\kappa=3\lambda$. | Σ | Λ |
| 19. | Οι ευθείες $y=2x+1$ και $4x-2y+5=0$ είναι παράλληλες. | Σ | Λ |
| 20. | Οι διχοτόμοι των γωνιών των αξόνων $x'x$, $y'y$ έχουν εξισώσεις $y=x$ και $y=-x$ και τέμνονται κάθετα. | Σ | Λ |
| 21. | Οι ευθείες $y=2$ και $y=2x$ είναι παράλληλες. | Σ | Λ |
| 22. | Οι ευθείες $5x+y=1$ και $x-5y-1=0$ είναι κάθετες. | Σ | Λ |
| 23. | Αν οι ευθείες $(\mu+1)x-y=0$ και $3x+y-7=0$ είναι παράλληλες, τότε $\mu=2$. | Σ | Λ |
| 24. | Οι ευθείες $\varepsilon_1: 7x+3y+2=0$ και $\varepsilon_2: 2x+5y-3=0$ είναι κάθετες. | Σ | Λ |
| 25. | Τα σημεία $A(-2, -1)$, $B(1, 4)$ και $\Gamma(-4, 2)$ είναι συνευθειακά. | Σ | Λ |
| 26. | Τα σημεία $A(\kappa, \alpha)$, $B(\lambda, \alpha)$, $\Gamma(\mu, \alpha)$ είναι συνευθειακά. | Σ | Λ |
| 27. | Τα σημεία $A(\alpha+\beta, \gamma)$, $B(\beta+\gamma, \alpha)$, $\Gamma(\gamma+\alpha, \beta)$ είναι συνευθειακά αν $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$. | Σ | Λ |
| 28. | Τα σημεία $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(1, -1)$ είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου. | Σ | Λ |
| 29. | Όταν ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας δεν ορίζεται, τότε η εξίσωσή της είναι της μορφής $x=x_0$. | Σ | Λ |
| 30. | Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $x+y=0$ με τον άξονα $x'x$ είναι 45° . | Σ | Λ |
| 31. | Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $3x+\sqrt{3}\cdot y+1=0$ με τον άξονα $x'x$ είναι 120° . | Σ | Λ |
| 32. | Η ευθεία $y=\kappa^2x+1$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$ για κάθε $\kappa\neq 0$. | Σ | Λ |
| 33. | Η εξίσωση $x=y$ για $x\geq 0$ παριστάνει μια ημιευθεία. | Σ | Λ |
| 34. | Η εξίσωση $y-y_0=\lambda\cdot(x-x_0)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, παριστάνει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(x_0, y_0)$. | Σ | Λ |

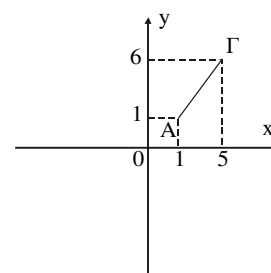
- 35.** Η ευθεία που περνά από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ έχει εξίσωση: $y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_2)$. **Σ Λ**
- 36.** Από το σημείο $A(x_0, y_0)$ περνά μία μόνο ευθεία με δεδομένο συντελεστή διεύθυνσης λ . **Σ Λ**
- 37.** Η ευθεία που περνά από το σημείο $(1, 2)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -3x + 4$, έχει εξίσωση $y - 2 = -3 \cdot (x - 1)$. **Σ Λ**
- 38.** Η ευθεία AB με $A(1, -4)$ και $B(-1, -5)$ είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = \frac{1}{2}x + 3$. **Σ Λ**
- 39.** Δίνονται τα σημεία $A(-3, -1)$, $B(2, 2)$, $\Gamma(-3, 4)$ και $\Delta(3, -6)$. Η ευθεία AB είναι κάθετη προς την ευθεία $\Gamma\Delta$. **Σ Λ**
- 40.** Η εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές $A(5, 1)$, $B(6, 3)$ και $\Gamma(2, 2)$ είναι $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 2)$. **Σ Λ**
- 41.** Η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $(1, 1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με 135° , είναι $x + y = 0$. **Σ Λ**
- 42.** Η ευθεία $\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} = 1$ με $\alpha, \beta \neq 0$ και $\alpha \neq \beta$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$. **Σ Λ**
- 43.** Η ευθεία $2y - 3x + 4 = 0$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\frac{4}{3}, 0)$. **Σ Λ**
- 44.** Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ είναι πάντα εξίσωση ευθείας. **Σ Λ**
- 45.** Αν $A \neq B$, τότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντοτε ευθεία. **Σ Λ**
- 46.** Στην ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης. Τότε ισχύει $B = 0$. **Σ Λ**
- 47.** Κάθε εξίσωση ευθείας μπορεί να γραφεί στη μορφή $Ax + By = 0$. **Σ Λ**
- 48.** Όλες οι ευθείες της οικογένειας ευθειών: $(x + y + 1) + \lambda(3x - 2y - 4) = 0$ περνούν από το σημείο $(2, 1)$. **Σ Λ**
- 49.** Το διάνυσμα $\vec{n} = (-2, 1)$ είναι κάθετο στην ευθεία $x + y + 2 = 0$. **Σ Λ**

- 50.** Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(B, -A)$. **Σ Λ**
- 51.** Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$, με $B \neq 0$, είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n}=(A,-B)$. **Σ Λ**
- 52.** Δύο ευθείες παράλληλες προς τα διανύσματα $\vec{\delta}_1=(A, B)$ και $\vec{\delta}_2=(-B, A)$ αντίστοιχα είναι μεταξύ τους κάθετες. **Σ Λ**
- 53.** Μια ευθεία κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(A, B)$ με $B \neq 0$ έχει εξίσωση της μορφής: $Ax+By+\Gamma=0$. **Σ Λ**
- 54.** Η εξίσωση της ευθείας $Ax+By+\Gamma=0$ μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή $\vec{\delta} \cdot \vec{v} + \Gamma = 0$, όπου $\vec{\delta}=(A, B)$ και $\vec{v}=(x, y)$. **Σ Λ**
- 55.** Οι ευθείες $A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ και $A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$ είναι κάθετες. Τότε ισχύει $A_1 \cdot A_2 = B_1 \cdot B_2$. **Σ Λ**
- 56.** Η απόσταση του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία $(\varepsilon): Ax+By+\Gamma=0$ δίνεται από τον τύπο $d(M_0, \varepsilon) = \frac{Ax_0 + By_0 + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. **Σ Λ**
- 57.** Η απόσταση $d(M_0, \varepsilon)$ του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία $(\varepsilon): Ax+By+\Gamma=0$ επαληθεύει την ισότητα $|Ax_0 + By_0 + \Gamma| = d(M_0, \varepsilon) \cdot \sqrt{A^2 + B^2}$. **Σ Λ**
- 58.** Η απόσταση των παράλληλων ευθειών $y=x$ και $y=x+1$ είναι 1. **Σ Λ**
- 59.** Η απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1: y=\lambda x+\beta_1$ και $\varepsilon_2: y=\lambda x+\beta_2$ δίνεται από τον τύπο: $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$. **Σ Λ**
- 60.** Οι ευθείες $\varepsilon_1: y=2x+1$, $\varepsilon_2: y=2x-1$, $\varepsilon_3: x+2y+1=0$ και $\varepsilon_4: x+2y+2=0$ τεμνόμενες ορίζουν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. **Σ Λ**
- 61.** Το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με την ορίζουσα $\det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma})$. **Σ Λ**
- 62.** Το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από την ευθεία $2x+5y=10$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$, είναι 5 τ.μ. **Σ Λ**
- 63.** Αν A, B, Γ τρία σημεία του επιπέδου και $(AB\Gamma)$ το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε: $\det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma}) = 2 \cdot (AB\Gamma)$ ή $\det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma}) = -2 \cdot (AB\Gamma)$. **Σ Λ**

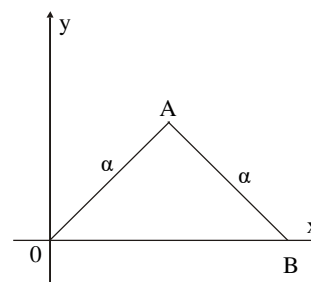
- 64.** Δίνεται ένα σημείο M μιας ευθείας, η οποία είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{v} = (3, -4)$. Ξεκινώντας από το σημείο M θα ξαναβρεθούμε σε σημείο της ευθείας, όταν
- A.** κινηθούμε 3 μονάδες αριστερά και 4 μονάδες κάτω
 - B.** κινηθούμε 3 μονάδες αριστερά και 4 μονάδες πάνω
 - Γ.** κινηθούμε 3 μονάδες κάτω και 4 μονάδες δεξιά
 - Δ.** κινηθούμε 3 μονάδες κάτω και 4 μονάδες αριστερά
 - Ε.** κινηθούμε 3 μονάδες δεξιά και 4 μονάδες πάνω

- 65.** Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ϵ), που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ ορίζεται πάντα όταν
- A.** $y_1 \neq y_2$
 - B.** $x_1 = x_2$ και $y_1 \neq y_2$
 - Γ.** $x_1 \neq x_2$ και $y_1 \neq y_2$
 - Δ.** $y_1 = y_2$ και $x_1 = x_2$
 - Ε.** $x_1 \neq x_2$

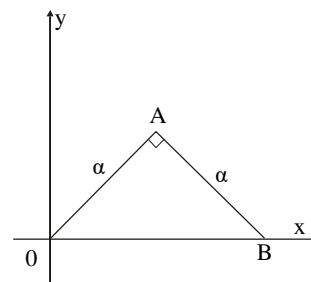
- 66.** Στο διπλανό σχήμα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AG είναι
- A.** $\frac{6}{5}$
 - B.** $\frac{5}{4}$
 - Γ.** $\frac{4}{5}$
 - Δ.** $\frac{2}{3}$
 - Ε.** $\frac{5}{6}$



- 67.** Στο διπλανό σχήμα η εξίσωση της ευθείας OA είναι $y = \sqrt{3} \cdot x$. Η γωνία $\widehat{OAB}$ ισούται με
- A.** 30°
 - B.** 60°
 - Γ.** 45°
 - Δ.** 90°
 - Ε.** 135°



- 68.** Στο διπλανό σχήμα η γωνία $\widehat{OAB}$ είναι ορθή, $a \neq 1$ και $B(\beta, 0)$. Η εξίσωση της ευθείας OA είναι
- A.** $y = \frac{a}{\beta} x$
 - B.** $y = \frac{\beta}{a} x$
 - Γ.** $y = \sqrt{a} x$
 - Δ.** $y = a\beta x$
 - Ε.** $y = x$



- 69.** Αν η ευθεία (ϵ) τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα $A(a, 0)$, $B(0, \beta)$ αντίστοιχα με $a=2\beta$ τότε
- A.** η (ϵ) σχηματίζει γωνία 60° με τον $x'x$
 - B.** η (ϵ) σχηματίζει γωνία 90° με τον $x'x$
 - Γ.** η (ϵ) σχηματίζει γωνία οξεία με τον $x'x$
 - Δ.** η (ϵ) σχηματίζει γωνία αμβλεία με τον $x'x$
 - Ε.** ο συντελεστής διεύθυνσης της (ϵ) είναι $\frac{1}{2}$

- 70.** Η ευθεία $\lambda x + y + \mu = 0$ είναι κάθετη στην $y = x$. Τότε ο λ είναι ίσος με
A. -2 **B.** -1 **Γ.** 0 **Δ.** 1 **Ε.** 2
- 71.** Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Α(0, 0), Β(3, 1), Γ(5, 3) και Δ(κ, κ). Η τιμή του κ είναι
A. 3 **B.** 2 **Γ.** 1 **Δ.** - 2 **Ε.** - 3
- 72.** Η ευθεία $y = \lambda x + 3$
A. είναι κάθετη στον $x'x$ για κάποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$
B. είναι κάθετη στον $y'y$ για κάποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$
Γ. για $\lambda \neq 0$ περνάει από το σημείο $(\frac{1}{\lambda}, 5)$
Δ. περνάει από την αρχή των αξόνων
Ε. για $\lambda = 1$ είναι κάθετη στην $y = x$
- 73.** Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{3}{2}$. Μια άλλη ευθεία (ε'), που είναι κάθετη στην (ε), έχει συντελεστή διεύθυνσης
A. $-\frac{3}{2}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **Γ.** $\frac{2}{3}$ **Δ.** $\frac{3}{2}$ **Ε.** - 1
- 74.** Η ευθεία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία είναι
A. $y = |\lambda| x - 2$ **B.** $y = 2$ **Γ.** $y = 3x + 2$
Δ. $y = |\lambda| x + \beta$ με $\lambda < 0$ **Ε.** η κάθετη στην $2x - 3y + 2 = 0$
- 75.** Το κοινό σημείο του άξονα $x'x$ και της ευθείας ΑΒ με Α(0, 4) και Β(1, 5) είναι
A. (4, 0) **B.** (0, 0) **Γ.** (5, 0) **Δ.** (-4, 0) **Ε.** (0, -3)
- 76.** Οι ευθείες $x + 2y + 1 = 0$ και $2x + \lambda y - 2 = 0$
A. τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
B. είναι και οι δύο κάθετες στην $y = -x$
Γ. είναι κάθετες μεταξύ τους για $\lambda = -1$
Δ. είναι παράλληλες για $\lambda = 2$
Ε. τέμνονται στο σημείο (-1, 0) για $\lambda = 2$
- 77.** Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο (1, -1) και είναι παράλληλη στην ευθεία $2x + 6y = 1$ είναι
A. $y - 1 = -\frac{1}{3} \cdot (x + 1)$ **B.** $y + 1 = -\frac{1}{3} \cdot (x - 1)$ **Γ.** $y - 1 = \frac{1}{3} \cdot (x - 1)$
Δ. $y + 1 = -\frac{1}{3} \cdot (x + 1)$ **Ε.** $y + 1 = \frac{1}{3} \cdot (x + 1)$
- 78.** Τα σημεία Α(1, 1), Β(3, 3) και Γ(5, κ) είναι συνευθειακά. Η τιμή του κ είναι
A. - 4 **B.** 3 **Γ.** 1 **Δ.** 5 **Ε.** - 1

- 79.** Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $7+3y=-4x$ είναι
A. -4 **B.** 7 **Γ.** $-\frac{4}{3}$ **Δ.** $-\frac{7}{3}$ **Ε.** $-\frac{3}{4}$
- 80.** Στο καρτεσιανό επίπεδο η εξίσωση $y^2=x^2$ παριστάνει
A. μια ευθεία κάθετη στον $x'x$
B. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας xOy
Γ. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας yOx'
Δ. τις διχοτόμους των γωνιών xOy και yOx'
Ε. μια ευθεία κάθετη στον $y'y$
- 81.** Μια ευθεία (ε) έχει συντελεστή $\frac{1}{2}$ και διέρχεται από το σημείο $(-1, 3)$. Η εξίσωσή της είναι
A. $y+1=\frac{1}{2}\cdot(x-3)$ **B.** $y-3=\frac{1}{2}\cdot(x+1)$ **Γ.** $x+1=\frac{1}{2}\cdot(y-3)$
Δ. $x-3=\frac{1}{2}\cdot(y+2)$ **Ε.** καμία από τις παραπάνω
- 82.** Δίνονται τα σημεία $A(8, 1)$, $B(7, 3)$, $\Gamma(4, 5)$. Η εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι
A. $y-5=-\frac{1}{2}\cdot(x+4)$ **B.** $y-5=2\cdot(x+4)$ **Γ.** $y-5=-2\cdot(x-4)$
Δ. $y-5=\frac{1}{2}\cdot(x-4)$ **Ε.** καμία από τις προηγούμενες
- 83.** Στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία $A(3, 5)$ και $B(-1, 8)$. Η προβολή του AB στον άξονα $x'x$ έχει μήκος
A. 3 **B.** 5 **Γ.** -1 **Δ.** 8 **Ε.** 4
- 84.** Οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB με $A(-8, 4)$ και $B(-6, -2)$ είναι
A. $(1, -7)$ **B.** $(3, -1)$ **Γ.** $(-5, -1)$ **Δ.** $(-7, 1)$ **Ε.** $(-1, -3)$
- 85.** Αν $A(1, 3)$ και $B(5, 3)$, το συμμετρικό του μέσου του AB ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το
A. $(2, 3)$ **B.** $(2, -3)$ **Γ.** $(3, -3)$ **Δ.** $(-3, 3)$ **Ε.** $(-3, -3)$
- 86.** Το συμμετρικό του σημείου $(4, 1)$ ως προς τη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων είναι
A. $(-4, 1)$ **B.** $(4, -1)$ **Γ.** $(-4, -1)$ **Δ.** $(2, \frac{1}{2})$ **Ε.** $(1, 4)$

87. Το σημείο $M(0, -\frac{9}{2})$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB με $A(-1, -5)$.
Το σημείο B είναι το

A. $(0, -5)$ B. $(-1, -\frac{19}{2})$ Γ. $(-1, 4)$ Δ. $(1, -4)$ Ε. $(-\frac{1}{2}, -\frac{19}{2})$

88. Η εξίσωση της ευθείας AB με $A(2012, 0)$, $B(0, 2012)$ είναι

A. $2012x-2012y=0$ B. $2012y+2012x=1$ Γ. $\frac{x}{2012} + \frac{y}{2012} = 1$
Δ. $2012x-2012y=1$ Ε. $y=2012x+2012$

89. Δίνονται τα σημεία $A(0, 4)$ και $B(4, 0)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της διαμέσου AM του τριγώνου OAB, όπου O το σημείο τομής των $x'x$, $y'y$, είναι

A. 4 B. 2 Γ. 0 Δ. - 2 Ε. - 4

90. Η εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει ευθεία μόνο αν

A. $A=0$ και $B=0$ B. $A=0$ ή $\Gamma \neq 0$
Γ. $A^2+B^2 \geq 0$ Δ. $|A|+|B| > 0$ Ε. $|A|+|B| < 0$

91. Οι ευθείες $y=2$ και $y=\sqrt{3} \cdot x-1$ σχηματίζουν μεταξύ τους οξεία γωνία ίση με

A. 30° B. 60° Γ. 45° Δ. 75° Ε. 15°

92. Έστω ευθεία (ε) που διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{v}=(\alpha, \beta)$ με $\alpha \cdot \beta \neq 0$. Τότε η εξίσωση της ευθείας είναι

A. $\frac{y-y_0}{\beta} = \frac{x-x_0}{\alpha}$ B. $y-y_0=\beta(x-x_0)$ Γ. $\frac{x-x_0}{y-y_0} = \frac{\beta}{\alpha}$
Δ. $y=\frac{\beta}{\alpha}(x-x_0)$ Ε. $y-y_0=-\frac{\beta}{\alpha}(x-x_0)$

93. Έστω (ε): $Ax+By+\Gamma=0$ (με $A \neq 0$ και $B \neq 0$), τότε:

A. το διάνυσμα $\vec{v}=(B, A)$ είναι κάθετο στην (ε)
B. το διάνυσμα $\vec{v}=(A, -B)$ είναι παράλληλο στην (ε)
Γ. το διάνυσμα $\vec{v}=(-B, A)$ είναι παράλληλο στην (ε)
Δ. το διάνυσμα $\vec{v}=(A, B)$ είναι παράλληλο στην (ε)
Ε. το διάνυσμα $\vec{v}=(-A, B)$ είναι κάθετο στην (ε)

94. Το διάνυσμα $\vec{\delta}(-2, 3)$ είναι κάθετο στην ευθεία

A. $2x-3y+1=0$ B. $2x+3y+1=0$ Γ. $3x+2y+1=0$
Δ. $3x-2y+1=0$ Ε. $3x-2y-1=0$

95. Δίνεται ευθεία (ε): $-3x+2y+1=0$ και το σημείο $M(1, -2)$. Τότε η απόσταση του M από την (ε) είναι

A. $-\frac{6}{\sqrt{13}}$ B. $\frac{6}{13}$ Γ. $-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}$ Δ. $\frac{6}{\sqrt{13}}$ Ε. $\frac{\sqrt{6}}{13}$

96. Η απόσταση του σημείου $A(-1, 1)$ από την ευθεία $ax+by=0$ με $a>\beta$ είναι

- A.** $\frac{(a+\beta)\sqrt{a^2+\beta^2}}{a^2+\beta^2}$ **B.** $\frac{(a-\beta)\sqrt{a^2+\beta^2}}{a^2+\beta^2}$ **Γ.** $-\frac{|\beta-a|}{\sqrt{a^2+\beta^2}}$
Δ. $\frac{|a+\beta|}{\sqrt{a^2+\beta^2}}$ **Ε.** $\frac{(a-\beta)\sqrt{a^2+\beta^2}}{a+\beta}$

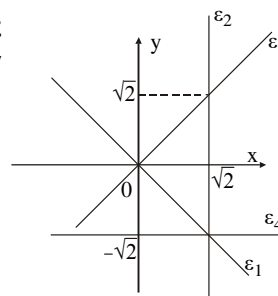
97. Τα σημεία $O(0, 0)$, $A(\kappa, 0)$, $B(0, \lambda)$ με $\kappa, \lambda>0$ ορίζουν τρίγωνο με εμβαδόν

- A.** $2\kappa\lambda$ **B.** $\frac{1}{2} \cdot (\kappa+\lambda) \cdot \kappa$ **Γ.** $\kappa\lambda$ **Δ.** $\frac{1}{2} \cdot (\kappa-\lambda) \cdot (\kappa+\lambda)$ **Ε.** $\frac{1}{2} \cdot \kappa\lambda$

98. Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $A(0, 0)$, $B(a, 0)$ και $\Gamma(a, \beta)$ είναι

- A.** $\frac{a\beta}{2}$ **B.** $\frac{a|\beta|}{2}$ **Γ.** $a\beta$ **Δ.** $\frac{|a\beta|}{2}$ **Ε.** $\frac{|a|\beta}{2}$

99. Με βάση το διπλανό σχήμα, να αντιστοιχίσετε κάθε ευθεία της στήλης Α του παρακάτω πίνακα με την εξίσωσή της που βρίσκεται στη στήλη Β.



