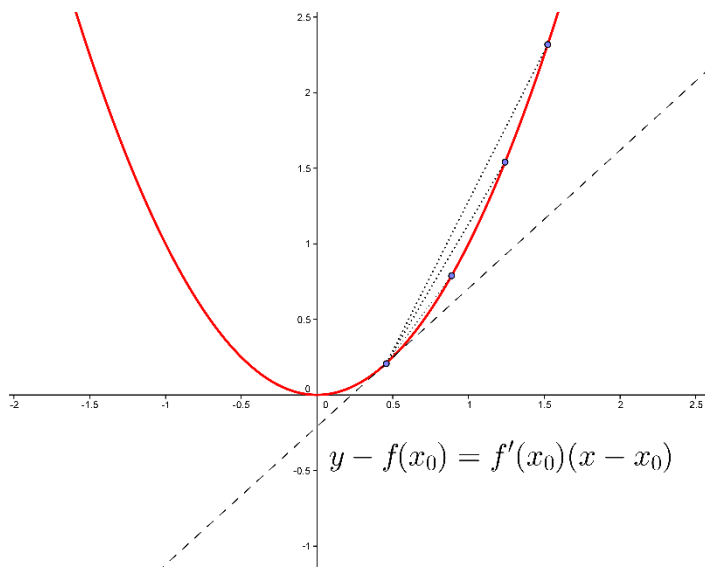


V. Διαφορικός Λογισμός



ΜΕΡΟΣ 1

Η έννοια της Παραγώγου

Α. Ορισμός

Εφαπτομένη καμπύλης συνάρτησης: Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο A , την ευθεία που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .

Παραγώγιση: Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0) =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Εναλλακτικά η παράγωγος μπορεί να ορισθεί με τον τύπο $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια (είναι πραγματικοί αριθμοί) και είναι ίσα, δηλαδή: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- Ο **συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης** ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 . Δηλαδή $\lambda = f'(x_0)$. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
- Η **στιγμιαία ταχύτητα** ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = x(t)$ στο t_0 . Δηλαδή $v(t) = x'(t)$. Όμοια, η στιγμιαία επιτάχυνση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης ταχύτητας στο t_0 . Δηλαδή $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

Θεώρημα I

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο x_0 .

B. Παράγωγος Συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο A .

- Η f είναι **παραγωγίσιμη** στο A αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$.

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο A και έστω A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση $f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $x \rightarrow f'(x)$. Η συνάρτηση f' ονομάζεται **πρώτη παράγωγος** ή απλά παράγωγος της f . Με όμοιο τρόπο η παράγωγος της f' (αν υπάρχει) συμβολίζεται με f'' και ονομάζεται **δεύτερη παράγωγος** της f . Επαγωγικά ορίζεται η **ν -οστή παράγωγος** της f ως $f^{(\nu)} = (f^{(\nu-1)})'$.

Παράγωγος Βασικών Συναρτήσεων	
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^\nu$	$f'(x) = \nu \cdot x^{\nu-1}$
$f(x) = \frac{1}{x^\nu}$	$f'(x) = -\frac{\nu}{x^{\nu+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt[\mu]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{\mu \sqrt[\mu]{x^{\mu-1}}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \eta\mu(x)$	$f'(x) = \sigma\upsilon\nu(x)$
$f(x) = \sigma\upsilon\nu(x)$	$f'(x) = -\eta\mu(x)$
$f(x) = \epsilon\phi(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x)}$
$f(x) = \sigma\phi(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2(x)}$

Γ. Κανόνες Παραγωγίσισης

Κανόνας Αθροίσματος: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Κανόνας Βαθμωτού Γινομένου: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.

Κανόνας Γινομένου: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Κανόνας Πηλίκου: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Κανόνας Σύνθετης Συνάρτησης (Κανόνας Αλυσίδας): $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Δ. Ρυθμός Μεταβολής

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν η f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής** του y ως προς x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

- Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης θέσης ενός κινητού είναι η ταχύτητα του κινητού.
- Ο ρυθμός μεταβολής τη ταχύτητας ενός κινητού είναι η επιτάχυνση του κινητού.

- Στην οικονομία, ο ρυθμός μεταβολής του κόστους (ως προς την ποσότητα παραγόμενου προϊόντος) ονομάζεται **οριακό κόστος**.

Ε. Μεθοδολογία Ασκήσεων.

1. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης.

- Αν μας ζητείται να βρούμε την παράγωγο χρησιμοποιώντας τον **ορισμό**, τότε παίρνουμε το όριο και ακολουθούμε μεθοδολογία των ασκήσεων με όρια.
- Αν δεν ξέρουμε τον τύπο της συνάρτησης, αλλά κάποιες σχέσεις που αυτή πληροί (π.χ. **ανισότητες**) τότε παίρνουμε τον ορισμό και υπολογίζουμε το όριο με μεθοδολογία ορίων (π.χ. **κριτήριο παρεμβολής**).
- Αν μας δίνεται ο τύπος της συνάρτησης, εφαρμόζουμε τους κανόνες παραγωγίσης για να υπολογίσουμε την παράγωγο. Σε δίκλαδες συναρτήσεις υπολογίζουμε την παράγωγο κάθε κλάδου και στη συνέχεια ελέγχουμε αν υπάρχει η παράγωγος στα σημεία αλλαγής (είτε με τον ορισμό, είτε με πλευρικά όρια στην f').

Παραδείγματα: 1Α, 2Α, 3Α, 4Α, 1Β, 2Β, 3Β, 4Β, 5Β, 6Β, 7Β, 8Β σελ 219-221

1Α, 2Α, 3Α, 1Β, σελ 227-228

1Α, 2Α, 3Α, 4Α, 5Α, 6Α, 12Α, 13Α, 14Α, 15Α, 7Β σελ 238 - 240

2. Ασκήσεις που αφορούν εφαπτόμενες ευθείες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Για να βρούμε την **εφαπτομένη** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, υπολογίζουμε την τιμή της παραγώγου $f'(x_0)$ και χρησιμοποιούμε τον τύπο $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Επιπλέον δεν ξεχνάμε ότι:

- Δύο **παράλληλες** ευθείες έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή $\lambda_1 = \lambda_2$.
- Δύο **κάθετες** ευθείες έχουν συντελεστές διεύθυνσης που ικανοποιούν τη σχέση $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.
- Ο **συντελεστής διεύθυνσης** της εφαπτόμενης ευθείας είναι ο αριθμός $f'(x_0)$.

Προσοχή: Οι κατακόρυφες ευθείες δεν έχουν συντελεστή διεύθυνσης. Οι οριζόντιες ευθείες έχουν συντελεστή διεύθυνσης ίσο με το 0.

Αν η άσκηση μας ζητάει να βρούμε σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης η εφαπτόμενη ευθεία είναι **παράλληλη** σε μια δοσμένη ευθεία με γνωστό συντελεστή διεύθυνσης λ , τότε λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = \lambda$ ως προς x .

Αν η άσκηση μας ζητάει να βρούμε σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης η εφαπτόμενη ευθεία είναι **κάθετη** σε μια δοσμένη ευθεία με γνωστό συντελεστή διεύθυνσης $\lambda \neq 0$, τότε λύνουμε την εξίσωση $f'(x) \cdot \lambda = -1$ ως προς x .

Σε όλες τις σχετικές ασκήσεις μπορεί να φανούν χρήσιμοι οι τύποι των αποστάσεων δύο σημείων, σημείου από ευθείας και του εμβαδού τριγώνου.

Για να αποδείξουμε ότι μια **ευθεία εφάπτεται στη γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης f βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων (της C_f και της ευθείας) και σε αυτά τα σημεία βρίσκουμε την εξίσωση της αντίστοιχης εφαπτόμενης ευθείας. Αν η εξίσωση που βρήκαμε ταυτίζεται με την δοσμένη ευθεία τότε αυτή πράγματι εφάπτεται στην C_f .

Για να βρούμε την **κοινή εφαπτόμενη** ευθεία των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων, f, g ακολουθούμε παρόμοια μεθοδολογία. Βρίσκουμε όλες τις εφαπτόμενες ευθείες της C_f και κοιτάμε ποιές από αυτές εφάπτονται και στην C_g (ή αντιστρόφως).

Παραδείγματα: 2Β, 3Β, 4Β σελ 228-229

5Α, 7Α, 8Α, 9Α, 10Α, 11Α, 1Β, 2Β, 3Β, 4Β, 5Β, 8Β, 10Β, 11Β σελ 240 - 241

3. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να βρούμε κάποιες παραμέτρους ώστε η συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη.

Σε τέτοιες ασκήσεις συνήθως καταλήγουμε σε ένα σύστημα. Η πρώτη εξίσωση προκύπτει από το γεγονός ότι η συνάρτηση που μας δίνεται πρέπει να είναι συνεχής. Έτσι μπορούμε να πάρουμε (π.χ.) τα πλευρικά όρια. Η δεύτερη εξίσωση θα προκύψει ουσιαστικά από τον ορισμό της παραγώγου (μπορούμε να πάρουμε κι εδώ τα πλευρικά όρια).

