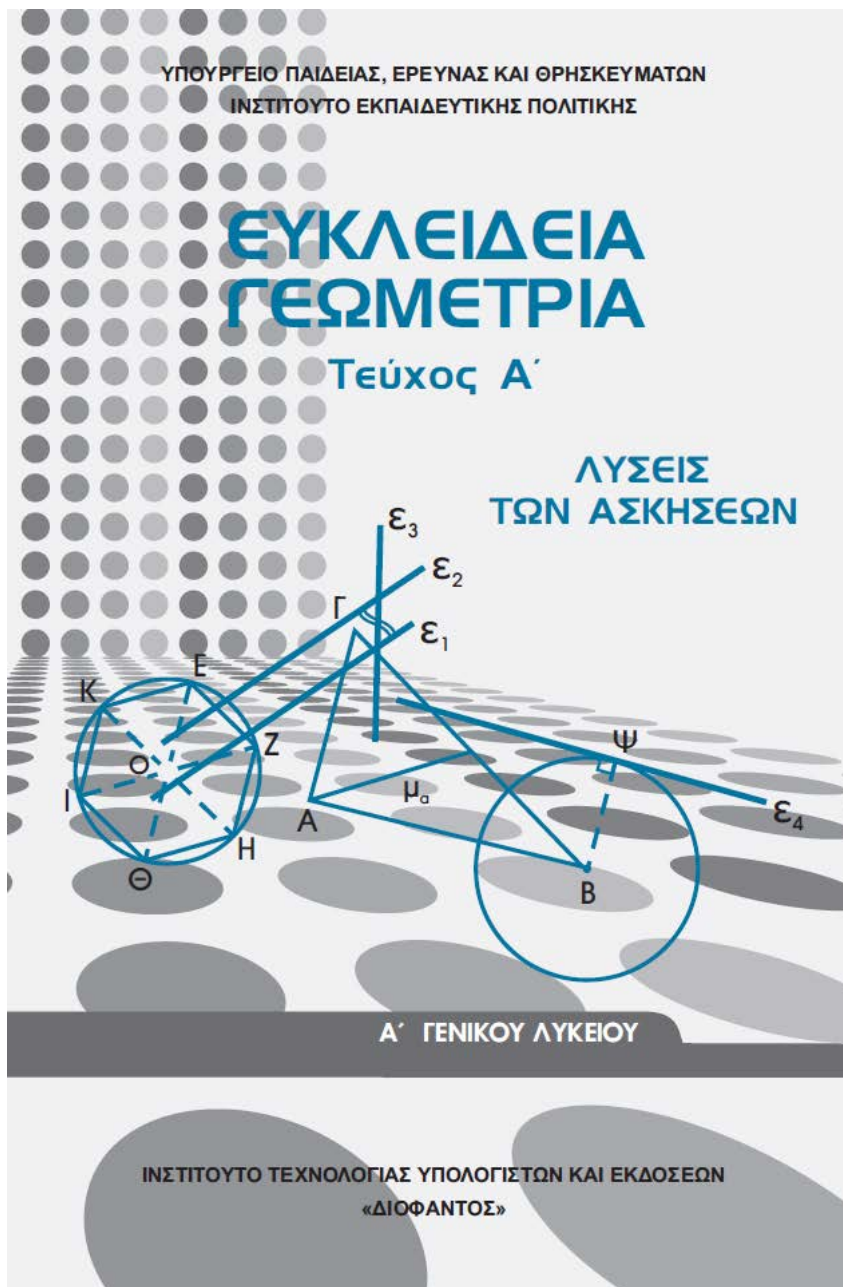


Συμπλήρωμα Λύσεων στις Ασκήσεις του Σχολικού Βιβλίου Γεωμετρίας Α' Λυκείου



6.1 έκδοση
02 Ιανουαρίου 2019

συνολικά: 20 διαφορετικές λύσεις
+ αποδείξεις πορισμάτων κεφ. 2-6
+ 3 άλλες αποδείξεις θεωρ. κεφ. 3
+ άλλα 2 κριτήρια ισότητας τριγώνων
+ άλλο 1 κριτήριο ισότητας ορθ. τριγώνων
+ άνισα τρίγωνα με 5 στοιχεία ίσα

αλλαγές έκδοσης:

- λύθηκαν όλα τα πορίσματα
- προστέθηκαν νέα κριτήρια ισότη. τριγώνων (ορθ. και μη)
- άνισα τρίγωνα με 5 στοιχεία ίσα

περιέχονται άλλες λύσεις στις
ασκήσεις:

- 3.1-3.2 Εμπέδωσης 1
Αποδεικτική 1, 3
- 3.3-3.4 Εμπέδωσης 3
Αποδεικτική 1,2,3
- 3.5-3.6 Εμπέδωσης 1
Αποδεικτική 1,2,4
- 3.10-3.12 Εμπέδωσης 9

από μαθήτριες του

A₄

Σχόλια:

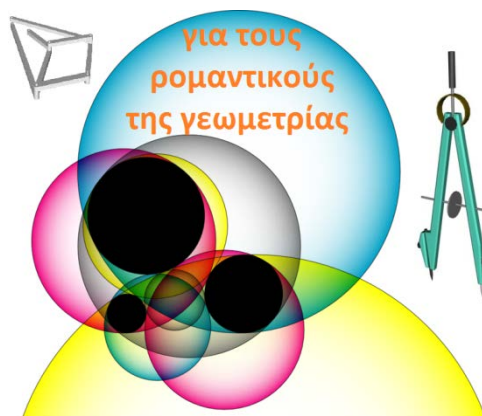
Οι λύσεις χρησιμοποιούν γνώσεις μέχρι και την ύλη της εκάστοτε παραγράφου. Θα ετοιμάζεται νέα έκδοση καθώς προχωρά η ύλη.

Επιμέλεια: Τάκης Χρονόπουλος

Email: parmenides51@gmail.com

Ιστοσελίδα αποκλειστικά για Ευκλείδεια Γεωμετρία:

Για τους ρομαντικούς της γεωμετρίας: parmenides52.blogspot.com



άλλα 2 κριτήρια σύγκρισης τριγώνων, ένα άμεσο κι ένα έμμεσο

(που δεν απαιτούν για την απόδειξή τους, το αίτημα παραλληλίας)

4°. (ΓΓΠ) Άμεσο Δυο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν μια πλευρά, μια προσκείμενη σε αυτήν γωνία και την απέναντι της γωνία, ίσες αντίστοιχα μια προς μια, δηλ. $\alpha = \alpha'$ & $\hat{B} = \hat{B}'$ & $\hat{A} = \hat{A}'$.

απόδειξη

Έστω $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A'B'\Gamma'$ με $B\Gamma = B'\Gamma'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$.

Θα αποδείξουμε ότι $AB = A'B'$.

Έστω ότι $AB \neq A'B'$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $AB > A'B'$.

Θεωρώ σημείο Δ της AB τέτοιο ώστε $BD = A'B'$.

Τα $\triangle B\Delta\Gamma$ και $\triangle A'B'\Gamma'$ είναι ίσα διότι έχουν $\hat{B} = \hat{B}'$, $BD = A'B'$ και $B\Gamma = B'\Gamma'$ (ΠΓΠ). Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}'$ κι επειδή $\hat{A} = \hat{A}'$, θα ισχύει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}$. Άποδο διότι η $\hat{\Delta}_1$ είναι

εξωτερική γωνία στο $\triangle A\Delta\Gamma$ και ως εκ τούτου $\hat{\Delta}_1 = \widehat{A\Delta\Gamma} > \hat{A}$. Άρα $AB = A'B'$ και

συνεπώς τα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A'B'\Gamma'$ θα είναι ίσα διότι έχουν $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $AB = A'B'$ (ΓΓΠ).

5°. (ΠΠΓ) Αμφίβολο / Έμμεσο Κριτήριο

[έμμεσο γιατί δεν ισχύει πάντα, ισχύει υπό προϋποθέσεις]

Αν δυο τρίγωνα έχουν ίσες μια προς μια δυο πλευρές τους και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από το ένα ζεύγος των ίσων πλευρών, τότε έχουν τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από το άλλο ζεύγος των ίσων πλευρών ή ίσες ή παραπληρωματικές, δηλ. $\beta = \beta'$ & $\gamma = \gamma'$ & $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}' \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}'$ ή $\hat{B} + \hat{B}' = 180^\circ$.

απόδειξη

Έστω $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A'B'\Gamma'$ με $A\Gamma = A'\Gamma'$, $AB = A'B'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

Οι πλευρές $\alpha = B\Gamma$ και $\alpha' = B'\Gamma'$ είτε θα είναι ίσες είτε άνισες.

i) Αν $\alpha = \alpha'$, τότε $\triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$ (ΠΠΠ), άρα $\hat{B} = \hat{B}'$.

ii) Έστω ότι $\alpha \neq \alpha'$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $\alpha > \alpha'$.

Θεωρώ σημείο Δ της AB τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = B'\Gamma'$.

Τα $\triangle A\Gamma\Delta$ και $\triangle A'B'\Gamma'$ είναι ίσα διότι έχουν $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$, $\Gamma\Delta = B'\Gamma'$ και $A\Gamma = A'\Gamma'$ (ΠΓΠ). Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}'$ και $A\Delta = A'B'$.

Επειδή $A\Delta = A'B'$, $AB = A'B'$, θα ισχύει $A\Delta = AB$, άρα το $\triangle A\Delta B$

θα είναι ισοσκελές με βάση BΔ, οπότε $\hat{\Delta}_2 = \hat{B}$, κι επειδή

$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ$, θα ισχύει ότι $\hat{\Delta}_1 + \hat{B} = 180^\circ$, κι επειδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}'$, θα

έχουμε ότι $\hat{B} + \hat{B}' = 180^\circ$.