στήλη Α	στήλη Β
1. ε_1	A. $y=x$
2. ε_2	B. $x+y=\sqrt{2}$
3. ε_3	Γ. $x+y=0$
4. ε_4	Δ. $x=\sqrt{2}$
5. $x'x$	Ε. $y=\sqrt{2}x$
6. $y'y$	Ζ. $y=0$
	H. $y=-\sqrt{2}$
	Θ. $x=0$
	I. $y=x+\sqrt{2}$

100. Κάθε σημείο της στήλης Α του παρακάτω πίνακα είναι κέντρο μιας οικογένειας ευθειών από τη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α	στήλη Β
1. $(2, 1)$	A. $(x+6y-7)+\lambda(2x-15y+1)=0$
	B. $(x+y+1)+\lambda(2x-5y+7)=0$
2. $(7, 1)$	Γ. $(x+y-3)+\lambda(2x-y-3)=0$
	Δ. $(x+y-1)+\lambda(x+2y-3)=0$
3. $(-1, 2)$	Ε. $(x+y-8)+\lambda(-x+2y+5)=0$

- 101.** Να αντιστοιχίσετε τις ευθείες της στήλης Α του παρακάτω πίνακα με τα κάθετα σ' αυτές διανύσματα της στήλης Β.

στήλη Α	στήλη Β
1. $y=2x-1$	A. $\vec{\delta}_1=(0, 2)$
2. $2x+y+2=0$	B. $\vec{\delta}_2=(2, -1)$
3. $y=3$	Γ. $\vec{\delta}_3=(2, 0)$
4. $x=-1$	Δ. $\vec{\delta}_4=(2, 1)$
	E. $\vec{\delta}_5=(1, -2)$
	Z. $\vec{\delta}_6=(-1, -2)$

- 102.** Να αντιστοιχίσετε κάθε ζεύγος ευθειών της στήλης Α του παρακάτω πίνακα με το συνημίτονο της οξείας γωνίας τους στη στήλη Β.

στήλη Α	στήλη Β
1. $\varepsilon_1: y=x$, $\varepsilon_2: x=5$	A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\varepsilon_1: y=3$, $\varepsilon_2: y=\sqrt{3}x+5$	B. 0
3. $\varepsilon_1: x=-2$, $\varepsilon_2: \sqrt{3}x-y=0$	Γ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Δ. 1
	E. $\frac{1}{2}$

- 103.** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε ευθεία της στήλης Α του παρακάτω πίνακα την απόσταση της αρχής των αξόνων από αυτή, που εμφανίζεται στη στήλη Β.

στήλη Α	στήλη Β
1. $y=2$	A. 0
2. $x=-3$	B. -2
3. $2x-y=0$	Γ. 1
4. $3x+4y-5=0$	Δ. 2
	E. -1
	Z. 3

- 104.** Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: y=-x+7$$

$$\varepsilon_2: y=\sqrt{3}x+4$$

$$\varepsilon_3: x=3$$

$$\varepsilon_4: x-y+3=0$$

$$\varepsilon_5: x-\sqrt{3}y+5=0$$

$$\varepsilon_6: y=1$$

Να τις γράψετε σε μια σειρά, ώστε κάθε επόμενη να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία μεγαλύτερη από την προηγούμενή της.

- 105.** Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας ε , που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία:

α) $\omega=60^\circ$

β) $\omega=120^\circ$

γ) $\omega=180^\circ$

ΑΠ: α) $\sqrt{3}$, β) $-\sqrt{3}$, γ) 0

106. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης και την γωνία ω , που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$:

α) η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(-2, -1)$.

β) η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B(4, \sqrt{3})$.

γ) η ευθεία που τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(2, 0)$ και $B(0, -2)$.

$$\text{ΑΠ: α) } \lambda=1, \omega=45^\circ, \beta) \lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}, \omega=30^\circ, \gamma) \lambda=1, \omega=45^\circ$$

107. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας:

α) Που είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a} = (3, 2)$.

β) Που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\beta} = (1, 2)$.

γ) Που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\gamma} = (0, -3)$.

$$\text{ΑΠ: α) } \frac{2}{3}, \beta) -\frac{1}{2}, \gamma) 0$$

108. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(3, -2)$ και:

α) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (2, -5)$

β) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (0, 3)$

γ) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-2, 0)$

δ) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (2, 1)$

ε) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (0, -2)$

στ) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega=135^\circ$.

$$\text{ΑΠ: α) } y+2=-\frac{5}{2}(x-3), \beta) x=3, \gamma) y=-2, \delta) y+2=-2(x-3), \epsilon) y=-2,$$

$$\text{στ) } y+2=-(x-3)$$

109. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ σε κάθε περίπτωση:

α) Αν τέμνει τους άξονες στα $A(0, -4)$ και $B(3, 0)$

β) Αν διέρχεται από το $A(-8, 2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta: y=-x+2020$

γ) Αν διέρχεται από το σημείο $A(-1, 6)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $\eta: y+3x=2021$

δ) Αν διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a} = (0, -4)$

ε) Αν διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{a} = (0, 1)$

ζ) Αν διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$ και σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$

η) Αν διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$ και σχηματίζει γωνία 30° με τον άξονα $y'y$

$$\text{ΑΠ: α) } y=\frac{4}{3}x-4, \beta) y=x+10, \gamma) y=-3x+3, \delta) x=1, \epsilon) y=2,$$

$$\zeta) y=x+4, \eta) y=\sqrt{3} \cdot x+\sqrt{3}+3 \text{ ή } y=-\sqrt{3} \cdot x-\sqrt{3}+3$$

110. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ και:

α) είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-3x+2$.

β) είναι κάθετη στην ευθεία $y=-x+4$.

γ) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (0, -1)$.

δ) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\phi=30^\circ$.

ΑΠ: α) $y = -3x + 5$, β) $y = x + 1$, γ) $y = 2$, δ) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6 - \sqrt{3}}{3}$

- 111.** Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(-4, 8)$.

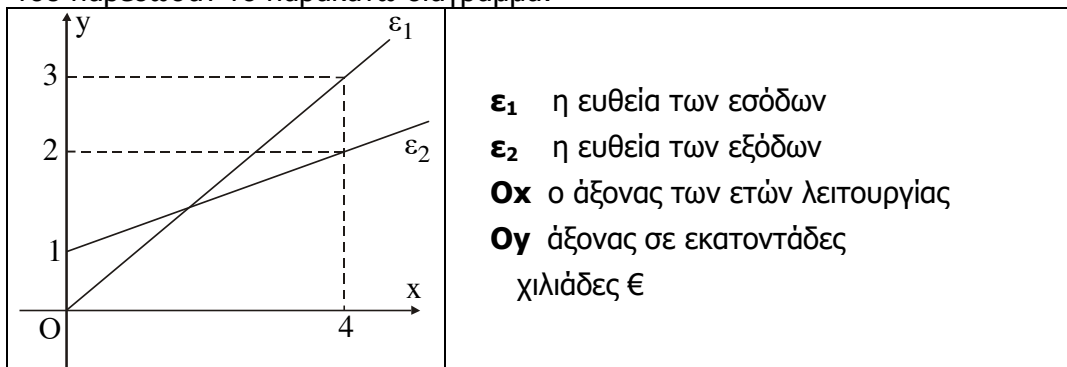
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που διέρχεται από αυτά.

β) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ϵ με τον άξονα $x'x$.

γ) Για ποια τιμή του $a \in \mathbb{R}$ το σημείο $K(4a+3, 2a-5)$ είναι σημείο της ευθείας;

ΑΠ: α) $y = -x + 4$, β) 135° , γ) $a = 1$

- 112.** Σε ένα εργοστάσιο ο νέος διευθυντής ζήτησε να ενημερωθεί για την οικονομική πορεία της επιχείρησης από το έτος που ιδρύθηκε. Οι υπεύθυνοι των οικονομικών του παρέδωσαν το παρακάτω διάγραμμα:



α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ϵ_1, ϵ_2 .

β) Να βρείτε πόσα χρόνια μετά την έναρξη της λειτουργίας της, η επιχείρηση αρχίζει να έχει κέρδη.

γ) Να βρείτε το κέρδος (έσοδα μείον έξοδα) της επιχείρησης τον τέταρτο χρόνο της λειτουργίας της.

δ) Πότε η επιχείρηση θα παρουσιάσει κέρδος 300 χιλιάδες €;

ΑΠ: α) $\epsilon_1: y = \frac{3}{4}x$, $\epsilon_2: y = \frac{1}{4}x + 1$, β) 4, γ) 100.000 €,

δ) Μετά από 8 χρόνια

- 113.** Δίνονται τα σημεία $A(7, 5)$, $B(6, -7)$ και $\Gamma(2, 3)$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

- 114.** ✓ Έστω οι ευθείες $\epsilon_1: y = 2x + 6$ και $\epsilon_2: y = 2x + 2$. Να βρείτε ευθεία που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και τέμνει τις ϵ_1 και ϵ_2 στα σημεία A και B αντίστοιχα, έτσι ώστε $(AB) = 4$.

ΑΠ: Είναι η $x = 0$ και η $y = \frac{3}{4}x$

- 115.** Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών σε κάθε περίπτωση:

α) $\epsilon_1: y = 2x + 1$, $\epsilon_2: y = -x + 7$.

β) $\epsilon_1: y = 2x + 3$, $\epsilon_2: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

ΑΠ: α) $(2, 5)$, β) $(-\frac{7}{5}, \frac{1}{5})$

- 116.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $M(1, 4)$ και τέμνει τις $\epsilon: y = -x + 4$ και $\zeta: y = 2x + 3$ στα A και B αντίστοιχα, ώστε το M να είναι μέσο του AB .

ΑΠ: $x = 1$

- 117.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $M(2, 0)$ και τέμνει της ευθείας $\varepsilon: y=x-3$ σε σημείο A , έτσι ώστε $|\overline{AM}|=1$.

ΑΠ: $x=2, y=0$

- 118.** ✓ Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που:
 α) έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=2$ και τέμνουν τους άξονες στα σημεία A, B , έτσι ώστε $(AB)=\sqrt{5}$.
 β) διέρχονται από το σημείο $A(2, 1)$ και τέμνουν τους άξονες στα σημεία B, Γ , έτσι ώστε $(OB) \cdot (O\Gamma)=1$.
 γ) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y=2x$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού ίσου με 8 μονάδες.
 δ) Διέρχονται από το σημείο $A(1, -2)$ και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

ΑΠ: α) $y=2x-2, y=2x+2$, β) $y=x-1, y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$,

γ) $y=2x-4\sqrt{2}, y=2x+4\sqrt{2}$, δ) $y=x-3, y=-x-1$

- 119.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(-6, 1)$ και $\Gamma(-10, -1)$ είναι συνευθειακά.

- 120.** Στο επίπεδο θεωρούμε τα σημεία $A(\kappa\sigma\upsilon\eta\phi, \lambda\eta\mu\phi)$, $B(\kappa\eta\mu\phi, -\lambda\sigma\upsilon\eta\phi)$ και $\Gamma(\kappa, \lambda)$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $0^\circ < \phi < 180^\circ$. Για ποιες τιμές του ϕ τα A, B, Γ είναι συνευθειακά;

ΑΠ: Αν $\kappa=0$ ή $\lambda=0$ είναι συνευθειακά για κάθε γωνία ϕ .

Αλλιώς πρέπει $\phi=30^\circ$ ή $\phi=150^\circ$

- 121.** Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x-3y+1=0$, $\varepsilon_2: -x+4y+3=0$ και το σημείο $A(1, -2)$. Να βρεθεί σημείο M της ε_2 , ώστε το μέσο του AM να ανήκει στην ε_1 .

ΑΠ: $(-\frac{49}{3}, -\frac{16}{5})$

- 122.** ✓ Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=x+5$, $\varepsilon_2: y=10$ και τα σημεία $B(6, 11)$ και $\Delta(10, 10)$. Να βρείτε:

α) Το σημείο τομής A των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

β) Ένα σημείο $\Gamma(x, 10)$ έτσι ώστε: $\overline{BA} \cdot \overline{B\Gamma} = 0$

γ) Την ευθεία που διέρχεται από το σημείο $\Delta(10, 10)$ και είναι κάθετη στην ε_1 .

ΑΠ: α) $(5, 10)$, β) $x=7$, γ) $y=-x+20$

- 123.** Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(-2, 1)$ ως προς την ευθεία $\varepsilon: x+2y-3=0$

ΑΠ: $(-\frac{4}{5}, \frac{17}{5})$

- 124.** α) Να βρείτε την προβολή του σημείου $A(-1, 2)$ στην ευθεία $\varepsilon: y=-x+3$.

β) Στη συνέχεια να βρείτε το συμμετρικό του A ως προς την ε .

ΑΠ: α) $(0, 3)$, β) $(1, 4)$

- 125.** ✓ Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y=x+1$ και το σημείο $A(2, 1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της προβολής του A στην ε .

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του A ως προς την ε .

ΑΠ: α) $(1, 2)$, β) $(0, 3)$

- 126.** Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $x+y=1$. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $P(2,3)$ ως προς άξονα συμμετρίας την (ε) .

ΑΠ: $(-2, -1)$

- 127.** Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου του AB με $A(1, 3)$ και $B(3, 7)$.

ΑΠ: $x+2y-12=0$

- 128.** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(-1, 2)$ και σχηματίζουν με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ ισοσκελές τρίγωνο.

ΑΠ: $y=x+3, y=-x+1$

- 129.** Θεωρούμε τα σημεία $A(4,-1)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(2,3)$.

- α) Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma$ είναι τρίγωνο.
β) Να υπολογίσετε την εξίσωση της διαμέσου BM .
γ) Να υπολογίσετε την εξίσωση του ύψους AD .
δ) Να υπολογίσετε την μεσοκάθετο του τμήματος $A\Gamma$.

ΑΠ: β) $x-4y+1=0$, γ) $x+y-3=0$, δ) $x-2y-1=0$

- 130.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-5, 4)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(-3, -2)$. Να βρείτε:

- α) Την εξίσωση του ύψους AD .
β) Την εξίσωση της διαμέσου BM .
γ) Την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς AB .

ΑΠ: α) $y=-x-1$, β) $y=\frac{x}{3}+\frac{7}{3}$, γ) $y=7x+14$

- 131.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$, $B(3, -2)$ και $\Gamma(1, 4)$. Να βρεθούν:

- α) Το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του
β) οι εξισώσεις των πλευρών του
γ) οι εξισώσεις των υψών του από τις κορυφές A και Γ
δ) οι εξισώσεις δύο διαμέσων του από τις κορυφές A και Γ
ε) οι συντεταγμένες του ορθόκεντρου του H
ζ) οι συντεταγμένες του βαρύκεντρου του Θ
η) οι συντεταγμένες του περίκεντρου του K .

ΑΠ: α) ορθογώνιο, β) $AB: y=-x+1, A\Gamma: y=x+3, B\Gamma: y=-3x+7$

γ) $u_a \equiv AB, u_\gamma \equiv B\Gamma$, δ) $y=-x+1, y=-4x+8$, ε) $H \equiv B$, ζ) $\Theta(\frac{7}{3}, -\frac{4}{3})$,

η) $K(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$

- 132.** ✓ Αν $AB\Gamma$ τρίγωνο με $A(3, -1)$, $B(5, 7)$ και $K(4, -1)$ το ορθόκεντρό του, να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.

ΑΠ: $AB: y=4x-13, B\Gamma: x=5, A\Gamma: y=-\frac{1}{8}x-\frac{5}{8}$

- 133.** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε: $A(-8, 2)$, $B(7, 4)$ και $H(5, 2)$ το ορθόκεντρό του. Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$
β) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ
γ) τις εξισώσεις των πλευρών του

ΑΠ: α) $x=7$, β) $\Gamma(7, -13)$,

γ) $A\Gamma: y=-x-6, B\Gamma: x=7, AB: 2x-15y+46=0$

- 134.** ✓ Αν $AB\Gamma$ τρίγωνο με $A(1, 2)$ και $\varepsilon: y=2x+4$, $\zeta: y=-x+1$ οι εξισώσεις ενός ύψους και μιας διαμέσου αντίστοιχα από την ίδια κορυφή, να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.

ΑΠ: $y=2, y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}, y=7x+9$

- 135.** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(4, -3)$, $B(-2, 0)$ και τα ύψη του AD και BE τέμνονται στο σημείο $K(0, 5)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του, καθώς και τις συντεταγμένες της τρίτης κορυφής Γ .

$$\text{ΑΠ: } \text{AB: } y = -\frac{1}{2}x - 1, \text{ BG: } y = \frac{1}{2}x + 1, \text{ AG: } y = -\frac{2}{5}x - \frac{7}{5}, \Gamma(-\frac{8}{3}, -\frac{1}{3})$$

136. Αν ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με κέντρο Κ(1, 3) και ε: $2y = -x + 1$ και ζ: $y = 2x + 3$ οι εξισώσεις δύο πλευρών του, να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του.

$$\text{ΑΠ: } y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}, y = 2x - 1$$

137. ✓ Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, $y = -\frac{8}{3}x - \frac{1}{3}$, $y = -2x + 1$, οι εξισώσεις δύο

πλευρών του και $y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, η εξίσωση της μίας διαγωνίου του. Να βρείτε:

α) τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του

β) τις συντεταγμένες των κορυφών του.

$$\text{ΑΠ: α) } y = -\frac{8}{3}x + \frac{13}{3}, y = -2x + \frac{11}{5},$$

$$\beta) (\frac{7}{5}, -\frac{3}{5}), (-\frac{7}{2}, 8), (5, -9), (\frac{32}{10}, -\frac{21}{5})$$

138. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ κέντρου Κ(2, 1). Η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η $y = x + 1$ και της ευθείας ΑΔ είναι η $y = -2x + 4$. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ΒΓ και ΓΔ.

$$\text{BG: } y = -2x + 6, \text{ GD: } y = x - 3$$

139. ✓ Αν ΑΒΓΔ ορθογώνιο με Α(1, 3) και ε: $y = x + 1$ και ζ: $y = -x + 2$ οι εξισώσεις δύο πλευρών του, να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του και της διαγωνίου του ΑΓ.

$$\text{ΑΠ: AB: } y = -x + 4, \text{ BG: } y = x + 1, \text{ GD: } y = -x + 2, \text{ DA: } y = x + 2, \text{ AG: } y = 3x$$

140. Αν ΑΒΓΔ τετράγωνο με κορυφές Α(1, 1) και Β(3, 4), να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ.

$$\text{ΑΠ: } \Gamma(4, -1) \text{ και } \Delta(6, 2) \text{ ή } \Gamma(-2, \frac{1}{3}) \text{ και } \Delta(0, \frac{10}{3})$$

141. Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος με Α(1, 4), ΑΔ: $y = 2x + 2$ και ΔΒ: $y = x - 11$. Να βρείτε τις εξισώσεις των υπόλοιπων πλευρών του και τις συντεταγμένες των κορυφών του.

$$\text{ΑΠ: AG: } y = -x + 5, \text{ BG: } y = 2x - 40, \text{ AB: } y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}, \text{ GD: } y = \frac{1}{2}x - \frac{35}{2},$$

$$\Delta(-13, -24), \Gamma(15, -10), \text{ B}(29, 18)$$

142. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(\lambda - 1, 2\lambda + 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{ΑΠ: Η ευθεία } y = 2x + 5$$

143. ✓ Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, αν:

α) $M(\lambda, 2\lambda + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

β) $M(\lambda + 1, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

γ) $M(\lambda + 1, \lambda - 2)$, $\lambda > 2$

δ) $M(\lambda, -3)$, $\lambda \leq -2$

ε) $M(-5, \lambda)$, $0 < \lambda < 4$

$$\text{ΑΠ: α) ευθεία } y = 2x + 1, \beta) \text{ ευθεία } y = x - 1,$$

$$\gamma) \text{ ημιευθεία (χωρίς την αρχή της) } y = x - 3 \text{ με } x > 3,$$

$$\delta) \text{ ημιευθεία } y = -3 \text{ με } x \leq -2,$$

$$\epsilon) \text{ ευθύγραμμο τμήμα (χωρίς τα άκρα του) } x = -5 \text{ με } 0 < y < 4,$$

- 144.** ✓ i) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας σε κάθε περίπτωση πάνω στην οποία κινούνται τα σημεία:

α) $B(2κ-λ+1, 7-6κ+3λ)$, $κ, λ \in \mathbb{R}$ β) $M(2λ+1, κ-λ)$ με $κ+λ=3$

- ii) Να βρεθεί το τμήμα της ευθείας σε κάθε περίπτωση πάνω στην οποία κινούνται τα σημεία:

α) $M(\eta\mu^2\omega, \sigma\upsilon\nu^2\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$

β) $M(\eta\mu^2\omega, 2\eta\mu^2\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$

γ) $A(4\eta\mu^2\omega-6, 2(\sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega))$, $\omega \in [0, 2\pi)$.

ΑΠ: i) α) $y=-3x+10$, β) ευθεία $y=-x+4$,

ii) α) ευθύγραμμο τμήμα $y=-x+1$ με $0 \leq x \leq 1$,

β) ευθύγραμμο τμήμα $y=2x$ με $0 \leq x \leq 1$,

γ) ευθύγραμμο τμήμα $y=-x-4$ με $-6 \leq x \leq -2$

- 145.** ✓ Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και οι ευθείες $\epsilon_1: y = (\vec{a} \cdot \vec{\beta})x + 50$ και

$$\epsilon_2: y = \frac{1}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|} x - 11.$$

- α) Αν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι κάθετες, να βρεθεί η γωνία $(\vec{a}, \vec{\beta})$

- β) Έστω ότι $\vec{a} = (4, 2)$ και $\vec{\beta} = (-2, 1)$

β1) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ϵ η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ϵ_1 και ϵ_2 και είναι παράλληλη στην ευθεία $\epsilon_3: y = -2x - 2021$

β2) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σημείο $M(|\lambda-3|, 4-|\lambda-3|)$ βρίσκεται στην ϵ ;

ΑΠ: α) 180° , β1) $y=-2x+10$, β2) $\lambda=9$ ή $\lambda=-3$

- 146.** ✓ Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2, 1)$, $\overline{B\Gamma} = (3, 1)$ και $M(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ το μέσο της πλευράς AB .

- α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των B και Γ είναι αντίστοιχα $(1, 0)$ και $(4, 1)$.

- β) Να βρεθεί η γωνία A .

- γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις του ύψους AH του τριγώνου $AB\Gamma$ και της πλευράς $B\Gamma$.

