

08 ασκήσεις Ισότητας Τριγώνων

Γεωμετρίας Α' Λυκείου από παλιά μου θέματα

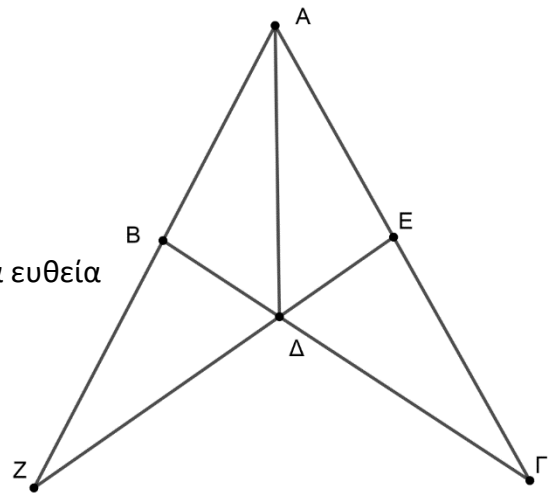
19-11-2024

επιμέλεια: Χρονόπουλος Τάκης (parmenides51)

1. (2019-20) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) φέρνουμε την διχοτόμο AD . Έστω E σημείο της πλευράς $A\Gamma$ με $AE = AB$. Έστω Z σημείο της προέκτασης της πλευράς AB (προς το B) με $AZ = A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

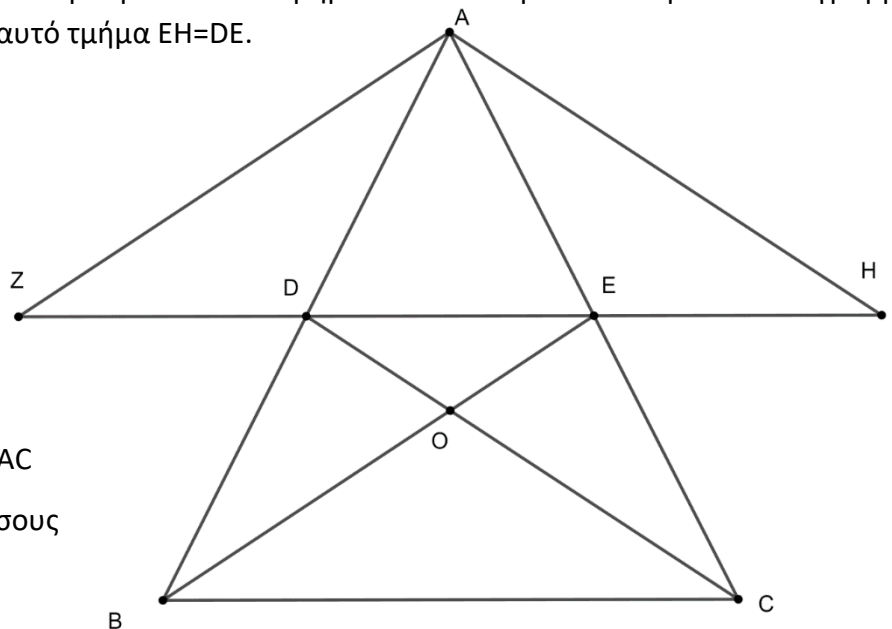
- α) τα τρίγωνα AZD και $AD\Gamma$ είναι ίσα
- β) τα τμήματα BD και DE είναι ίσα
- γ) οι γωνίες $\widehat{B\Delta Z}$ και $\widehat{E\Delta\Gamma}$ είναι ίσες
- δ) τα σημεία E, Δ, Z είναι συνευθειακά, δηλαδή ανήκουν στην ίδια ευθεία
- ε) οι ευθείες BE και AD είναι κάθετες
- στ) το σημείο A ισαπέχει από τις ευθείες DB και DE



2. (2019-20) Έστω τρίγωνο ABC με διαμέσους BE και CD ίσες, που τέμνονται στο O . Προεκτείνουμε το ευθύγραμμο τμήμα DE προς το D και θεωρούμε σε αυτό τμήμα $ZD = DE$. Προεκτείνουμε το ευθύγραμμο τμήμα DE προς το E και θεωρούμε σε αυτό τμήμα $EH = DE$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $AZ = BE$
- β) $AH = DC$
- γ) $AZ = AH$
- δ) $AD = AE$
- ε) το τρίγωνο ABC ισοσκελές
- στ) η AO είναι διχοτόμος της γωνίας BAC
- ζ) το σημείο O ανήκει και στις 3 διαμέσους του τριγώνου ABC .