4. Προβλήματα.

Προσπαθούμε να εκφράσουμε την ζητούμενη ποσότητα ως συνάρτηση των άλλων μεταβλητών του προβλήματος. Στη συνέχεια ανάλογα με το πρόβλημα υπολογίζουμε το ρυθμό μεταβολής (παράγωγος) και τον χρησιμοποιούμε κατάλληλα.

Παραδείγματα: Ασκήσεις στις σελίδες 243-245

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 5x + 7$ στο σημείο $x_0 = 1$.
2. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + 2x$ στο σημείο $x_0 = 1$.
3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.
4. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$, η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1 & x \leq 1 \\ \sqrt{x+3} + x - 2 & x > 1 \end{cases}$$
5. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$, η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\eta\mu x & x \leq 0 \\ -2x^2 + 2x & x > 0 \end{cases}$$
6. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$, η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
7. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x^3$.
8. Αν μια άρτια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-a, a)$, να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.
9. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f , η οποία ορίζεται σε ένα διάστημα Δ είναι παραγωγίσιμη στο $0 \in \Delta$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(|x|)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 αν και μόνο αν ισχύει $f'(0) = 0$.
10. Δύο συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο R και για κάθε $x \in R$ είναι $g(x) = x \cdot f(x)$. Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι και η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
11. Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο R και παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 = 0$. Αν ισχύει ότι $f(0) = g(0)$ και $f(x) + x \geq g(x)$ για κάθε $x \in R^*$, τότε να δείξετε ότι $g'(0) - f'(0) = 1$.
12. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο R_+^* και παραγωγίσιμη στο σημείο $\xi \in R_+^*$. Να αποδειχθεί ότι:
$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\sqrt{x}f(x) - \sqrt{\xi}f(\xi)}{x - \xi} = \frac{2\xi \cdot f'(\xi) + f(\xi)}{2\sqrt{\xi}}$$
13. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) \cdot \eta\mu x + 2x^2 - 2x}{x-1}$, όπου η f είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο R με $f(1) = 0$. Αν γνωρίζουμε ότι $g'(1) = 4$ και $g(1) = 2$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 1.
14. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h ορισμένες στο R , για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:
Α) $f(0) = g(0) = h(0)$,
Β) $f(x) < h(x) < g(x)$,
Γ) $f'(0) = g'(0)$.
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο 0.
15. Δίνεται η συνάρτηση $f: R_+^* \rightarrow R$, τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in R_+^*$ να ισχύει η σχέση $f(xy) = f(x)f(y)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in R_+^*$. Επιπλέον δείξτε ότι $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0} f'(1)$.

- 16.** Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο \mathbb{R} και παραγωγίσιμη στο σημείο a , με $f(a) \neq 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $|f(x)|$ είναι παραγωγίσιμη στο a .
- 17.** Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύει ότι:
 Α) $f(xy) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$,
 Β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 > 0$.
 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το διάστημα $(0, +\infty)$.
- 18.** Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύουν:
 Α) $f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,
 Β) $f'(0) = 1$.
 Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .
- 19.** Δύο συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες σε ένα διάστημα $\Delta=(\alpha, \beta)$ και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Αν $x_0 \in \Delta$ με $f(x_0) = g(x_0)$ και οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = g'(x_0)$.
- 20.** Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και ισχύει ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-h)}{h} = 2$,
 Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 .
- 21.** Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α, β, γ , ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + \gamma & x \leq 0 \\ \frac{x}{1+e^{1/x}} & x > 0 \end{cases}$,
 Να είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .
- 22.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\alpha x} \eta\mu(\beta x)$. Δείξτε ότι $f''(x) - 2\alpha f'(x) + (\alpha^2 + \beta^2)f(x) = 0$
- 23.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(\pi x^2)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$,
 Α) βρείτε την παράγωγο της f
 Β) Αποδείξτε ότι η f' είναι συνεχής.
 Γ) Υπολογίστε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x}$.
- 24.** Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Βρείτε την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $f \circ f$.
- 25.** Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση f (ορισμένη στο \mathbb{R}) είναι άρτια, δείξτε ότι η f' είναι περιττή.
- 26.** Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση f (ορισμένη στο \mathbb{R}) είναι περιττή, δείξτε ότι η f' είναι άρτια.
- 27.** Δίνεται οι δύο φορές παραγωγίσιμη περιττή συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $(-a, a)$. Δείξτε ότι $f''(0) = 0$.
- 28.** Δίνεται η άρτια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε όλο το \mathbb{R} . Αν $g(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right)f(x) + \eta\mu x$, δείξτε ότι $g'(0) = 1$.
- 29.** Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $(x - a)^2$ είναι $xP'(a) + (P(a) - aP'(a))$.

- 30.** Α) Αν $P(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου του δύο, αποδειξτε ότι

$$P(x) = (x - \rho)^2 \pi(x) \Leftrightarrow P(\rho) = P'(\rho) = 0.$$

 Β) Δείξτε ότι το $(x + 1)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $f(x) = x^{2n} - nx^2 + n - 1, n \geq 1.$
 Γ) Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α, β έτσι ώστε το $(x - 1)^2$ να είναι παράγοντας του $Q(x) = \alpha x^{2n} + \beta x^{n-1} + 4, n \geq 2.$
- 31.** Δίνεται το πολυώνυμο τρίτου βαθμού $f(x)$, το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2, x_3 (διαφορετικούς ανά δύο). Δείξτε ότι

$$\frac{x_1}{f'(x_1)} + \frac{x_2}{f'(x_2)} + \frac{x_3}{f'(x_3)} = 0.$$
- 32.** Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι:
 Α) $\frac{f'(x)}{y} = \frac{f'(y)}{x}$, για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$,
 Β) Αν $f'(1) = 1$, τότε $f'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- 33. (Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης)**
 Δίνεται η 1-1 συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αποδείξτε τα εξής:
 Α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του διαστήματος Δ , τότε η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $f(x_0)$.
 Β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του διαστήματος Δ και $f'(x_0) \neq 0$, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ και ισχύει:

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

 Γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το διάστημα Δ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη σε όλο το διάστημα $f(\Delta)$ και ισχύει

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$
 για κάθε $x \in f(\Delta)$.
 Δ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, ορισμένη στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f^{-1} .
- 34.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι 1-1 και παραγωγίσιμη. Αν για κάποιο σημείο x_0 ισχύει η σχέση $f'(f^{-1}(x_0)) = 0$, δείξτε ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 .
- 35.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x + 3$, στο σημείο $x_0 = 1$.
G
- 36.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x \ln(x)$, στο σημείο $x_0 = 1$.
G
- 37.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης
G $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ στο σημείο $x = 0$.
- 38.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x - 2} - x$, στο σημείο $x_0 = 3$.
G
- 39.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία στα οποία η τιμή της συνάρτησης είναι ίδια με την τιμή της παραγώγου.
- 40.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x - 2|} + x$, στο σημείο $x_0 = 1$.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης της f ορίζεται εφαπτομένη και σε ποια όχι;
42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \chi & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$. Σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης της f ορίζεται εφαπτομένη και σε ποια όχι;
43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία που διχοτομεί το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.
G
44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$. Να βρείτε σημείο M της C_f τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο M να είναι κάθετη στην ευθεία $y - x + 1 = 0$.
G
45. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{-x}$ και $g(x) = -\ln(x)$. Αν A είναι το σημείο τομής της C_f με τον $y'y$ και B το σημείο τομής της C_g με τον $x'x$, να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι κοινή εφαπτόμενη των C_f, C_g .
46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - ax + 2$. Να προσδιορίσετε το a έτσι ώστε η ευθεία $2x - y = 0$ να εφάπτεται στην C_f .
G
47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + 1$. Δείξτε ότι για κάθε a έτσι ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο $x_0 = 1$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
G
48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + x + 1$.
G
A) Να προσδιορίσετε το a έτσι ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο $x_0 = 1$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
B) Να προσδιορίσετε το a έτσι ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο $x_0 = 1$ να σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες.
49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + c$.
G
A) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τρία σημεία A, B, Γ της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτομένες της C_f είναι παράλληλες στον άξονα x .
B) Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο με σταθερό εμβαδό.
Γ) Να δείξετε ότι το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σημείο του άξονα y .
50. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ που σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με τον άξονα x .
51. Έστω A ένα κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = e^x \eta \mu \chi$ και $g(x) = \eta \mu \chi$, όπου το πεδίο ορισμού και των δύο συναρτήσεων είναι το διάστημα $(-\pi, \pi)$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτόμενη στο σημείο A .
52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 + 3x - 2}$.
Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a, b , έτσι ώστε η C_f να περνά από την αρχή των αξόνων και εφαπτομένη της στο σημείο $x = -1$ να είναι κάθετη στην ευθεία $2x - 2y + 5 = 0$.
53. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2bx + 1 & x < 1 \\ cx^2 + x & x \geq 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a, b, c για τις οποίες η γραφική παράσταση της f στο σημείο $x_0 = 1$, έχει εφαπτόμενη παράλληλη στην ευθεία $x - 2y + 1 = 0$.