- δ) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου H

ΑΠ: β) 135° , γ) $B\Gamma: x-3y-1=0$, $AH: 3x+y-7=0$, δ) $H(\frac{11}{5}, \frac{2}{5})$

- 147.** Οι συντεταγμένες δύο πλοίων Π_1, Π_2 είναι $\Pi_1(t-1, t+2)$ και $\Pi_2(3t, 3t-1)$ για κάθε χρονική στιγμή t ($t > 0$).

- α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.

- β) Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του t που τα δύο πλοία θα συναντηθούν.

- γ) Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή $t=3$.

ΑΠ: α) $y=x+3$, $y=x-1$, β) Δεν υπάρχουν, γ) $\sqrt{58}$

- 148.** Αν $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο και $\epsilon: 3y=-8x-1$, $\zeta: y=-2x+1$ και $\eta: 2y+3x+3=0$ οι εξισώσεις δύο πλευρών και μιας διαγωνίου του αντίστοιχα, να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων πλευρών του και τις συντεταγμένες των κορυφών του.

ΑΠ: $y=-2x-1$, $y=-\frac{8}{3}x+\frac{13}{3}$, $(-2, 5)$, $(5, -9)$, $(1, -3)$, $(8, -17)$

- 149.** Μια κορυφή ενός τετραγώνου είναι το σημείο τομής των ευθειών $2x-3y+20=0$ και $3x+5y-27=0$ και η μια διαγωνίός του βρίσκεται επί της ευθείας $x+7y-16=0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τετραγώνου καθώς και η εξίσωση της άλλης διαγωνίου του.

ΑΠ: Μια κορυφή είναι το Α(-1, 6)

- 150.** Το σημείο Α(0, 1) είναι κορυφή του τετραγώνου ΑΒΓΔ, του οποίου μία πλευρά έχει εξίσωση $y = -x + 3$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων πλευρών του.

ΑΠ: Αν ΓΔ: $y = -x + 3$, τότε ΑΒ: $y = -x + 1$, ΑΔ: $y = x + 1$ και ΒΓ: $y = x - 1$ ή $y = x + 3$

- 151.** ➔ Τριγώνου ΑΒΓ δίνονται η κορυφή Α(1, 2) και οι εξισώσεις $x - 3y + 1 = 0$ και $y - 1 = 0$ δύο διαμέσων του. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.

ΑΠ: ΑΒ: $y = x + 1$, ΑΓ: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{11}{5}$, ΒΓ: $y = \frac{1}{7}x + \frac{1}{7}$

- 152.** ✓ ➔ Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(3, 5) και $x - 4y + 3 = 0$, $5y + 4x - 23 = 0$ οι εξισώσεις δύο διαμέσων του. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του, καθώς και τις εξισώσεις των πλευρών του.

ΑΠ: (1, 1), (-1, 7), $y = \frac{2}{3}x + 3$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$, $y = 2x - 1$

- 153.** ➔ Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ με Α(1,3), αν $x - 2y + 1 = 0$ και $y - 1 = 0$ είναι οι εξισώσεις δύο διαμέσων του.

ΑΠ: $y = x + 2$, $2y = -x + 7$, $4y = x - 1$

- 154.** ➔ Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ με Α(4,-1), αν $x - 1 = 0$ και $x - y - 1 = 0$ είναι οι εξισώσεις δύο διχοτόμων του.

ΑΠ: $y = 2x + 3$

- 155.** ✓ Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει ύψη ΒΔ και ΓΕ με εξισώσεις αντίστοιχα $3x + y = 11$ και $x - y + 3 = 0$. Αν το σημείο Α έχει συντεταγμένες (2, 1) να βρείτε:

- α) Την εξίσωση της ΑΓ.
β) Τις συντεταγμένες του Γ.
γ) Την εξίσωση του ύψους ΑΖ.

ΑΠ: α) ΑΓ: $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, β) (-4, -1), γ) ΑΖ: $y = -\frac{3}{5}x + \frac{11}{5}$

- 156.** ✓ Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ: $y = x$, Μ(0, 2) το μέσο της ΑΒ και ύψος ΑΗ: $x + 2y - 3 = 0$.

- α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του ΑΒΓ.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο
γ) Να βρεθούν οι συντεταγμένες σημείου Δ, ώστε το ΑΒΔΓ να είναι ορθογώνιο.

ΑΠ: α) Α(1, 1), Β(-1, 3), Γ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$)

- 157.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Η εξίσωση της μεσοκαθέτου της ΑΒ είναι η $\epsilon_1: 2x - y + 3 = 0$ και της μεσοκαθέτου της ΑΓ είναι η $\epsilon_2: x - y + 5 = 0$. Αν Α(1, 4), η μία κορυφή του τριγώνου, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

ΑΠ: Β($\frac{7}{3}$, $\frac{26}{3}$), Γ(-1, 6)

- 158.** Αν ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα ΒΓ και ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ τετράγωνα εκτός αυτού, δείξτε ότι οι ΒΖ, ΓΔ και το ύψος ΑΚ του τριγώνου συντρέχουν.

- 159.** Αν ΑΒΓΔ τραπέζιο και οι $y = -x + 1$, $y + x = 3$ είναι οι εξισώσεις δύο πλευρών του, να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου του, καθώς και το μήκος του ύψους του.

ΑΠ: $x + y - 2 = 0$, $\sqrt{2}$

160. Για ποιες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $\varepsilon_1: (\mu+1)x-2\mu y=\lambda$ και

$$\varepsilon_2: (\mu-1)x-3y=2\lambda-1:$$

- α) τέμνονται,
- β) είναι παράλληλες,
- γ) συμπίπτουν.

$$\text{ΑΠ: α) } \mu \neq 3 \text{ και } \mu \neq -\frac{1}{2}, \beta) (\mu=3 \text{ και } \lambda \neq \frac{2}{3}) \text{ ή } (\mu=-\frac{1}{2} \text{ και } \lambda \neq \frac{1}{5}),$$

$$\gamma) (\mu=3 \text{ και } \lambda=\frac{2}{3}) \text{ ή } (\mu=-\frac{1}{2} \text{ και } \lambda=\frac{1}{5})$$

161. ➔ Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon: ax+by+c=0$, $\varepsilon_1: ax-by+c=0$, $\varepsilon_2: ax-by-c=0$ και

$$\varepsilon_3: ax+by-c=0 \text{ (α, β, γ} \neq 0\text{)}. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

- α) η ε_1 είναι συμμετρική της ε ως προς άξονα συμμετρίας τον $x'x$
- β) η ε_2 είναι συμμετρική της ε ως προς άξονα συμμετρίας τον $y'y$
- γ) η ε_3 είναι συμμετρική της ε ως προς κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων.

162. Δίνεται ευθεία $(\varepsilon): x+y-6=0$

- α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(-1,3)$ ως προς την ευθεία (ε) .
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία είναι συμμετρική της ευθείας $(\varepsilon_1): 2x+y-1=0$, ως προς την ευθεία (ε) .
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) η οποία είναι συμμετρική της ευθείας (ε) , ως προς το σημείο $A(2, 1)$.

$$\text{ΑΠ: α) } A'(3, 7), \beta) x+2y-17=0, \gamma) y=-x$$

163. Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda^2+\lambda-3)x-(\lambda^2+\lambda-2)y-5\lambda^2-3\lambda+8=0$ (1)

Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) παριστάνει ευθεία;

$$\text{ΑΠ: } \lambda \neq 1$$

164. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

- α) Η εξίσωση $(\lambda^2-3\lambda+2)x+(2\lambda-\lambda^2)y+(3-\lambda)=0$ να παριστάνει ευθεία ε .
- β) Η ευθεία ε του α) ερωτήματος να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.
- γ) Η ευθεία ε του α) ερωτήματος να είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{a}=(1, -2)$.

$$\text{ΑΠ: α) } \lambda \neq 2, \beta) \lambda=1, \gamma) \lambda=\frac{1}{3}$$

165. ✓ Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $(\lambda^2+\lambda-2) \cdot x + (\lambda^2-4) \cdot y + \lambda \cdot (\lambda+2) = 0$:

- α) να παριστάνει ευθεία,
- β) να παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $x'x$
- γ) να παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $y'y$
- δ) να παριστάνει ευθεία η οποία να διέρχεται από το $O(0, 0)$

$$\text{ΑΠ: α) } \lambda \neq -2, \beta) \lambda=1, \gamma) \lambda=2, \delta) \lambda=0$$

- 166. Α.** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $(\lambda+1)x + (\lambda+2)y + 2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$, παριστάνει ευθεία γραμμή.
Β. Στη συνέχεια να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η ευθεία αυτή:
 i) είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.
 ii) είναι παράλληλη προς τον άξονα $y'y$.
 iii) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$, γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.
 iv) διέρχεται από το σημείο $A(-1,1)$.

ΑΠ: Β. i) $\lambda = -1$, ii) $\lambda = -2$, iii) $\lambda = -\frac{3}{2}$, iv) $\lambda = 1$ ή $\frac{3}{2}$

- 167.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $(a-1)x + (2a+1)y + a^2 - 1 = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματικό αριθμό a . Για ποια τιμή του a η ευθεία αυτή είναι παράλληλη με τον $x'x$;

ΑΠ: $a = 1$

- 168.** Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $(\mu^2 - \mu) \cdot x + \mu^2 \cdot y + \mu = y - 3$ να παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

ΑΠ: $\mu = 1$

- 169.** Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $3x + y = 4$ να είναι κάθετη σε κάποια ευθεία της οικογένειας ευθειών $(x + y - 4) + \lambda(x - 3y - 4) = 0$.

ΑΠ: Όχι

- 170.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $(2\mu^2 + \mu + 1) \cdot x - (\mu^2 - \mu + 1) \cdot y - \mu^2 - 2\mu = 0$ (1) παριστάνει ευθεία για όλες τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο (συντρέχουν).

- 171.** Να εξετάσετε αν η ευθεία $2\lambda x + 2\lambda y - 5\lambda = 3y - x + 7$ διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΑΠ: Ναι από το $(\frac{29}{8}, -\frac{9}{8})$

- 172. ✓** Δίνεται η εξίσωση $(a^3 + 3a - 4) \cdot x + (a^3 + 8) \cdot y + (a^3 - 3a + 5) = 0$.

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

β) Να εξετάσετε αν οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

ΑΠ: β) Όχι

- 173.** Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας $(2a-1) \cdot x + (3a+4) \cdot y + 4a + 9 = 0$ συντρέχουν για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

- 174.** Δίνεται η οικογένεια των ευθειών $(\varepsilon_\lambda) : (3\lambda+1)x - 5\lambda y - 7\lambda + 4 = 0$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, όλες οι ευθείες της οικογένειας, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

β) Να βρείτε τις ευθείες της οικογένειας, που σχηματίζουν γωνία 45° με την ευθεία που έχει εξίσωση $\varepsilon: 2x - 2y + 4 = 0$.

ΥΠ: Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ διανύσματα παράλληλα με τις ε_λ και ε αντίστοιχα θα πρέπει

$$(\vec{a}, \vec{\beta}) = 45^\circ \text{ ή } (\vec{a}, \vec{\beta}) = 135^\circ \text{ δηλαδή } \sin(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \sin(\vec{a}, \vec{\beta}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{οπότε } |\sin(\vec{a}, \vec{\beta})| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ΑΠ: } x + 4 = 0, 5y + 19 = 0$$

- 175.** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\chi \sin^2 \frac{\theta}{2} + y \eta \mu^2 \frac{\theta}{2} + \sin \theta - 1 = 0$, $\theta \in [0, \pi]$ παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο.

ΑΠ: (0,2)

- 176.** Δίνεται η εξίσωση: $\lambda^2 \chi + (\lambda - 1)y + \lambda^2 - \lambda = 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι παριστάνει ευθεία, για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες της οικογένειας ευθειών που παριστάνει η (1) για τις διάφορες τιμές του λ δεν διέρχονται από κοινό σημείο.

- 177.** Δίνεται η οικογένεια των ευθειών με εξίσωση $(\lambda + 3)\chi + (2 - \lambda)y + \lambda = 0$, (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

β) Να βρείτε ποιες από τις ευθείες της (1) τέμνουν τους άξονες στα σημεία Α και Β έτσι ώστε $\frac{1}{(OA)} + \frac{1}{(OB)} = 2$.

ΑΠ: β) $17\chi + 3y + 5 = 0$

- 178.** Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: (\lambda + 2)\chi + \lambda y + 3\lambda - 1 = 0$ και $\epsilon_2: (\lambda - 1)\chi + \lambda y + 5 = 0$. Να βρείτε τον λ , ώστε να είναι $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$.

ΑΠ: $\lambda = 0$

- 179.** Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: (\lambda - 1)\chi + (2\lambda + 1)y + \lambda + 5 = 0$ και $\epsilon_2: (2\lambda - 1)\chi + (\lambda - 2)y + \lambda - 3 = 0$.

Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες να τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$ και στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες αυτού του σημείου τομής.

ΑΠ: α) $\lambda = 1$ ή $\lambda = 7$, β) $(0, -2)$ ή $(0, -\frac{4}{5})$

- 180.** ➔ Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$ παριστάνει ζεύγος δύο ευθειών. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο ευθειών που βρήκατε;

ΑΠ: $y = 2x$ ή $y = -\frac{1}{2}x$. Είναι κάθετες

- 181.** ✓ Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες και να εξετάσετε τη σχετική θέση των ευθειών αυτών.

ΑΠ: είναι κάθετες

- 182.** Να δείξετε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνει δύο ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις:

α) $x^2 + y^2 - 2xy - x + y - 2 = 0$ β) $x^2 + 2y^2 - 3xy - 2x + 3y + 1 = 0$

ΑΠ: α) $y = x - 2$ και $y = x + 1$, β) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ και $y = x - 1$

- 183.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους. Στη συνέχεια να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των ευθειών αυτών.

ΑΠ: $y = x - 3\lambda$, $y = -x - \lambda$ και ο γ.τ. είναι $y = -2x$

- 184.** **A.** Να δείξετε ότι κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνει δύο ευθείες, τις οποίες να προσδιορίσετε:

α) $(3x - 2y + 1)^2 - 1 = 0$ β) $x^2 + y^2 + 2xy = 3x + 3y - 2$ γ) $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$

B. Να βρείτε σε ποιες περιπτώσεις του ερωτήματος Α. οι ευθείες είναι παράλληλες και σε ποιες κάθετες.

ΑΠ: A. α) $3x - 2y = 0$ ή $3x - 2y + 2 = 0$, β) $x + y - 2 = 0$ ή $x + y - 1 = 0$, γ) $x - y + 3 = 0$ ή $x + y + 3 = 0$

- 185.** ➔ Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$, που επαληθεύουν την εξίσωση: $2x^3 + 5x^2y - 8xy^2 - 20y^3 = 0$, είναι τρεις ευθείες της μορφής $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{ΑΠ: } y = \frac{x}{2}, y = -\frac{x}{2}, y = -\frac{5x}{2}$$

186. ➡ Φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο Σ(2, 3) και προσπίπτουσα στην ευθεία ε: $x+y+1=0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο Μ(1, 1). Να βρεθούν οι εξισώσεις της προσπίπτουσας και της ανακλώμενης ακτίνας.

$$\text{ΑΠ: Ανακλώμενη } y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}, \text{ προσπίπτουσα } y = \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

187. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (\mu+1)x + (\mu+2)y = 0$ και $\varepsilon_2: \mu x - (3\mu+2)y + 7 = 0$. Να βρείτε τον μ , ώστε η γωνία των ε_1 και ε_2 να είναι 90° .

$$\text{ΑΠ: } \mu = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{4}$$

188. ✓ Δίνονται τα σημεία Α(α, β) και Β(2α+1, 2-4β).

α) Να δείξετε ότι αν το Α ανήκει στην ευθεία ε: $y=x-12$, τότε το Β κινείται στην ευθεία ζ: $y+2x-52=0$.

β) Να βρείτε ποιο από τα σημεία της ζ βρίσκεται πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων και να υπολογίσετε την ελάχιστη αυτή απόσταση.

$$\text{ΑΠ: } \beta) \left(\frac{104}{5}, \frac{52}{5} \right), \frac{52\sqrt{5}}{5}$$

189. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το Α(-2, 0) και από τις οποίες το Β(5, -3) απέχει απόσταση ίση με 3.

$$\text{ΑΠ: } y=0 \text{ και } 21x+20y+42=0$$

190. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $2x-3y+1=0$ και απέχει από το σημείο Α(2, -1) 3 μονάδες

$$\text{ΑΠ: } 2x-3y-7+3\sqrt{13}=0 \text{ και } 2x-3y-7-3\sqrt{13}=0$$

191. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία Α(ημω, συνω) και Β(ημφ, συνφ). Να βρεθεί η απόσταση του Ο(0, 0) από αυτήν ($0^\circ \leq \omega \neq \varphi < 90^\circ$).

192. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών:

$$\alpha) \varepsilon_1: 3x-y+1=0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: -6x+2y-3=0$$

$$\beta) \varepsilon_1: x=4 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: x=-6$$

$$\gamma) \varepsilon_1: y=x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y=x-3$$

$$\text{ΑΠ: } \alpha) 3x-y+\frac{5}{4}=0, \beta) x=-1, \gamma) y=x-\frac{3}{2}$$

193. Να βρεθεί η μεσοπαράλληλη των ευθειών $\varepsilon_1: x-2y+1=0$ και $\varepsilon_2: 2x-4y+3=0$.

$$\text{ΑΠ: } 4x-8y+5=0$$

194. ✓ Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, τα οποία ισαπέχουν από τις ευθείες $3x-2y+4=0$ και $3x-2y+6=0$.

$$\text{ΑΠ: Η ευθεία } 3x-2y+5=0$$

195. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις ευθείες $\varepsilon_1: y=8-2x$ και $\varepsilon_2: 4x+2y-8=0$.

$$\text{ΑΠ: } 2x+y-6=0$$

196. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών: $3x-5y-18=0$ και $3x-5y-24=0$.

$$\text{ΑΠ: } 3x-5y-21=0$$

197. ✓ Δίνονται οι ευθείες: $x+\mu y+1=0$ και $2\mu x+2y+\lambda=0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Να προσδιοριστούν οι τιμές των ζευγών (λ, μ), ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες και η μεταξύ τους απόσταση να είναι $d=2\sqrt{2}$.

ΑΠ: (10, 1), (-6, 1), (6, -1), (10, -1)

- 198.** Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=x+3$ και $\varepsilon_2: y=x+1$, και τα σημεία $A(-3,5)$, $B(2, -1)$.
Να βρεθεί σημείο Γ στη μεσοπαράλληλο των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ να είναι ίσο με 14 τετραγωνικές μονάδες.

ΑΠ: $\Gamma(-\frac{25}{11}, -\frac{3}{11})$ ή $\Gamma(\frac{31}{11}, \frac{53}{11})$

- 199.** Θεωρούμε τα σημεία $A(6,11)$, $B(7,8)$ και $\Gamma(-5,14)$. Να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία $y=2x+4$ και διχοτομεί το τμήμα $B\Gamma$.

ΑΠ: $y=2x+9$

- 200.** Οι ευθείες $\varepsilon_1: 4x-3y+3=0$ και $\varepsilon_2: 4x-3y-17=0$, είναι οι εξισώσεις δύο πλευρών του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το κέντρο K του τετραγώνου και είναι παράλληλη προς τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

ΑΠ: α) 4, β) $4x-3y-7=0$

- 201.** α) Να βρεθεί η ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $A(2, 1)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon_1: 3x+4y+2=0$.

β) Να βρεθεί σημείο K του $x'x$ που να απέχει από την ε του προηγούμενου ερωτήματος απόσταση ίση με 1.

γ) Να βρεθούν τα σημεία της ε του α) ερωτήματος των οποίων η απόσταση από την ε_1 είναι τετραπλάσια από την απόστασή τους από την $\varepsilon_2: 4x+3y-1=0$

ΑΠ: α) $3x+4y-10=0$, β) $K(5, 0)$ ή $K(\frac{5}{3}, 0)$, γ) $(-2, 4)$ και $(-\frac{38}{7}, \frac{46}{7})$

- 202.** ✓ Δίνονται τα σημεία $A(1, 4)$ και $B(-1, -5)$.

α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB .

β) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB .

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας του ευθύγραμμου τμήματος AB .

δ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία AB .

ε) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής τους με την ευθεία AB

ΑΠ: α) $(0, -\frac{1}{2})$, β) $\frac{9}{2}$, γ) $y = -\frac{2}{9}x - \frac{1}{2}$, δ) $y = -\frac{2}{9}x$, ε) $\frac{1}{36}$ τ.μ.

- 203.** ✓ Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών: $3x+4y-11=0$ και $2x-3y+21=0$ και:

α) είναι παράλληλη προς την ευθεία $x+2y+1=0$

β) είναι κάθετη προς την ευθεία $3x-y+5=0$

γ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων

δ) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

ε) είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$

στ) είναι παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων

ζ) είναι παράλληλη στη διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων

η) έχει ακέραιο συντελεστή διεύθυνσης και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 32 τ.μ.

**ΑΠ: Το κοινό σημείο είναι το $(-3, 5)$, α) $y-5=-\frac{1}{2}(x+3)$, β) $y-5=-\frac{1}{3}(x+3)$,
γ) $y=-\frac{5}{3}x$, δ) $y=5$, ε) $x=-3$, στ) $y-5=(x+3)$, ζ) $y-5=-(x+3)$,**

η) Αν $y-5=(x+3)$

- 204.** Τρίγωνο ΑΒΓ έχει Α(1, 2), Β(3, 5), ενώ η κορυφή του Γ κινείται στην ευθεία $\epsilon: 2x-y+3=0$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Γ αν είναι $(ΑΒΓ)=5$ τ.μ.

ΑΠ: Γ(5, 13) ή Γ(-15, -27)

- 205.** Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου που έχει κορυφές τα σημεία Α(1, -2), Β(-2, 3), Γ(-1, -4) και Δ(5, 0).

ΑΠ: 10 τ.μ.

- 206.** ✓ Δίνεται η ευθεία $\epsilon_1: x+y-2=0$ και το σημείο Α(-3, 1). Να βρείτε:

- α) Την εξίσωση της ευθείας δ, που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ϵ_1 .
β) Το συμμετρικό Β του Α ως προς την ευθεία ϵ_1 .
γ) Το σημείο τομής Γ της ευθείας ϵ_1 με την ευθεία $\epsilon_2: x-2y+4=0$.
δ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

ΑΠ: α) $y=x+4$, β) Β(1, 5), γ) Γ(0, 2), (ΑΒΓ)=4 τ.μ.