3. (2019-20) Δίνεται τρίγωνο ABC. Προεκτείνω το ύψος AH κατά ίσο τμήμα HD. Προεκτείνω την διάμεσο AM κατά ίσο τμήμα ME.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BD = BA$

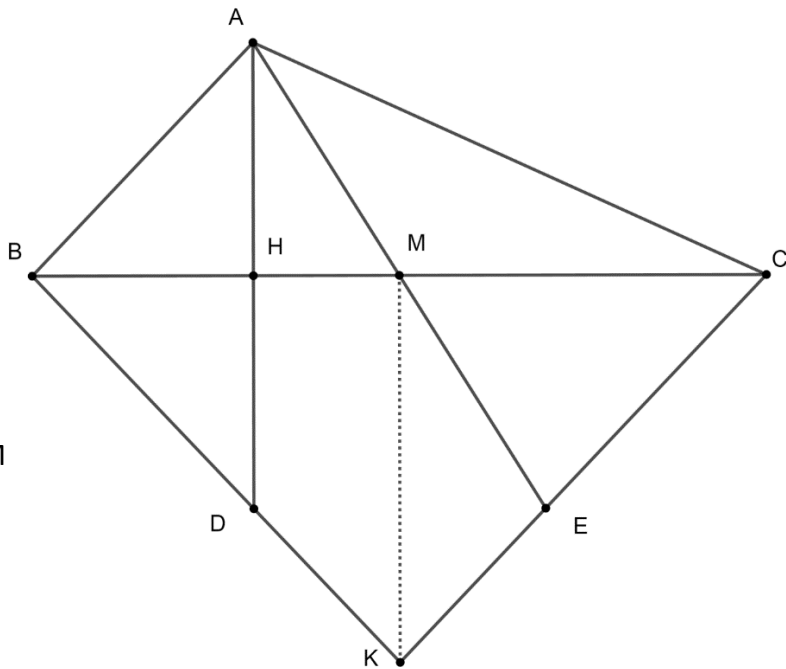
β) $EC = BA$

γ) $BD = EC$

δ) $BK = KC$

ε) $KM \perp BC$

στ) υπάρχει κύκλος με κέντρο το σημείο M που διέρχεται από τα σημεία A,D,E.



4. (2020-21) Σε κύκλο (O, ρ) εγγράφουμε το ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$). Θεωρούμε δυο σημεία Δ,Ε των τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{AG}$ αντίστοιχα με $AD = AE$, όπως στο διπλανό σχήμα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta B = E\Gamma$

β) $\widehat{B\Delta A} = \widehat{A E \Gamma}$

γ) $\widehat{B\Delta E} = \widehat{\Delta E \Gamma}$

δ) τα σημεία B,Γ ισαπέχουν από την ΔΕ

ε) το μέσον M του ΔΕ ισαπέχει από τις ΒΔ και ΓΕ

στ) $AM \perp B\Gamma$, όπου M μέσο του ΔΕ

ζ) η διχοτόμος της $\widehat{\Delta A E}$ διέρχεται από το O

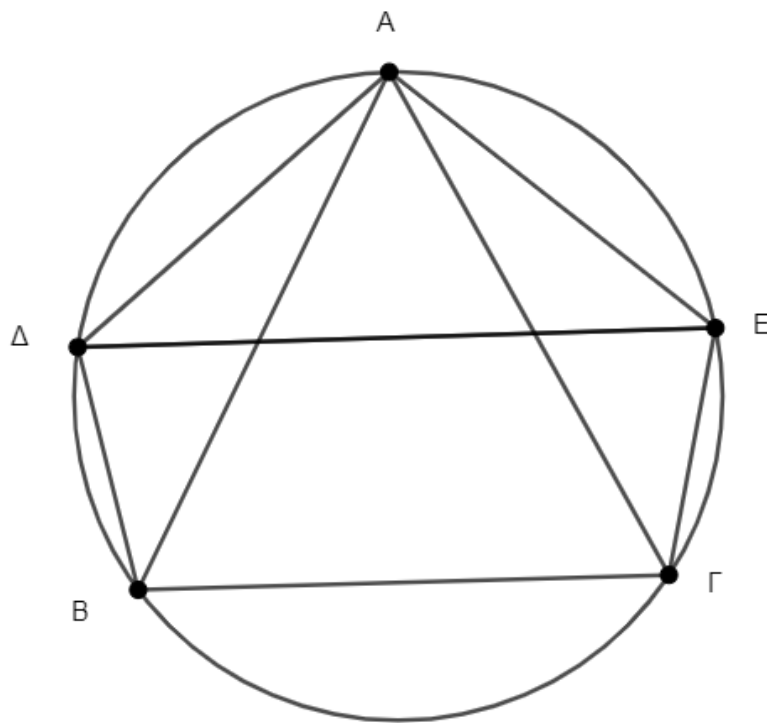
η) οι γωνίες $\widehat{\Delta A E}$ και $\widehat{B A \Gamma}$ έχουν την ίδια διχοτόμο