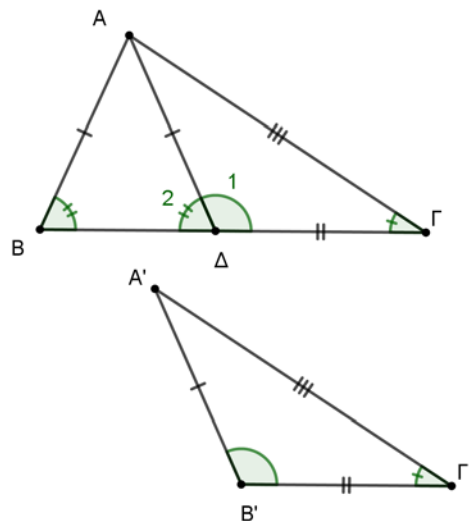
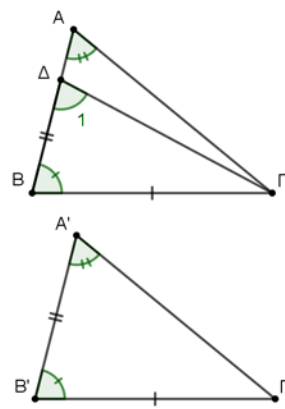
πηγή για τις παραπάνω αποδείξεις:

Παπαμιχαήλ Δ., Σκιαδάς Α. – Θεωρητική Γεωμετρία Α' Λυκείου, ΟΕΔΒ 1982

σχόλια: Το 4° κριτήριο είναι προφανές από άθροισμα γωνιών τριγώνου, και το 5° από Νόμο Ημιτόνων.

Το 5° ισχύει σαν κριτήριο όταν και τα 2 τρίγωνα είναι οξυγώνια ή αμβλυγώνια, ή όταν μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι ζητούμενες γωνίες είναι και οι 2 οξείες ή αμβλείες, άρα θα είναι ίσες, άρα τα τρίγωνα ίσα.

για τους ρομαντικούς της γεωμετρίας: parmenides52.blogspot.com



άλλο ένα κριτήριο σύγκρισης ορθογωνίων τριγώνων

(που δεν απαιτεί για την απόδειξή του, το αίτημα παραλληλίας)

Δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν περιέχουν μια κάθετη πλευρά και την απέναντι οξεία γωνία, ίσες μια προς μια.

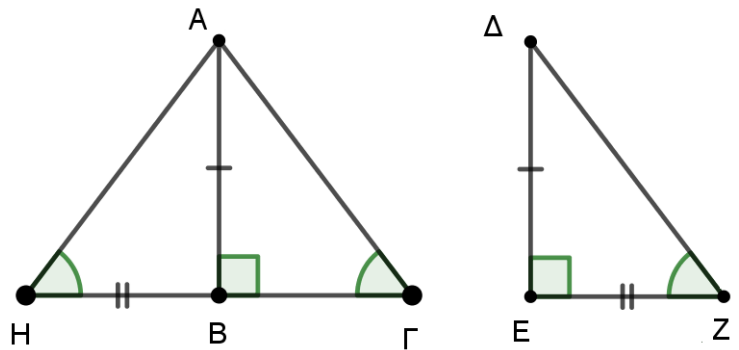
ευθεία απόδειξη

Έστω $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle \Delta EZ$ με $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$, $AB = \Delta E$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$. Θα αποδείξουμε ότι $\triangle AB\Gamma = \triangle \Delta EZ$.
Προεκτείνω την $B\Gamma$ κατά τμήμα $HB = EZ$.

Τα τρίγωνα $\triangle ABH$ και $\triangle \Delta EZ$ είναι ίσα διότι έχουν $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$, $AB = \Delta E$ και $HB = EZ$ (πγπ). Άρα $AH = \Delta Z$ (1) και $\hat{H} = \hat{Z}$ κι επειδή $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$, θα

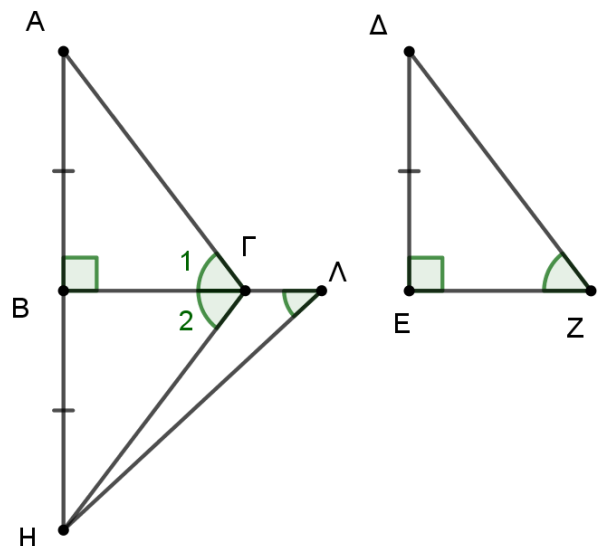
ισχύει ότι $\hat{H} = \hat{\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο $\triangle AH\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $H\Gamma$, οπότε $AH = A\Gamma$ κι επειδή $AH = \Delta Z$ (1), έχουμε ότι $A\Gamma = \Delta Z$ (2).

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle \Delta EZ$ είναι ίσα διότι έχουν $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$, $AB = \Delta E$ και $A\Gamma = \Delta Z$ (2) (πγπ).

απόδειξη με άτοπο

Έστω $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle \Delta EZ$ με $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$, $AB = \Delta E$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$. Θα αποδείξουμε ότι $\triangle AB\Gamma = \triangle \Delta EZ$.
Έστω ότι $B\Gamma \neq EZ$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $B\Gamma < EZ$.

Προεκτείνω την AB κατά τμήμα $BH = \Delta E$ (1), και την $B\Gamma$ κατά τμήμα $BL = EZ$. Το τρίγωνο $\triangle BHL$ είναι ίσο με το $\triangle \Delta EZ$ διότι έχουν $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$, $BH = \Delta E$ (1) και $BL = EZ$ (πγπ). Οπότε $\hat{L} = \hat{Z}$ (2). Είναι $BH = \Delta E$ (1) κι επειδή $AB = \Delta E$ έχουμε ότι $AB = BH$. Στο τρίγωνο $\triangle A\Gamma H$, η $B\Gamma$ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την AH . Οπότε $A\Gamma = \Gamma H$ και η $B\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A\Gamma H}$, δηλαδή $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$. Αλλά είναι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{Z}$, οπότε $\hat{\Gamma}_2 = \hat{Z}$, κι επειδή $\hat{L} = \hat{Z}$ (2) είναι $\hat{\Gamma}_2 = \hat{L}$. Άτοπο διότι η $\hat{\Gamma}_2$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $\triangle H\Gamma L$ και ως εκ τούτου $\hat{\Gamma}_2 = \widehat{H\Gamma L}_{\text{ext}} > \hat{L}$. Άρα $B\Gamma = EZ$.

πηγή για την ευθεία απόδειξη:

Βαρουχάκης Ν., Παπαμιχαήλ Δ., Γιαννίκος Χρ., Σολδάτος Κ. – Ευκλείδεια Γεωμετρία Λυκείου, Gutenberg 2002

σχόλιο: Το παραπάνω κριτήριο είναι προφανές με άθροισμα γωνιών τριγώνου.

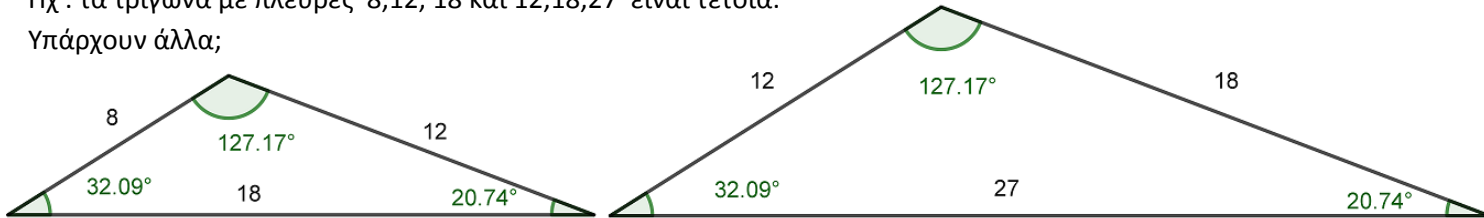
2 τρίγωνα με πέντε κύρια στοιχεία ίσα και όμως άνισα

Αναζητούμε τρίγωνα με 3 γωνίες και 2 πλευρές, ίσες μια προς μια.

Συνεπώς ψάχνουμε άνισα όμοια τρίγωνα με 2 πλευρές ίσες.

Πχ. τα τρίγωνα με πλευρές 8,12, 18 και 12,18,27 είναι τέτοια.

Υπάρχουν άλλα;



Υποθέτουμε ότι τα όμοια τρίγωνα έχουν πλευρές $\alpha, 1, \kappa$ και $1, \kappa, \alpha'$.