54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \cdot e^{-bx}$. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων a, b , έτσι ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $(0,1)$ και η εφαπτομένη της στο σημείο $x = 1$, να είναι κάθετη στην ευθεία $2x + y = 1$.
55. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου a έτσι ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 3x^2 + ax + 2$ και $g(x) = \frac{x-1}{x}$ να έχουν κοινή εφαπτόμενη σε ένα κοινό τους σημείο.
G
56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + 2$. Για ποια τιμή της παραμέτρου a , υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων;
G
57. Να βρεθεί ο $a \in R$, έτσι ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax - \frac{1}{4}x^3$ σε ένα κοινό σημείο με τον άξονα των x να σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με τον άξονα αυτό. Η εφαπτομένη αυτή έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f ;
58. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -x^2 + 4x$ και $g(x) = a/x, a \neq 0$. Να βρείτε για ποια τιμή του a η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $x_0 = 1$ εφάπτεται και στην C_g .
59. Μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = f(x)/f'(x)$ σε ένα κοινό σημείο της με τον άξονα x , σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με αυτόν.
60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(ax)}{x}, x > 0, a > 0$.
A) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $x = \mu$.
B) Να αποδείξετε ότι για κάθε a , η εφαπτομένη που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα διέρχεται από σταθερό σημείο το οποίο και να βρείτε.
61. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x, g(x) = e^{-x}$ και τα σημεία $A(x_0, f(x_0)), B(x_0, g(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο A κόβει τον άξονα των x στο σημείο Γ , ενώ η εφαπτομένη της C_g στο B κόβει τον άξονα των x στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι
A) Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ είναι σταθερό (ανεξάρτητο του x_0).
B) Το $\Delta\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο
G) Το B είναι το ορθόκентρο του $\Delta\Delta\Gamma$.
62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a/x, a \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:
G A) Από κάθε σημείο του άξονα x διέρχεται μόνο μια εφαπτόμενη της C_f .
B) Η εφαπτόμενη αυτή σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο σταθερού εμβαδού.
63. Δίνονται τρεις συναρτήσεις f, g, h ορισμένες στο R για τις οποίες υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in R$:
▪ Η f είναι παραγωγίσιμη και $f(x) \neq 0$,
▪ Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη,
▪ $g(x) = f(x)h'(x)$,
▪ $(h(x))^2 + (h'(x))^2 = 1$,
Αν το (x_0, y_0) είναι ένα κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των f, g , να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν στο (x_0, y_0) κοινή εφαπτομένη.
64. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2, a \neq 0$ και τα σημεία $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$.
A) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της C_f στα A, B τέμνονται σε σημείο M του άξονα y αν και μόνο αν $x_1 = -x_2$.
B) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A, B, M έτσι ώστε το τρίγωνο ABM να είναι ορθογώνιο στο M .

65. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = -1/x$.
- A) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.
- B) Αν A, B, είναι τα σημεία επαφής της ευθείας με τις C_f και C_g και Γ, Δ τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες x και y αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το B είναι μέσον του ΓΔ και το Γ μέσον του ΑΔ.

ΜΕΡΟΣ 2

Θεώρημα Μέσης Τιμής

A. Θεωρία

Θεώρημα Rolle

Αν μια συνάρτηση είναι

- Συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$,
- Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) και
- $f(a) = f(\beta)$

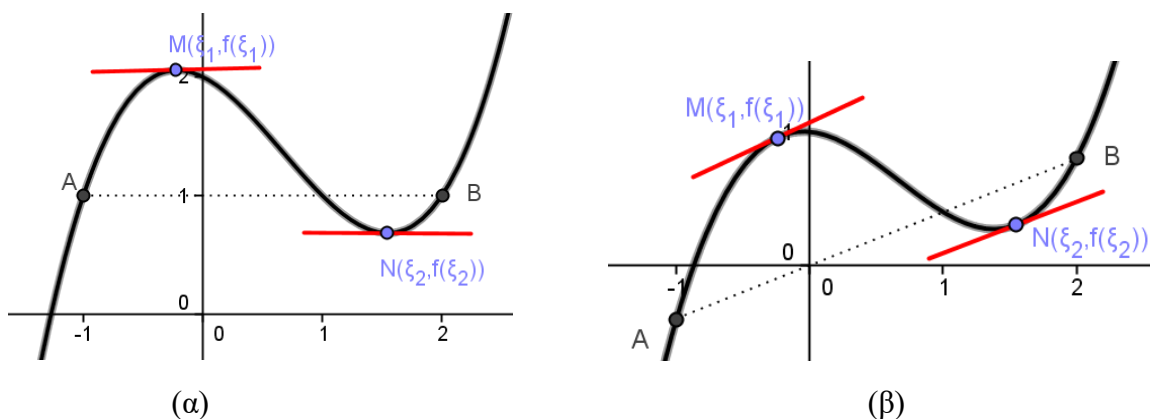
Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού

Αν μια συνάρτηση είναι

- Συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$,
- Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β)

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$.



Σχήμα 1. Γεωμετρική ερμηνεία (α) του θεωρήματος Rolle και (β) του θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι **σταθερή** σε όλο το διάστημα Δ .

Θεώρημα

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε υπάρχει σταθερός αριθμός c τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x) = g(x) + c$, για κάθε σημείο του Δ .

B. Μεθοδολογία Ασκήσεων.

1. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε ένα διάστημα (ή ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ έτσι ώστε να ισχύει μια σχέση).

Όπως έχουμε ήδη εξηγήσει, ο κλασικός τρόπος αντιμετώπισης μιας τέτοιας άσκησης είναι η χρήση του θεωρήματος **Bolzano**. Υπάρχουν ιδιαίτερες περιπτώσεις όμως κατά τις οποίες η εφαρμογή του θεωρήματος Rolle είναι προσφορότερη. Τέτοιες περιπτώσεις είναι οι ακόλουθες:

A) Η άσκηση μας ζητάει να εξετάσουμε για ρίζες μια δοσμένη εξίσωση, η οποία προκύπτει ως παράγωγος μιας άλλης εξίσωσης που εξετάσαμε σε προηγούμενα ερωτήματα. Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων ασκήσεων είναι οι 1,2 Β' ομάδας στη σελίδα 249, 250. Μην ξεχνάτε ότι αν η άσκηση μας ζητάει να αποδείξουμε ότι η ρίζα είναι **μοναδική** πρέπει να βρούμε τη μονοτονία της συγκεκριμένης συνάρτησης.

B) Αν η εξίσωση εμπλέκει **συναρτήσεις και παραγώγους**, των οποίων οι τύποι είναι άγνωστοι. Σε αυτή την περίπτωση το θεώρημα **Rolle** είναι η ενδεδειγμένη μεθοδολογία. Προσοχή όμως! Θα πρέπει να ορίσουμε μια **κατάλληλη συνάρτηση, της οποίας η παράγωγος να δίνει την δοσμένη εξίσωση**. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle παίρνουμε τη λύση.

2. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει το πολύ μια ρίζα (ή συγκεκριμένο αριθμό ριζών).

Ο κλασικός τρόπος αντιμετώπισης μιας τέτοιας άσκησης είναι να εξετάσουμε την **μονοτονία** της αντίστοιχης συνάρτησης. Εναλλακτικά όμως, στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι άγνωστη, αλλά γνωρίζουμε κάποιες ιδιότητες της παραγώγου της, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα **Rolle**. Σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες, εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle και καταλήγουμε σε **άτοπο**.

Με την παραπάνω διαδικασία μπορούμε, επίσης, να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει **το πολύ δυο ρίζες**, κ.ο.κ. Σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε ότι η συνάρτηση έχει τρεις ρίζες, εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle δύο φορές και παίρνουμε δύο σημεία ξ_1, ξ_2 , τα οποία μηδενίζουν την παράγωγο. Έτσι αναγόμεστε στην παραπάνω περίπτωση. Εφαρμόζοντας μια ακόμη φορά το θεώρημα Rolle για την παράγωγο της συνάρτησης βρίσκουμε μια ρίζα της δεύτερης παραγώγου και καταλήγουμε σε άτοπο. Βέβαια, μπορεί να καταλήξουμε σε άτοπο χωρίς να χρειαστεί να εφαρμόσουμε και δεύτερη φορά το **Rolle**, αν γνωρίζουμε ότι είναι αδύνατον η παράγωγος να έχει δύο ρίζες.

Δεν ξεχνάμε ότι για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει **μια τουλάχιστον ρίζα** (ή δύο τουλάχιστον κ.ο.κ.) εφαρμόζουμε το **θεώρημα Bolzano**.

