ΌΡΙΑ – Μεθοδολογία

Α. Απλά Όρια

Περιγραφή: Εδώ αναφερόμαστε σε όρια όπου οι αντικαταστάσεις γίνονται εύκολα χωρίς πρόβλημα.
Μην ξεχνάμε ότι μπορούμε να κάνουμε και πράξεις με τα σύμβολα του απείρου.

- $c + (+\infty) = +\infty$
- $c + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $\theta \cdot (+\infty) = +\infty,$
- $\theta \cdot (-\infty) = -\infty,$
- $a \cdot (+\infty) = -\infty$
- $a \cdot (-\infty) = +\infty$
- $|\pm\infty| = +\infty.$

- $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
- $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
- $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
- $\frac{c}{\pm\infty} = 0$
- $\sqrt{+\infty} = +\infty$
- $e^{+\infty} = +\infty, \quad e^{-\infty} = 0$
- $\ln(+\infty) = +\infty, \quad \ln(0^+) = -\infty$
- $\frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$

Πότε?

Όταν η αρχική αντικατάσταση **δεν μας δίνει** απροσδιόριστη μορφή

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty - \infty$$

Παραδείγματα

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x) + x^2}{2x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} (e^x + \ln(2x))$$

Β. Όρια με απόλυτες τιμές

Περιγραφή: Αναφερόμαστε σε όρια που μέσα στον τύπο της συνάρτησης έχουν απόλυτες τιμές.
Πρέπει να βγάλουμε τα όρια με βάση την περιοχή γύρω από την οποία παίρνουμε το όριο. Πιθανόν να χρειαστεί να πάρουμε πλευρικά όρια αν προκύψουν δύο περιπτώσεις.

Πότε?

Όταν έχουμε όρια με απόλυτες τιμές τα οποία δεν υπολογίζονται άμεσα!

Παραδείγματα

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x-2| - 1}{x - 1}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - x^2 + x}{|x - x^3|}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{|x-2| - 1}{x - 1}$$

Γ. Δίκλαδες Συναρτήσεις

Περιγραφή: Αναφερόμαστε σε όρια δίκλαδων συναρτήσεων σε σημεία που αλλάζει ο τύπος τους. Τότε πρέπει να πάρουμε πλευρικά όρια.

Πότε?

Όταν έχουμε δίκλαδες συναρτήσεις και παίρνουμε όριο σε σημείο που αλλάζει ο τύπος.

Παραδείγματα

Να βρεθεί το $\lim_{x\to 1} f(x)$, αν η συνάρτηση είναι

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ 5x & x > 1 \end{cases}$$

Δ. Θεωρητικές

Περιγραφή: Αν μας δίνεται κάποιο όριο που περιέχει την $f(x)$ π.χ. το

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

Και ψάχνουμε το όριο $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$, τότε θέτουμε τον τύπο του ορίου ίσο με $g(x)$ και λύνουμε ως προς $f(x)$ για να βρούμε το όριο της $f(x)$. Οπότε στο παράδειγμα θα έχουμε $\frac{f(x)}{x-1}=g(x)\ \rightarrow\ \ f(x)=g(x)\cdot(x-1)$. Και άρα

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}g(x)\cdot(x-1)=\lim_{x\to 1}g(x)\cdot\lim_{x\to 1}(x-1)=0.$$

Πότε?

Όταν έχουμε κάποιο όριο γνωστό (που περιέχει την $f(x)$ και ζητάμε το όριο της $f(x)$).

Παραδείγματα

(Αυτό που δόθηκε παραπάνω)

Ε. Όρια που δεν υπάρχουν

Περιγραφή: Παίρνουμε τα πλευρικά όρια και αποδεικνύουμε ότι είναι διαφορετικά.

Πότε?

Όταν μια άσκηση μας ζητάει να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει ένα όριο ή όταν υποπτευόμαστε ότι δεν υπάρχει ένα όριο.

Παραδείγματα

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\,(x)}}{x}$$

ΣΤ. Τριγωνομετρικά Όρια

Περιγραφή: Χρησιμοποιούμε κάποιο από τα γνωστά όρια

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu(x)-1}{x}=0$$

Πότε?

Όταν έχουμε όριο με τριγωνομετρικές συναρτήσεις και μπορούμε να αναγνωρίσουμε παραστάσεις των γνωστών ορίων μέσα.

Παραδείγματα

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x)}{\eta\mu(2x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu(x)}{x}\cdot\frac{2x}{\eta\mu(2x)}\cdot\frac{1}{2}\right),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu(x)}{\eta\mu(x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu(x)}{x}\cdot\frac{x}{\eta\mu(x)}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(3x)\cdot\eta\mu(2x)}{x\cdot\eta\mu(5x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu(3x)}{3x}\cdot 3\cdot\frac{\eta\mu(2x)}{2x}\cdot\frac{5x}{\eta\mu(5x)}\cdot\frac{2}{5}\right)$$

Z. L' Hospital **********

Περιγραφή:

Αν το όριο $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει τότε και το $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και θα έχουμε

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Πότε?