Τότε θα έχουν λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{\alpha}{1} = \frac{1}{\kappa} = \frac{\kappa}{\alpha'}$ ή $\lambda = \frac{\alpha}{\kappa} = \frac{1}{\alpha'} = \frac{\kappa}{1}$ από όπου προκύπτουν οι σχέσεις

$\alpha = \frac{1}{\kappa} (3)$, $\alpha' = \kappa^2 (4)$ στην 1^η περίπτωση και οι $\alpha' = \frac{1}{\kappa} (3')$, $\alpha = \kappa^2 (4')$ στην 2^η περίπτωση, οι οποίες

οδηγούν στα ίδια τρίγωνα. Από τριγωνική ανισότητα συνεχίζοντας με τις (3),(4), έχουμε:

$$\begin{cases} \alpha < 1 + \kappa \\ \kappa < 1 + \alpha \\ 1 < \kappa + \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\kappa} < 1 + \kappa \\ \kappa < 1 + \frac{1}{\kappa} \\ 1 < \kappa + \frac{1}{\kappa} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa^2 + \kappa - 1 > 0 \\ \kappa^2 - \kappa - 1 > 0 \\ \kappa^2 - \kappa + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \kappa \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) = \left(\frac{1}{\varphi}, \varphi \right), \text{ με } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ η χρυσή τομή}$$

$$\begin{cases} \alpha' < 1 + \kappa \\ \kappa < 1 + \alpha' \\ 1 < \kappa + \alpha' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa^2 < 1 + \kappa \\ \kappa < 1 + \kappa^2 \\ 1 < \kappa + \kappa^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa^2 - \kappa - 1 < 0 \\ \kappa^2 - \kappa + 1 > 0 \\ \kappa^2 + \kappa - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \kappa \in \left(\frac{1}{\varphi}, \varphi \right), \text{ όπου } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ όπως και πριν, οπότε}$$

υπάρχουν άπειρα άνισα τρίγωνα με πλευρές $\frac{1}{\kappa}, 1, \kappa$ και $1, \kappa, \kappa^2$ με $\kappa \in \left(\frac{1}{\varphi}, \varphi \right)$, καθώς και όσα έχουν

πλευρές πολλαπλάσιες αυτών πχ. $\frac{\mu}{\kappa}, \mu, \kappa\mu$ και $\mu, \kappa\mu, \kappa^2\mu$ όπου $\kappa \in \left(\frac{1}{\varphi}, \varphi \right)$ και $\mu > 0$.

πχ. για $(\kappa, \mu) = \left(\frac{3}{2}, 12 \right)$ έχουμε τα τρίγωνα με πλευρές 8,12,18 και 12,18,27

για $(\kappa, \mu) = \left(\frac{4}{3}, 36 \right)$ έχουμε τα τρίγωνα με πλευρές 27,36,48 και 36,48,64

πηγή της απόδειξης:

Σερίφης Κώστας - <https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=106537#p106537> (8-12-2011 k-ser)

πηγές για περαιτέρω διάβασμα:

Δυο τρίγωνα έχουν πέντε βασικά τους στοιχεία ίσα (πλευρές ή γωνίες). Υπάρχει περίπτωση να είναι άνισα; περιοδικό Μαθηματική Έκφραση, No.2 1996

Μπουνάκης Δημήτριος – Ίσα τρίγωνα όχι, ψευδοΐσα ναι !!!, περιοδικό Το Φι, No. 5 2008

Σολακίδης Λεωνίδας – Άνισα τρίγωνα με πέντε κύρια στοιχεία ίσα !!!, περιοδικό Το Φι, No. 5 2008

διαφορετικές ευθείες αποδείξεις για θεωρήματα σχολικού

κεφάλαιο 3

Ενότητα 3.2 1^ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων

Θεώρημα (ΠΓΠ):

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

πόρισμα 1:

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.

λύση σχολικού:

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Φέρνω την διχοτομο AD . Συγκρίνω τα τρίγωνα ABD και AGD (ΠΓΠ).

άλλη λύση:

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Συγκρίνω το τρίγωνο $AB\Gamma$ με το τρίγωνο AGB (τον εαυτό του) (ΠΓΠ).

Ενότητα 3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

Θεώρημα : Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

πόρισμα II:

Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.

λύση σχολικού:

[Είναι άλυτο αλλά υπαινίσσεται λύση με άτοπο, χρησιμοποιώντας το παραπάνω ανισοτικό θεώρημα].

Ενδεικτική λύση με άτοπο:

Έστω ότι δεν ήταν ισοσκελές. Τότε θα ήταν όλες οι πλευρές του άνισες ανά δυο, συνεπώς θα ήταν όλες οι γωνίες του άνισες ανά δυο. Άτοπο διότι έχει δυο γωνίες ίσες. Άρα θα είναι ισοσκελές.

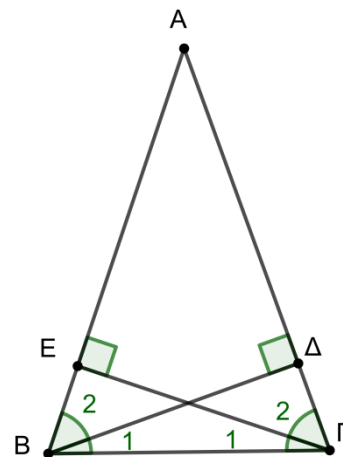
άλλες λύσεις:

1η λύση

Έστω $\triangle AB\Gamma$ ($\hat{B} = \hat{\Gamma}$). Συγκρίνω το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με το τρίγωνο $\triangle AG\Gamma$ (τον εαυτό του) (ΠΓΠ).

2η λύση

Έστω $\triangle AB\Gamma$ ($\hat{B} = \hat{\Gamma}$). Φέρνω τα υψή $B\Delta$ και ΓE . Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle B\Delta\Gamma$ και $\triangle BE\Gamma$ είναι ίσα, διότι έχουν την υποτείνουσα $B\Gamma$ κοινή και τις οξείες γωνίες $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ ίσες. Οποτε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα καθώς και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$. Οι γωνίες $\hat{B}_2, \hat{\Gamma}_2$ είναι ίσες ως διαφορές των ίσων $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$. Οποτε τα τρίγωνα $\triangle AB\Delta$ και $\triangle AG E$ είναι ίσα (ΠΓΠ), γιατί $B\Delta = \Gamma E$, $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$ και $\hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$. Άρα $AB = AG$.



αποδείξεις πορισμάτων κεφ. 2

Ενότητα 2.18 Επίκεντρη Γωνία

Θεώρημα Ι:

Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, αν και μόνο αν οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες.

Πορίσματα (θεωρήματος Ι): [όλα άλυτα στο σχολικό]

i) Κάθε διάμετρος ενός κύκλου τον διαιρεί σε δύο ίσα τόξα.

ii) Δύο κάθετες διαμέτροι ενός κύκλου τον διαιρούν σε τέσσερα ίσα τόξα.

iii) Δύο τόξα ενός κύκλου είναι άνισα, όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ομοιοτρόπως άνισες.

Αποδείξεις πορισμάτων:

i) Η διάμετρος ενός κύκλου ορίζει δυο ευθείες επίκεντρες γωνίες. Οπότε τα τόξα που βαίνουν αυτές (τις ίσες γωνίες), θα είναι μεταξύ τους ίσα.

ii) Δυο κάθετες διαμέτροι ενός κύκλου σχηματίζουν 4 ορθές επίκεντρες γωνίες. Οπότε τα τόξα που βαίνουν αυτές (τις ίσες γωνίες), θα είναι μεταξύ τους ίσα.

iii) Έστω ότι τα τόξα είναι ίσα, τότε οι αντίστοιχες επίκεντρες που βαίνουν σε αυτά θα είναι ίσες. Άτοπο γιατί είναι άνισες, οπότε τα τόξα είναι άνισα.

Αφού άνισες επίκεντρες γωνίες θα ομοίως έχουν άνισο μέτρο, θα αντιστοιχούν σε ομοίως άνισα τόξα.

[Σχόλιο για χρήση μεταγενέστερης ενότητας ύλης στην παραπάνω απόδειξη, αφού η έννοια του μέτρου τόξου ως μέτρου της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας βρίσκεται στην μεταγενέστερη ενότητα 2.19]

Ενότητα 3.2 1^ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων

Θεώρημα (ΠΓΠ):

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

Πορίσματα (θεωρήματος): [μόνο το 2 είναι άλυτο στο σχολικό]

i) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

ii) Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

iii) Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

iv) Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

Απόδειξη πορίσματος 2:

ii) Έστω ΑΒΓ ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Επειδή ΑΒ=ΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Ομοίως προκύπτει ότι $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Οπότε $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}$.

αποδείξεις πορισμάτων κεφ. 3

Ενότητα 3.4 3° Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων

Θεώρημα (ΠΠΠ): Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Πορίσματα (θεωρήματος): [μόνο το 4 είναι άλυτο στο σχολικό]

- i) Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.
- ii) Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.
- iii) Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.
- iv) Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

Απόδειξη πορίσματος 4:

iv) Οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ταυτόχρονα και οι χορδές δύο αντίστοιχων τόξων ενός κύκλου μικρότερων του ημικυκλίου. Αφού τα τόξα που αντιστοιχούν σε χορδές μικρότερες του ημικυκλίου είναι ίσες και ο κύκλος είναι τόξο 360° , τότε τα τόξα που αντιστοιχούν στις διαφορές τους, που είναι τα αντίστοιχα τόξα μεγαλύτερα του ημικυκλίου θα είναι επίσης ίσα (ως διαφορές ίσων τόξων).

Ενότητα 3.6 Κριτήρια Ισότητας Ορθογωνίων Τριγώνων

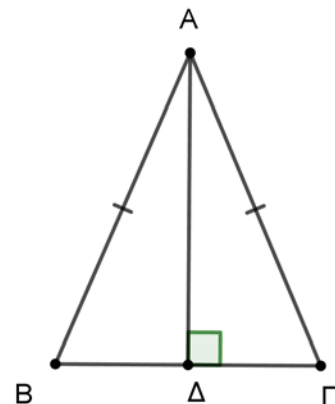
Θεώρημα II: Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Πορίσματα (θεωρήματος): [μόνο το 1 είναι άλυτο στο σχολικό]

- i) Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.
- ii) Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

Απόδειξη πορίσματος 1:

i) Έστω $AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο ($AB=AG$). Φέρνω το ύψος AD . Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα ως ορθογώνια στο σημείο Δ , έχουν ίσες υποτείνουσες ($AB=AG$) και μια ίση κάθετη πλευρά (AD κοινή). Συνεπώς $B\Delta=\Delta\Gamma$ και $\widehat{BA\Delta}=\widehat{\Delta A\Gamma}$, δηλαδή η AD είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.