Παρατηρήσεις:

- Ένα πολυώνυμο έχει το πολύ n ρίζες (όπου n είναι ο βαθμός του).
- Αν μια συνάρτηση έχει n ρίζες, τότε η παράγωγός της θα έχει οπωσδήποτε $n-1$ ρίζες, η δεύτερη παράγωγος $n-2$, κ.ο.κ.

Παραδείγματα: Ασκήσεις 3, 7 σελ. 250.

3. Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η απόδειξη μιας ανισότητας.

Συνήθως η απόδειξη ανισωτήτων γίνεται μέσω της μελέτης μιας συνάρτησης όπως θα δούμε παρακάτω. Όμως, πολλές φορές σε ασκήσεις τέτοιας μορφής το **ΘΜΤ** του διαφορικού λογισμού είναι ιδιαίτερα χρήσιμο. Το δύσκολο σημείο (όχι πάντα) είναι να βρούμε το διάστημα στο οποίο θα εφαρμόσουμε το θεώρημα αλλά και τη συγκεκριμένη συνάρτηση. Τέτοιες περιπτώσεις είναι οι ακόλουθες:

A) Η άσκηση μας ζητάει να αποδείξουμε μια ανισοτική σχέση μεταξύ άγνωστων συναρτήσεων (με δύο παραμέτρους ή μεταβλητές). Για παράδειγμα θεωρείστε την σχέση $F(a, b) < G(a, b)$. Σε αυτή την

περίπτωση μετασχηματίζουμε την ανισότητα έτσι ώστε το ένα μέλος της να πάρει τη μορφή $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ για τη συνάρτηση f και προσπαθούμε να αποδείξουμε την ανισοτική σχέση χρησιμοποιώντας την παράγωγο της f στο σημείο ξ , αντί για το κλάσμα $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Β) Γενικά, αν έχουμε μια άσκηση που μας εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και μας δίνει κάποιες σχέσεις με **ανισότητες** που αφορούν την **παράγωγο**, είναι πολύ πιθανό αυτή η άσκηση να λύνεται με τη βοήθεια του **ΘΜΤ**. Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ, παίρνουμε τη δοσμένη σχέση για την παράγωγο και καταλήγουμε στο επιθυμητό συμπέρασμα.

Γ) Τέλος, με το ΘΜΤ μπορούμε να αντιμετωπίσουμε και ασκήσεις που μας ζητάνε την απόδειξη **μιας απλής ανισότητας ως προς x (μια μεταβλητή)**. Για παράδειγμα θεωρείστε μια σχέση της μορφής $F(x) < G(x)$. Σε αυτή την περίπτωση μεταφέρουμε όλους τους όρους στο ένα μέλος και εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για τη δοσμένη συνάρτηση ($f(x) = F(x) - G(x)$) στο διάστημα $[\alpha, x]$ ή στο διάστημα $[x, \alpha]$. Ιδιαίτερη προσοχή θέλει η επιλογή του αριθμού α (πολύ συχνά χρησιμοποιούμε το 0 ή το 1). Από εκεί μπορεί να προκύψει η ζητούμενη ανισότητα.

Παραδείγματα: 3A, 4B, 5B σελ. 249 – 250.

4. Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι σταθερή, ή ότι δύο συναρτήσεις διαφέρουν κατά μια σταθερά.

Εφαρμόζουμε τα αντίστοιχα θεωρήματα. Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι σταθερή, αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x) = 0$. Για να δείξουμε ότι δύο συναρτήσεις διαφέρουν κατά μια σταθερά, αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x) = g'(x)$. Η σταθερά μπορεί να υπολογιστεί αν ξέρουμε την τιμή της συνάρτησης σε κάποιο σημείο x_0 .

Παρατηρήσεις

- Αν $f'(x) = c_1$, τότε υπάρχει κάποιο c_2 τέτοιο ώστε $f(x) = c_1x + c_2$.
- Αν $f'(x) = c \cdot f(x)$, τότε υπάρχει κάποιο d τέτοιο ώστε $f(x) = d \cdot e^{c \cdot x}$.

Σε όλες τις παραπάνω ασκήσεις (όλων των κατηγοριών) είναι πολύ χρήσιμοι οι παρακάτω κανόνες.

- | | |
|---|--|
| • $(f(x) \cdot \eta\mu x)' = f'(x)\eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x$ | • $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ |
| • $(f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x)' = f'(x)\sigma\upsilon\nu x - f(x)\eta\mu x$ | • $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ |
| • $\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)' = \frac{f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$ | • $(f(x)e^x)' = f'(x)e^x + f(x)e^x$ |
| • $\left(\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{f'(x)\sigma\upsilon\nu x + f(x)\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ | • $\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}}$ |
| • $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ | • $\left(\frac{e^x}{f(x)}\right)' = \frac{e^x f(x) - e^x f'(x)}{f^2(x)}$ |
| • $(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ | |

Ασκήσεις

Θεώρημα Rolle - Εξισώσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + a^2$. Να αποδειχθεί ότι για τη συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-2,2]$ και έπειτα να υπολογιστεί $\xi \in (-2,2)$ το οποίο ικανοποιεί το θεώρημα.
2. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $f(x) = \left| \begin{matrix} x^2 - 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{matrix} \right|$, στο διάστημα $[-3, 3]$. Αν απαντήσετε θετικά υπολογίστε το ξ του θεωρήματος.
3. Μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f με $f(x) = |x - 1|$ στο διάστημα $[0,2]$;
4. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$. Αν ισχύουν οι σχέσεις $f(a) = f(\beta)$ και $f'(a) = f'(\beta) = 0$, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $x_1, x_2 \in (a, \beta)$, τέτοια ώστε να ισχύει $f''(x_1) = f''(x_2)$.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2) \ln x$. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο διάστημα $(1,2)$, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
6. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2(2 \ln x - 1) + 8x(\ln x - 1) = -8$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.
7. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $8x^3 - 12x^2 - 6x + 5 = 0$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.
8. Δείξτε ότι η εξίσωση $2^x = \frac{1}{x}$, έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.
9. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3 - 2012x + c = 0$ δε μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες στο διάστημα $(0,1)$.
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(x - 1)(x + 1)(x - 2)$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.
11. Δείξτε ότι η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 + \eta\mu\theta = 0$, $\theta \in R$, έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.
12. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $e^x = x + 1$ έχει μοναδική ρίζα.
13. Δίνεται η εξίσωση $x^{2013} = 2013x - \ln \theta$, $\theta > 0$. Αποδείξτε ότι έχει το πολύ δύο ρίζες στο διάστημα $(0,2013)$.
14. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^{2014} + \lambda x - 2 = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
15. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^4 + a^2x^3 + (a^4 + 1)x^2 + a^2$. Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό a , το πολυώνυμο δε μπορεί να έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.
16. Αν το πολυώνυμο $f(x)$ έχει n πραγματικές ρίζες ($n \geq 2$) διαφορετικές ανά δύο, να αποδείξετε ότι το $f'(x)$ έχει τουλάχιστον $n-1$ πραγματικές ρίζες.
17. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = \chi\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες $x_1 \in (-\pi, 0)$ και $x_2 \in (0, \pi)$.
18. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $a^x = x - b$, $0 < a < 1$, $b \in R$, έχει μια μοναδική πραγματική ρίζα.