θ) το σημείο τομής των διχοτόμων των

$\widehat{B \Gamma E}, \widehat{\Delta E \Gamma}$ ισαπέχει από τις ευθείες ΔΕ και ΒΓ

ι) τα τμήματα ΒΓ και ΔΕ έχουν κοινή μεσοκάθετο

κ) αν ισχύει επιπλέον η ισότητα $B\Delta = \Delta A$, ότι τα μέσα των ΒΔ,ΑΔ, ΑΕ,ΕΓ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο



5. (2020-21) Σε κύκλο (O, ρ) φέρνω τις διαμέτρους AB και $\Gamma\Delta$. Έστω M το μέσο του $A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο OAG είναι ισοσκελές

β) $\widehat{AO\Delta} = \widehat{BO\Gamma}$ και $\widehat{BO\Delta} = \widehat{GOA}$

γ) η μεσοκάθετος του $B\Gamma$ διέρχεται από το O

δ) τα σημεία Γ, Δ ισαπέχουν από την ευθεία AB

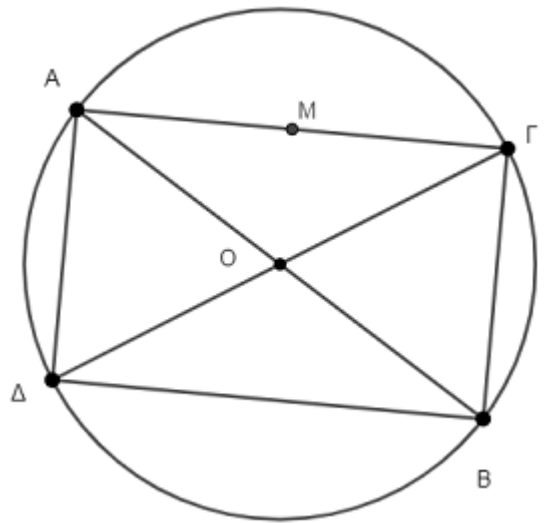
ε) $\widehat{\Delta A \Gamma} = \widehat{A \Gamma B} = \widehat{A \Delta B} = \widehat{\Delta B \Gamma}$

στ) το σημείο M ανήκει στην διχοτόμο της $\widehat{AO\Gamma}$

ζ) το σημείο M ισαπέχει από τα σημεία Δ, B

η) το σημείο O ισαπέχει από τις ευθείες ΔA και ΓB

θ) οι μεσοκάθετοι των τμημάτων $A\Gamma, \Gamma B, B\Delta, \Delta A$ συντρέχουν, δηλαδή διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο.



6. (2020-21) Σε κύκλο (O, ρ) εγγράφουμε το ισοσκελές τρίγωνο $\Gamma\Delta A$ ($\Gamma\Delta = \Delta A$). Θεωρούμε δυο σημεία E, B των τόξων $\widehat{\Gamma\Delta}$ και $\widehat{\Delta A}$ αντίστοιχα με $\widehat{\Delta E} = \widehat{\Delta B}$, όπως στο διπλανό σχήμα. Έστω M το σημείο τομής των AE και ΓB . Να αποδείξετε ότι:

α) $E\Gamma = BA$ και $\Delta E = \Delta B$

β) $MA = M\Gamma$

γ) το σημείο M ανήκει στην διχοτόμο της $\widehat{E\Delta B}$

δ) το σημείο M ισαπέχει από τις ευθείες $E\Gamma, AB$

ε) το τετράπλευρο $EMBA$ έχει κάθετες διαγωνίους

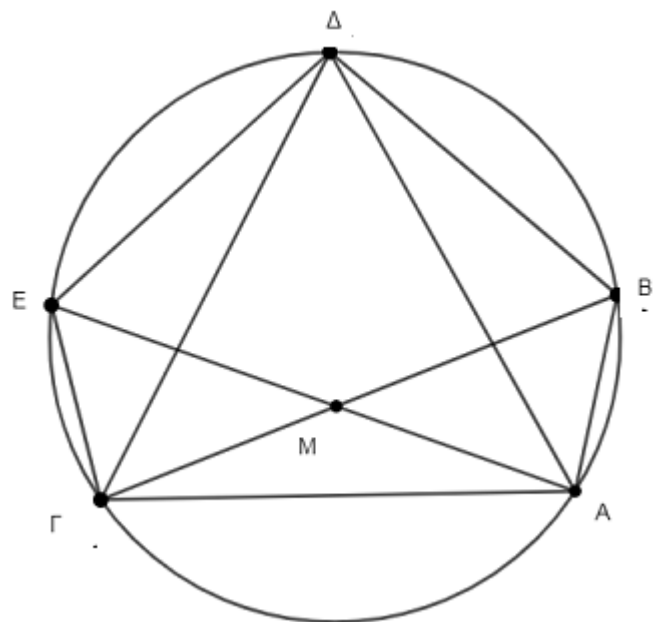
στ) η διχοτόμος της $\widehat{\Gamma\Delta A}$ διέρχεται από το O

ζ) τα σημεία B, E ισαπέχουν από την ευθεία ΓA

η) τα σημεία Δ, O, M είναι συνευθειακά, δηλαδή ανήκουν στην ίδια ευθεία

θ) αν το σημείο M ισαπέχει από τα σημεία Γ, B, A , τότε

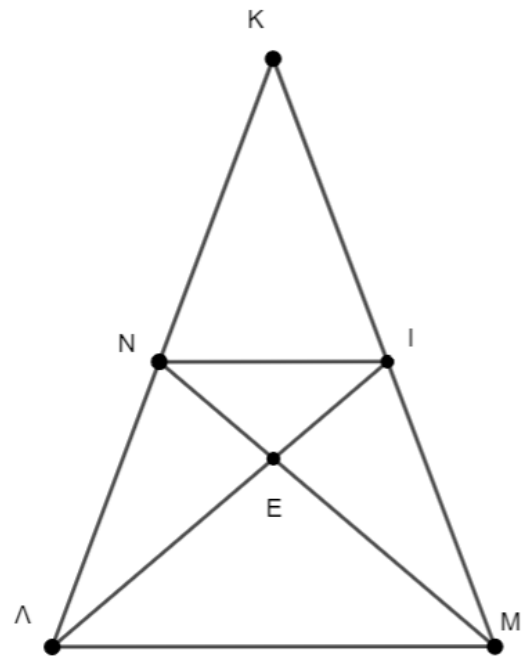
το τόξο $\widehat{E\Delta B}$ θα είναι ίσο με το τόξο $\widehat{\Gamma A}$, που δεν περιέχει το σημείο Δ .



7. (2023-24) Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΚΛΜ με βάση ΛΜ. Εστω σημεία Ν,Ι των πλευρών ΚΛ, ΚΜ αντίστοιχα ώστε τα τμήματα ΜΝ και ΛΙ να τέμνονται στο σημείο Ε και η ΚΕ να διχοτομεί την γωνία $\widehat{ΛΚΜ}$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα ΚΛΕ και ΚΕΜ είναι ίσα
- β) το τρίγωνο ΛΕΜ είναι ισοσκελές με βάση την ΛΜ
- γ) τα τρίγωνα ΛΕΝ και ΙΕΜ είναι ίσα
- δ) τα τρίγωνα ΚΝΕ και ΚΕΙ είναι ίσα
- ε) το τρίγωνο ΝΕΙ είναι ισοσκελές με βάση την ΝΙ
- στ) το ευθύγραμμο τμήμα ΚΕ είναι κάθετο στο ΝΙ
- ζ) η προέκταση της ΚΕ διέρχεται από το μέσον του ΛΜ
- η) η προέκταση της ΚΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΛΕΜ}$



8. (2023-24) Έστω τρίγωνο ΚΛΜ και σημεία Ν,Ι των πλευρών ΚΛ, ΚΜ αντίστοιχα με $ΛΕ=ΕΜ$ και $ΝΕ=ΕΙ$. Τα τμήματα ΜΝ και ΛΙ τέμνονται στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα ΝΕΛ και ΕΙΜ είναι ίσα
- β) το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές με βάση την ΛΜ
- γ) $\widehat{ΚΝΙ} = \widehat{ΚΙΝ}$
- δ) η ευθεία ΚΕ διέρχεται από το μέσον του ΝΙ
- ε) το μέσον του ΝΙ ισαπέχει από τις ευθείες ΛΝ και ΙΜ
- στ) τα σημεία Ν,Ι ισαπέχουν από την ευθεία ΛΜ
- ζ) το μέσον του ΝΙ, το μέσον του ΛΜ και το σημείο Ε είναι συνευθειακά, δηλαδή ανήκουν στην ίδια ευθεία