αποδείξεις πορισμάτων κεφ. 3Ενότητα 3.10 Σχέση Εξωτερικής και Απέναντι Γωνίας

Θεώρημα : Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Πορίσματα (θεωρήματος): [όλα άλυτα στο σχολικό]

- i) Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.
- ii) Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180° .

Αποδείξεις πορισμάτων:

i) Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ με δυο γωνίες ορθές, τις $\hat{A}$ και $\hat{B}$. Τότε $\widehat{A_{εξ}} = 180^\circ - \hat{A} = 90^\circ = \hat{B}$ άτοπο διότι $\widehat{A_{εξ}} > \hat{B}$. Άρα δεν μπορεί να έχει δυο ορθές γωνίες, οπότε έχει το πολύ μια ορθή γωνία.

Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ με δυο γωνίες αμβλείες, τις $\hat{A}$ και $\hat{B}$. Τότε η εξωτερική γωνία της $\hat{A}$ θα είναι οξεία, ως παραπληρωματική της $\hat{A}$, και μικρότερη της $\hat{B}$ που είναι αμβλεία, $\widehat{A_{εξ}} = 180^\circ - \hat{A} < 90^\circ < \hat{B}$. Άτοπο διότι $\widehat{A_{εξ}} > \hat{B}$. Άρα δεν μπορεί να έχει δυο αμβλείες γωνίες, οπότε έχει το πολύ μια αμβλεία γωνία.

ii) Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} + \hat{B} \geq 180^\circ$. Είναι $\hat{A} + \hat{B} \geq 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} \geq 180^\circ - \hat{B} \Leftrightarrow \hat{A} \geq \widehat{B_{εξ}} \Leftrightarrow \widehat{B_{εξ}} \leq \hat{A}$ άτοπο διότι $\widehat{B_{εξ}} > \hat{A}$. Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο ή ίσο των 180° , συνεπώς θα είναι μικρότερο των 180° .

Ενότητα 3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

Θεώρημα : Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

Πορίσματα (θεωρήματος): [όλα άλυτα στο σχολικό]

- i) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.
- ii) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.
- iii) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

Αποδείξεις πορισμάτων:

i) Αφού ένα τρίγωνο έχει το πολύ μια ορθή ή αμβλεία γωνία, έχει ορθή ή αμβλεία, αυτή θα είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου, οπότε η απέναντι της πλευρά θα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

ii) Έστω ότι δεν ήταν ισοσκελές. Τότε θα ήταν όλες οι πλευρές του άνισες ανά δυο, συνεπώς θα ήταν όλες οι γωνίες του άνισες ανά δυο. Άτοπο διότι έχει δυο γωνίες ίσες. Άρα θα είναι ισοσκελές.

iii) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}$. Αφού $\hat{A} = \hat{B}$ τότε είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε ΓΑ=ΓΒ. Ομοίως προκύπτει ότι ΒΓ=ΒΑ. Οπότε ΑΒ=ΒΓ=ΓΑ, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

αποδείξεις πορισμάτων κεφ. 3

Ενότητα 3.12 Τριγωνική Ανισότητα

Θεώρημα: Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

Πόρισμα (θεωρήματος): [άλυτο στο σχολικό]

Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

Απόδειξη πορίσματος *

Έστω AB χορδή κύκλου (O,R) που δεν διέρχεται από το O. Από τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο OAB παίρνουμε: $AB < OA + OB = R + R = 2R$. Αν AB διάμετρος τότε $AB = 2R$.

Ενότητα 3.15 Εφαπτόμενα Τμήματα

Θεώρημα: Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Πόρισμα (θεωρήματος): [άλυτο στο σχολικό]

Αν P είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:

- i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,
- ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

Απόδειξη πορίσματος

Έστω κύκλος (O,r) και PA,PB τα εφαπτόμενα τμήματα του P ως προς τον κύκλο.

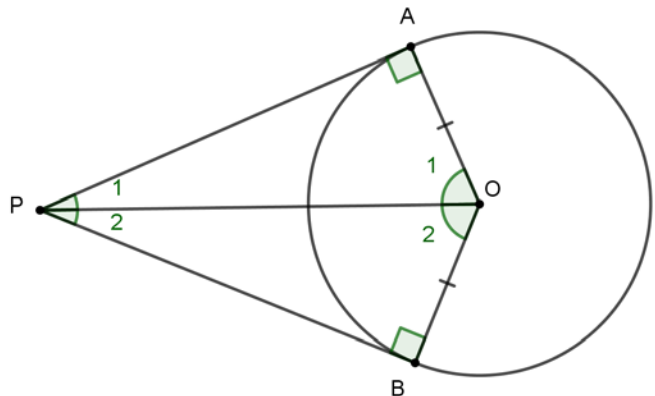
Αφού $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$, $PO = PO$, $OA = OB = r$, τα τρίγωνα OAP και OBP είναι ίσα.

Οπότε $\widehat{P}_1 = \widehat{P}_2$, $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ και $PA = PB$.

Αφού $PA = PB$, το P ανήκει στην μεσοκάθετο του AB.

Αφού $OA = OB$, το O ανήκει στην μεσοκάθετο του AB.

Αρα τα σημεία P,O ανήκουν στην μεσοκάθετο του AB, δηλαδή η PO είναι η μεσοκάθετος του AB.



* απόδειξη του Βαγγέλη Σταματιάδη

αποδείξεις πορισμάτων κεφ. 4

Ενότητα 4.2 Τέμνουσα δυο ευθειών – Ευκλείδειο Αίτημα

Θεώρημα: Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες

Πορίσματα (θεωρήματος):

[το 1 άλυτο στο σχολικό]

i) Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή δύο εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες.

ii) Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Απόδειξη πορίσματος

i) Εφόσον δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες και μια από τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες, είναι κατακορυφήν μιας από τις εντός εναλλάξ, τότε οι εντός εναλλάξ γωνίες θα είναι ίσες και συνεπώς οι ευθείες θα είναι παράλληλες.

Εφόσον δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές και μια από τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι εφεξής και παραπληρωματική της αντίστοιχης εντός εναλλάξ, τότε οι εντός εναλλάξ γωνίες θα είναι ίσες και συνεπώς οι ευθείες θα είναι παράλληλες.

Ενότητα 4.2 Τέμνουσα δυο ευθειών – Ευκλείδειο Αίτημα

Πρόταση Ι: Αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες

Πόρισμα (πρότασης):

[άλυτο στο σχολικό]

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν

i) τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες,

ii) τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

Απόδειξη πορίσματος

i) Εφόσον οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες και μια από τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες, είναι κατακορυφήν μιας από τις εντός εναλλάξ, τότε οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες θα είναι επίσης ίσες.

ii) Εφόσον οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες και μια από τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες, είναι εφεξής και παραπληρωματική μιας από τις εντός εναλλάξ, τότε οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες θα είναι παραπληρωματικές.

αποδείξεις πορισμάτων κεφ. 4Ενότητα 4.2 Τέμνουσα δυο ευθειών – Ευκλείδειο Αίτημα

Πρόταση III: Αν δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ϵ τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ϵ θα τέμνει και την άλλη.

Πόρισμα (πρότασης):

[άλυτο στο σχολικό]

Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.

Απόδειξη πορίσματος

Έστω ότι μια ευθεία (ϵ) είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες (ϵ_1), (ϵ_2). Εφόσον η ευθεία (ϵ) τέμνει την ευθεία (ϵ_1) θα τέμνει και την παράλληλή της ευθεία (ϵ_2) κι εφόσον σχηματίζει 4 ορθές γωνίες η (ϵ) με την (ϵ_1), τότε θα σχηματίζει μια εντός εναλλάξ γωνία ίση η (ϵ) με την (ϵ_2), που θα είναι επίσης ορθή. Συνεπώς η ευθεία (ϵ) θα τέμνει κάθετα την ευθεία (ϵ_2).

Ενότητα 4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Θεώρημα: Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

Πορίσματα (θεωρήματος):

[τα 3 τελευταία άλυτα στο σχολικό, ως προφανή]

i) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

ii) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

iii) Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.

iv) Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60ο.

Απόδειξη πορισμάτων

ii) Γιατί θα είναι διαφορές ίσων γωνιών.

iii) Γιατί έχουν άθροισμα $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

iv) Αφού είναι ισόπλευρο, θα έχει 3 γωνίες ίσες και επειδή αυτές έχουν άθροισμα 180° , θα είναι καθε μία ίση με $180^\circ : 3 = 60^\circ$. [$\omega + \omega + \omega = 180^\circ \Leftrightarrow 3\omega = 180^\circ \Leftrightarrow \omega = 60^\circ$]

αποδείξεις πορισμάτων κεφ. 5

Ενότητα 5.2 Παραλληλόγραμμο

Ιδιότητες: Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- iii) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Πορίσματα (θεωρήματος):

[άλυτα στο σχολικό]

- i) Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.
- ii) Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα.

Απόδειξη πορισμάτων

i) 1^η απόδειξη:

Επειδή οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται, κάθε πλευρά του είναι συμμετρική ως προς την απέναντί πλευρά του.

2^η απόδειξη:

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, αρκεί να αποδείξουμε ότι το συμμετρικό ενός σημείου, ανήκει σε άλλη πλευρά του είτε αυτό είναι εσωτερικό πλευράς του είτε είναι άκρο.