Θεώρημα Rolle – Θεωρητικές Ασκήσεις

- 19.** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[α, β]$. Να αποδείξετε ότι:
Α) Για τη συνάρτηση $G(x) = (x - α)(x - β)e^{f(x)}$ εφαρμόζεται το θ. Rolle στο διάστημα $[α, β]$.
Β) Υπάρχει $ξ ∈ (α, β)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(ξ) = \frac{1}{α-ξ} + \frac{1}{β-ξ}$.
- 20.** Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[α, β]$ και παραγωγίσιμη στο $(α, β)$. Αν γνωρίζετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(α, β)$, δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο $[α, β]$.
- 21.** Θεωρούμε μια συνάρτηση f συνεχής στο $[α, β]$ και παραγωγίσιμη στο $(α, β)$, με την ιδιότητα $f(α) - f(β) = ημα - ημβ$. Δείξτε ότι υπάρχει $ξ$ που ανήκει στο $(α, β)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(ξ) = \text{συνξ}$.
- 22.** Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ και παραγωγίσιμες στο $(0, \frac{\pi}{2})$. Αν ισχύει η σχέση $g(0) = f(\pi/2)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $ξ$ στο ανοικτό διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$, τέτοιο ώστε $(g(ξ) - f'(ξ))\epsilon\phi\xi = f(ξ) + g'(ξ)$.
- 23.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $[0, 1]$, με $f(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και $f(0) = g(1) = 0$, δείξτε ότι η εξίσωση $\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = 0$, έχει μια (τουλάχιστον) ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
- 24.** Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-1, 1]$ και για την οποία ισχύει η σχέση $f(0) = \frac{f(-1)+f(1)}{2}$. Δείξτε ότι υπάρχει $ξ \in (-1, 1)$ τέτοιος ώστε $f''(ξ) = 0$.
- 25.** Η συνάρτηση f και η παράγωγός της είναι παραγωγίσιμες στο $[α, β]$. Αν υπάρχει $\gamma \in (α, β)$ τέτοιο ώστε $f(α) = f(β) = f(\gamma)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $ξ$ στο ανοικτό διάστημα $(α, β)$ με $f''(ξ) = 0$.
ΘΜΤ
- 26.** Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο (e, e^2) και συνεχής στα σημεία e, e^2 , για τα οποία ισχύει $f(e^2) = 2f(e)$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (e, e^2)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) \ln(x_0^{x_0}) = f(x_0)$.
- 27.** Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$ και παραγωγίσιμη στο $(α, β)$. Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x) = e^{-cx}f(x)$, για κάποιο πραγματικό αριθμό c , τέτοια ώστε $g(α) = g(β)$. Δείξτε ότι υπάρχει x_0 στο ανοικτό διάστημα $(α, β)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = c \cdot f(x_0)$.
- 28.** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $[a, b]$. Αν ισχύουν οι σχέσεις $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$, για κάθε x στο $[a, b]$ και $f(b)g(a) - f(a)g(b) = 0$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.
- 29.** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, 2]$ με $f(2) = 2f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $x_0 \in (1, 2)$, τέτοιος ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- 30.** Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[α, β]$ και παραγωγίσιμη στο $(α, β)$ με $f(α) = f(β) = 0$. Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x-c}$, όπου $c \notin [α, β]$. Δείξτε ότι
Α) Υπάρχει $ξ$ στο ανοικτό διάστημα $(α, β)$ τέτοιο ώστε $g'(ξ) = 0$.
Β) Υπάρχει $ξ \in (α, β)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(ξ, f(ξ))$, να διέρχεται από το σημείο $(c, 0)$.
- 31.** (Θεώρημα Cauchy)

Δύο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b) . Επίσης ισχύει ότι $g(a) \neq g(b)$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε x στο διάστημα (a, b) . Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιος ώστε $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

ΘΜΤ

- 32.** Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, 3]$. Αν είναι $2f(2) = f(1) + f(3)$ να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f''(x_0) = 0$.
- 33.** Να εφαρμόσετε το ΘΜΤ για τη συνάρτηση $f(x) = x(1 - \ln x)$ στο διάστημα $[1, e]$.
- 34.** Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ τέτοια ώστε $f(0) = 2$ και για κάθε $x \in [0, 1]$ να ισχύει $|f'(x)| \leq 3$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$, ισχύει $-1 < f(x) < 5$.
- 35.** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$. Αν ισχύει η σχέση $f(1) = \frac{f(3)}{3} = 1$, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν σημεία $a, b \in (1, 3)$ με $1 < a < 2 < b < 3$ τέτοια ώστε να ισχύει $f'(a) + f'(b) = 2$.
- 36.** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα $[a, b] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Στη συνέχεια να αποδειχθεί η ταυτότητα $\frac{a}{b} < \frac{\eta\mu a}{\eta\mu b}$.
- 37.** Αν ισχύει $0 < a < b$, δείξτε ότι $1 - \frac{a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b}{a} - 1$.
- 38.** Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ σε κατάλληλη συνάρτηση, να αποδείξετε ότι $|\alpha \cdot \text{συνα} - \beta \cdot \text{συν}\beta| \leq \pi|\alpha - \beta|$, όπου $0 < \alpha \leq \beta < \pi/2$.
- 39.** Θεωρούμε τη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $|f'(x)| \leq \eta\mu a$, $a \in R$ για κάθε x . Δείξτε ότι $|f(1) + f(4)| \leq 3$.
- 40.** Αν $0 < b \leq a < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι $\frac{a-b}{\text{συν}^2 b} \leq \epsilon\phi a - \epsilon\phi b \leq \frac{a-b}{\text{συν}^2 a}$.
- 41.** Αν $0 < b \leq a < \pi/2$, δείξτε ότι $|a \cdot \eta\mu^2 a - b \cdot \eta\mu^2 b| \leq 3|a - b|$.
- 42.** Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ σε κατάλληλη συνάρτηση, να αποδείξετε ότι ισχύει $(b - a)\epsilon\phi a < \ln\left(\frac{\text{συν} a}{\text{συν} b}\right) < (b - a)\epsilon\phi b$, όπου $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$.
- 43.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 με $f(0) = y_0$ και υπάρχει $u \in R$, τέτοιος ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύει $f'(x) \geq \eta\mu u$, δείξτε ότι $f(x) \geq y_0 + x \cdot \eta\mu u$.
- 44.** Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) με $|f'(x)| < \theta$ για κάθε $x \in (a, b)$. Να δείξετε ότι $|f(x_1) - f(x_2)| < \theta|x_1 - x_2|$ για κάθε $x_1, x_2 \in [a, b]$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι $|\eta\mu x - \eta\mu y| \leq |x - y|$, για κάθε x, y .
- 45.** Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , $a > 0$. Θεωρούμε ότι υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (\alpha, \beta)$, $\kappa < \lambda$, τέτοιο ώστε $\alpha + \beta = \kappa + \lambda$ και ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, β) , δείξτε ότι $f(\alpha) + f(\beta) < f(\kappa) + f(\lambda)$.
- 46.** Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) με $f(a) \neq f(b)$. Να αποδείξετε ότι:
 Α) Η εξίσωση $2f(x) = f(a) + f(b)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a, b) .
 Β) Υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$, τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{2(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

- 47.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και $f(c) = c \neq 0$.
 Α) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, c)$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = c - \xi$.
 Β) Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, c)$, δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, c)$ με $0 < \xi_1 < \xi_2 < c$, τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.
- 48.** Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) . Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, x + h \in [a, b]$, $h \neq 0$, υπάρχει $c \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x + h) - f(x) = hf'(x + ch)$.
- 49.** Αποδείξτε ότι $2 \ln(x + 1) > 2x - x^2$ για κάθε $x > 0$.
- 50.** Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$.
- 51.** Αποδείξτε ότι $e^x \geq x + 1$ για κάθε x .
- 52.** Αν $0 < a < 1$, δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $(1 + x)^a < 1 + ax$.

Σταθερές Συναρτήσεις

- 53.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , ισχύει $f'(x) - g(x) = 0$, $f(x) + g'(x) = 0$, για κάθε x στο \mathbb{R} και $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = f^2(x) + g^2(x)$ είναι σταθερή στο \mathbb{R} και να βρείτε τον τύπο της.
- 54.** Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) - 2f(-x) = 0$ για κάθε x . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) + f^2(-x)$ είναι σταθερή.
- 55.** Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ για κάθε x, y . Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.
- 56.** Να προσδιοριστεί η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $f''(x) = x$ και $f(0) = f(1) = 1$.
- 57.** Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ με $f(x + y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 1$, να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια να βρείτε τη συνάρτηση f .
- 58.** Έστω η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , τέτοια ώστε $f''(x) = f^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{2}{3}f^3(x) - (f'(x))^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$.
 Α) Δείξτε ότι η g είναι σταθερή.
 Β) Αν $f(1) = 0$ και $f'(1) = -1$, δείξτε ότι $3(f'(x))^2 - 2f^3(x) = 3$
- 59.** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει
- Οι f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} .
 - $f''(x) = g''(x)$, για κάθε x .
 - $f(0) = g(0)$.
- Να αποδείξετε ότι :
- Α) Υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε x να ισχύει $f(x) - g(x) = cx$.
 Β) Αν $x_1 < 0 < x_2$ είναι ρίζες της g , τότε η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[x_1, x_2]$.
- 60.** Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο A με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$. Αν το A δεν είναι διάστημα, να εξηγήσετε ότι η f μπορεί και να μην είναι σταθερή στο A .

- 61.** Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι για κάθε x ισχύει $f(x) = f'(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x$, όπου c μια σταθερά. Στη συνέχεια, να προσδιοριστεί η συνάρτηση g για την οποία ισχύουν $g'(x)\sin x + g(x)\eta\mu x = g(x)\sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και $g(0) = 2014$.
- 62.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) + f(x) = 0$, για κάθε x στο \mathbb{R} αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $f(x) = ce^{-x}$. Στη συνέχεια να προσδιοριστεί συνάρτηση g , παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$, όταν $g(e) = e^{-e}$ και $(g(x) + g'(x)) \ln(x^x) + g(x) + g(x) \ln(x) = 0$, για κάθε $x > 1$.
- 63.** Μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ικανοποιεί τις συνθήκες $g'(e^x) = \eta\mu x + \sin x$ για κάθε x στο \mathbb{R} και $g(1) = 1$. Υπολογίστε τον αριθμό $g(\pi)$.
- 64.** Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $(0, +\infty)$ και για κάθε $a, b \in (0, +\infty)$ ισχύει η σχέση $f(ab) = af(b) + bf(a)$. Να αποδείξετε ότι
Α) $f(1) = 0$
Β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 2014$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το διάστημα $(0, +\infty)$. Επιπλέον δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει η σχέση $xf'(x) - f(x) = 2014x$ και να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f .

