

ΌΡΙΑ – Συναρτήσεις

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

1. L' Hospital

Περιγραφή:

Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει τότε και το $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και θα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Πότε?

Όταν το αρχικό όριο $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ μας δίνει απροσδιόριστη μορφή του τύπου $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , 1^∞

Παραδείγματα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2 - x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + x^2}{2x}$$

2. Ρητές στο άπειρο

Περιγραφή:

Όρια της μορφής $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, με $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα υπολογίζονται λαμβάνοντας υπ' όψη μόνο τους μεγιστοβάθμιους όρους:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Πότε?

Όταν έχουμε όρια με πηλίκα πολυωνύμων και το όριο είναι στο $\pm\infty$.

Παραδείγματα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x}{6x^3 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{6x^3} = \frac{1}{3}$$

3. Πολυώνυμα και ρητές με ρίζες στο άπειρο

Περιγραφή:

Όρια της μορφής $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ με συναρτήσεις πολυωνύμων που πιθανόν έχουν ρίζες μέσα.

A. Βγάζουμε τους μεγιστοβάθμιους όρους κοινούς παράγοντες για να δημιουργήσουμε κλάσματα που τείνουν στο 0.

B. Αν η τεχνική A οδηγήσει σε απροσδιόριστη μορφή, τότε πρώτα πολλαπλασιάζουμε με την συζυγή παράσταση αριθμητή και παρονομαστή.

Πότε?

Όταν έχουμε όρια αυτής της μορφής.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Όταν απλοποιούμε τις ρίζες βάζουμε απόλυτη τιμή. Αν το x τείνει στο $+\infty$ τότε αντικαθιστούμε το $|x|$ με x . Αν το x τείνει στο $-\infty$ τότε αντικαθιστούμε το $|x|$ με $-x$.

Παραδείγματα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\sqrt{4x^2 + x} - 2x}$$

4. Μηδενική επί Φραγμένη

Περιγραφή:

Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ και η g είναι φραγμένη, δηλαδή $|g(x)| \leq M$ για κάθε x κοντά στο a τότε $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0$.

Πότε?

Όταν στο όριο εμφανίζονται $\sin(\pm\infty)$, $\cos(\pm\infty)$.

Παραδείγματα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 - 5x}$$

5. Εκθετικές

Περιγραφή:

Όταν το όριο περιέχει όρους της μορφής a^x , (π.χ. 3^x , 5^x , 7^x) βγάζουμε κοινούς παράγοντες τις μεγαλύτερες δυνάμεις (ή τις μικρότερες δυνάμεις) και παίρνουμε πάλι κλάσματα που τείνουν στο 0 με βάση τις σχέσεις:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 0, & 0 < a < 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ +\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Αν έχουμε $x \rightarrow +\infty$: τότε βγάζουμε κοινό παράγοντα τη δύναμη με τη μεγαλύτερη βάση

Αν έχουμε $x \rightarrow -\infty$: τότε βγάζουμε κοινό παράγοντα τη δύναμη με τη μικρότερη βάση

Πότε?

Όταν το όριο τείνει στο $+\infty$ περιέχει όρους της μορφής a^x , (π.χ. 3^x , 5^x , 7^x).

Παραδείγματα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x + x^2}{3^x - 2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x \left(1 + \frac{x^2}{5^x}\right)}{3^x \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^x \frac{\left(1 + \frac{x^2}{5^x}\right)}{\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x + 3^x}{3^x - 2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x \left(\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1\right)}{2^x \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x \frac{\left(\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1\right)}{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1\right)} = 0$$