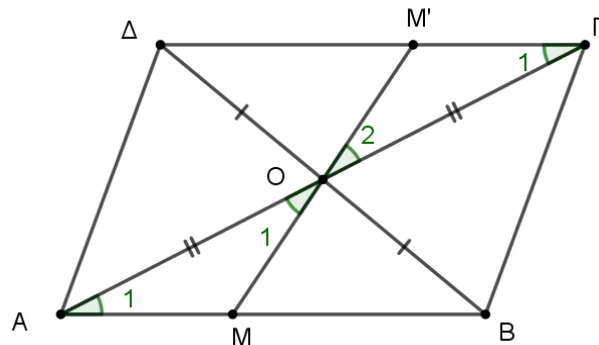
Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο.

Έστω Μ σημείο της πλευράς του ΑΒ. Φέρνω την ΟΜ και έστω Μ' το σημείο τομής της ΟΜ με την ΓΔ. Θα αποδείξουμε ότι το Μ' είναι το συμμετρικό του Μ, δηλαδή ΟΜ' = ΟΜ.

Τα τρίγωνα ΟΜΑ και ΟΜ'Γ είναι ίσα (ΓΠΓ) γιατί

έχουν ΟΑ = ΟΓ (ΑΒΓΔ παραλλ.), $\widehat{A_1} = \widehat{G_1}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ τεμνόμενων από την ΑΓ και $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ ως κατακορυφήν. Άρα ΟΜ = ΟΜ'.

Έστω Α άκρο πλευράς του. Εφόσον οι διαγώνιοι του διχοτομούνται, το συμμετρικό του Α ως προς το Ο είναι το σημείο Γ.



ii) Εφόσον είναι παράλληλα τμήματα με άκρα σε παράλληλες πλευρές, αυτά ορίζουν παραλληλόγραμμο εφόσον έχουν ανά δυο τις πλευρές τους παράλληλες. Άρα τα τμήματα αυτά θα είναι ίσα ως πλευρές παραλληλογράμμου.

αποδείξεις πορισμάτων κεφ. 6

Ενότητα 6.2 Σχέση Εγγεγραμμένης και Αντίστοιχης Επίκεντρης

Θεώρημα: Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

Πορίσματα (θεωρήματος):

[όλα άλυτα στο σχολικό]

- i) Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.
- ii) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
- iii) Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα.

Απόδειξη πορισμάτων

- i) Επειδή το μέτρο της επίκεντρης γωνίας ισούται με το μέτρο του τόξου που βαίνει.
- ii) Επειδή βαίνει σε τόξο 180° , θα έχει μέτρο ως εγγεγραμμένη $180^\circ:2 = 90^\circ$
- iii) Επειδή οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα, και επειδή έχουν μέτρο ίσο με το μισό των επίκεντρων γωνιών που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Ενότητα 6.5 Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Θεώρημα: Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- i) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- ii) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

Πόρισμα (θεωρήματος):

[άλυτο στο σχολικό]

Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

Απόδειξη πορίσματος

Γιατί είναι και οι δυο παραπληρωματικές της ίδιας εσωτερικής γωνίας.

Αλλιώς γραμμένο: Σε εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\widehat{A_{εξ}} = 180^\circ - \widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ διότι $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$.

άλλες λύσεις κεφ.3

3.1 – 3.2 Εμπέδωσης 1

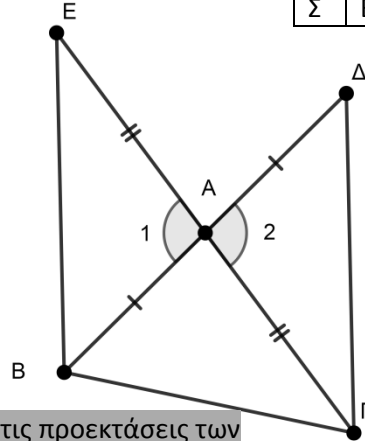
Στις προεκτάσεις των πλευρών BA, ΓΑ ενός τριγώνου ABΓ θεωρούμε τμήματα

$AD=AB$ και $AE=AG$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $BE=GD$.

Υ	$AD=AB, AE=AG$
Σ	$BE=GD$

[1^{ος} τρόπος – δεν είναι λυμένη καν στις λύσεις του σχολικού, στην θέση της είναι λυμένη κάποια άλλη άσκηση]

$$\left. \begin{array}{l} BA = AD \text{ (Y)} \\ EA = AG \text{ (Y)} \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \text{ (*)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle EAB \cong \triangle AGD \Rightarrow BE = GD$$



3.1 – 3.2 Αποδεικτική 1

Έστω τρίγωνο ABΓ και Κ σημείο εξωτερικό του τριγώνου. Αν στις προεκτάσεις των

AK, BK, ΓK θεωρήσουμε τμήματα $KD=AK, KE=BK, KZ=GK$, να αποδείξετε ότι $\widehat{E\Delta Z} = \widehat{B\Lambda\Gamma}$

Υ	$KD=AK, KE=BK, KZ=GK$
Σ	$\widehat{E\Delta Z} = \widehat{B\Lambda\Gamma}$

[1^{ος} τρόπος – λύσεις σχολικού]

$$\left. \begin{array}{l} DK = KA \text{ (Y)} \\ EK = KB \text{ (Y)} \\ \widehat{\Delta KE} = \widehat{BKA} \text{ (*)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle KDE \cong \triangle KBA$$

$$\begin{aligned} \triangle KDE \cong \triangle KBA &\Rightarrow \widehat{\Delta_1} = \widehat{A_1} \\ \text{Ομοίως } \widehat{\Delta_2} &= \widehat{A_2} \end{aligned} \Rightarrow \widehat{\Delta_1} + \widehat{\Delta_2} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2}$$

[2^{ος} τρόπος – έλυσαν οι μαθήτριες:

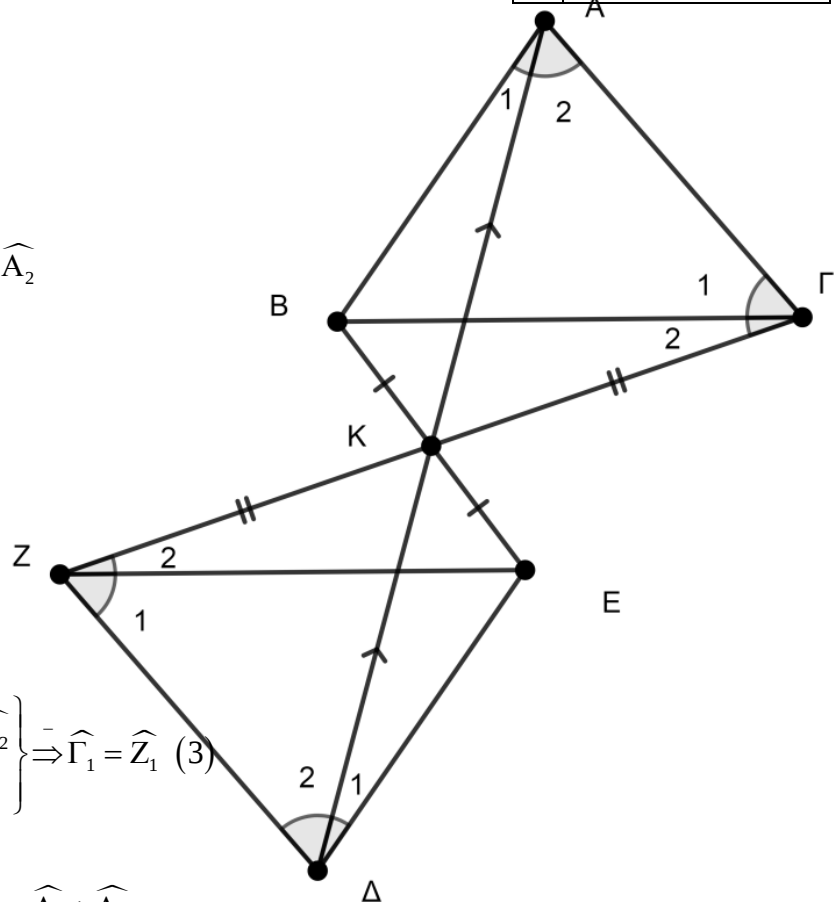
- Μαγγίνα Ελένη
- Μανάρα Ευαγγελία
- Πετρόχειλου Κατερίνα]

$$\left. \begin{array}{l} AK = KD \text{ (Y)} \\ KG = KZ \text{ (Y)} \\ \widehat{AKG} = \widehat{ZKD} \text{ (*)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AKG \cong \triangle ZKD$$

$$\triangle AKG \cong \triangle ZKD \Rightarrow ZD = AG \text{ (1)}, \widehat{\Gamma_1} + \widehat{\Gamma_2} = \widehat{Z_1} + \widehat{Z_2} \Rightarrow \widehat{\Gamma_1} = \widehat{Z_1} \text{ (3)}$$

$$\text{Ομοίως } BG = EZ \text{ (2)}, \widehat{\Gamma_2} = \widehat{Z_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{\Gamma_1} = \widehat{Z_1} \text{ (3)} \\ ZD = AG \text{ (1)} \\ BG = EZ \text{ (2)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ZDB \cong \triangle AGE \Rightarrow \widehat{\Delta_1} + \widehat{\Delta_2} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2}$$



* κατακορυφήν

άλλες λύσεις κεφ.3

3.1 – 3.2 Αποδεικτική 3

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και χορδή του ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΒ και προς τα δυο της άκρα, κατά ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\widehat{ΟΓΑ} = \widehat{ΟΔΒ}$