ΜΕΡΟΣ 3

Μονοτονία - Ακρότατα

A. Θεωρία

Θεώρημα 1

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Ορισμός

1. Τοπικό Μέγιστο

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ Τοπικό Μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f . Συνήθως, λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 , την τιμή $f(x_0)$.

2. Τοπικό Ελάχιστο

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ Τοπικό Ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f . Συνήθως, λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0 , την τιμή $f(x_0)$.

Θεώρημα 2 (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και ένα x_0 εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

Θεώρημα 3

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως είναι συνεχής.

A) Αν $f'(x) > 0$ στο διάστημα (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

B) Αν $f'(x) < 0$ στο διάστημα (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

Γ) Αν η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Επομένως, θέσεις πιθανών τοπικών ακρότατων μιας συνάρτησης f ορισμένης σε ένα διάστημα Δ (**κρίσιμα σημεία**) είναι:

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν ορίζεται η παράγωγος.
- Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης).

B. Μεθοδολογία Ασκήσεων.

1. Ασκήσεις οι οποίες μας ζητάνε να εξετάσουμε μια συνάρτηση ως προς τη μονοτονία της.

Αυτές είναι οι πιο απλές πιθανώς ασκήσεις του κεφαλαίου. Υπολογίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης και στη συνέχεια φτιάχνουμε έναν **πίνακα προσήμων** της $f'(x)$. Σε κάθε διάστημα όπου $f'(x) > 0$ λέμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, ενώ στα διαστήματα όπου $f'(x) < 0$ λέμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Αν σε δύο **διαδοχικά διαστήματα** (α, β) και (β, γ) η $f'(x)$ έχει ίδιο πρόσημο και είναι συνεχής στο σημείο β τότε μπορούμε να πούμε ότι η f είναι μονότονη σε όλο το διάστημα (α, γ) . Αν όμως η f δεν είναι συνεχής στο σημείο β , δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για τη μονοτονία της f στο (α, γ) , κοιτώντας μόνο την παράγωγο. Μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και στο (α, β) και στο (β, γ) και ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x)$, τότε μπορούμε να πούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$.

Ομοίως, Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και στο (α, β) και στο (β, γ) και ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) > \lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x)$, τότε μπορούμε να πούμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$.

2. Ασκήσεις οι οποίες μας ζητάνε να προσδιορίσουμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης.

Για τα **τοπικά ακρότατα** ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

1. Βρίσκουμε την παράγωγο της f (όπου ορίζεται).
2. Φτιάχνουμε πίνακα προσήμων της $f'(x)$.
3. Στα σημεία όπου η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο και η f είναι συνεχής έχουμε τοπικά ακρότατα (μέγιστο ή ελάχιστο αντίστοιχα).

Για τα **ολικά ακρότατα** μιας συνεχούς συνάρτησης ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f .
2. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά (και στα άκρα των διαστημάτων, χρησιμοποιώντας όρια όπου ο υπολογισμός αυτός δεν είναι εφικτός)
3. Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το ολικό μέγιστο και η μικρότερη το ολικό ελάχιστο.

3. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να προσδιορίσουμε το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης.

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο χρησιμοποιούμε το θεώρημα του **Bolzano** για να αποδείξουμε ότι σε ένα διάστημα υπάρχει **τουλάχιστον μια ρίζα** και **μονοτονία** (ή θεώρημα Rolle) για να αποδείξουμε ότι αυτή η ρίζα είναι **μοναδική**.

Για να βρούμε το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης, στη γενικότερη περίπτωση μελετάμε τη μονοτονία της αντίστοιχης συνάρτησης, βρίσκουμε τα ακρότατα και με βάση αυτές τις πληροφορίες βρίσκουμε τα διαστήματα στα οποία θα εφαρμόσουμε την παραπάνω διαδικασία.

4. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να αποδείξουμε μια ανίσωση ως προς μια μεταβλητή (π.χ. $f(x) < g(x)$).

Φέρνουμε όλα τα μέλη τις ανίσωσης στο ίδιο μέλος και ορίζουμε την αντίστοιχη συνάρτηση. Αποδεικνύουμε ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση έχει ολικό ελάχιστο μεγαλύτερο το 0, ή μικρότερο του 0 ανάλογα με την ανίσωση που έχουμε.

5. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να αποδείξουμε μια ανίσωση ως προς δύο μεταβλητές.

Αν έχουμε ανίσωση της μορφής $f(a, b) < g(a, b)$, η οποία δεν μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια του ΘΜΤ (όπως δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο), τότε εναλλακτικά μπορούμε να ακολουθήσουμε τις εξής μεθοδολογίες:

A) ορίζουμε τη συνάρτηση $h(x) = f(a, x) - g(a, x)$ και τη μελετάμε στο διάστημα $[a, \beta]$, αν $\beta > a$, ή στο $[\beta, a]$ αν $\beta < a$.

B) Μετασχηματίζουμε την ανίσωση σε μια ανίσωση της μορφής $h(a) < h(b)$ και μελετάμε τη μονοτονία της h .

6. Ασκήσεις στις οποίες εφαρμόζουμε το θ. Fermat.

Σε ορισμένες ασκήσεις μπορεί να γνωρίζουμε ότι μια άγνωστη συνάρτηση **παρουσιάζει ακρότατο** σε κάποιο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος στο οποίο ορίζεται (αυτό μπορεί να προκύψει και από το **θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής** συνεχών συναρτήσεων). Σε αυτή την περίπτωση εφαρμόζουμε το θεώρημα **Fermat**, το οποίο λέει ότι σε εκείνο το σημείο ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Επομένως αν σε μια άσκηση μας δίνεται (ή ζητείται) μια ανίσωση που εμπλέκει μια συνεχή συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα το θεώρημα Fermat μπορεί να μας βοηθήσει να οδηγηθούμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Τέτοιες ασκήσεις είναι:

- Ασκήσεις στις οποίες μας δίνεται μια ανίσωση της μορφής $f(x) \geq a$ (ή $f(x) \leq a$). Αν καταφέρουμε να βρούμε μια τιμή x_0 για την οποία ισχύει $f(x_0) = a$, τότε παίρνουμε την ανίσωση $f(x) \geq f(x_0) = a$, η οποία υπονοεί ότι στο x_0 η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Fermat.
- Ασκήσεις στις οποίες μας δίνεται μια ανίσωση της μορφής $f(x) \leq g(x)$. Τότε φέρνουμε όλους τους όρους του x στο πρώτο μέλος και ακολουθούμε την παραπάνω διαδικασία. Αυτό μπορεί να γίνει είτε απλά ως $f(x) - g(x) \leq 0$, είτε γράφοντας $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$, αν γνωρίζουμε ότι $g(x) > 0$.
- Σε ασκήσεις που ζητάνε να αποδειχθεί ότι υπάρχει κάποιος αριθμός ξ που επαληθεύει μια σχέση και στις οποίες δεν μπορεί να εφαρμοστεί ούτε το θεώρημα Rolle, ούτε το θεώρημα Bolzano.

Ασκήσεις

Μονοτονία - Ακρότατα

1. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία τους και να υπολογίσετε τα τοπικά και τα ολικά ακρότατα αν υπάρχουν.
A) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. B) $f(x) = x^2 e^x$ Γ) $f(x) = x^2 \ln x$
Δ) $f(x) = 2x e^{-x^2}$ Ε) $f(x) = e^{-\sqrt{1+x^2}}$
2. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία τους και να υπολογίσετε τα τοπικά και τα ολικά ακρότατα αν υπάρχουν.
A) $f(x) = -x^4 + 4x^2 + 1$. B) $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$ Γ) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
Δ) $f(x) = x - \ln x$ Ε) $f(x) = x e^{1/x}$
3. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία τους και να υπολογίσετε τα τοπικά και τα ολικά ακρότατα αν υπάρχουν.
A) $f(x) = x^x$ B) $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x}$
4. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = 2 - \sin(2x) - 2\sqrt{3}\cos x$. Στη συνέχεια βρείτε τα τοπικά και τα ολικά ακρότατα αν υπάρχουν.
5. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις
A) $f(x) = |x^2 - 3x| + x$ B) $f(x) = \begin{cases} e^x - ex, & x \leq 1 \\ x \ln x, & x > 1 \end{cases}$ Γ) $f(x) = \frac{1-|x|}{1+|x|}$
6. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις
A) $f(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ B) $f(x) = \frac{\sin x}{\eta\mu x - 2}$ Γ) $f(x) = x^{1/x}$
7. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων
A) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ B) $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 48x^2 - 48x - 3$
Γ) $f(x) = x e^x$
8. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων
A) $f(x) = |x - 2|$ B) $f(x) = \begin{cases} 1 + 3x^2 & x \leq 2 \\ 15 - x & x > 2 \end{cases}$ Γ) $f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^2 & x < 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & x \geq 2 \end{cases}$
9. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu x - \sin x}{e^x}$.
10. Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + ax^2 + \left(a - \frac{4}{3}\right)x + 2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .
11. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β όταν η συνάρτηση $f(x) = \beta x^2 + x + \alpha \ln x$.
12. Για ποιες τιμές του α η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+ax^2}{1+x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της;
13. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός λ , έτσι ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} + (\lambda - 1)x^2 + \lambda x + 4$, να μην παρουσιάζει ακρότατα.
14. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός λ , έτσι ώστε η συνάρτηση $f(x) = -\frac{2x^3}{3} + 2\lambda x^2 - 2x + \lambda^2$, να είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