- 207.** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $\epsilon: 2x-3y-12=0$ και οι οποίες ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 12 τ.μ.

ΑΠ: $y=\frac{2}{3}x+4$ και $y=\frac{2}{3}x-4$

- 208.** Δίνονται τα σημεία Α(1, 3), Β(2, 5) και Γ(μ, 2μ + 3), $\mu \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι το Γ κινείται σε ευθεία, την οποία να βρείτε.
β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του μ.

ΑΠ: α) $y=2x+3$, β) 1 τ.μ.

- 209.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Β(2, 1) και Γ(12, 1). Ο συντελεστής διεύθυνσης της διαμέσου ΑΜ είναι ίσος με 2 και το εμβαδόν του τριγώνου ίσο με 10 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Α.

ΑΠ: Α(6, -1) ή Α(8, 3)

- 210.** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $\epsilon: 2x+3y+6=0$ και οι οποίες ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 3 τ.μ.

ΑΠ: $2x+3y+6=0$ και $2x+3y-6=0$

- 211.** Να βρείτε τις ευθείες που είναι κάθετες στην ευθεία με εξίσωση $2y=x+3$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 9 τ.μ.

ΑΠ: $y=-2x+6$, $y=-2x-6$

- 212.** Δίνεται η ευθεία (ϵ_1): $3x-4y+5=0$ και τα σημεία Α(-3, 5) και Β(1, 1).

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ_2) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο και είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ_1).
β) Να βρείτε το σημείο τομής των (ϵ_1) και (ϵ_2).
γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) που διέρχεται από το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ και απέχει από την αρχή των αξόνων Ο(0, 0) απόσταση ίση με 1.

ΑΠ: α) $y=-\frac{4}{3}x$, β) $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$, γ) $y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$

- 213.** α) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2+y^2+2xy-3x-3y+2=0$, παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες.
 β) Να βρείτε την μεταξύ τους απόσταση.
 γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου, που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ΑΠ: β) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, γ) $\frac{3}{2}$ τ.μ.

- 214.** Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

κορυφές τριγώνου ΑΒΓ	Είδος τριγώνου		εμβαδόν τριγώνου
	ορθογώνιο	ισοσκελές	
A(-3, 2) B(5, 0) Γ(-2, 6)			
A(1, 1) B(-3, 1) Γ(-1, 2)			
A(0, 2) B(3, 0) Γ(0, 0)			
A(3, 0) B(0, 4) Γ(-3, 0)			

- 215.** Τα σημεία $M_1(1, 1)$, $M_2(2, 2)$ και $M_3(3, -1)$ είναι τρεις διαδοχικές κορυφές ενός παραλληλογράμμου. Να βρεθούν:
 α) οι συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής του
 β) οι συντεταγμένες του κέντρου του
 γ) το εμβαδόν του

ΑΠ: α) $M_4=(4, 0)$, **β)** $(2, 0)$

- 216.** Οι ευθείες $\varepsilon_1: x-y-1=0$ και $\varepsilon_2: 2x+y-2=0$, είναι οι φορείς δύο πλευρών του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και Α(3, 5) η μία κορυφή του. Να βρεθούν:
 α) Οι συντεταγμένες των άλλων κορυφών του.
 β) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

ΑΠ: α) $(1, 0)$, $(0, 2)$, $(4, \frac{3}{2})$, **β)** 9 τ.μ.

- 217.** Μια τριγωνική κατασκήνωση διαθέτει τρεις εισόδους, μία σε κάθε κορυφή. Ο αρχηγός της κατασκήνωσης (του οποίου η σκηνή βρίσκεται κάπου μέσα στην κατασκήνωση) θέλοντας να βρει το εμβαδόν της κατασκήνωσης, αποστέλλει τρεις κατασκηνωτές (εφοδιασμένους με πυξίδες και χιλιομετρητές) να μετρήσουν τις αποστάσεις των εισόδων από τη σκηνή του. Ο πρώτος προχωρά 2 km βόρεια και αμέσως μετά 1 km ανατολικά και εκεί συναντά την πρώτη είσοδο. Ο δεύτερος προχωρά 3 km ανατολικά και 1 km νότια και εκεί συναντά τη δεύτερη είσοδο. Ο τρίτος προχωρά 2 km δυτικά και συναντά την τρίτη είσοδο.
 α) Να τοποθετήσετε, σε ένα πρόχειρο σχέδιο, τη σκηνή του αρχηγού και τις εισόδους, αφού πρώτα χαράξετε τις πορείες.
 β) Να θεωρήσετε κατάλληλο σύστημα αξόνων και να βρείτε τις συντεταγμένες των τριών εισόδων σ' αυτό το σύστημα.
 γ) Να βρείτε το εμβαδόν της κατασκήνωσης.

$$\text{ΑΠ: } \beta) (1,2), (3,-1), (-2,0), \gamma) \frac{13}{2} \text{ km}^2$$

- 218.** ✓ Η $(\lambda-1) \cdot x + (\lambda+1) \cdot y - \lambda - 3 = 0$ παριστάνει την ευθεία της φωτεινής ακτίνας που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος.
 α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου.
 β) Τρία πλοία βρίσκονται στις θέσεις $K(2, 2)$, $\Lambda(-1, 5)$ και $M(1, 3)$.
 β1) Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία.
 β2) Να βρείτε ποιο από τα πλοία που βρίσκονται στα K και Λ βρίσκεται πιο κοντά στο πλοίο που βρίσκεται στη θέση M .
 β3) Να βρείτε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από τον φάρο και τα πλοία που βρίσκονται στις θέσεις M και Λ .

$$\text{ΑΠ: } \alpha) (-1, 2), \beta1) y=2, x=-1, \gamma = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, \beta2) \text{ το } K, \beta3) 2 \text{ τ.μ.}$$

- 219.** Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο $A(2, 6)$ και η θέση ενός πλοίου με το σημείο $\Pi(\lambda-1, 2+\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 α) Για ποιες τιμές του λ το σημείο Π έχει τετμημένη μικρότερη από την τετμημένη του A ;
 β) Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι A , όταν κινείται ευθύγραμμα.
 γ) Ποια θα είναι η ελάχιστη απόσταση της πορείας του πλοίου από το λιμάνι;

$$\text{ΑΠ: } \alpha) \lambda < 3, \beta) y=x+3, \gamma) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- 220.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, των οποίων τα τετράγωνα των αποστάσεων από τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(-1, 2)$ έχουν σταθερή διαφορά c είναι ευθεία κάθετη στην AB .

- 221.** Δίνονται τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(0, 3)$ και οι ευθείες $\epsilon: 5y=12x-1$, $\zeta: 3y=4x-1$, $\eta: y=x+5$ και $\sigma: y=x-1$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει:

$$\alpha) (MA)=(MB) \quad \beta) d(M, \epsilon)=d(M, \zeta) \quad \gamma) d(M, \sigma)=d(M, \eta)$$

δ) Ο λόγος των αποστάσεων του M από τις ζ και ϵ αντίστοιχα είναι ίσος με 2

$$\text{ΑΠ: } \alpha) \text{ Η ευθεία } x-5y+2=0, \beta) \text{ Οι ευθείες } 4x+7y+4=0, 56x-32y-9=0, \gamma) \text{ Η ευθεία } x-y+2=0, \delta) \text{ Οι ευθείες } 68x-11y+3=0 \text{ και } 172x-89y-23=0$$

- 222.** Ένα σημείο P του επιπέδου κινείται πάνω στην ευθεία $y=x$. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό σημείο P' του P ως προς την ευθεία $x+2y-1=0$ κινείται πάνω στην ευθεία $7x-y-2=0$.

- 223.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(5, 3)$, $B(0, 2)$ και $\Gamma(6, 0)$ και σημείο του επιπέδου $M(5-6a, 2a-1)$, $a \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην $B\Gamma$.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του M και να δείξετε ότι το M απέχει σταθερή απόσταση από τη $B\Gamma$ για κάθε τιμή του a , την οποία να βρείτε.

$$\text{ΑΠ: } \alpha) \epsilon: x+3y=2, \beta) \text{ Ο γ.τ. του } M \text{ είναι η } \epsilon. d(M, B\Gamma) = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

- 224.** Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών, που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1: x+2y-5=0$ και $\varepsilon_2: 2x+y-7=0$.

ΑΠ: $x-y-2=0$, $x+y-4=0$

- 225.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(-1, 0), Β(3, 2) και Γ(-3, 4). Να δείξετε ότι:

α) $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 45^\circ$.

β) Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ είναι η $\varepsilon: 3x-y+3=0$.

- 226.** Να βρεθούν οι ευθείες, κάθε σημείο των οποίων ισαπέχει από τις ευθείες $\varepsilon_1: 3x+4y+2=0$ και $\varepsilon_2: 8x+6y-3=0$.

ΑΠ: $2x-2y-7=0$ και $14x+14y+1=0$

- 227.** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- A.** α) Διέρχεται από σημείο Α(1, -1) και είναι παράλληλη σε ευθεία

(ε'): $2x+y-1=0$

β) Διέρχεται από σημείο Α(2, -3) και είναι παράλληλη σε ευθεία (ε'): $x=-3$

γ) Διέρχεται από σημείο Α(-2, 1) και είναι παράλληλη σε ευθεία (ε'): $y=-1$

- B.** α) Διέρχεται από σημείο Α(-1,1) και είναι κάθετη σε ευθεία (ε'): $2x+y+1=0$

β) Διέρχεται από σημείο Α(2, -1) και είναι κάθετη σε ευθεία (ε'): $y=4$

- Γ.** α) Διέρχεται από σημείο Α(-2,3) και σχηματίζει γωνία $\varphi=30^\circ$ με τον άξονα $x'x$.

β) Διέρχεται από σημείο Α(4,-5) και σχηματίζει γωνία $\varphi=90^\circ$ με τον άξονα $x'x$.

γ) Διέρχεται από σημείο Α(3,-3) και σχηματίζει γωνία $\varphi=135^\circ$ με τον άξονα $x'x$.

- Δ.** α) Τέμνει τους άξονες στα σημεία Α(4, 0) και Β(0, 4)

β) Τέμνει τους άξονες στα σημεία Α(-3, 0) και Β(0, 1)

- Ε.** α) Είναι μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών (ε_1): $3x-y+1=0$ και

(ε_2): $-6x+2y-3=0$

β) Είναι μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών (ε_1): $x=4$ και (ε_2): $x=-6$

γ) Είναι μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών (ε_1): $y=x$ και (ε_2): $y=x-3$

- Ζ.** α) Απέχει απόσταση $d=\sqrt{2}$ από γνωστή ευθεία (ε'): $2x+y-1=0$

β) Απέχει απόσταση $d=4$ από γνωστή ευθεία (ε'): $y=3$

- Η.** α) Διέρχεται από το Α(3, -1) και απέχει $d=\sqrt{2}$ από το Β(2, 2)

β) Διέρχεται από το Α(2, 1) και απέχει $d=1$ από το Β(0, 0)

- Θ.** α) Είναι μεσοκάθετη σε τμήμα ΑΒ με Α(-2, 1) και Β(2, 3)

β) Είναι μεσοκάθετη σε τμήμα ΑΒ με Α(3, 0) και Β(0, -5)

- Ι.** α) Είναι άξονας συμμετρίας του ΑΒ με Α(1, -1) και Β(-1, 3)

β) Είναι άξονας συμμετρίας του ΑΒ με Α(-3, 4) και Β(4, -3)

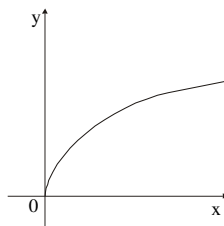
- Κ.** α) Διέρχεται από σημείο Α (2, 1) και σχηματίζει γωνία $\varphi=45^\circ$ με την ευθεία $x-y+1=0$
 β) Διέρχεται από σημείο Α(-2, 1) και σχηματίζει γωνία $\varphi=30^\circ$ με την ευθεία $y+2=0$
- Λ.** α) Διέρχεται από το Α(3, -2) και είναι παράλληλη σε διάνυσμα $\vec{v}=(0, 1)$
 β) Διέρχεται από το Α(-2, -3) και είναι παράλληλη σε διάνυσμα $\vec{v}=(2, 3)$
 γ) Διέρχεται από το Α(-1, 0) και είναι παράλληλη σε διάνυσμα $\vec{v}=(-4, 0)$
- Μ.** α) Διέρχεται από το Α(5, -2) και είναι κάθετη σε διάνυσμα $\vec{v}=(-1, 3)$
 β) Διέρχεται από το Α(-2, 2) και είναι κάθετη σε διάνυσμα $\vec{v}=(0, 4)$
- Ν.** α) Διέρχεται από το Α(1,-2) και σχηματίζει γωνία $\varphi=60^\circ$ με το διάνυσμα $\vec{v}=(1,1)$
 β) Διέρχεται από το Α(0,3) και σχηματίζει γωνία $\varphi=45^\circ$ με το διάνυσμα $\vec{v}=(2, 1)$
- Ξ.** α) Διέρχεται από το Α(-1, 2) και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 3 τ.μ.
 β) Διέρχεται από το Α(-1, 0) και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $\sqrt{2}$ τ.μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

- | | | | |
|-----|--|----------|----------|
| 1. | Η εξίσωση $x^2+y^2=a$ ($a>0$) παριστάνει κύκλο. | Σ | Λ |
| 2. | Η εξίσωση $x^2+y^2+kx+ly=0$ με $k,l \neq 0$ παριστάνει πάντα κύκλο. | Σ | Λ |
| 3. | Ο κύκλος με κέντρο $K(1, -1)$ που περνά από το σημείο $(-1,1)$ έχει πάντα εξίσωση: $(x-1)^2+(y+1)^2=8$. | Σ | Λ |
| 4. | Η εξίσωση $x^2+y^2+a(x+y+1)=0$ παριστάνει κύκλο για κάθε θετικό a . | Σ | Λ |
| 5. | Το σημείο $(\frac{\eta\mu\theta}{2}, \frac{\sigmaυν\theta}{2})$ ανήκει στον κύκλο $4(x-\eta\mu\theta)^2+4(y-\sigmaυν\theta)^2=1$ για κάθε πραγματικό αριθμό θ . | Σ | Λ |
| 6. | Οι κύκλοι $x^2+y^2+2x+3y-1=0$ και $x^2+y^2+2x+3y+\sqrt{2}=0$ είναι ομόκεντροι. | Σ | Λ |
| 7. | Το σημείο του κύκλου $x^2+y^2=4$ με τετμημένη 2 βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=x$. | Σ | Λ |
| 8. | Οι κύκλοι $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ και $(x-2)^2+(y+1)^2=10$ εφάπτονται εξωτερικά | Σ | Λ |
| 9. | Ο κύκλος $(x+1)^2+y^2=18$ τέμνει την ευθεία $y=x+1$. | Σ | Λ |
| 10. | Τα σημεία $(-2, 2)$ και $(4, 2)$ του κύκλου $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ είναι αντιδιαμετρικά. | Σ | Λ |
| 11. | Οι κύκλοι $x^2+(y-1)^2=3$ και $x^2+(y-1)^2=\frac{10}{3}$ έχουν δύο κοινά σημεία. | Σ | Λ |
| 12. | Η εξίσωση $(x+y)^2-4=2xy$ παριστάνει κύκλο. | Σ | Λ |
| 13. | Η εφαπτομένη ευθεία του κύκλου $x^2+y^2=1$ στο σημείο με τετμημένη 1 έχει εξίσωση $x+y=1$. | Σ | Λ |
| 14. | Η εξίσωση $x^2-2x+1+y^2=5$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $(1,0)$. | Σ | Λ |
| 15. | Η καμπύλη που παριστάνει η εξίσωση $x^2+y^2=a^2$ είναι γραφική παράσταση συνάρτησης. | Σ | Λ |
| 16. | Η σχέση $y=\sqrt{a^2-x^2}$ είναι τύπος συνάρτησης που παριστάνει ημικύκλιο $(-a \leq x \leq a)$. | Σ | Λ |
| 17. | Ένας κύκλος έχει το κέντρο του στην ευθεία $y=x$. Έχει πάντα εξίσωση $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$. | Σ | Λ |

- | | | | |
|------------|--|----------|----------|
| 18. | Ένα σημείο (x_1, y_1) είναι εσωτερικό ενός κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ . Ισχύει: $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 < \rho^2$. | Σ | Λ |
| 19. | Η παραβολή με κορυφή $O(0, 0)$ και εστία το σημείο $(1, 0)$ έχει παράμετρο $p=2$. | Σ | Λ |
| 20. | Η ευθεία που έχει εξίσωση $y=3$ είναι παράλληλη στη διευθετούσα της παραβολής $y^2=16x$. | Σ | Λ |
| 21. | Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxy η παραβολή $y^2=2px$ βρίσκεται πάντα στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας $y'y$ και η εστία E . | Σ | Λ |
| 22. | Ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $x^2=8y$. | Σ | Λ |
| 23. | Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $x^2=2py$ στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ είναι $yy_1=p(x+x_1)$. | Σ | Λ |
| 24. | Μια ευθεία και μια παραβολή έχουν ένα κοινό σημείο. Η ευθεία είναι εφαπτομένη της παραβολής. | Σ | Λ |
| 25. | Μια παραβολή με άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ και κορυφή $O(0, 0)$, έχει πάντα εξίσωση της μορφής $x^2=2py$. | Σ | Λ |
| 26. | Μια παραβολή με κορυφή το $O(0, 0)$ και διευθετούσα την $y=-\frac{p}{2}$, έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$. | Σ | Λ |
| 27. | Κάθε σημείο της παραβολής $y^2=8x$ ισαπέχει από την ευθεία $x=-2$ και το σημείο $(4, 0)$. | Σ | Λ |
| 28. | Όλα τα σημεία της $y^2=2px$ με $p>0$, εκτός του $(0, 0)$, έχουν θετική τετμημένη. | Σ | Λ |
| 29. | Η διευθετούσα της $y^2=3x$ είναι η ευθεία $x=-\frac{3}{4}$. | Σ | Λ |
| 30. | Η διευθετούσα της $x^2=4y$ είναι η ευθεία $y=-1$. | Σ | Λ |
| 31. | Ο κύκλος $(x-1)^2+y^2=1$ και η παραβολή $y^2=-2x$ εφάπτονται. | Σ | Λ |
| 32. | Η εστία της παραβολής $x^2=y$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=x$. | Σ | Λ |
| 33. | Στο σημείο (x_0, y_0) της παραβολής $y^2=2px$ η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{p}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$). | Σ | Λ |
| 34. | Ο κύκλος $x^2+y^2=1$ περνά από την εστία της παραβολής $y^2=4x$. | Σ | Λ |

- 35.** Η εξίσωση $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, παριστάνει καμπύλη της μορφής του διπλανού σχήματος.



Σ Λ

- 36.** Δύο από τις κορυφές και οι εστίες οποιασδήποτε έλλειψης, βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Σ Λ

- 37.** Όσο η εκκεντρότητα μιας έλλειψης πλησιάζει προς το 0, τόσο η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.

Σ Λ

- 38.** Η εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ παριστάνει έλλειψη μόνο αν $a > b$.

Σ Λ

- 39.** Η εστιακή απόσταση μιας έλλειψης είναι το μισό του μεγάλου άξονα.
Η εκκεντρότητα αυτής της έλλειψης είναι $\frac{1}{2}$.

Σ Λ

- 40.** Μια ευθεία που έχει ένα μόνο κοινό σημείο με μια έλλειψη, είναι πάντοτε εφαπτομένη της.

Σ Λ

- 41.** Η εξίσωση $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}y^2 = \frac{3}{2}$ παριστάνει έλλειψη.

Σ Λ

- 42.** Το σημείο $(κ, λ)$ ανήκει σε κάθε έλλειψη με κέντρο O, η οποία περιέχει το σημείο $(-κ, -λ)$.

Σ Λ

- 43.** Δύο ελλείψεις που έχουν τις ίδιες εστίες, είναι όμοιες.

Σ Λ

- 44.** Δύο όμοιες ελλείψεις έχουν πάντα τις ίδιες εστίες.

Σ Λ

- 45.** Το σημείο A(2, -2) βρίσκεται έξω από την έλλειψη C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Σ Λ

- 46.** Η εξίσωση $x^2 + ky^2 = 1$ παριστάνει έλλειψη μόνο όταν $k > 0$.

Σ Λ

- 47.** Η έλλειψη $x^2 + 2y^2 = 1$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ δεν έχουν κοινό σημείο.