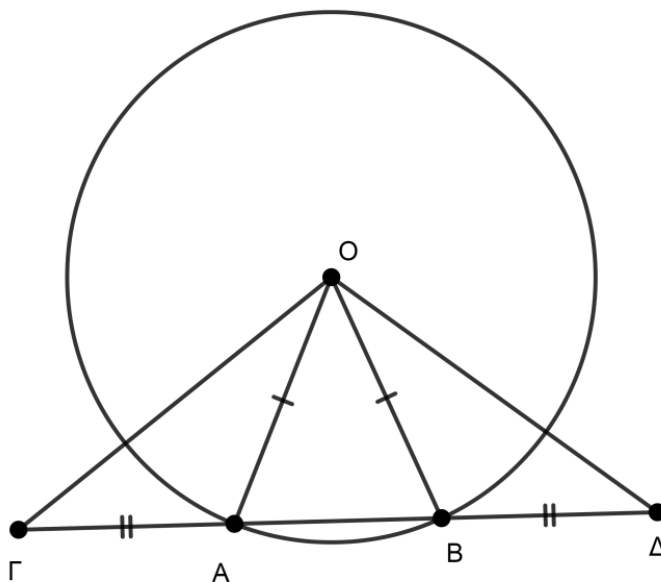
Υ	$A, B \in (O, \rho) (OA=OB=\rho)$ $\Gamma A \equiv B \Delta$
Σ	$\widehat{ΟΓΑ} = \widehat{ΟΔΒ}$

[1^{ος} τρόπος - λύσεις σχολικού]

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB (*) \\ AG = B\Delta (Y) \\ \widehat{ΟΑΓ} = \widehat{ΟΒΔ} (**) \end{array} \right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{\widehat{ΟΑΓ}} = \overset{\Delta}{\widehat{ΟΒΔ}} \Rightarrow \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$$

[2^{ος} τρόπος]

$$\left. \begin{array}{l} OB = OA (*) \\ B\Gamma = A\Delta (***) \\ \widehat{ΟΒΓ} = \widehat{ΟΑΔ} (****) \end{array} \right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{\widehat{ΟΒΓ}} = \overset{\Delta}{\widehat{ΟΑΔ}} \Rightarrow \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$$



* = ρ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου

** ως εξωτερικές γωνίες ίσων γωνιών ισοσκελούς τριγώνου, το $\overset{\Delta}{\widehat{ΟΑΒ}}$ είναι ισοσκελές διότι $OA=OB=\rho$ *** ως αθροίσματα ίσων πλευρών, των $AG=BD$ με την AB ($B\Gamma=GA+AB=B\Delta+AB=A\Delta$)**** ως προσκείμενες στην βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου, το $\overset{\Delta}{\widehat{ΟΑΒ}}$ είναι ισοσκελές διότι $OA=OB=\rho$

άλλες λύσεις κεφ.3

3.3 – 3.4 Εμπέδωσης 3

Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ίσο τμήμα ΜΔ.

Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσα.

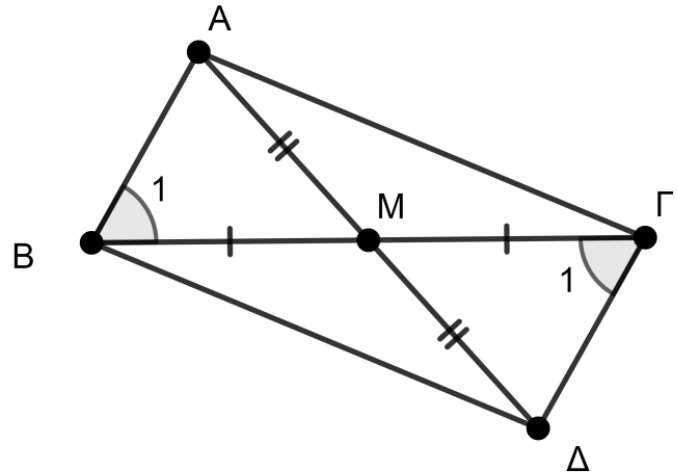
Υ	ΑΜ διάμεσος (ΒΜ=ΜΓ) ΜΔ=//ΑΜ
Σ	$\triangle A B \Gamma = \triangle B \Gamma \Delta$

[κοινή αρχή στους 2 τρόπους]

$$\left. \begin{array}{l} A M = M \Delta (Y) \\ B M = M \Gamma (Y) \\ \widehat{A M B} = \widehat{\Delta M \Gamma} (*) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle A M B = \triangle \Delta M \Gamma$$

[συνέχεια - 1^{ος} τρόπος - λύσεις σχολικού]

$$\left. \begin{array}{l} \triangle A M B = \triangle \Delta M \Gamma \Rightarrow A B = \Gamma \Delta \\ \text{Ομοίως } A \Gamma = B \Delta \\ B \Gamma = B \Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle A B \Gamma = \triangle B \Gamma \Delta$$

[συνέχεια - 2^{ος} τρόπος – έλυσαν οι μαθήτριες:

- Μαγγίνα Ελένη

- Πετρόχειλου Κατερίνα]

$$\left. \begin{array}{l} \triangle A M B = \triangle \Delta M \Gamma \Rightarrow A B = \Gamma \Delta, \widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1 \\ B \Gamma = B \Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle A B \Gamma = \triangle B \Gamma \Delta$$

3.3 – 3.4 Αποδεικτική 1

Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

Υ	$\triangle A B \Gamma$ ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ) ΒΔ, ΓΕ διχοτόμοι ($\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2, \widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$)
Σ	ΒΔ=ΓΕ

[1^{ος} τρόπος - λύσεις σχολικού]

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A} \\ A B = A \Gamma (Y) \\ \widehat{B}_2 = \widehat{\Gamma}_2 (**) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle A B \Delta = \triangle A \Gamma E \Rightarrow B \Delta = E \Gamma$$

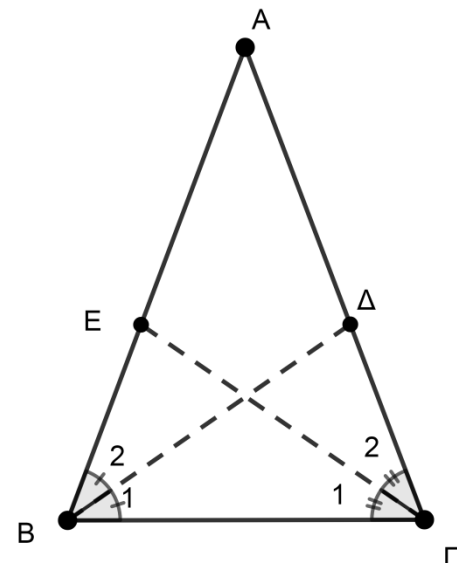
[2^{ος} τρόπος]

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{\Gamma} (***) \\ B \Gamma = B \Gamma \\ \widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1 (**) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle B \Delta \Gamma = \triangle B \Gamma E \Rightarrow B \Delta = E \Gamma$$

*ως κατακορυφήν

** ως μισά ίσων γωνιών ισοσκελούς τριγώνου

*** ως γωνίες προσκείμενες στην βάση ισοσκελούς τριγώνου



άλλες λύσεις κεφ.3

3.3 – 3.4 Αποδεικτική 2

Αν AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$ είναι τρεις διάμετροι κύκλου,
να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

Υ	$AA', BB', \Gamma\Gamma'$ διάμετροι (O, ρ) ($OA=//OA'=\rho$, $OB=//OB'=\rho$, $O\Gamma=//O\Gamma'$)
Σ	$\triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$

[κοινή αρχή στους 3 από τους 4 τρόπους]

$$\left. \begin{array}{l} OA = OA' (*) \\ OB = OB' (*) \\ \widehat{O_1} = \widehat{O_2} (**) \end{array} \right\} \xRightarrow{\Pi-\Gamma-\Pi} \triangle OAB = \triangle O'A'B' \Rightarrow \triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$$

[συνέχεια - 1^{ος} τρόπος - λύσεις σχολικού]

$$\left. \begin{array}{l} \triangle OAB = \triangle O'A'B' \Rightarrow AB = A'B' \\ \text{Ομοίως } A\Gamma = A'\Gamma', B\Gamma = B'\Gamma' \end{array} \right\} \xRightarrow{\Pi-\Pi-\Pi} \triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$$

[συνέχεια - 2^{ος} τρόπος – έλυσαν οι μαθήτριες:

- Μανάρα Ευαγγελία

- Μαγγίνα Ελένη]

$$\left. \begin{array}{l} \triangle OAB = \triangle O'A'B' \Rightarrow AB = A'B' (1), \widehat{A_2} = \widehat{A'_2} \\ \text{Ομοίως } A\Gamma = A'\Gamma' (2), \widehat{A_1} = \widehat{A'_1} \end{array} \right\} \xRightarrow{\oplus} \left. \begin{array}{l} \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{A'_1} + \widehat{A'_2} \\ AB = A'B' (1) \\ A\Gamma = A'\Gamma' (2) \end{array} \right\} \xRightarrow{\Pi-\Gamma-\Pi} \triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$$

[συνέχεια - 3^{ος} τρόπος – έλυσε η μαθήτρια:

- Μαγγίνα Ελένη] [*]

$$\left. \begin{array}{l} \triangle OAB = \triangle O'A'B' \Rightarrow AB = A'B' (1), \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = \widehat{B'_1} + \widehat{B'_2} \\ \text{Ομοίως } B\Gamma = B'\Gamma' (3), \widehat{B_2} = \widehat{B'_2} \end{array} \right\} \xRightarrow{\bar{\widehat{B_1}} = \widehat{B'_1}} \left. \begin{array}{l} AB = A'B' (1) \\ B\Gamma = B'\Gamma' (3) \end{array} \right\} \xRightarrow{\Pi-\Gamma-\Pi} \triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$$

[4^{ος} τρόπος – έλυσαν οι μαθήτριες:

- Κόκκοτα Ελένη

- Πετρόχειλου Κατερίνα]

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{O_1} = \widehat{O_2} (**) \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{A'B'} \Rightarrow AB = A'B' \\ \text{Ομοίως } A\Gamma = A'\Gamma', B\Gamma = B'\Gamma' \end{array} \right\} \xRightarrow{\Pi-\Pi-\Pi} \triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$$

*= ρ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου

** ως κατακορυφήν

[*] Είναι προσαρμογή της λύσης που έδωσε σε διαφορετική διάταξη στην αποδεικτική 1 της 3.2, ώστε να αξιοποιηθεί η ιδέα της.