Όταν το αρχικό όριο $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ μας δίνει απροσδιόριστη μορφή του τύπου $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, 0^0, 1^∞

Παραδείγματα

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2-x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)+x^2}{2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot e^{-x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-17x+8}{8-x},\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu(x)}}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x)}{x+\varepsilon\varphi(x)},$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x}}{x^2-3x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x)}{\eta\mu(2x)},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}-e^x+1}{x^2},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu(x^2)}{2x}\right),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{x^2-x},\quad \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right),\quad \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)^{\sqrt{x}}=1,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=e^a,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x^2}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=1,\quad \lim_{x\to 0}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^{x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^{-x}=+\infty,\quad \lim_{x\to 0}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)^{ax}=e^{-a}$$

Η. Ρητές στο άπειρο

Περιγραφή:

Όρια της μορφής $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$, με $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα υπολογίζονται λαμβάνοντας υπ' όψη μόνο τους μεγιστοβάθμιους όρους:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

Πότε?

Όταν έχουμε όρια με πηλίκα πολυωνύμων και το όριο είναι στο $\pm\infty$.

Παραδείγματα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-5x}{6x^3-4x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{6x^3}=\frac{1}{3}$$

Θ. Πολυώνυμα και ρητές με ρίζες στο άπειρο

Περιγραφή:

Όρια της μορφής $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$ με συναρτήσεις πολυωνύμων που πιθανόν έχουν ρίζες μέσα.

Α. Βγάζουμε τους μεγιστοβάθμιους όρους κοινούς παράγοντες για να δημιουργήσουμε κλάσματα που τείνουν στο 0.

Β. Αν η τεχνική Α οδηγήσει σε απροσδιόριστη μορφή, τότε πρώτα πολλαπλασιάζουμε με την συζυγή παράσταση αριθμητή και παρονομαστή.

Πότε?

Όταν έχουμε όρια αυτής της μορφής.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Όταν απλοποιούμε τις ρίζες βάζουμε απόλυτη τιμή. Αν το x τείνει στο $+\infty$ τότε αντικαθιστούμε το $|x|$ με x. Αν το x τείνει στο $-\infty$ τότε αντικαθιστούμε το $|x|$ με $-x$.

Παραδείγματα

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-x\right),\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-x\right),\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x}-2x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right),\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^6+3x^3}-x^3\right),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{4x^2+x}-2x}$$

Ι. Μηδενική επί Φραγμένη

Περιγραφή:

Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ και η g είναι φραγμένη, δηλαδή $|g(x)|\le M$ για κάθε x κοντά στο α τότε $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=0$. Προσοχή: Εφαρμόζουμε το Κριτήριο Παρεμβολής

Πότε?

Όταν στο ορίο εμφανίζονται $\sin(\pm\infty)$, $\cos(\pm\infty)$.

Παραδείγματα

$$\lim_{x\to0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x^2,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x^2-5x}$$

ΙΑ. Εκθετικές

Περιγραφή:

Όταν το όριο περιέχει όρους της μορφής a^x, $(\pi.\chi.\ 3^x,\ 5^x,\ 7^x)$ βγάζουμε κοινούς παράγοντες τις μεγαλύτερες δυνάμεις (ή τις μικρότερες δυνάμεις) και παίρνουμε πάλι κλάσματα που τείνουν στο 0 με βάση τις σχέσεις:

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha^x=\begin{cases}+\infty, & a>1\\ 0, & 0<a<1\end{cases}\qquad \lim_{x\to-\infty}\alpha^x=\begin{cases}0, & a>1\\ +\infty, & 0<a<1\end{cases}$$

Αν έχουμε $x\to+\infty$: τότε βγάζουμε κοινό παράγοντα τη δύναμη με τη μεγαλύτερη βάση

Αν έχουμε $x\to-\infty$: τότε βγάζουμε κοινό παράγοντα τη δύναμη με τη μικρότερη βάση

Πότε?

Όταν το όριο τείνει στο $+\infty$ περιέχει όρους της μορφής a^x, $(\pi.\chi.\ 3^x,\ 5^x,\ 7^x)$.

Παραδείγματα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x+x^2}{3^x-2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\left(1+\frac{x^2}{5^x}\right)}{3^x\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^x\frac{\left(1+\frac{x^2}{5^x}\right)}{\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x+3^x}{3^x-2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x\left(\left(\frac{5}{3}\right)^x+1\right)}{2^x\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x\frac{\left(\left(\frac{5}{3}\right)^x+1\right)}{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x-1\right)}=0$$