Σ Λ

- 48.** Τα σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ είναι εσωτερικά της έλλειψης $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Σ Λ

- 49.** Η ευθεία $y=-3$ είναι εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1$. **Σ** **Λ**
- 50.** Η ευθεία $x=2$ είναι εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$. **Σ** **Λ**
- 51.** Εστιακή απόσταση μιας έλλειψης ονομάζεται η απόσταση δύο σημείων της που είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο της. **Σ** **Λ**
- 52.** Η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ στο σημείο της $M(\alpha \sin \theta, b \eta \mu \theta)$ είναι $(\sin \theta)x + (\eta \mu \theta)y = 1$. **Σ** **Λ**
- 53.** Η εκκεντρότητα της έλλειψης $4x^2 + y^2 = 4$ είναι $\epsilon = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **Σ** **Λ**
- 54.** Οι ελλείψεις $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ είναι όμοιες. **Σ** **Λ**
- 55.** Η εξίσωση μιας υπερβολής είναι $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ισχύει πάντα $a > b$. **Σ** **Λ**
- 56.** Η υπερβολή $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ τέμνει τον άξονα $y'y$ σε δύο σημεία. **Σ** **Λ**
- 57.** Όσο πιο μεγάλη είναι η εκκεντρότητα, τόσο πιο ανοικτή είναι η υπερβολή. **Σ** **Λ**
- 58.** Η ισοσκελής υπερβολή $x^2 - y^2 = a^2$ έχει εκκεντρότητα $\epsilon = \sqrt{2}$. **Σ** **Λ**
- 59.** Η υπερβολή $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $\epsilon_1: y = \frac{a}{b}x$ και $\epsilon_2: y = -\frac{a}{b}x$. **Σ** **Λ**
- 60.** Η εξίσωση $x^2 - 9y = 0$ παριστάνει υπερβολή. **Σ** **Λ**
- 61.** Το ορθογώνιο βάσης μιας υπερβολής έχει κοινά σημεία με την υπερβολή. **Σ** **Λ**
- 62.** Το σημείο $(5, 4)$ ανήκει σε μια ασύμπτωτη ευθεία της υπερβολής $16x^2 - 25y^2 = 40$. **Σ** **Λ**
- 63.** Υπάρχουν υπερβολές που οι ασύμπτωτές τους είναι κάθετες μεταξύ τους. **Σ** **Λ**

- 64.** Η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός. **Σ Λ**
- 65.** Η εξίσωση $kx^2 + \lambda y^2 = 0$ παριστάνει υπερβολή για κάθε $k, \lambda \in \mathbb{R}$. **Σ Λ**
- 66.** Η υπερβολή $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ τέμνει τον άξονα y' στα σημεία $(0, 2)$ και $(0, -2)$. **Σ Λ**
- 67.** Η υπερβολή $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$ έχει τέσσερα κοινά σημεία με τον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$. **Σ Λ**
- 68.** Η ευθεία $y = \frac{1}{2}x$ εφαπτεται της υπερβολής $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. **Σ Λ**
- 69.** Η διχοτόμος της γωνίας xOy τέμνει την υπερβολή $x^2 - y^2 = 4$ σε δύο σημεία. **Σ Λ**
- 70.** Κάθε ασύμπτωτη της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ είναι κάθετη σε μία από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. **Σ Λ**
- 71.** Υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $(\eta\mu\theta, 1)$ ανήκει στην υπερβολή $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$. **Σ Λ**
- 72.** Οι υπερβολές $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ και $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ έχουν τις ίδιες εστίες. **Σ Λ**
- 73.** Το σημείο $M(-2, 3)$ ανήκει στη γραμμή με εξίσωση
A. $x=3$ **B.** $x=-2$ **Γ.** $x^2+y^2=1$
Δ. $(x+2)^2+(x-3)^2=1$ **Ε.** $y^2=-2x$
- 74.** Το κέντρο του κύκλου που έχει διάμετρο AB με $A(1, -3)$ και $B(7, 5)$, έχει συντεταγμένες
A. $(4, 4)$ **B.** $(3, 4)$ **Γ.** $(4, -4)$ **Δ.** $(4, 1)$ **Ε.** $(4, -1)$
- 75.** Η ακτίνα του κύκλου $x^2 + y^2 = 8$ είναι
A. 2 **B.** $2\sqrt{2}$ **Γ.** $4\sqrt{2}$ **Δ.** 4 **Ε.** 8
- 76.** Το κέντρο του κύκλου $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$ είναι
A. $(3, -2)$ **B.** $(2, -3)$ **Γ.** $(2, 3)$ **Δ.** $(-2, 3)$ **Ε.** $(-3, 2)$

- 77.** Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $(-1, -1)$ και διέρχεται από το σημείο $(4, -3)$, είναι
A. $x^2+y^2=29$ **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{29}$
Γ. $(x+1)^2+(y+1)^2=\sqrt{29}$ **Δ.** $(x-1)^2+(y-1)^2=29$ **Ε.** $(x+1)^2+(y+1)^2=29$
- 78.** Ένας κύκλος που διέρχεται από το σημείο $(3, 9)$ και έχει ακτίνα 9, έχει εξίσωση
A. $x^2+y^2=81$ **B.** $x^2+y^2=3$ **Γ.** $x^2+y^2=9$
Δ. $(x-3)^2+y^2=81$ **Ε.** $(x-3)^2+y^2=49$
- 79.** Ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο $(1, 2)$ και εφάπτεται στον άξονα των $x'x$, έχει εξίσωση
A. $(x-1)^2+(y-2)^2=2$ **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2=2$
Γ. $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ **Δ.** $(x+1)^2+(y+2)^2=2$ **Ε.** $(x+1)^2+(y+2)^2=4$
- 80.** Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=5$ στο σημείο $(2, 1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία
A. $x-2y+1=0$ **B.** $2x+3y+7=0$ **Γ.** $x+2y=4$
Δ. $4x+2y+1=0$ **Ε.** $y=x$
- 81.** Ο κύκλος $(x-3)^2+(y-2)^2=\rho^2$ εφάπτεται του άξονα $x'x$. Η τιμή του ρ είναι
A. 1 **B.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** 5
Ε. καμία από τις προηγούμενες
- 82.** Ο κύκλος $x^2+y^2-6x-8y+k^2-2k+1=0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η τιμή του k είναι
A. 4 **B.** 3 **Γ.** 2 **Δ.** 1 **Ε.** 0
- 83.** Ο κύκλος που έχει κέντρο το $(x_0, 0)$, εφάπτεται στον άξονα $y'y$ ($x_0 \neq \rho$). Η εξίσωσή του είναι
A. $(x-x_0)^2+y^2=x_0^2$ **B.** $x^2+y^2=x_0^2$ **Γ.** $(x-x_0)^2+y^2=\rho^2$
Δ. $(x-\rho)^2+y^2=\rho$ **Ε.** $(x-x_0)^2+y^2=x_0$
- 84.** Ο κύκλος $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$ (α, β, ρ θετικοί) εφάπτεται στους δύο θετικούς ημιάξονες Ox, Oy , όταν
A. $\alpha=\beta \neq \rho$ **B.** $\alpha \neq \beta = \rho$ **Γ.** $\alpha > \beta$
Δ. $\alpha = \rho = \beta$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα
- 85.** Ο κύκλος που έχει εξίσωση την $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$
A. διέρχεται από το σημείο $A(a, a)$
B. διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{a}, \sqrt{a})$
Γ. έχει το κέντρο του στην $y=x+1$
Δ. έχει το κέντρο του στην ευθεία $y=-x$
Ε. εφάπτεται στους άξονες $x'x$ και $y'y$

86. Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις $C_1: (x-a)^2+y^2=a^2$ και $C_2: x^2+(y-a)^2=a^2$ ($a \neq 0$).
A. Η απόσταση των κέντρων τους είναι $2a$
B. Η απόσταση των κέντρων τους είναι $|a|\sqrt{2}$
Γ. Η απόσταση των κέντρων τους είναι $2a^2$
Δ. Το κέντρο του C_1 είναι εσωτερικό του C_2
Ε. Το κέντρο του C_2 βρίσκεται πάνω στον C_1

87. Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει πάντα κύκλο, όταν
A. $A^2+B^2-4\Gamma$ είναι τέλειο τετράγωνο **B.** $|A|+|B| \neq 0$
Γ. $A^2+B^2 > 4\Gamma$ **Δ.** $4A^2+4B^2-\Gamma < 0$ **Ε.** $A^2+B^2 < 4\Gamma$

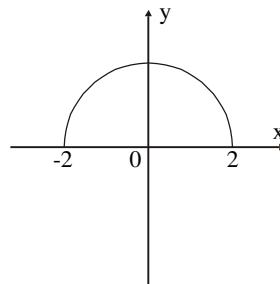
88. Ο κύκλος $x^2+y^2+x=0$
A. εφάπτεται στον x'
B. εφάπτεται στον y'
Γ. τέμνει τον y' σε δύο σημεία **Δ.** δεν τέμνει κανένα άξονα
Ε. εφάπτεται και στους δύο άξονες

89. Ο κύκλος $x^2+y^2-2a(x+y)=-a^2$, $a > 0$ έχει κέντρο
A. (a, a) **B.** $(2a, a)$ **Γ.** $(\frac{a}{2}, 2a)$ **Δ.** $(a, -2a)$ **Ε.** (a^2, a)

90. Δίνεται το σημείο $A(\frac{1}{2} \cdot \eta\mu\theta, \frac{1}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ και ο κύκλος $x^2+y^2=1$.
A. Το σημείο A ανήκει στον κύκλο, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$
B. Το σημείο A ανήκει στον κύκλο, αν $\theta \in (0, \pi)$
Γ. Το σημείο A βρίσκεται έξω από τον κύκλο
Δ. Το σημείο A βρίσκεται μέσα στον κύκλο
Ε. Το σημείο A βρίσκεται άλλοτε μέσα και άλλοτε έξω από τον κύκλο

91. Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(-1, -2)$ και περνά από το σημείο $(2, 2)$, είναι
A. $(x+1)^2+(y+2)^2=4$ **B.** $x^2+y^2+2x+2y=-3$
Γ. $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ **Δ.** $x^2+y^2-2x-4y=3$ **Ε.** $(x+1)^2+(y+2)^2=25$

92. Η εξίσωση του ημικυκλίου του διπλανού σχήματος είναι
A. $x^2+y^2=2$ **B.** $x^2+y^2=4$
Γ. $y=\sqrt{4-x^2}$ **Δ.** $x=\sqrt{4-y^2}$
Ε. $(x-2)^2+(y+2)^2=4$



93. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=5$ και το σημείο του $M(-1, 2)$. Η εφαπτομένη του στο M έχει εξίσωση
A. $2x-y=5$ **B.** $-x-2y=5$ **Γ.** $x+2y-5=0$
Δ. $x-2y+5=0$ **Ε.** $2x+y=5$

- 94.** Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=3$ και το σημείο του $M(\sqrt{2}, -1)$. Η εφαπτομένη στο M είναι
A. $-\sqrt{2}x+y-3=0$ **B.** $\sqrt{2}x-y-3=0$ **Γ.** $x-y=3$
Δ. $\sqrt{2}x+y=3$ **Ε.** $-x+\sqrt{2}y=3$
- 95.** Η παραβολή που έχει εστία $E(0, 4)$ και κορυφή το $O(0, 0)$, έχει εξίσωση
A. $y^2=8x$ **B.** $y^2=-8x$ **Γ.** $y^2=16x$
Δ. $x^2=16y$ **Ε.** $x^2=8y$
- 96.** Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2=16x$ στο σημείο $(1, 4)$ είναι παράλληλη στην ευθεία
A. $y = x$ **B.** $y = -x$ **Γ.** $y = 2x + 1$ **Δ.** $y = x + 2$ **Ε.** $4y = x$
- 97.** Τα κοινά σημεία της παραβολής $y^2=8x$ και της ευθείας $x-y=0$ είναι
A. $(0, 0)$ και $(1, 1)$ **B.** $(8, 8)$ και $(2, 1)$ **Γ.** $(0, 0)$ και $(8, 8)$
Δ. $(1, \sqrt{8})$ και $(-1, \sqrt{8})$ **Ε.** $(2, 4)$ και $(4, 2)$
- 98.** Το σημείο $A(\kappa, 4)$ ανήκει στην παραβολή $y^2=8x$. Το συμμετρικό σημείο A' του A ως προς τον άξονα $x'x$ είναι
A. $(4, 4)$ **B.** $(-4, 4)$ **Γ.** $(2, 4)$ **Δ.** $(2, -4)$ **Ε.** $(2, -2)$
- 99.** Μια παραβολή με κορυφή το $O(0, 0)$ έχει διευθετούσα την $x=\frac{3}{2}$. Η παραβολή αυτή έχει εξίσωση
A. $y^2=6x$ **B.** $y^2=-6x$ **Γ.** $y^2=3x$ **Δ.** $x^2=-6y$ **Ε.** $x^2=-3y$
- 100.** Η εξίσωση $y=ax^2$, $a \neq 0$ παριστάνει παραβολή
A. της μορφής $y^2=2px$ με $p=\frac{a}{2}$
B. της μορφής $y^2=2px$ με $p=2a$
Γ. η οποία βρίσκεται στο δεύτερο και τρίτο τεταρτημόριο
Δ. της μορφής $x^2=2py$ με $p=\frac{a}{2}$
Ε. με άξονα συμμετρίας τον $y'y$
- 101.** Η εξίσωση $y^2=4ax$
A. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $a>0$
B. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $a=\frac{1}{2}p$ ($p>0$)
Γ. παριστάνει παραβολή για κάθε $a \neq 0$
Δ. παριστάνει παραβολή για κάθε a πραγματικό αριθμό
Ε. παριστάνει παραβολή μόνο όταν a ρητός

- 102.** Οι παραβολές $y^2=ax$ και $x^2=ay$ ($a \neq 0$)
A. έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
B. εφάπτονται στο $O(0, 0)$
Γ. έχουν ένα ή δύο κοινά σημεία ανάλογα με το a
Δ. έχουν πάντα δύο κοινά σημεία
Ε. υπάρχει τιμή του a για την οποία δεν τέμνονται
- 103.** Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο της $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης
A. $\lambda = \frac{p}{y_1}$ **B.** $\lambda = \frac{2p}{y_1}$ **Γ.** $\lambda = \frac{y_1}{p}$ **Δ.** $\lambda = \frac{y_1}{2p}$ **Ε.** $\lambda = 2p$
- 104.** Οι εφαπτόμενες της παραβολής $y^2=2px$ στα σημεία (x_1, y_1) και $(x_1, -y_1)$
A. είναι παράλληλες
B. είναι πάντα κάθετες
Γ. τέμνονται σε σημείο του άξονα y'
Δ. τέμνονται σε σημείο του άξονα x'
Ε. σχηματίζουν πάντα οξεία γωνία
- 105.** Η εξίσωση $y^2=16|x|$
A. παριστάνει μια παραβολή
B. παριστάνει δύο παραβολές
Γ. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $x > 0$
Δ. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $x < 0$
Ε. παριστάνει δύο ευθείες
- 106.** Το σημείο $A(2, 4)$ της παραβολής $y^2=8x$ απέχει από τη διευθετούσα απόσταση
A. 2 **B.** 4 **Γ.** 8 **Δ.** 16 **Ε.** $\sqrt{8}$
- 107.** Αν E', E οι εστίες μιας έλλειψης με μεγάλο άξονα μήκους $2a$ και A τυχόν σημείο της έλλειψης, τότε
A. $(AE') - (AE) = a$ **B.** $(AE') + (AE) = a$ **Γ.** $(AE') = (AE)$
Δ. $(AE') + (AE) = 2a$ **Ε.** $(AE') - (AE) = 2a$
- 108.** Η απόσταση του κέντρου της έλλειψης $\frac{25x^2}{9} + 4y^2 = 1$ από τη μια εστία της είναι
A. $\frac{7}{6}$ **B.** $\frac{\sqrt{11}}{10}$ **Γ.** $\frac{\sqrt{11}}{5}$ **Δ.** $\frac{5}{2}$ **Ε.** $\frac{4}{3}$
- 109.** Η εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες $E'(0, -2)$ και $E(0, 2)$ και μικρό άξονα 10, είναι
A. $\frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{25} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ **Γ.** $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$
Δ. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{29} = 1$ **Ε.** $2x^2 - 2y^2 = 10$

- 110.** Από τις παρακάτω ελλείψεις με εστίες στον άξονα $y'y$ και κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, έχει εστιακή απόσταση 6 η

A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$ **Γ.** $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$
Δ. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8} = 1$ **Ε.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

- 111.** Έστω η έλλειψη $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ με εστιακή απόσταση 2γ και μεγάλο άξονα $2a$.

Τότε θα είναι πάντα

A. $a > b > \gamma$ **B.** $b^2 = \gamma^2 - a^2$ **Γ.** $0 < a < b$
Δ. $\gamma > a$ **Ε.** $\gamma < a$

- 112.** Η έλλειψη που έχει την ίδια εκκεντρότητα με την $C: \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$, είναι

A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ **Γ.** $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$
Δ. $\frac{y^2}{4^2} + \frac{x^2}{3^2} = 1$ **Ε.** $\frac{4x^2}{3^2} + \frac{4y^2}{5^2} = 1$

- 113.** Η έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ έχει μια εστία στο σημείο

A. $(2, 3)$ **B.** $(0, \sqrt{2})$ **Γ.** $(\sqrt{3}, 0)$ **Δ.** $(-1, 0)$ **Ε.** $(0, -1)$

- 114.** Οι ελλείψεις $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ έχουν

A. δύο μόνο κοινά σημεία **B.** τέσσερα κοινά σημεία
Γ. ένα μόνο κοινό σημείο **Δ.** κανένα κοινό σημείο
Ε. άπειρα κοινά σημεία

- 115.** Η εξίσωση $\beta^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 \beta^2$, $a, \beta \neq 0$

A. παριστάνει πάντα μία έλλειψη
B. παριστάνει πάντα έναν κύκλο
Γ. παριστάνει δύο τεμνόμενες ευθείες
Δ. παριστάνει μία έλλειψη, αν $a \neq \beta$
Ε. παριστάνει μία έλλειψη, αν $a = \beta$

- 116.** Η έλλειψη $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ είναι όμοια με την

A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$ **Γ.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$
Δ. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ **Ε.** $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

- 117.** Μια από τις ελλείψεις με εστίες τα σημεία $E'(-2, 0)$ και $E(2, 0)$ είναι και η
- A.** $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ **Γ.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$
- Δ.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ **Ε.** $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$
- 118.** Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ και το σημείο της $M(-\sqrt{5}, 0)$. Η εφαπτομένη της στο M θα είναι
- A.** $\sqrt{5}y - 5 = 0$ **B.** $\sqrt{5}x + 5 = 0$ **Γ.** $\sqrt{5}x - 15 = 0$
- Δ.** $-\sqrt{5}x + y - 15 = 0$ **Ε.** $3\sqrt{5}x - 15 = 0$
- 119.** Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 2$ και το σημείο της $M(\sqrt{2}, -1)$. Η εφαπτομένη της στο M θα έχει εξίσωση
- A.** $x - \sqrt{2}y = 4$ **B.** $\sqrt{2}x - 2y - 4 = 0$ **Γ.** $\sqrt{2}x + 2y = 4$
- Δ.** $x - 2y - 4 = 0$ **Ε.** $-\sqrt{2}x - 2y = 4$
- 120.** Μια ασύμπτωτη της υπερβολής $16x^2 - 25y^2 = 400$ είναι
- A.** $y = \frac{5}{4}x$ **B.** $y = \frac{4}{5}x$ **Γ.** $y = \frac{16}{25}x$
- Δ.** $y = \frac{25}{16}x$ **Ε.** καμία από τις προηγούμενες
- 121.** Η εξίσωση της υπερβολής που έχει εστιακή απόσταση $2c=8$ και εκκεντρότητα $\frac{4}{3}$ είναι
- A.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ **Γ.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$
- Δ.** $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ **Ε.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
- 122.** Μια υπερβολή έχει εξίσωση $C: \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$. Τότε
- A.** η C έχει τις εστίες της στον άξονα $y'y$
- B.** έχει ασύμπτωτες τις $y = \pm \frac{4}{3}x$
- Γ.** έχει εστίες $E'(-5, 0)$, $E(5, 0)$
- Δ.** είναι $a=3$ και $b=4$
- Ε.** έχει κορυφές $A'(-3, 0)$, $A(3, 0)$
- 123.** Οι υπερβολές $C_1: \beta^2x^2 - a^2y^2 = a^2\beta^2$ και $C_2: a^2y^2 - \beta^2x^2 = a^2\beta^2$ ($a \neq \beta$) έχουν
- A.** την ίδια εκκεντρότητα **B.** τις ίδιες εστίες
- Γ.** την ίδια εστιακή απόσταση **Δ.** διαφορετικές ασύμπτωτες
- Ε.** τις ίδιες κορυφές

- 124.** Η υπερβολή $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η έλλειψη $C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχουν
- A.** την ίδια εστιακή απόσταση
 - B.** τις ίδιες εστίες
 - Γ.** την ίδια εκκεντρότητα
 - Δ.** δύο από τις κορυφές της C_2 ταυτίζονται με τις κορυφές της C_1
 - Ε.** τέσσερα κοινά σημεία
- 125.** Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$. Η εφαπτομένη της στο M_1 θα έχει εξίσωση
- A.** $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1$
 - B.** $\frac{xx_1}{\beta^2} - \frac{yy_1}{a^2} = 1$
 - Γ.** $\beta^2 x_1 x - a^2 y_1 y = a^2 \beta^2$
 - Δ.** $a^2 x_1 x - \beta^2 y_1 y = 1$
 - Ε.** $xx_1 - yy_1 = 1$
- 126.** Η εξίσωση $kx^2 + \lambda y^2 = \mu$ με $k, \lambda, \mu \neq 0$ παριστάνει πάντα υπερβολή με
- A.** $\mu = 1$
 - B.** $k \cdot \lambda < 0$
 - Γ.** $\mu < 0$
 - Δ.** $k \neq \lambda$
 - Ε.** $k = \mu$ ή $\lambda = \mu$
- 127.** Οι υπερβολές $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = -1$ ($a \neq \beta$) έχουν
- A.** την ίδια εκκεντρότητα
 - B.** τις ίδιες ασύμπτωτες
 - Γ.** τις ίδιες εστίες
 - Δ.** τις ίδιες κορυφές
 - Ε.** μία μόνο κοινή εστία
- 128.** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{3} \sqrt{16x^2 - 144}$ ($x \geq 3$ ή $x \leq -3$) είναι
- A.** κύκλος με ακτίνα $\rho = 12$
 - B.** έλλειψη με $a = 3$ και $\beta = 4$
 - Γ.** υπερβολή με εστίες $(-5, 0), (5, 0)$
 - Δ.** τα δύο άνω τμήματα υπερβολής με εστίες $(-5, 0), (5, 0)$
 - Ε.** παραβολή με διευθετούσα $x = -\frac{5}{4}$
- 129.** Τα σημεία $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει: $|(AM) - (BM)| = 6$ με $A(-5, 0)$ και $B(5, 0)$
- A.** ανήκουν στην έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$
 - B.** ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$
 - Γ.** ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
 - Δ.** ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$
 - Ε.** ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

- 130.** Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 3$ και το σημείο της $M(-2, 1)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της στο M είναι

A. $x - 2y = 3$ **B.** $2x + y = 3$ **Γ.** $-2x + y = 3$
Δ. $2x + y + 3 = 0$ **E.** $2x - y + 3 = 0$

- 131.** Ένα σημείο της υπερβολής $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ είναι το $M(1, 2)$. Η εφαπτομένη της στο M έχει εξίσωση

A. $x + y + 1 = 0$ **B.** $2x - y = 2$ **Γ.** $x - 2y + 2 = 0$
Δ. $2x - y = -2$ **E.** $x - y + 1 = 0$

- 132.** Σε κάθε κύκλο της στήλης Α του παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη του στη στήλη Β. Το σημείο επαφής είναι το (x_0, y_0) .