για τους ρομαντικούς της γεωμετρίας: parmenides52.blogspot.com

άλλες λύσεις κεφ.3

3.3 – 3.4 Αποδεικτική 3

Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $AB=ΓΔ$ και $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$.

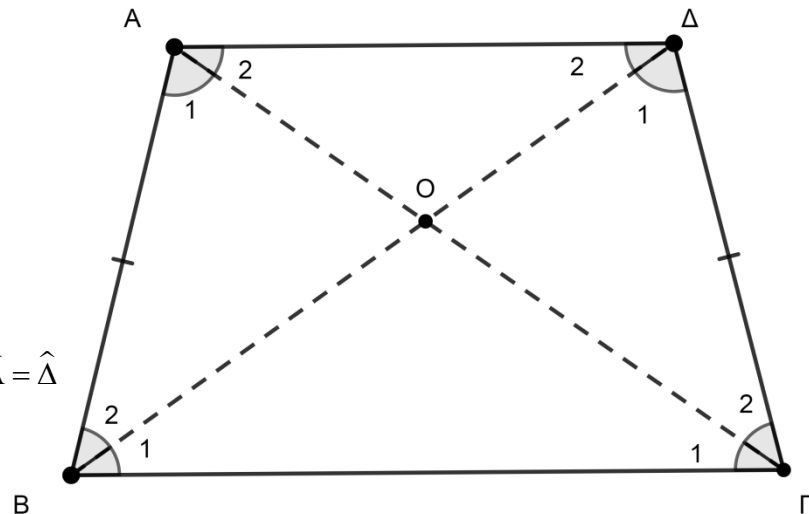
Υ	κυρτό ΑΒΓΔ, $AB=ΓΔ$, $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$
Σ	$\widehat{A} = \widehat{\Delta}$

[κοινή αρχή στους 2 τρόπους]

$$\left. \begin{array}{l} AB = \Gamma\Delta \text{ (Υ)} \\ \widehat{B} = \widehat{\Gamma} \text{ (Υ)} \\ B\Gamma = B\Gamma \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{Π-Γ-Π}} \triangle AB\Gamma = \triangle \Delta B\Gamma$$

[συνέχεια - 1^{ος} τρόπος - λύσεις σχολικού]

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AB\Gamma = \triangle \Delta B\Gamma \Rightarrow A\Gamma = B\Delta \\ AB = \Gamma\Delta \text{ (Υ)} \\ A\Delta = A\Delta \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{Π-Π-Π}} \triangle AB\Delta = \triangle A\Delta\Gamma \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{\Delta}$$



[συνέχεια - 2^{ος} τρόπος – έλυσε η μαθήτρια:

- Κόκκοτα Ελένη]

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AB\Gamma = \triangle \Delta B\Gamma \Rightarrow A\Gamma = B\Delta \text{ (1)}, \widehat{B_1} = \widehat{\Gamma_1} \\ \widehat{B} = \widehat{\Gamma} \text{ (Υ)} \Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = \widehat{\Gamma_1} + \widehat{\Gamma_2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{\Gamma_2} \\ AB = \Gamma\Delta \text{ (Υ)} \\ A\Gamma = B\Delta \text{ (1)} \end{array} \xRightarrow{\text{Π-Γ-Π}} \triangle AB\Delta = \triangle A\Gamma\Delta \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{\Delta}$$

[συνέχεια - 3^{ος} τρόπος]

$$\triangle AB\Gamma = \triangle \Delta B\Gamma \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{A_1} = \widehat{\Delta_1} \text{ (2)}, A\Gamma = B\Delta \\ \widehat{B_1} = \widehat{\Gamma_1} \Rightarrow O\Gamma = BO \end{array} \right\} \xRightarrow{-} AO = OD \Rightarrow \triangle AOD \text{ ισοσκελές} \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{\Delta_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A_2} = \widehat{\Delta_2} \\ \widehat{A_1} = \widehat{\Delta_1} \text{ (2)} \end{array} \right\} \xRightarrow{+} \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{\Delta_1} + \widehat{\Delta_2} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{\Delta}$$

άλλες λύσεις κεφ.3

3.5 – 3.6 Εμπέδωσης 1

Να αποδείξετε ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

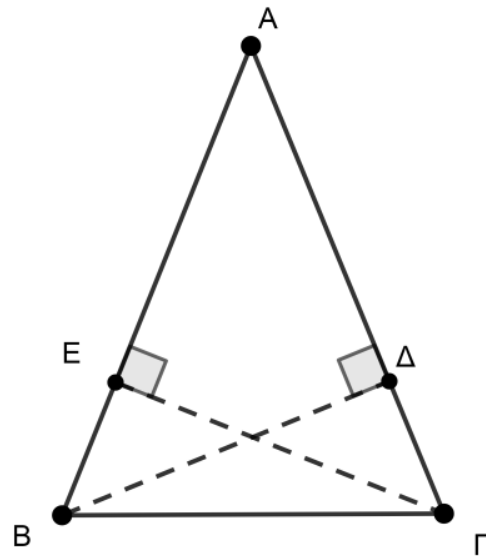
Υ	$\triangle AB\Gamma$ ισοσκελές ($AB=AG$) $B\Delta, \Gamma E$ ύψη ($B\Delta \perp AG, \Gamma E \perp AB$)
Σ	$B\Delta = \Gamma E$

[1^{ος} τρόπος - λύσεις σχολικού]

$$\left. \begin{array}{l} AB = AG \text{ (Y)} \\ \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ \text{ (Y)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AB\Delta = \triangle AGE \Rightarrow B\Delta = E\Gamma$$

[2^{ος} τρόπος]

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{\Gamma} \text{ (Y)} \\ B\Gamma = B\Gamma \\ \hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ \text{ (Y)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle B\Delta\Gamma = \triangle BE\Gamma \Rightarrow B\Delta = E\Gamma$$



άλλες λύσεις κεφ.3

3.5 – 3.6 Αποδεικτική 1

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB=AG$) και M το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- i) το M ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του τριγώνου
 ii) η AM είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι αποστάσεις του M από τις ίσες πλευρές μεταξύ τους.

Υ	$\triangle AB\Gamma$ ισοσκελές ($AB=AG$) M μέσο $B\Gamma$ ($BM=MG$) MD, ME αποστάσεις M από AB, AG αντ. $(MD \perp AB, ME \perp AG)$
Σ	i) $MD = ME$ ii) AM διχοτόμος της $\widehat{\Delta ME}$ ($\widehat{M}_2 = \widehat{M}_3$)

[1^{ος} τρόπος - λύσεις σχολικού]

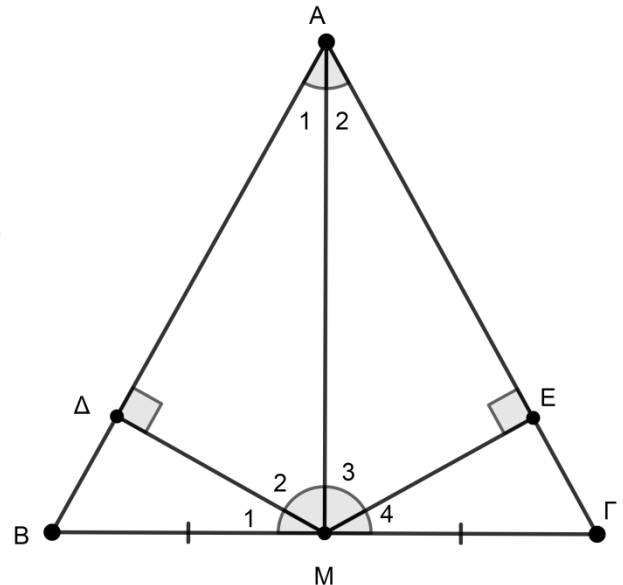
AM διάμεσος σε ισοσκελές με βάση $B\Gamma$ άρα και διχοτόμος

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \\ \widehat{E} = \widehat{\Delta} = 90^\circ \text{ (Y)} \\ AM = AM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle \Delta M = \triangle E M \Rightarrow MD = ME, \widehat{M}_2 = \widehat{M}_3$$

[2^{ος} τρόπος - ιδιότητα διχοτόμου]

AM διάμεσος σε ισοσκελές με βάση $B\Gamma$ άρα και διχοτόμος

$$\left. \begin{array}{l} M \in \text{διχοτόμο } AM \Rightarrow MD = ME \\ \widehat{E} = \widehat{\Delta} = 90^\circ \text{ (Y)} \\ AM = AM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle \Delta M = \triangle E M \Rightarrow \widehat{M}_2 = \widehat{M}_3$$

[3^{ος} τρόπος]

AM διάμεσος σε ισοσκελές με βάση $B\Gamma$ άρα και ύψος $\Rightarrow AM \perp B\Gamma$ (1)

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{G} \text{ (Y)} \\ BM = MG \text{ (Y)} \\ \widehat{\Delta} = \widehat{E} = 90^\circ \text{ (Y)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle \Delta M = \triangle E M \Rightarrow MD = ME, \widehat{M}_1 = \widehat{M}_4 \left\{ \begin{array}{l} \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = \widehat{M}_3 + \widehat{M}_4 = 90^\circ \text{ (1)} \end{array} \right. \Rightarrow \widehat{M}_2 = \widehat{M}_3$$

[4^{ος} τρόπος - έλυσαν όσες μαθήτριες ασχολήθηκαν]