15. Για ποιες τιμές του λ η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1) + \lambda x - 1$ είναι γνησίως αύξουσα;
16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a, b , ώστε η συνάρτηση να έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 2$ και $x_2 = -1$.
17. Να βρείτε τα $a, b \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = a \ln x + bx^2 - 3x + 2$ να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 1, x_2 = 2$. Στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές αυτών των ακροτάτων.
18. Αποδείξτε ότι:
 Α) Η συνάρτηση $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \log_{x-1} x$ είναι γνησίως φθίνουσα,
 Β) $\ln^2 3 > \ln 2 \cdot \ln 4$.
19. Δίνεται μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, $\alpha > 0$. Επιπλέον η f' είναι αύξουσα στο διάστημα αυτό. Να αποδείξετε ότι:
 Α) Η $g(x) = xf'(x) - f(x)$ είναι αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$.
 Β) Αν $f(a) = f'(a) = 0$, τότε η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$.
20. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, τέτοια ώστε η f' να είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και $f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.
21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x + ax$.
 Α) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .
 Β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $(x_0, f(x_0))$, όπου x_0 οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f για $a \in \mathbb{R}$.
22. Α) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.
 Β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς e^x και x^e .

Μονοτονία – Επίλυση Εξισώσεων

23. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης
 $f(x) = \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x - 1$.
 Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $5^x + 12^x = 13^x$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$.
24. Να λύσετε τις εξισώσεις
 Α) $\ln x - x + 1 = 0$ Β) $xe^x = e^x - 1$.
25. Α) Να μελετηθεί η μονοτονία της $f(x) = e^{2x} + x^5$
 Β) Να λυθεί η εξίσωση $e^{2(x^2-x)} - e^{2(6-2x)} = (6-2x)^5 - (x^2-x)^5$.
26. Α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως μονότονες στο διάστημα Δ και έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας, τότε οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.
 Β) Αποδείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $g(x) = x^3$ έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.
27. Α) Να λυθεί η εξίσωση $x^5 + e^x = 1 - x$
 Β) Να λυθεί η εξίσωση $|\ln x - 1|^5 + e^{|\ln x - 1|} = 1 - |\ln x - 1|$.
28. Α) Να λυθεί η εξίσωση $(1-x)e^x = x^2 + 1$
 Β) Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x - 1$ και $g(x) = x^2 + xe^x$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο την αρχή των αξόνων.

29. Δείξτε ότι η εξίσωση $\ln(x^2 + 1) + x = 0$ έχει μοναδική λύση.
30. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \ln x = 1$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[1, e]$.
31. Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και γνησίως μονότονη στο Δ , να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει διάστημα $\Delta_1 \subset \Delta$, τέτοιο ώστε $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta_1$.
32. Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και υπάρχει σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(x_0) < 0$. Αν η f' είναι συνεχής στο σημείο x_0 , τότε υπάρχει κάποιο διάστημα που περιέχει το x_0 στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.
33. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $x, y > 0$ ισχύει $x^e + e^x = y^e + e^y$, να δείξετε ότι $x = y$.
34. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f , τέτοια ώστε $f(0) = 1, f(2) = 0$. Δείξτε ότι
 Α) Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ είναι γνησίως αύξουσα όταν $f(x) < f'(x)$ για κάθε x .
 Β) Υπάρχει πραγματικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε $f(\xi) \geq f'(\xi)$.
35. Δίνεται οι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Δείξτε ότι
 Α) Υπάρχει $\xi > 0$ τέτοιος ώστε $f(x) = f'(\xi)x$.
 Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
36. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = e^{\eta\mu x}$

Μονοτονία – Ανισώσεις

37. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει η σχέση $x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x > 1$.
38. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$. Στη συνέχεια αν γνωρίζετε ότι $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu^2 \alpha}{\eta\mu^2 \beta} > \frac{\sigma\upsilon\nu \alpha}{\sigma\upsilon\nu \beta}$.
39. Α) Εξετάστε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$.
 Β) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$, ισχύει $\ln x < x$.
 Γ) Δείξτε ότι για κάθε $x \geq 1$, ισχύει $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$.
40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{-2} \ln x$.
 Α) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f .
 Β) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$, ισχύει $\frac{\ln x}{x^2} < \frac{e}{2}$.
41. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, 1)$ ισχύει $\ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right) \geq 2 \left(x + \frac{x^3}{3}\right)$.
42. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} τέτοια ώστε για κάθε α, β στο \mathbb{R} να ισχύει $|f'(x)| \leq |\alpha - \beta|$. Δείξτε ότι:
 Α) $|f(\alpha) - f(\beta)| \leq (\alpha - \beta)^2$ για κάθε α, β στο \mathbb{R} .
43. Α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ ως προς τη μονοτονία της.
 Β) Αν $a > b > 1$, να δείξετε ότι $b^2 - a^2 < \ln \left(\frac{b}{a}\right)^2$.

44. A) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2}]$.
 B) Αν $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ και $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$.
45. Να αποδείξετε για κάθε $x > 0$ ότι $\eta\mu x \geq x - \frac{x^3}{6}$.
46. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ είναι $x^a - ax \leq 1 - a$, για $0 < a < 1$.
47. Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
48. Για κάθε $x > 0$ να αποδείξετε ότι $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$.
49. A) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = e^x(1 - x)$, $x < 1$.
 B) Δείξτε ότι για κάθε $x < 1$ ισχύει $e^x \leq \frac{1}{1-x}$
 Γ) Αν $b < a < 0$ δείξτε ότι $\ln\left(\frac{1-b}{1-a}\right) > a - b$.
50. Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) , να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $f(x) < f(\alpha)$.
51. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι
- $$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha) + f(\beta).$$
52. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, β) να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει
- $$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} > \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$
53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{ax}}{x^2+a^2}$, $a \neq 0$.
 A) Να βρεθεί το πλήθος των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης.
 B) Αν $a \leq -1$, δείξτε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $e^{ax} \leq 1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2$.

Προβλήματα

54. Για ποια τιμή του θετικού αριθμού a η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^a e^{2a-x}$ γίνεται ελάχιστη;
55. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{e^{ax}}$, $a > 0$. Να προσδιορισθεί ο a ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης να είναι η ελάχιστη δυνατή.
56. Να βρεθεί ο $a \in R$ ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της εξίσωσης $2x^2 + 2(1-a)x - a = 0$ να είναι ελάχιστο.
57. Να προσδιορισθεί σημείο της παραβολής $y = x^2$ τέτοιο ώστε η απόσταση του από το σημείο $A(6,3)$ να είναι η ελάχιστη δυνατή. Ποια είναι αυτή η απόσταση;
58. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ και τα σημεία $A(a, f(a))$, $B(-a, f(-a))$, $\Gamma(-a, 0)$, $\Delta(a, 0)$. Να βρείτε το $a > 0$ ώστε το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$ να γίνεται μέγιστο.

59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ και τα σημεία $A(a, f(a))$, $B(-a, f(-a))$, $\Gamma(-a, 0)$, $\Delta(a, 0)$. Να βρείτε το $a > 0$ ώστε το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$ να γίνεται μέγιστο.
60. Να βρεθεί σημείο του άξονα $x'x$ τέτοιο ώστε το άθροισμα των αποστάσεών του από τα $A(1,1)$ και $B(2,2)$ να είναι ελάχιστο.
61. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1,1)$ και τέμνει τους άξονες στα σημεία A και B , των οποίων η απόσταση είναι η ελάχιστη δυνατή.
62. Να προσδιοριστεί η ευθεία που διέρχεται από το $A(1,1)$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο ελάχιστου εμβαδού.
63. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ που απέχει τη μικρότερη δυνατή απόσταση από το σημείο $A(1, 2)$.
64. Να βρείτε τα σημεία της υπερβολής $y^2 - x^2 = 4$ που απέχουν ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(3,0)$.
65. Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με το ίδιο εμβαδόν (E) ποιο είναι αυτό που έχει την μικρότερη υποτείνουσα;
66. Σε κύκλο ακτίνας ρ , να εγγράψετε ορθογώνιο με το μέγιστο δυνατό εμβαδό.
67. Από όλους τους ρόμβους με πλευρά a να βρεθεί αυτός με το μεγαλύτερο εμβαδό.
68. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ που σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδό.
69. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης της οποίας το τμήμα που περιέχεται από τους ημιάξονες Ox , Oy να είναι ελάχιστο.