στήλη Α	στήλη Β
κύκλος	εφαπτόμενη ευθεία
1. $x^2 + y^2 = 1$ $(0, 1)$	A. $y = 0$
2. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ $(2, 0)$	B. $x + 4(y + 2) = 5$
3. $x^2 + y^2 = 25$ $(3, 4)$	Γ. $y = 1$
4. $x^2 + (y + 2)^2 = 5$ $(1, 2)$	Δ. $y = x$
	E. $3x + 4y = 25$
	Z. $x - 2y = 1$

- 133.** Σε κάθε κύκλο της στήλης Α του παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε το κέντρο K και την ακτίνα του ρ που βρίσκονται στη στήλη Β

στήλη Α	στήλη Β
κύκλος	κέντρο - ακτίνα
1. $x^2 + y^2 - \sqrt{a} = 0, \quad a > 0$	A. $K(a, 1) \quad \rho = \frac{a}{2}$
2. $x^2 + y^2 - 2x + 2ay = -a^2$	B. $K(-1, \frac{3}{2}) \quad \rho = \frac{3}{2}$
3. $(x + a)^2 + (y - a)^2 = 2ax + 2a^2, \quad a \neq 0$	Γ. $K(0, 0) \quad \rho = \sqrt[4]{a}$
4. $2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y = -2$	Δ. $K(a, a) \quad \rho = a $
	E. $K(1, -a) \quad \rho = 1$
	Z. $K(0, a) \quad \rho = a $

- 134.** Να γράψετε τους παρακάτω κύκλους C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένας να έχει από τον προηγούμενό του μεγαλύτερη ακτίνα:

C₁: $x^2 + y^2 = 4$ **C₂:** $x^2 + 2x + y^2 = 9$ **C₃:** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$
C₄: $4x^2 + 4y^2 = 7$ **C₅:** $x^2 + (y - 2)^2 = 6$

- 135.** Να αντιστοιχίσετε κάθε παραβολή της στήλης Α του παρακάτω πίνακα με την εστία της στη στήλη Β.

στήλη Α παραβολή	στήλη Β εστία
1. $y^2 = px$	Α. $(-\frac{p}{2}, 0)$
2. $x^2 = py$	Β. $(\frac{p}{8}, 0)$
3. $y^2 = -2px$	Γ. $(\frac{p}{4}, 0)$
4. $y^2 = \frac{p}{2} x$	Δ. $(0, \frac{p}{2})$
	Ε. $(0, \frac{p}{4})$
	Ζ. $(0, -\frac{p}{2})$

- 136.** Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2x$. Σε κάθε σημείο της στήλης Α του παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη της παραβολής σ' αυτό το σημείο που γράφεται στη στήλη Β.

στήλη Α σημείο	στήλη Β εφαπτομένη παραβολής
1. $(0, 0)$	Α. $y = x + \frac{1}{2}$
2. $(\frac{1}{2}, 1)$	Β. ο άξονας $y'y$
3. $(\frac{1}{2}, -1)$	Γ. $-2y = x + 2$
4. $(2, 2)$	Δ. $y = x - 2$
	Ε. $-y = x + \frac{1}{2}$
	Ζ. $2y = x + 2$

- 137.** Στη στήλη Α του παρακάτω πίνακα δίνεται σε κάθε γραμμή η εστία Ε και η διευθετούσα δ μιας παραβολής, της οποίας η εξίσωση γράφεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α εστία - διευθετούσα	στήλη Β εξίσωση παραβολής
1. $E(-2, 0)$ και $\delta: x-2=0$	Α. $x^2 = 16y$
2. $E(0, 4)$ και $\delta: y+4=0$	Β. $y^2 = -8x$
3. $E(3, 0)$ και $\delta: x+3=0$	Γ. $y^2 = 8x$
	Δ. $y^2 = 12x$
	Ε. $x^2 = -16y$

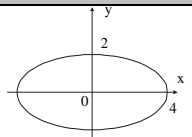
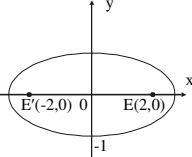
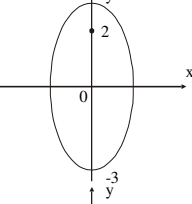
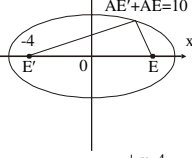
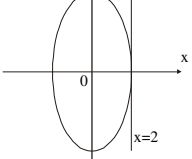
- 138.** Σε κάθε γραμμή της στήλης Α του παρακάτω πίνακα δίνεται η εξίσωση μιας παραβολής που έχει εστία Ε και διευθετούσα δ, που γράφονται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α	στήλη Β
1. $y^2=x$	Α. $E(-1, 0)$ και $\delta: x+1=0$
2. $y^2=-4x$	Β. $E(\frac{1}{4}, 0)$ και $\delta: x+\frac{1}{4}=0$
3. $x^2=20y$	Γ. $E(-5, 1)$ και $\delta: x+1=0$
	Δ. $E(-1, 0)$ και $\delta: x-1=0$
	Ε. $E(0, 5)$ και $\delta: y+5=0$

- 139.** Να γράψετε τις παρακάτω παραβολές C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 σε μια σειρά, έτσι ώστε καθεμία να έχει από τον προηγούμενη της μεγαλύτερη παράμετρο:

$C_1: y^2=4x$ $C_2: y^2=\frac{1}{4}x$ $C_3: y^2=-6x$ $C_4: y^2=\sqrt{2}x$ $C_5: x=2y^2$

- 140.** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε έλλειψη της στήλης Α του παρακάτω πίνακα την εξίσωσή της στη στήλη Β

στήλη Α - έλλειψη	στήλη Β - εξίσωση έλλειψης
1. 	Α) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$
2. 	Β) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$
3. 	Γ) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$
4. 	Δ) $x^2+5y^2=5$
5. 	Ε) $x^2+2y^2=1$
	Ζ) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

- 141.** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε εξίσωση υπερβολής της στήλης Α του παρακάτω πίνακα την εξίσωση μιας ασύμπτωτής της στη στήλη Β.

στήλη Α εξίσωση υπερβολής	στήλη Β ασύμπτωτη υπερβολής
1. $x^2 - y^2 = a^2$	A. $\sqrt{2}x - y = 0$
2. $2x^2 - y^2 = 4$	B. $3x - 4y = 0$
3. $(x - 2y) \cdot (x + 2y) = 4$	Γ. $y = x$
4. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$	Δ. $4x - 3y = 0$
	E. $2x - y = 0$
	Z. $x + 2y = 0$

- 142.** Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση υπερβολής της στήλης Α του παρακάτω πίνακα με τις ασύμπτωτές της στη στήλη Β.

στήλη Α εξίσωση υπερβολής	στήλη Β εξισώσεις ασυμπτώτων
1. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$	A. $y = \pm x$
2. $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 1$	B. $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}x$
3. $6x^2 - 5y^2 = 30$	Γ. $y = \pm 2x$
4. $x^2 - y^2 = 4$	Δ. $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}x$
	E. $y = \pm \frac{\sqrt{5} \sqrt{6}}{5}x$
	Z. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$

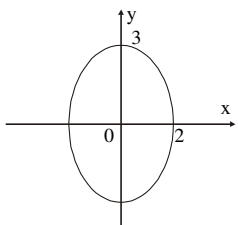
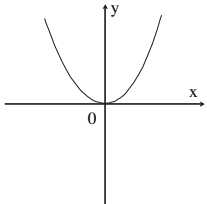
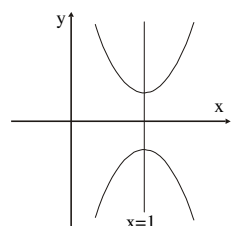
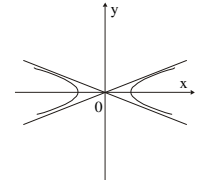
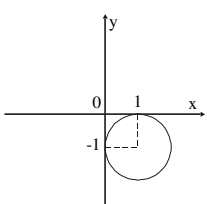
- 143.** Σε κάθε γραμμή της στήλης Α γράφεται η εξίσωση μιας κωνικής, η οποία έχει εκκεντρότητα που γράφεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α εξίσωση κωνικής τομής	στήλη Β εκκεντρότητα
1. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$	A. $\sqrt{3}$
2. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$	B. $\frac{\sqrt{13}}{3}$
3. $4x^2 + 9y^2 = 36$	Γ. $\frac{\sqrt{5}}{3}$
	Δ. $-\sqrt{13}$
	E. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

- 144.** Κάθε κωνική της στήλης Α του παρακάτω πίνακα έχει εξίσωση που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α είδος κωνικής τομής	στήλη Β εξίσωση γραμμής
1. κύκλος 2. παραβολή 3. έλλειψη 4. υπερβολή	Α. $x+y=1$ Β. $x^2+y^2=0$ Γ. $x^2=9-(y-1)^2$ Δ. $9x^2=63+7y^2$ Ε. $y^2-16x=0$ Ζ. $4x^2=100-25y^2$

- 145.** Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α του παρακάτω πίνακα με την αντίστοιχη γραφική παράσταση της στήλης Β.

στήλη Α	στήλη Β
1) $x^2=4y$	Α) 
2) $(x-1)^2+(y+1)^2=1$	Β) 
3) $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$	Γ) 
	Δ) 
	Ε) 

- 146.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει:
 α) Κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα 3
 β) Κέντρο $O(0, 0)$ και διάμετρο 6
 γ) Κέντρο $O(0, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(-6, 8)$
ΑΠ: α) και β) $x^2+y^2=9$, γ) $x^2+y^2=100$
- 147.** Να βρείτε την εξίσωση κύκλου, κέντρου $O(0, 0)$, αν:
 α) έχει ακτίνα $\rho=4$.
 β) το $A(-3, 4)$ είναι ένα σημείο του κύκλου.
 γ) εφάπτεται στην ευθεία $\epsilon: x+y=4$.
 δ) εφάπτεται στην ευθεία $\eta: x+3=0$.
- 148.** Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(2, -3)$ και $B(-2, 3)$ είναι διάμετρος του κύκλου $x^2+y^2=13$.
- 149.** Να βρείτε τη σχετική θέση του σημείου A ως προς τον κύκλο C αν:
 α) $A(-3, 2)$ και $C: x^2+y^2=2$ β) $A(0, 3)$ και $C: x^2+y^2=9$
 γ) $A(1, 1)$ και $C: x^2+y^2=10$
ΑΠ: α) εκτός, β) επί, γ) εντός
- 150.** Να βρείτε τη θέση των σημείων $A(4, -3)$, $B(-3, 2)$ και $\Gamma(3, -5)$ ως προς τον κύκλο $x^2+y^2=25$.
- 151.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(5\sin\theta, 5\eta\mu\theta)$.
- 152.** Να βρείτε το σημείο της ευθείας $\epsilon: y=x-8$ που απέχει την μικρότερη απόσταση από τον κύκλο $C: x^2+y^2=1$. Στη συνέχεια να βρείτε τη συγκεκριμένη απόσταση.
ΑΠ: $(2, -6)$, $4\sqrt{2}-1$
- 153.** ✓ Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=25$ και η ευθεία $\epsilon: y=x+4$.
 α) Να δείξετε ότι η ευθεία τέμνει τον κύκλο.
 β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου της χορδής που ορίζουν ο κύκλος με την ευθεία.
ΑΠ: β) $(-2, 2)$
- 154.** Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου $x^2+y^2=16$, που έχει μέσον το σημείο $M(2, 2)$.
ΑΠ: $y=-x+4$
- 155.** α) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου, κέντρου $O(0,0)$, που "κόβει" από την ευθεία $\epsilon: 3x+4y-15=0$, χορδή μήκους 8.
 β) Να βρείτε το μήκος της χορδής που αποκόπτει ο κύκλος $C: x^2+y^2=25$, από την ευθεία $\epsilon: y=\sqrt{3}x+8$.
ΑΠ: α) $x^2+y^2=25$, β) 6
- 156.** Να βρεθεί η εφαπτόμενη του κύκλου:
 α) $x^2+y^2=4$ στο $A(2, 0)$ β) $x^2=9-y^2$ στο $A(2\sqrt{2}, 1)$
ΑΠ: $x=2$, $2\sqrt{2}x+y=9$
- 157.** α) Να βρείτε το μ ώστε ο κύκλος $x^2+y^2=25$, να εφάπτεται στην ευθεία $2x+y=\mu$.
 β) Να δείξετε ότι η ευθεία $\epsilon: x+3y=10$, είναι εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=10$.
ΑΠ: $\mu=\pm 5\sqrt{5}$

158. ✓ Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=9$ και το σημείο $M(3, 1)$. Να βρείτε:

α) Τη θέση του σημείου ως προς τον κύκλο.

➡ β) Τις εξισώσεις των εφαπτόμενων από το M προς τον κύκλο.

γ) Τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζουν οι δύο εφαπτόμενες

ΑΠ: α) Έξω από τον κύκλο, β) $x=3, -4x-3y+15=0$, γ) $\frac{4}{5}$ και $-\frac{4}{5}$

159. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=10$ και το σημείο $A(3, 4)$. Από το A φέρουμε τις εφαπτόμενες προς τον κύκλο και έστω Λ και M τα σημεία επαφής.

α) Να δείξετε ότι η ΛM έχει εξίσωση $3x+4y=10$.

β) Να υπολογίστε το μήκος της χορδής ΛM .

160. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης του κύκλου $x^2+y^2=9$ που διέρχεται από το σημείο $A(3, 4)$

ΑΠ: $x=3, 7x-24y+75=0$

161. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2+y^2=9$ που γράφονται από το σημείο $(0, 6)$.

ΑΠ: $\sqrt{3}x-y+6=0$ και $-\sqrt{3}x-y+6=0$

162. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2+y^2=4$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $x+y=0$.

ΑΠ: $y=-x+2\sqrt{2}$ και $y=-x-2\sqrt{2}$

163. Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=10$, η οποία είναι:

α) Παράλληλη στην ευθεία $\epsilon: x+3y=4$.

β) Κάθετη στην ευθεία $\zeta: 3x+y=2$.

ΑΠ: α) $x+3y=\pm 10$, β) $x-3y=\pm 10$

164. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει:

α) Κέντρο $K(2, -1)$ και ακτίνα $\rho=2$

β) Κέντρο $K(2, -1)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$

γ) Διάμετρο AB με $A(-2, 1)$ και $B(4, -1)$

ΑΠ: α) $(x-2)^2+(y+1)^2=4$, β) $(x-2)^2+(y+1)^2=5$, γ) $(x-1)^2+y^2=10$

165. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν κύκλους και για όσες συμβαίνει αυτό να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα:

α) $x^2+(y-2)^2=4$

β) $(x-1)^2+(y+1)^2+9=0$

γ) $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

δ) $x^2+y^2=|a|$, με $a \neq 0$

ε) $(x-a)^2+(y-a)^2=\sqrt{3}$

ΑΠ: Κύκλο παριστάνουν όλες εκτός της β)

166. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις σε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy παριστάνουν κύκλους και να προσδιορίσετε τα κέντρα και τις ακτίνες τους:

α) $2x^2+2y^2-6x+10y-1=0$, β) $4x^2+4y^2-12x+5=0$

ΑΠ: α) $K(\frac{3}{2}, 0)$, $\rho=1$, β) $K(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$, $\rho=3$

167. Να βρείτε τη σχετική θέση του σημείου A ως προς τον κύκλο C αν:

α) $A(-3, 2)$ και $C: x^2+(y-2)^2=2$

β) $A(0, 3)$ και $C: (x-3)^2+(y+1)^2=25$

γ) $A(1, 1)$ και $C: (x-1)^2+(y+1)^2=10$

ΑΠ: α) εκτός, β) επί, γ) εντός

168. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $2\sqrt{2}$
- β) έχει κέντρο το σημείο (3, -1) και ακτίνα 5
- γ) έχει κέντρο το σημείο (-2, 1) και διέρχεται από το σημείο (-2, 3)
- δ) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με A (1, 3) και B (-3, 5)
- ε) διέρχεται από τα σημεία (2, 1), (1, 2) και (-2, -1)
- στ) διέρχεται από τα σημεία (3, 1), (-1, 3) και έχει κέντρο πάνω στην ευθεία $y=3x-2$
- ζ) έχει κέντρο το σημείο (8, -6) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- η) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x+y=10$
- θ) έχει ακτίνα 4, εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο (5, 4)
- ι) έχει κέντρο το σημείο (-3, 2) και εφάπτεται στον άξονα $y'y$
- ια) έχει κέντρο το σημείο (3, 3) και εφάπτεται του άξονα $x'x$
- ιβ) έχει κέντρο το σημείο (-3, 1) και εφάπτεται στην ευθεία $4x-3y+5=0$

ΑΠ: α) $x^2+y^2=8$, β) $(x-3)^2+(y+1)^2=25$, γ) $(x+2)^2+(x-1)^2=4$,

δ) $(x+1)^2+(y-4)^2=5$, ε) $x^2+y^2=5$, στ) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$,

ζ) $(x-8)^2+(y+6)^2=100$, η) $x^2+y^2=10$,

θ) $(x-9)^2+(y-4)^2=16$ ή $(x-1)^2+(y-4)^2=16$, ι) $(x+3)^2+(y-2)^2=9$,

ια) $(x-3)^2+(y-3)^2=9$, ιβ) $(x+3)^2+(y-1)^2=4$

169. ➡ Να δείξετε ότι το κοινό σημείο των ευθειών $\epsilon_1: x+\lambda y-\lambda=0$ και $\epsilon_2: \lambda x-y-1=0$ κινείται στον μοναδιαίο κύκλο.

170. Να βρείτε την εξίσωση κύκλου κέντρου K(2, -1) ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία $y=x+1$

ΑΠ: $(x-2)^2+(y+1)^2=8$

171. ✓ Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία $y=x$ στο σημείο A(2, 2) και διέρχεται από το σημείο B(-4, 2).

ΑΠ: $(x+1)^2+(y-5)^2=18$

172. Να γράψετε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABΓ με A(1, 3), B(-1, 3) και Γ(3, -3).

ΑΠ: $x^2+(y+\frac{2}{3})^2=\frac{130}{9}$

173. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο K(-2, 2) που εφάπτεται στους άξονες.

ΑΠ: $(x+2)^2+(y-2)^2=4$

174. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο, εφάπτεται στους άξονες και έχει ακτίνα ίση με 3.

ΑΠ: $(x-\sqrt{3})^2+(y+\sqrt{3})^2=3$

175. ➡ Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο (1, 0) και εφάπτεται στις ευθείες $3x+y+6=0$ και $3x+y-12=0$.

ΑΠ: $(x-0,1)^2+(y-2,7)^2=\frac{81}{10}$ ή $(x-1,9)^2+(y+2,7)^2=\frac{81}{10}$

176. ➡ Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στις ευθείες $x+2y=0$ και $x+2y=10$ και διέρχεται από το σημείο A(1, 2)

ΑΠ: $(x-3)^2+(y-1)^2=5$ ή $(x+1)^2+(y-3)^2=5$

177. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο που σχηματίζει η ευθεία $x+y-6=0$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

$$\text{ΑΠ: } (x-6\sqrt{2})^2 + (y-6\sqrt{2})^2 = 72$$

178. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης του C που είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

$$\text{ΑΠ: } y = -2 \text{ ή } y = 2$$

179. Θεωρούμε κύκλο C με διάμετρο OA, όπου A(8,6) και την ευθεία ε: $3x+4y=49$.

- α) Να προσδιορίσετε την εξίσωση του κύκλου.
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του O(0,0).
γ) Να αποδείξετε ότι η ε εφάπτεται του κύκλου.

$$\text{ΑΠ: α) } (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25, \text{ β) } 4x+3y=0$$

180. Δίνονται τα σημεία A(1, 2), B(2, 4) και Γ(3, 1).

- α) Να αποδειχθεί ότι: $\angle B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$
β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ.

$$\text{ΑΠ: } (x-\frac{5}{2})^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = \frac{5}{2}$$

181. ✓ Έστω ο κύκλος C: $(x-a)^2 + y^2 = 4$, για τον οποίο ισχύει:

- i) εφάπτεται στον γ'γ και ii) δεν εφάπτεται στην ευθεία ε: $x=4$.

- α) Να βρείτε το a.
β) Να βρείτε την εφαπτόμενή του σε σημείο με τετμημένη -1 και θετική τεταγμένη.

$$\text{ΑΠ: α) } a = -2, \text{ β) } x + \sqrt{3}y - 2 = 0$$

182. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A(3a, 0), B(0, 3a) και Γ(0, -3a), $a > 0$.

$$\text{ΑΠ: } x^2 + y^2 = 9a^2$$

183. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία (ε): $2x+y+1=0$ και διέρχεται από τα σημεία A(-1, 2) και B(3, -1).

$$\text{ΑΠ: } (x+\frac{1}{20})^2 + (y+\frac{9}{10})^2 = \frac{149}{16}$$

184. Βρείτε τον κύκλο που διέρχεται από τα A(1, 0) και B(3, 4) και έχει κέντρο ένα σημείο της ευθείας $y=2x-3$.

$$\text{ΑΠ: } (x-\frac{12}{5})^2 + (y-\frac{9}{5})^2 = \frac{130}{25}$$

185. Να δείξετε ότι οι κύκλοι $C_1: x^2+y^2=2$ και $C_2: (x-2)^2+(y-2)^2=18$, εφάπτονται εσωτερικά. Στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης τους.

186. Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων C_1 και C_2 αν:

- α) $C_1: x^2+y^2=1$ και $C_2: (x-2)^2+y^2=4$
β) $C_1: (x-2)^2+(y-3)^2=1$ και $C_2: (x-1)^2+(y-1)^2=1$
γ) $C_1: x^2+(y-2)^2=1$ και $C_2: (x-1)^2+(y-2)^2=4$

$$\text{ΑΠ: α) τέμνονται, β) ο ένας εκτός του άλλου, γ) εφάπτονται εσωτερικά}$$

187. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των κύκλων με εξισώσεις

- α) $x^2+(y-3)^2=4$ και $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ και β) $x^2+(y-3)^2=4$ και $(x-1)^2+(y-2)^2=16$

$$\text{ΑΠ: α) } \sqrt{26}+5, \sqrt{26}-5, \text{ β) } 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$$

188. Δίνεται το σημείο $M(1+\eta\mu\varphi, 2-\sigma\upsilon\eta\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

- α) Να δείξετε ότι το M κινείται σε κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.
β) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου αυτού, που διέρχονται από το O(0, 0).