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{G} \text{ (Y)} \\ BM = MG \text{ (Y)} \\ \widehat{\Delta} = \widehat{E} = 90^\circ \text{ (Y)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle \Delta M = \triangle E M \Rightarrow MD = ME \left\{ \begin{array}{l} \widehat{E} = \widehat{\Delta} = 90^\circ \text{ (Y)} \\ AM = AM \end{array} \right. \Rightarrow \triangle \Delta M = \triangle E M \Rightarrow \widehat{M}_2 = \widehat{M}_3$$

άλλες λύσεις κεφ.3

3.5 – 3.6 Αποδεικτική 2

Να αποδείξετε ότι αν σε δυο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι $\alpha=\alpha'$, $\upsilon_\alpha=\upsilon_{\alpha'}$ και $\mu_\alpha=\mu_{\alpha'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Υ	$AB=A'B'$ $\upsilon_\alpha=A\Delta=A\Delta'$ ($A\Delta \perp B\Gamma$, $A'\Delta' \perp B'\Gamma'$) $\text{διάμεσοι } AM=A'M'$ ($BM=M\Gamma$, $B'M'=M'\Gamma'$)
Σ	$\triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$

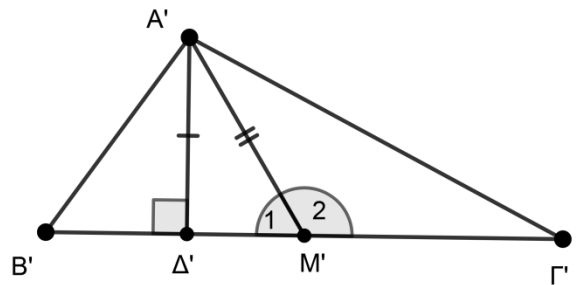
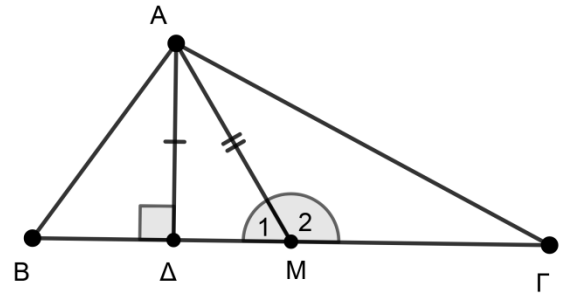
[κοινή αρχή στους 2 τρόπους]

$$\left. \begin{array}{l} A\Delta = A'\Delta' (Y) \\ AM = A'M' (Y) \\ \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ (Y) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AM = \triangle A'M'$$

[συνέχεια – 1^{ος} τρόπος - λύσεις σχολικού]

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AM = \triangle A'M' \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M}'_1 \\ AM = A'M' (Y) \\ BM = B'M' (*) \end{array} \right\} \xrightarrow{\Pi-\Gamma-\Pi} \triangle ABM = \triangle A'B'M'$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABM = \triangle A'B'M' \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}', AB = A'B' \\ B\Gamma = B'\Gamma' \end{array} \right\} \xrightarrow{\Pi-\Gamma-\Pi} \triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$$

[συνέχεια – 2^{ος} τρόπος – έλυσαν οι μαθήτριες:

- Ζουγανέλη Ιωάννα

- Πετρόχειλου Κατερίνα]

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AM = \triangle A'M' \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M}'_1 \Rightarrow \widehat{M}_2 = \widehat{M}'_2 \\ AM = A'M' (Y) \\ M\Gamma = M'\Gamma' (*) \end{array} \right\} \xrightarrow{\Pi-\Gamma-\Pi} \triangle AM\Gamma = \triangle A'M'\Gamma'$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AM\Gamma = \triangle A'M'\Gamma' \Rightarrow \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}', A\Gamma = A'\Gamma' \\ B\Gamma = B'\Gamma' (Y) \end{array} \right\} \xrightarrow{\Pi-\Gamma-\Pi} \triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$$

* ως μισά ίσων πλευρών, αφού $B\Gamma=B'\Gamma'$

άλλες λύσεις κεφ.3

3.5 – 3.6 Αποδεικτική 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=1L$) και η διχοτόμος του $B\Delta$.Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z .Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.

Υ	$\widehat{BAG} = 90^\circ$, BΔ διχοτόμος ($\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$), $\Delta E \perp BZ$
Σ	$\triangle B\Gamma Z$ ισοσκελές

[κοινή αρχή σε όλους τους τρόπους]

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 (Y) \\ B\Delta = B\Delta \\ \widehat{A} = \widehat{E} = 90^\circ (Y) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AB\Delta = \triangle BE\Delta$$

[συνέχεια – 1^{ος} τρόπος - λύσεις σχολικού]

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AB\Delta = \triangle BE\Delta \Rightarrow AB = BE \\ \widehat{B} = \widehat{B} \\ \widehat{A} = \widehat{E} = 90^\circ (Y) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AB\Gamma = \triangle BZE \Rightarrow B\Gamma = BZ$$

[συνέχεια – 2^{ος} τρόπος - έλυσαν οι μαθήτριες:

- Ζουγανέλη Ιωάννα
- Μανάρα Ευαγγελία
- Πετρόχειλου Κατερίνα]

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AB\Delta = \triangle BE\Delta \Rightarrow AB = BE (1), A\Delta = \Delta E \\ \widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_4 (*) \\ \widehat{A} = \widehat{E} = 90^\circ (Y) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AZ\Delta = \triangle E\Gamma\Delta \Rightarrow \begin{array}{l} AZ = \Gamma E \\ AB = BE (1) \end{array} \Bigg\}^{\oplus} \Rightarrow BZ = B\Gamma$$

[συνέχεια – 3^{ος} τρόπος]

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AB\Delta = \triangle BE\Delta \Rightarrow A\Delta = \Delta E \\ \widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_4 (*) \\ \widehat{A} = \widehat{E} = 90^\circ (Y) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AZ\Delta = \triangle E\Gamma\Delta \Rightarrow \begin{array}{l} \widehat{\Gamma}_2 = \widehat{Z}_2 \\ \Gamma\Delta = \Delta Z \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{\Gamma}_2 = \widehat{Z}_2 \\ \Gamma\Delta = \Delta Z \Rightarrow \triangle AZ\Delta \text{ ισοσκελές} \Rightarrow \widehat{\Gamma}_1 = \widehat{Z}_1 \end{array} \right\}^{\oplus} \Rightarrow \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}_2 = \widehat{Z}_1 + \widehat{Z}_2 \Rightarrow \widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$$

[συνέχεια – 4^{ος} τρόπος]

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AB\Delta = \triangle BE\Delta \Rightarrow \widehat{\Delta}_2 = \widehat{\Delta}_3 \\ \widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_4 (*) \end{array} \right\}^{\oplus} \Rightarrow \widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = \widehat{\Delta}_3 + \widehat{\Delta}_4, \quad \left. \begin{array}{l} \widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = \widehat{\Delta}_3 + \widehat{\Delta}_4 \\ \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 (Y) \\ B\Delta = B\Delta \end{array} \right\}^{\Gamma-\Pi-\Gamma} \Rightarrow \triangle B\Delta Z = \triangle B\Gamma\Delta \Rightarrow BZ = B\Gamma$$

* ως κατακορυφήν

άλλες λύσεις κεφ.3

3.10 – 3.12 Εμπέδωσης 9

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- i) το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές,
 ii) η AI είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.

[κοινή αρχή σε όλους τους τρόπους]

Υ	$\triangle AB\Gamma$ ισοσκελές ($AB=A\Gamma$) $BI, \Gamma I$ διχοτόμοι ($\hat{B}_1 = \hat{B}_2, \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$)
Σ	i) $\triangle B\Gamma I$ ισοσκελές ii) AI διχοτόμος της $\hat{A}$

$$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 (*) \Rightarrow \triangle B\Gamma I \text{ ισοσκελές}$$

[συνέχεια – 1^{ος} τρόπος - λύσεις σχολικού]

$$\left. \begin{array}{l} \triangle B\Gamma I \text{ ισοσκελές} \Rightarrow BI = \Gamma I \\ AB = A\Gamma \text{ (Υ)} \\ \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2 (*) \end{array} \right\} \xRightarrow{(\Pi-\Pi-\Pi)} \triangle AIB = \triangle A\Gamma I \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

[συνέχεια – 2^{ος} τρόπος - έλυσε η μαθήτριά:

- Μανάρα Ευαγγελία]

$$\triangle B\Gamma I \text{ ισοσκελές} \Rightarrow BI = \Gamma I \Rightarrow I \in \text{μεσοκάθετο του } B\Gamma$$

$$\triangle AB\Gamma \text{ ισοσκελές} \Rightarrow AB = A\Gamma \Rightarrow A \in \text{μεσοκάθετο του } B\Gamma$$

Οπότε τα σημεία $A, I \in$ μεσοκάθετο του $B\Gamma$, άρα AI είναι η μεσοκάθετος του $B\Gamma$

κι επειδή το $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση $B\Gamma$, η μεσοκάθετος του $B\Gamma$ είναι και διχοτόμος της $\hat{A}$
 οπότε η AI είναι η διχοτόμος της $\hat{A}$

[συνέχεια – 3^{ος} τρόπος – ιδιότητα διχοτόμου γωνίας]Έστω $EI, \Delta I, ZI$ οι αποστάσεις του I από τις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma A$ αντίστοιχα.

$$I \in \text{διχοτόμο της } \hat{B} \Rightarrow EI = \Delta I$$

$$I \in \text{διχοτόμο της } \hat{\Gamma} \Rightarrow \Delta I = ZI$$

$$\text{Αφού } EI = \Delta I \text{ και } \Delta I = ZI \Rightarrow EI = ZI \Rightarrow I \in \text{διχοτόμο της } \hat{A} \Rightarrow AI \text{ είναι η διχοτόμος της } \hat{A}$$

* ως μισά ίσων γωνιών ισοσκελούς τριγώνου