- 189.** Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2-6x-4y-12=0$. Δείξτε ότι το $A(-1, 5)$ ανήκει στον κύκλο και να βρείτε τις συντεταγμένες του αντιδιαμετρικού σημείου του A .
ΑΠ: (7, 9)
- 190.** Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα $A(1, -1)$, $B(3, 1)$ και $\Gamma(-1, 3)$
ΑΠ: $x^2+y^2-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}y-\frac{10}{3}=0$
- 191.** Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$. Να βρείτε ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Ο κύκλος να περνά από την αρχή των αξόνων.
β) Ο κύκλος να έχει κέντρο στον x'
γ) Ο κύκλος να έχει κέντρο στον y'
δ) Ο κύκλος να έχει κέντρο στην ευθεία $y=x$.
- 192.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που διέρχεται από το σημείο $(1, 0)$ και εφάπτεται στις ευθείες $3x+y+6=0$ και $3x+y-12=0$.
ΑΠ: $(x-\frac{1}{10})^2+(y-\frac{27}{10})^2=\frac{81}{10}$ ή $(x-\frac{19}{10})^2+(y+\frac{27}{10})^2=\frac{81}{10}$
- 193.** Δίνεται η ευθεία $y=\lambda x$ και ο κύκλος $x^2+y^2-4x+1=0$. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η ευθεία:
α) να τέμνει τον κύκλο
β) να εφάπτεται του κύκλου
γ) να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.
ΑΠ: α) $-\sqrt{3} < \lambda < \sqrt{3}$, β) $\lambda = \sqrt{3}$ ή $\lambda = -\sqrt{3}$, γ) $\lambda < -\sqrt{3}$ ή $\lambda > \sqrt{3}$
- 194.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το κέντρο του κύκλου $x^2-2x+y^2-6x=0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $x+2y-7=0$.
ΑΠ: $y-3=2(x-1)$
- 195.** Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-4x+2y+1=0$. Να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης του C που διέρχεται από το $A(1, 2)$
ΑΠ: $y-2=\frac{3+2\sqrt{6}}{3} \cdot (x-1)$ ή $y-2=\frac{3-2\sqrt{6}}{3} \cdot (x-1)$
- 196.** Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-4x-2y+1=0$. Να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης του C που είναι κάθετη στην ευθεία $x-2y+2=0$
ΑΠ: $y=-2x+5+2\sqrt{5}$ ή $y=-2x+5-2\sqrt{5}$
- 197.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου $C: x^2+y^2+2x-10y+17=0$, που είναι:
α) Παράλληλες προς την ευθεία $\epsilon_1: 4x-3y+124=0$.
β) Κάθετες στην ευθεία $\epsilon_2: 4x-3y+123=0$.
- 198.** Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι $C_1: (x-2)^2+y^2=4$ και $C_2: x^2-2x+y^2=0$ εφάπτονται εσωτερικά.
- 199.** Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε οι κύκλοι $C_1: x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ και $C_2: x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$ να είναι ομόκεντροι.
ΑΠ: $A_1=A_2$ και $B_1=B_2$
- 200.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία $y=x$ και είναι ομόκεντρος του κύκλου $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

$$\text{ΑΠ: } (x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{9}{2}$$

- 201.** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ και η ευθεία $y = x - 3$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.
ΑΠ: (2, -1)
- 202.** Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 = 1$ και $C_2: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$.
α) Να δείξετε ότι δεν έχουν κοινά σημεία.
β) Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου τους.
γ) Από τα ζεύγη σημείων (A, B), για τα οποία το A ανήκει στον C_1 και το B ανήκει στον C_2 , να βρεθεί εκείνο για το οποίο η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη.
δ) Να επαναλάβετε το ερώτημα γ) για τα σημεία A, B, των οποίων η απόσταση είναι η μέγιστη.
- 203.** Θεωρούμε τον κύκλο $C: x^2 + y^2 + 4y = 0$ και το σημείο $A(-1, -1)$. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που ορίζει στον κύκλο χορδή, με μέσο το σημείο A.
ΑΠ: $y = x$
- 204.** ✓ ➡ Δίνεται κύκλος με κέντρο $K(3, 2)$ και ακτίνα $\rho = 5$.
α) Να βρείτε την γραμμή πάνω στην οποία κινούνται τα μέσα των χορδών του κύκλου με μήκος 4 μονάδες.
β) Να βρείτε την γραμμή πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων, που εφάπτονται του αρχικού και έχουν ακτίνα ίση με 2.
ΑΠ: α) Σε κύκλο $(K, \sqrt{21})$, β) Σε κύκλο $(K, 7)$
- 205.** ✓ Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2ax - 1 = 0$.
α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του a παριστάνει κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.
β) Να βρείτε εκείνον από τους παραπάνω κύκλους ο οποίος αποκόπτει από την ευθεία $y = 2x + 1$, χορδή η οποία είναι διάμετρος του.
- 206.** ✓ ➡ Να βρεθούν οι ευθείες της οικογένειας $(x - y + 2) + \mu \cdot (2x + y - 5) = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, που ορίζουν στον κύκλο $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$, χορδή μήκους $\sqrt{6}$.
ΑΠ: $3x + y = 6$, $3x - y = 0$
- 207.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2y + 1 + 2\lambda \cdot (x - y - 1) = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει οικογένεια κύκλων για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$, των οποίων τα κέντρα κινούνται σε μια ευθεία.
- 208.** Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων.
ΑΠ: Ο άξονας $x'x$
- 209.** ✓ Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y - 5 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει κύκλους και ότι οι κύκλοι αυτοί διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.
ΑΠ: (1, 2), (-1, -2)
- 210.** ✓ Έστω η γραμμή με εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x - \lambda y - 2 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.
(α) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
(β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων για τις διάφορες τιμές του λ .

$$\text{ΑΠ: (α)} K(-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}), \rho = \frac{\sqrt{2\lambda^2+8}}{2}, (\beta) y=-x$$

211. Δίνεται η εξίσωση $2x^2+2y^2+2\cdot(\lambda+1)^2-2\lambda\cdot(\lambda-x)=2\lambda y+6$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

A. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η (1) παριστάνει κύκλο.

B. Για $\lambda \neq 2$ να δείξετε ότι οι κύκλοι που παριστάνει η (1):

i) έχουν τα κέντρα τους σε μια ευθεία

ii) διέρχονται από σταθερό σημείο

iii) εφάπτονται στην ευθεία $\zeta: x-y=-2$

➡ iv) εφάπτονται μεταξύ τους

ΑΠ: A. $\lambda \neq 2$, B. i) $y=-x$, ii) $(-1, 1)$

212. ✓ Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+2\lambda x-4(\lambda+1)\cdot y+8\lambda+4=0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε $\lambda \neq 0$, των οποίων να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα με τη βοήθεια του λ .

β) Για $\lambda \neq 0$:

β_1) να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων της (1)

β_2) να δείξετε ότι οι κύκλοι της (1) έχουν κοινή εφαπτομένη την $x-2y+4=0$

ΑΠ: β_1) $y=-2x+2$

213. Δίνεται η εξίσωση: $x^2+y^2+6\mu x+8\lambda y=0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$. (1)

α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή των λ και μ , η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Έστω ότι για τους $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, ισχύει η σχέση $3\mu+2\lambda=0$. Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων, που ορίζονται από την εξίσωση (1), βρίσκονται σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να βρείτε τα λ και μ έτσι ώστε, αν A και B είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x+y+2=0$, να ισχύει $OA \cdot OB = 0$

δ) Για τις τιμές των λ και μ του ερωτήματος γ), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AOB.

214. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+(\mu+1)\cdot x+(\mu-1)\cdot y+\mu^2+3\mu+3=0$ (1), $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Δείξτε ότι η (1) παριστάνει κύκλους μόνο αν $-5 < \mu < -1$

β) Αν $-5 < \mu < -1$, τότε:

β_1) να δείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου από το οποίο διέρχονται όλοι οι κύκλοι της (1).

β_2) να βρείτε τη γραμμή πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων της (1).

➡ β_3) δείξτε ότι οι κύκλοι της (1) βρίσκονται εντός της ζώνης που ορίζεται από τις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: y=x-1$ και $\varepsilon_2: y=x+3$

ΑΠ: β_2) $y=x+1$

215. Δίνεται η εξίσωση: $x^2+y^2=2\cdot\eta\mu\theta\cdot x+2\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\cdot y$, $\theta \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

β) Να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία: $(\eta\mu\theta)x+(\sigma\upsilon\nu\theta)y=2$, εφάπτεται των κύκλων της (1).

- 216.** ✓ Δίνεται η εξίσωση: $(x-1)^2+(y-1)^2+\mu(x-1)=0$ (1).
 α) Για ποιες τιμές του μ η (1) παριστάνει κύκλο και ποιο είναι τότε το κέντρο και η ακτίνα του;
 β) Για τις τιμές του μ του ερωτήματος α), να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων της (1).
 ➡ γ) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της (1) περνούν από σταθερό σημείο.
 δ) Αν η ευθεία: $4x+3y-2=0$, εφάπτεται όλων των κύκλων της (1), να βρεθεί το $\mu \in \mathbb{R}$.
**ΑΠ: α) $\mu \neq 0$, $K(\frac{2-\mu}{2}, 1)$, $\frac{|\mu|}{2}$, β) η ευθεία $y=1$ εκτός του σημείου $(1, 1)$,
 γ) Το $(1,1)$, δ) $\mu=-10$ ή $\mu=\frac{10}{9}$**
- 217.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει ότι $AM \cdot MB = 0$, όπου $A(1, 3)$ και $B(-1, 7)$.
ΑΠ: Ο κύκλος $x^2+y^2-10y+20=0$ με κέντρο $K(0, 5)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$
- 218.** ➡ Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2+y^2-4x=0$ οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
ΑΠ: Ο κύκλος με εξίσωση $(x-1)^2+y^2=1$
- 219.** Αν $M(x, y)$ σημείο του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=4$, να βρεθούν οι γεωμετρικοί τόποι των σημείων $N(5x+1, 5y-3)$ και $K(\frac{x-2}{2}, \frac{y+4}{2})$.
ΑΠ: Οι κύκλοι αντίστοιχα $(x-1)^2+(y+3)^2=400$ και $(x+1)^2+(y-4)^2=4$
- 220.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεών τους από τις ευθείες $2x+y-7=0$ και $x-2y-1=0$ είναι ίσο με 40.
ΑΠ: Ο κύκλος $x^2+y^2-6x-2y-30=0$
- 221.** Έστω τα σημεία $A(0, 3)$ και $B(0, -3)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι $(MA)^2+(MB)^2=50$.
ΑΠ: ο κύκλος $x^2+y^2=4$
- 222.** Έστω τα σημεία $A(1, 5)$, $B(5, -2)$, $\Gamma(-3, -3)$ και το τυχαίο σημείο $M(x, y)$. Αν ισχύει:
 $(MA)^2 + (MB)^2 + (M\Gamma)^2 = 85$, τότε:
 α) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι κύκλος C , του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.
 β) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες του C , που φέρνουμε από το σημείο $(0, 3)$.
- 223.** ✓ Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2=2\mu \cdot (x-3y)$ (1), όπου $\mu \in \mathbb{R}^*$ σε σύστημα συντεταγμένων με κέντρο O .
 α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο C για κάθε $\mu \in \mathbb{R}^*$, ο οποίος διέρχεται από το O . Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ του C .
 β) Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την (1);
 γ) Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος που ορίζεται από την (1) εφάπτεται της ευθείας (ϵ) : $x-3y=0$.
 δ) Αν το τμήμα OB είναι διάμετρος ενός κύκλου που ορίζεται από την (1) με $\mu > 0$ και έχει μήκος $2\sqrt{10}$, να βρείτε την εφαπτόμενη του κύκλου αυτού στο σημείο B .

ΑΠ: α) Κ(μ, -3μ), ρ=|μ|√10, β) Η ευθεία γ=-3x, δ) Β(2, -6), γ=1/3 x - 20/3

224. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-3+\lambda \cdot (2x-y-5)=0$, (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο.

β) Δείξτε ότι ο κύκλος που προκύπτει από την (1) για $\lambda=0$ και η ευθεία $y=2x-5$ δεν έχουν κοινά σημεία.

γ) Να βρείτε συναρτήσει του λ τα κέντρα και τις ακτίνες της οικογένειας των κύκλων που παριστάνει η (1).

δ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων της (1).

ΑΠ: α) $\lambda < \frac{-10-2\sqrt{10}}{5}$ ή $\lambda > \frac{-10+2\sqrt{10}}{5}$,

γ) Κ(-λ, λ/2) και ρ=√(5λ²+20λ+12)/2, δ) γ=-x/2

225. Δίνονται τα σημεία Α(4, -2) και Β(1, 2).

α) Να βρείτε τα σημεία Μ του άξονα x'x για τα οποία ισχύει η σχέση $MA \cdot MB = 0$.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει η σχέση $MA \cdot MB = 0$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Τι παρατηρείτε;

δ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του προηγούμενου κύκλου, που διέρχονται από τα σημεία Μ του ερωτήματος α).

ε) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο το Α και εφάπτεται του x'x.

226. ✓ Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ (x, y), σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $x^2+y^2 \leq 3$.

β) $4 < x^2+y^2 < 9$.

γ) $x^2+y^2+2x-4y \geq 0$.

227. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση παραβολής	συντεταγμένες εστίας	εξίσωση διευθετούσας	άξονας συμμετρίας
$y^2 = 6x$			
$y^2 = -6x$			

228. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το (0, 0) στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) είναι συμμετρική ως προς το θετικό ημιάξονα Οx και έχει παράμετρο $p=5$

β) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα x'x και διέρχεται από το σημείο (-1, 4)

γ) είναι συμμετρική ως προς τον ημιάξονα Οy και διέρχεται από το σημείο (2, 2)

δ) έχει άξονα συμμετρίας τον γ'γ και εστία Ε (0, -4)

ε) έχει διευθετούσα δ: $x-2=0$

στ) έχει άξονα συμμετρίας τον Οx και εφάπτεται της ευθείας $y=4x+1$

ΥΠΟΔ: στ) Πρέπει το σύστημα των $y^2=2px$ και $y=4x+1$, ως προς x , να έχει $\Delta=0$

ΑΠ: α) $y^2=10x$, **β)** $y^2=-16x$, **γ)** $x^2=2y$, **δ)** $x^2=-16y$, **ε)** $y^2=-8x$,
στ) $y^2=16x$

- 229.** Να βρεθεί η σχετική θέση της ευθείας $x+y+1=0$ ως προς την παραβολή $y^2=2x$.

ΥΠΟΔ: Σύστημα

ΑΠ: Δεν έχουν κοινά σημεία

- 230.** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $y^2=3x$ στα σημεία $(0,0)$ και $(12,6)$.

ΑΠ: Ο y' και η $y = \frac{1}{4}x + 3$

- 231.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=3x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $2x-y+1999=0$.

ΑΠ: $y = 2x + \frac{3}{2}$

- 232.** Δίνεται η παραβολή $C: y^2=4x$. Να βρείτε:

α) Την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

β) Τις εξισώσεις των ευθειών, που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon_1: y=x-1$.

δ) Την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_2: 3x+y+3=0$.

ε) Τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής που άγονται από το σημείο $A(-2, 1)$.

ΑΠ: α) $(1, 0)$, $x = -1$, β) $y = x - 1$, $y = -x + 1$, γ) $x - y + 1 = 0$, δ) $y = \frac{1}{3}x + 3$,

ε) $x+y+1=0$, $x-2y+4=0$

- 233.** Έστω η παραβολή $C: y^2=2px$ και τα σημεία της $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της M , που έχει τεταγμένη $\frac{y_1+y_2}{2}$, είναι παράλληλη στην χορδή AB .

- 234. ✓** Δίνεται η παραβολή $C: y^2=8x$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής που απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 3.

β) Αν A, B είναι τα σημεία τομής μιας εφαπτομένης της παραβολής με τους άξονες xx' και yy' , αντίστοιχα, να βρείτε εκείνες τις εφαπτόμενες για τις οποίες είναι $(AB)=\sqrt{3}$.

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής, οι οποίες σχηματίζουν με την ευθεία $\varepsilon: y=3x+5$ γωνία 45° .

- 235.** Δίνεται η παραβολή $C: y^2=8x$ και το σημείο $A(-2, 3)$.

α) Να βρείτε τις εφαπτόμενες ευθείες της C που άγονται από το A .

β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες του α) ερωτήματος είναι κάθετες.

ΑΠ: $y = \frac{1}{2}x + 4$ και $y = -2x - 1$

236. Έστω η παραβολή $C: y^2=4px$, $p>0$. Μια χορδή AB της C είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ και έχει μήκος $8p$. Να αποδειχθεί ότι $OA \cdot OB = 0$.

237. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $(x, y) = (2pk^2, 2pk)$ με $p \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε μια παραβολή
β) Αν $A(2pk_1^2, 2pk_1)$, $B(2pk_2^2, 2pk_2)$ είναι δύο σημεία της παραβολής αυτής, να αποδειχθεί ότι αν η AB διέρχεται από την εστία, είναι $4k_1k_2 = -1$.

238. Ισόπλευρο τρίγωνο OAB είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $y^2=4px$ με κορυφή το O . Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

ΥΠΟΔ: $x_A=x_B$ έστω x_0 . Τότε $y_A=2\sqrt{px_0}$ και $y_B=-2\sqrt{px_0}$.

Πρέπει $OA=AB$.

ΑΠ: $x_A=x_B=12p$, $y_A=4p\sqrt{3}$, $y_B=-4p\sqrt{3}$ άρα ...

239. Έστω η παραβολή $C: y^2=2px$ και μια χορδή της AB παράλληλη με τον άξονα $y'y$, η οποία περνάει από την εστία. Να αποδειχθεί ότι:

- α) $(AB)=2(EK)$, όπου K το σημείο που τέμνει ο άξονας $x'x$ τη διευθετούσα
β) Οι εφαπτόμενες στα A και B διέρχονται από το K

240. Αν $K(-2, 1)$, $L(0, 3)$ και $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της παραβολής $C: y^2=4x$, να βρείτε τις συντεταγμένες του M , για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου KLM λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του.

ΑΠ: $(1, 2)$

241. Να βρεθούν τα σημεία της παραβολής $y^2=2px$ που απέχουν από την εστία E απόσταση διπλάσια της OE .

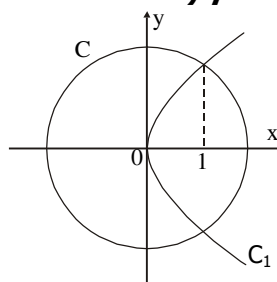
ΑΠ: $(\frac{p}{2}, p)$ και $(\frac{p}{2}, -p)$

242. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=2$ και η παραβολή $y^2=8x$.

- ➡ α) Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες του κύκλου και της παραβολής.
β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.

ΑΠ: α) $y=x+2$ ή $y=-x-2$

243. Ο κύκλος του διπλανού σχήματος διέρχεται από την εστία της παραβολής. Να βρεθούν οι εξισώσεις του κύκλου και της παραβολής.



ΑΠ: $C: x^2+y^2=(2+\sqrt{5})^2$, $C_1: y^2=2 \cdot (4+2\sqrt{5})x$

244. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση έλλειψης	συντεταγμένες εστιών	συντεταγμένες κορυφών	εκκεντρότητα
$4x^2+9y^2=36$			
$x^2+4y^2=16$			

- 245.** Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει μεγάλο και μικρό άξονα με μήκος 6 και 4 μονάδες αντιστοίχως και έχει εστίες πάνω στον άξονα $x'x$ συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.

$$\text{ΑΠ: } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

- 246.** Να εξετάσετε αν υπάρχει έλλειψη στην οποία ένα σημείο της M να σχηματίζει με τις εστίες E' και E ισόπλευρο τρίγωνο.

- 247.** Να βρείτε τα σημεία M της έλλειψης $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, ώστε $E'ME = 90^\circ$, όπου E', E οι εστίες της έλλειψης.

$$\text{ΑΠ: } \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- 248.** ✓ Ο κύκλος με κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $a > \beta$. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.

$$\text{ΑΠ: } \varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- 249.** Δείξτε ότι οι ελλείψεις $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $C': \frac{\kappa^2 x^2}{a^2} + \frac{\kappa^2 y^2}{\beta^2} = 1$ είναι όμοιες.

- 250.** Να συγκριθούν οι εκκεντρότητες των ελλείψεων $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και

$$C_2: \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{\beta^4} = 1, \text{ με } a > \beta.$$

$$\text{ΑΠ: } \varepsilon_2 > \varepsilon_1$$

- 251.** Να βρεθεί η μορφή της εξίσωσης της έλλειψης με εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{ΑΠ: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{a^2} = 1 \text{ ή } \frac{2x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

- 252.** ✓ Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$.

α) Να δείξετε ότι το σημείο $(1, -\sqrt{3})$ είναι κοινό τους σημείο και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα κοινά σημεία.

β) Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

γ) Να βρεθούν τα σημεία $M(x_0, y_0)$ ώστε $x_0^2 + y_0^2 = 4$ και $(E'M) + (EM) = 2\sqrt{6}$ (E', E οι εστίες της έλλειψης).

$$\text{ΑΠ: } \alpha) \text{ και } \gamma) (1, -\sqrt{3}), (-1, -\sqrt{3}), (1, \sqrt{3}), (-1, \sqrt{3})$$

- 253.** Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $9x^2 + 16y^2 = 144$ που είναι:

α) παράλληλες προς την ευθεία $(\varepsilon): x + y = 0$

β) κάθετες στην ευθεία (ε) .

ΑΠ: Σημεία επαφής: α) $(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}), (-\frac{16}{5}, -\frac{9}{5}), \beta) (\frac{16}{5}, -\frac{9}{5}), (-\frac{16}{5}, \frac{9}{5})$

254. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $E'BEB'$ είναι ρόμβος (E', E οι εστίες, B, B' τα άκρα του μικρού άξονα)
β) Να βρεθεί το εμβαδόν του ρόμβου.

ΑΠ: β) $\frac{\beta \cdot \gamma}{2}$

255. Έστω κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2$. Αν θέσουμε $x = x'$ και $y = cy'$, $c \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι το σημείο (x', y') ανήκει σε έλλειψη.

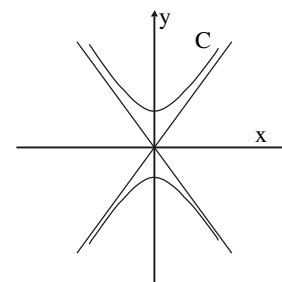
256. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση υπερβολής	συντεταγμένες εστιών	εκκεντρότητα	εξισώσεις ασυμπτώτων
$x^2 - 9y^2 = 9$			
$x^2 - y^2 - 4 = 0$			

257. Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής C του διπλανού σχήματος, της οποίας η μια ασύμπτωτη έχει εξίσωση

$$y = -\frac{4}{3}x. \text{ Να βρεθούν:}$$

- α) οι εστίες της υπερβολής
β) η εστιακή της απόσταση
γ) η εξίσωσή της
δ) να προσδιοριστεί το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής
ε) η εκκεντρότητά της.



ΑΠ: α) $E_1(0, 5), E_2(0, -5), \beta) E_1E_2 = 10, \gamma) \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1, \epsilon) \epsilon = \frac{5}{4}$

258. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις εστίες της στον άξονα $x'x$ συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και ακόμα:

α) έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 6$ και εκκεντρότητα $\epsilon = \frac{3}{2}$

β) έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 20$ και εξισώσεις ασυμπτώτων $y = \frac{4}{3}x$ και

$$y = -\frac{4}{3}x.$$

γ) έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 4$ και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.

ΑΠ: α) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1, \beta) \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1, \gamma) \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

259. Έστω η υπερβολή $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Να δειχθεί ότι κάθε παράλληλη προς μια ασύμπτωτη τέμνει την υπερβολή σ' ένα μόνο σημείο.

- 260.** Έστω Μ τυχαίο σημείο της υπερβολής $y^2 - x^2 = a^2$, (ε) η εφαπτομένη στο Μ και Α, Β τα σημεία που η (ε) τέμνει τις ασύμπτωτες. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι σταθερό.

ΑΠ: $E = a^2$

- 261.** Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ και Μ (x_1, y_1) ένα σημείο της διαφορετικό από τις κορυφές της. Αν ε η εφαπτομένη στο Μ και η κάθετη ε' της ε στο Μ τέμνει τους άξονες $x'x, y'y$ στα Γ και Δ αντίστοιχα:
 α) να βρεθεί συναρτήσει των x_1, y_1 η εξίσωση της ε'
 β) να βρεθούν οι συντεταγμένες των Γ και Δ
 γ) να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Ν του ΓΔ
 δ) να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος του Ν είναι μια υπερβολή C_1
 ε) να αποδειχθεί ότι οι υπερβολές C και C_1 έχουν τις ίδιες εκκεντρότητες.

ΑΠ: α) $y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$, β) $\Gamma(x_1 \cdot \varepsilon^2, 0)$, $\Delta(0, y_1 \cdot \frac{y^2}{b^2})$, γ) $N(\frac{x_1}{2} \varepsilon^2, \frac{y_1}{2} \cdot \frac{y^2}{b^2})$,

$$\delta) \frac{x^2}{\left(\frac{y^2}{2a}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{y^2}{2b}\right)^2} = 1$$

- 262.** ✓ Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ και την ευθεία $y = 2$.

ΑΠ: $\frac{16}{3}$

- 263.** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες της υπερβολής $4y^2 - x^2 = 4$ με την ευθεία $\varepsilon: y + 2x = 8$

ΑΠ: $\frac{128}{15}$ τ.μ.

- 264.** Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτομένων της υπερβολής $25x^2 - 4y^2 = 100$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία $3x - y = 0$.

ΑΠ: $\left(\frac{12\sqrt{11}}{11}, \frac{25\sqrt{11}}{11}\right)$ και $\left(-\frac{12\sqrt{11}}{11}, -\frac{25\sqrt{11}}{11}\right)$

- 265.** Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

ΑΠ: $x^2 - y^2 = \frac{9}{2}$

266. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ με κλάδους C_1 και C_2 και τυχαίο σημείο της

$M(x_1, y_1)$ στον κλάδο C_1 ($y_1 \neq 0$).

α) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτόμενης (ϵ) στο σημείο M και να βρείτε τα σημεία τομής της (ϵ) με τους άξονες.

➡ β) Να δείξετε ότι η (ϵ) τέμνει τον $x'x$ σε σημείο μεταξύ των κορυφών της υπερβολής.

➡ γ) Με δεδομένο ότι η (ϵ) τέμνει τον κλάδο C_2 στο $M'(x_2, y_2)$, να δείξετε ότι $y_1 \cdot y_2 < 0$.

ΑΠ: α) Τα σημεία τομής με τους άξονες είναι $A(\frac{a^2}{x_1}, 0)$, $B(0, -\frac{b^2}{y_1})$

ΥΠΟΔ: Το γ) προκύπτει από το β)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1.	Λ	17.	Λ	33.	Σ	49.	Λ	65.	Λ		78.	1	Γ
2.	Σ	18.	Σ	34.	Σ	50.	Σ	66.	Δ			2	Δ
3.	Σ-Σ	19.	Σ	35.	Λ	51.	Σ	67.	α	Δ		3	Z
4.	Σ	20.	Λ	36.	Σ	52.	Σ		β	E		4	H
5.	Λ	21.	Λ	37.	Σ	53.	Σ		γ	Δ	79.	1	Z
6.	Σ	22.	Σ	38.	Λ	54.	Σ		δ	A		2	Γ
7.	Λ	23.	Σ	39.	Σ	55.	Λ	68.	E			3	A
8.	Λ	24.	Σ	40.	Σ	56.	Λ	69.	Δ			4	H
9.	Λ	25.	Σ	41.	Σ	57.	Σ	70.	E	80.	1	Γ	
10.	Σ	26.	Σ	42.	Σ	58.	Λ	71.	E		2	Δ	
11.	Σ	27.	Λ	43.	Σ	59.	Σ	72.	B		3	B	
12.	Σ	28.	Σ	44.	Σ	60.	Σ	73.	B		4	A	
13.	Λ	29.	Σ	45.	Λ	61.	Λ	74.	A	81.	1	Γ	
14.	Σ	30.	Λ	46.	Λ	62.	Λ	75.	E		2	A	
15.	Λ	31.	Λ	47.	Σ	63.	Λ	76.	Γ		3	Δ	
16.	Σ	32.	Σ	48.	Λ	64.	Λ	77.	E		4	E	

ΕΥΘΕΙΑ

1.	Σ	28.	Σ	55.	Λ	82.	Δ	99.	1	Γ
2.	Σ	29.	Σ	56.	Λ	83.	E		2	Δ
3.	Λ	30.	Λ	57.	Σ	84.	Δ		3	A
4.	Λ	31.	Σ	58.	Σ	85.	Γ		4	H
5.	Σ	32.	Λ	59.	Σ	86.	E		5	Z
6.	Λ	33.	Σ	60.	Σ	87.	Δ		6	Θ
7.	Λ	34.	Λ	61.	Λ	88.	Γ	100.	1	Γ
8.	Λ	35.	Σ	62.	Σ	89.	Δ		2	E
9.	Λ	36.	Σ	63.	Σ	90.	Δ		3	Δ
10.	Λ	37.	Σ	64.	B	91.	B	101.	1	B
11.	Λ	38.	Σ	65.	E	92.	A		2	Δ
12.	Λ	39.	Σ	66.	B	93.	Γ		3	A
13.	Σ	40.	Σ	67.	B	94.	A		4	Γ
14.	Λ	41.	Λ	68.	E	95.	Δ	102.	1	A
15.	Λ	42.	Λ	69.	Δ	96.	B		2	E
16.	Σ	43.	Σ	70.	Δ	97.	E		3	Γ
17.	Σ	44.	Σ	71.	B	98.	Δ	103.	1	Δ
18.	Σ	45.	Σ	72.	B				2	Z
19.	Σ	46.	Σ	73.	Γ				3	A
20.	Σ	47.	Λ	74.	E				4	Γ
21.	Λ	48.	Λ	75.	Δ			104.	ε ₃	
22.	Σ	49.	Λ	76.	Γ				ε ₆	
23.	Λ	50.	Σ	77.	B				ε ₅	
24.	Λ	51.	Λ	78.	Δ				ε ₄	
25.	Λ	52.	Σ	79.	Γ				ε ₂	
26.	Σ	53.	Σ	80.	Δ				ε ₁	
27.	Σ	54.	Σ	81.	B					

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

1.	Σ
2.	Σ
3.	Σ
4.	Λ
5.	Σ
6.	Σ
7.	Λ
8.	Λ
9.	Σ
10.	Σ
11.	Λ
12.	Σ
13.	Λ
14.	Σ
15.	Λ
16.	Σ
17.	Λ
18.	Σ
19.	Σ
20.	Λ
21.	Σ
22.	Λ
23.	Λ
24.	Λ
25.	Σ
26.	Λ
27.	Λ
28.	Σ
29.	Σ
30.	Σ
31.	Σ
32.	Λ
33.	Σ
34.	Σ
35.	Σ
36.	Σ
37.	Σ
38.	Λ
39.	Σ

40.	Σ
41.	Σ
42.	Σ
43.	Λ
44.	Λ
45.	Λ
46.	Σ
47.	Λ
48.	Σ
49.	Σ
50.	Λ
51.	Λ
52.	Λ
53.	Λ
54.	Σ
55.	Λ
56.	Λ
57.	Σ
58.	Σ
59.	Λ
60.	Λ
61.	Σ
62.	Σ
63.	Σ
64.	Σ
65.	Λ
66.	Λ
67.	Σ
68.	Λ
69.	Λ
70.	Σ
71.	Λ
72.	Σ
73.	B
74.	Δ
75.	B
76.	A
77.	E
78.	Δ

79.	Г
80.	Δ
81.	В
82.	Δ
83.	А
84.	Δ
85.	Е
86.	В
87.	Г
88.	В
89.	А
90.	Δ
91.	Е
92.	Г
93.	Δ
94.	В
95.	Δ
96.	Г
97.	Г
98.	Δ
99.	В
100.	Е
101.	Г
102.	Δ
103.	А
104.	Δ
105.	В
106.	В
107.	Δ
108.	В
109.	Δ
110.	Е
111.	Е
112.	Е
113.	Е
114.	В
115.	Δ
116.	Δ
117.	А

118.	B	
119.	B	
120.	B	
121.	B	
122.	Г	
123.	Г	
124.	Δ	
125.	Г	
126.	B	
127.	B	
128.	Δ	
129.	E	
130.	Δ	
131.	E	
132.	1	Г
	2	A
	3	E
	4	Δ
133.	1	Г
	2	E
	3	Z
	4	B
134.	C₄	
	C₁	
	C₅	
	C₃	
	C₂	
135.	1	Г
	2	E
	3	A
	4	B
136.	1	B
	2	A
	3	E
	4	Z
137.	1	B
	2	A
	3	Δ

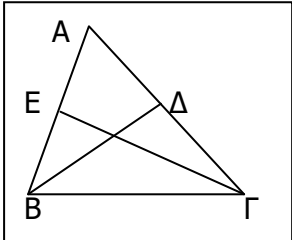
[illegible]

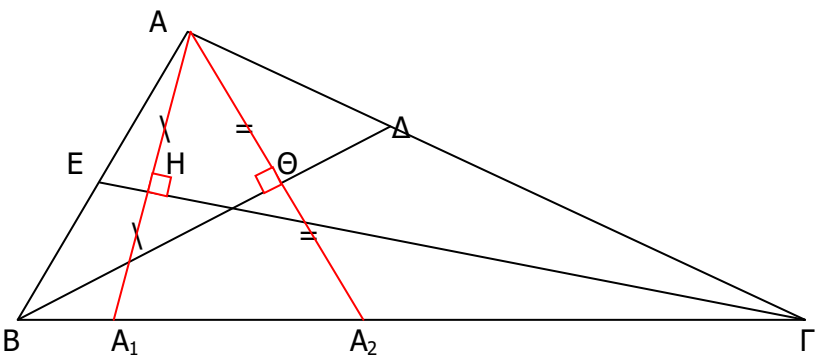
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

86.	β) Δείξτε ότι $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{ZB}$
144.	Αφού η σχέση ισχύει για κάθε κ, λ μπορούμε να θέσουμε όπου κ και λ επιθυμητές τιμές
145.	Από τις δοσμένες σχέσεις έχουμε: $\vec{a}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a}^2$ και $\vec{a}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta}^2$ δηλαδή $2\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -\vec{a}^2 = -\vec{\beta}^2$, άρα $ \vec{a} - \vec{\beta} ^2 = \vec{a}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 2\vec{a}^2 + \vec{a}^2 = 3\vec{a}^2$
146.	$(\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 = 0$, άρα $\vec{a}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}) = 0$, άρα $\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma} = -19$.
155.	δ) Απαιτούμε $\det = 0$ και ελέγχουμε τα κ που βρήκαμε αν δίνουν διανύσματα ομόρροπα ή αντίρροπα. ε) Αρκεί $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) \neq 0$
160.	Αν $\hat{A} = 1^\circ$ τότε $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 0$. Ακόμη $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{\beta} + \vec{\gamma})$, άρα $4\overrightarrow{AM} = \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 = \vec{a}^2$, άρα $ \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \vec{a} $. Το αντίστροφο, αντίστροφα.
162.	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$ (1), $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}$ (2). Πολλαπλασιασμός των (1), (2) και χρήση των ισοτήτων $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$ και $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$
163.	Ισχύει $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$ (1) και $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$ (2) και $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DG} = 0$ και πολλαπλασιάζουμε τις (1), (2) κατά μέλη.
164.	α) Ισχύει $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AM}$ (1) Ακόμη $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB}$ (2) Υψώνουμε στο τετράγωνο τα μέλη των (1), (2) και προσθέτουμε κατά μέλη. β) Ισχύουν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ (1), $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG}$ (2) ενώ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MG}$ (3) και $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{\overrightarrow{BG}}{2} \cdot \overrightarrow{MD}$ (4) Αν υψωθούν στο τετράγωνο οι (1), (2) και μετά αφαιρεθούν κατά μέλη, τότε βάσει των (3), (4) προκύπτει η ζητούμενη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

151.	Το Α(1, 2) δεν επαληθεύει τις ευθείες. Έστω ΒΔ: $x - 3y + 1 = 0$ και ΓΕ: $y - 1 = 0$. Δ μέσο ΑΓ άρα $x_\Delta = \frac{1+x_\Gamma}{2}$ και $y_\Delta = \frac{2+y_\Gamma}{2}$. Όμως $\Delta \in B\Delta$ άρα $x_\Delta - 3y_\Delta + 1 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{1+x_\Gamma}{2} - 3 \cdot \frac{2+y_\Gamma}{2} + 1 = 0$ (1) Επίσης $\Gamma \in GE$ άρα $y_\Gamma - 1 = 0$ (2) Από (1) και (2) βρίσκουμε το Γ. Όμοια βρίσκουμε το Β κ.τ.λ.	
152.	Όμοια με την προηγούμενη	
153.	Όμοια	

154.	 Έστω ΒΔ και ΓΕ οι διχοτόμοι. Φέρνουμε $AA_1 \perp BE$ και $AA_2 \perp B\Gamma$. Τότε Η μέσο AA_1 και Θ μέσο AA_2. Οι ΑΗ και ΑΘ διέρχονται από γνωστό σημείο Α και είναι κάθετες σε γνωστές ευθείες, οπότε οι εξισώσεις τους υπολογίζονται. Βρίσκουμε τα Η και Θ ως τομές γνωστών ευθειών. Στη συνέχεια βρίσκουμε τα A_1 και A_2 αφού $x_H = \frac{x_A + x_{A_1}}{2}$ κ.τ.λ. Από τα A_1 και A_2 προσδιορίζουμε τη ΒΓ.
161.	α) Υποθέσατε ότι $(x_0, y_0) \in \epsilon$ και αποδείξτε ότι το συμμετρικό του ως προς τον x' ανήκει στην ϵ_1 . Όμοια και για τα β) και γ).
180.	Θεωρείστε την εξίσωση ως δευτεροβάθμια με άγνωστο x ή y .
185.	Παραγοντοποιούμε τη σχέση με ομαδοποίηση, αναλύοντας το $-3xy$ σε $-4xy + xy$
186.	Βρείτε το συμμετρικό του Σ ως προς την ϵ . Αυτό το σημείο λόγω συμμετρίας θα ανήκει και στην ανακλώμενη
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ	
158.	β) Η πιθανές εφαπτόμενες είναι η $\epsilon_1: x=3$ (που είναι γιατί $d(O, \epsilon_1)=\rho$) και οι ευθείες μορφής $\epsilon_2: y-1=\lambda \cdot (x-3)$. Το λ βρίσκεται από τη σχέση $d(O, \epsilon_2)=\rho$
169.	Αρκεί να δείξουμε ότι $x_0^2 + y_0^2 = 1$, όπου (x_0, y_0) το κοινό σημείο των ϵ_1 και ϵ_2
175.	Αν $K(x_0, y_0)$ το κέντρο και ϵ_1, ϵ_2 οι ευθείες απαιτούμε πρώτα $d(K, \epsilon_1)=d(K, \epsilon_2)$, από όπου βρίσκουμε μια εξίσωση με x_0, y_0 (σχέση (1)) Στη συνέχεια βρίσκουμε την απόσταση των ϵ_1, ϵ_2 που αποτελεί τη διάμετρο, αφού είναι παράλληλες και από εκεί βρίσκουμε την ακτίνα που βγαίνει $\frac{9}{\sqrt{10}}$. Μετά γράφουμε την εξίσωση του κύκλου $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \frac{81}{10}$ και απαιτούμε το $(1, 0)$ να την επαληθεύει (σχέση (2)). Τέλος λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) και προσδιορίζουμε το κέντρο του κύκλου.
176.	Όμοια με την προηγούμενη
204.	Βρίσκοντας το μήκος της μισής χορδής και γνωρίζοντας την ακτίνα, από Πυθαγόρειο θεώρημα, το απόστημα είναι $\sqrt{21}$. Άρα το μέσον Μ απέχει από το σταθερό σημείο Κ σταθερή απόσταση

206.	Αφού η χορδή είναι $\sqrt{6}$ το μισό της χορδής είναι $\frac{\sqrt{6}}{2}$, η ακτίνα του κύκλου είναι 2, οπότε το απόστημα είναι $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (από Πυθαγόρειο θεώρημα). Έτσι αν ε η ευθεία και Κ το κέντρο του κύκλου πρέπει $d(K, \varepsilon) = \sqrt{\frac{5}{2}}$. Από τη σχέση αυτή βρίσκουμε $\mu=4$ ή $\mu=\frac{2}{5}$ κ.τ.λ.
211.	iv) Σύμφωνα με τα ευρήματα στα προηγούμενα ερωτήματα, οι κύκλοι έχουν κοινό σημείο το $(-1, 1)$ και κοινή εφαπτομένη σ' αυτό, την ζ. Άρα εφάπτονται
214.	β₃) Η ευθεία των κέντρων του β ₂) ερωτήματος είναι η μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, η οποία απέχει $\sqrt{2}$ μονάδες από κάθε μία (με υπολογισμό). Άρα αρκεί να δείξουμε ότι όλες οι ακτίνες των κύκλων είναι μικρότερες από $\sqrt{2}$ μονάδες.
216	γ) Αν (x_0, y_0) σημείο του κύκλου για να επαληθεύει όλους τους κύκλους πρέπει και αρκεί να ισχύει η σχέση $(x_0-1)^2 + (y_0-1)^2 + \mu(x_0-1) = 0$, για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$. Η σχέση καταλήγει στην $x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 2y_0 + 2 + \mu \cdot (x_0 - 1) = 0$, η οποία ισχύει για κάθε μ μόνο αν $x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 2y_0 = 0$ και $x_0 - 1 = 0$. Λύνοντας το σύστημα έχουμε το σημείο.
218.	Αν $A(x_0, y_0)$ σημείο του κύκλου τότε το μέσον της χορδής ΟΑ θα είναι το $M(a, \beta)$ με $a = \frac{x_0}{2}$ και $\beta = \frac{y_0}{2}$ δηλαδή $x_0 = 2a$ και $y_0 = 2\beta$. Όμως $x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow (2a)^2 + (2\beta)^2 - 4 \cdot 2a = 0$ κ.τ.λ.
242.	α) <u>1ος τρόπος:</u> (καλύτερος) Αν $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης με την παραβολή τότε μια εφαπτομένη ε της παραβολής είναι $y \cdot y_1 = 4 \cdot (x + x_1)$ (1) $\Leftrightarrow 4x - y \cdot y_1 + 4x_1 = 0$. Για να εφάπτεται η ε και στον κύκλο π.κ.α. $d(O, \varepsilon) = r \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 8x_1^2 - y_1^2 = 16$ (2). Όμως $y_1^2 = 8x_1$ (3). Από (2) και (3) έχουμε ότι $x_1 = 2$ ή $x_1 = -1$ (απορρ. από (3)). Άρα το σημείο Μ είναι το $(2, 4)$ ή το $(2, -4)$. Στη συνέχεια από την (1) βρίσκουμε την ε. <u>2ος τρόπος:</u> Αφού αποκλείσουμε την περίπτωση η ε να είναι κατακόρυφη, θα έχει τη μορφή $y = \lambda x + \kappa$. Για να εφάπτεται στον κύκλο C π.κ.α. το σύστημα ε και C να έχει διπλή λύση, άρα το $\begin{cases} y = \lambda x + \kappa \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ να έχει διπλή λύση δηλαδή ... $\lambda \cdot \kappa = -2$. Όμοια απαιτούμε και το σύστημα της ε με την παραβολή C_1 να έχει διπλή λύση και από εκεί βρίσκουμε άλλη μια σχέση με τα λ και κ, τα οποία τελικά υπολογίζουμε
266.	β) $\frac{x_1^2}{a^2} = 1 + \frac{y_1^2}{\beta^2}$ άρα $\frac{x_1^2}{a^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{x_1^2} < 1$ άρα $-1 < \frac{a}{x_1} < 1$, άρα $-a < \frac{a^2}{x_1} < a$, άρα το Α βρίσκεται μεταξύ των κορυφών γ) Λόγω του (β), αν $y_1 > 0$, τότε $y_2 < 0$ και αντίστροφα