Θεώρημα Fermat

70. Δίνεται μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) . Θεωρούμε έναν αριθμό $c \in (a, \beta)$ τέτοιον ώστε $f'(x) < 0$ για $x \in (a, c)$ και $f'(x) > 0$ για $x \in (c, \beta)$, να αποδείξετε ότι $f'(c) = 0$.
71. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^{\ln x} + b^{x-1}$, όπου $a, b > 0$ και $a + b = \frac{5}{2}$. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \geq 2$, να υπολογίσετε τους a, b .
72. Θεωρούμε την συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε όλο το \mathbb{R} , για την οποία ισχύει ότι $f(0) = 1$, $f(x) \leq e^{-2x}$, για κάθε x . Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f στο $x_0 = 0$.
73. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν υπάρχουν x_1, x_2 τέτοια ώστε $f(a), f(b) \in (f(x_1), f(x_2))$, δείξτε ότι
 Α) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.
 Β) Υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιος ώστε $f''(\xi) = 0$.

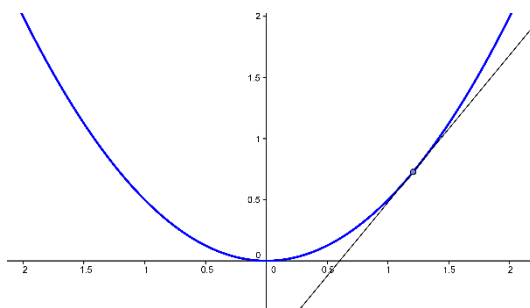
ΜΕΡΟΣ 4

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

A. Θεωρία

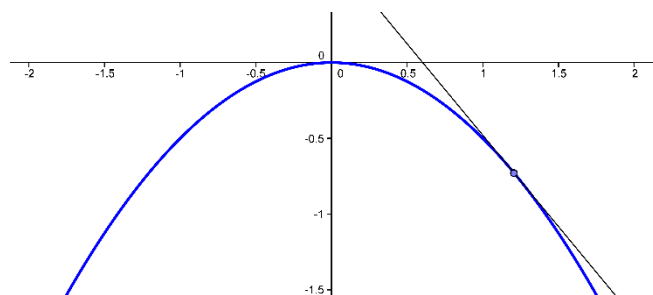
ΚΥΡΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι η f είναι **κυρτή** στο Δ (στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, **αν η παράγωγός της, f' , είναι γνησίως αύξουσα** στο εσωτερικό του Δ).
- Αν, επιπλέον, η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , τότε θα είναι κυρτή στο Δ αν $f''(x) > 0$.
- Το αντίστροφο αυτού του θεωρήματος δεν ισχύει. Μπορεί μια συνάρτηση να είναι κυρτή σε ένα διάστημα, αλλά να υπάρχουν σημεία σε αυτό το διάστημα στα οποία η δεύτερη παράγωγος να είναι μηδέν.
- Αν μια συνάρτηση f είναι **κυρτή**, τότε η εφαπτομένη της γραφική παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται **κάτω** από τη γραφική παράσταση της f .



ΚΟΙΛΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι η f είναι **κοίλη** στο Δ (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, **αν η παράγωγός της, f' , είναι γνησίως φθίνουσα** στο εσωτερικό του Δ).
- Αν, επιπλέον, η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , τότε θα είναι κυρτή στο Δ αν $f''(x) < 0$.
- Το αντίστροφο αυτού του θεωρήματος δεν ισχύει. Μπορεί μια συνάρτηση να είναι κοίλη σε ένα διάστημα, αλλά να υπάρχουν σημεία σε αυτό το διάστημα στα οποία η δεύτερη παράγωγος να είναι μηδέν.
- Αν μια συνάρτηση f είναι **κοίλη**, τότε η εφαπτομένη της γραφική παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται **πάνω** από τη γραφική παράσταση της f .

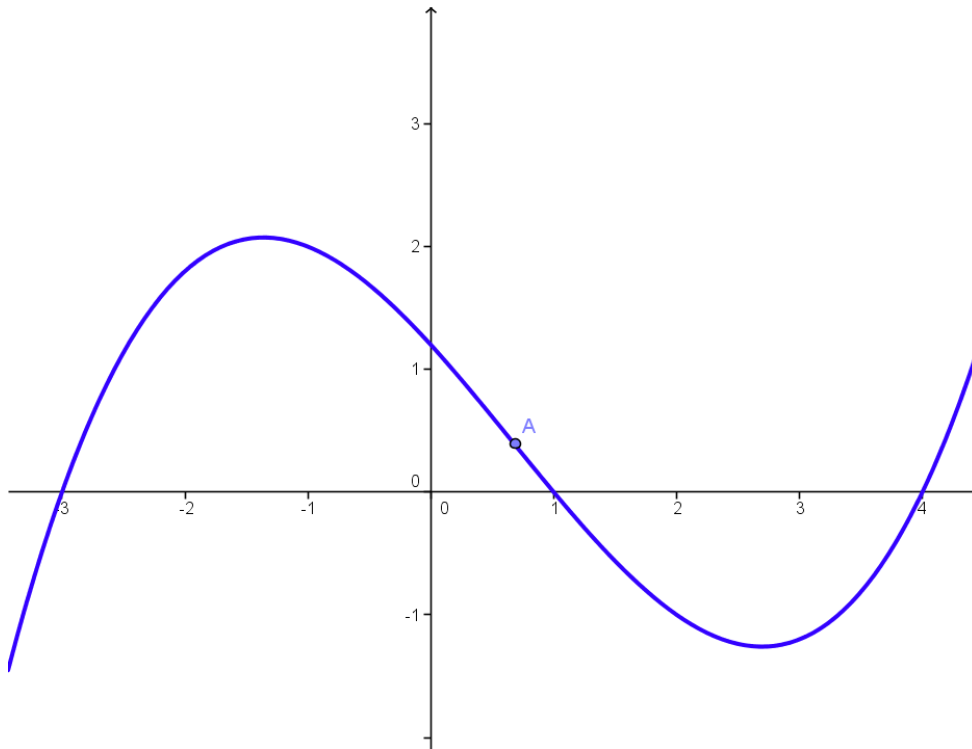


ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΜΠΗΣ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, b) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (a, x_0) και κοίλη στο (x_0, b) (ή αντιστρόφως και η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο x_0 , τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της C_f .

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα (a, b) και $x_0 \in (a, b)$. Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και ορίζεται εφαπτόμενη της C_f στο x_0 , τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε $f''(x_0) = 0$.



Ασκήσεις

Μελέτη Κυρτότητας

1. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα, την μονοτονία και τα ακρότατα.
Α) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 12x + 1$ Β) $f(x) = e^x - \eta\mu x + x^2$
Γ) $f(x) = x^4 - 12x^2 + 1$ Δ) $f(x) = \frac{x}{e^x}$
2. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα, την μονοτονία και τα ακρότατα.
Α) $f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 1$ Β) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ Γ) $f(x) = x \ln x - 1$.
3. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα, την μονοτονία και τα ακρότατα.
Α) $f(x) = x|x|$ Β) $f(x) = x|x|^2$ Γ) $f(x) = x^2|x|$
4. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το σημείο $x_0 = 2$ είναι θέση σημείου καμπής της συνάρτησης $f(x) = x^3 - (\lambda^2 - \lambda)x^2 + \lambda x + 1 + \lambda^2$.
5. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$ στο οποιοδήποτε σημείο της A , δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f εκτός του A .
6. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ , για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει στο σημείο $x_0 = 0$ τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής το $(-1, 1)$
7. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x$ είναι συνευθειακά και να βρείτε την εξίσωση της ευθείας των σημείων καμπής.
8. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ έχει τρία σημεία καμπής τα οποία είναι συνευθειακά.
9. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + 2x^2 + x - 1$ είναι κυρτή.
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 - 21x^3 + 36x^2 + x + \lambda$. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ υπάρχουν τρία σημεία καμπής της C_f (τα A, B, Γ). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου βάρους του τριγώνου $AB\Gamma$ όταν ο λ διατρέχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Θεωρητικές Ασκήσεις

11. Οι συναρτήσεις f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} και κυρτές. Αν για κάθε x ισχύει $f(x) > 0$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι κυρτή.
12. Η συνάρτηση f είναι 3 φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και για κάθε x ισχύει $f'''(x) > 0$. Αν $f''(0) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε η f να είναι κυρτή στο $(-\delta, 0]$ και κυρτή στο $[0, \delta)$.
13. Μια συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη σε ένα ανοιχτό διάστημα Δ . Αν $x_0 \in \Delta$ με $f''(x_0) = 0$ και $f'''(x_0) \neq 0$, να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_0
14. Α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και κυρτή στο Δ . Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) + f(x_2) > 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.
Β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $\frac{1}{2}(e^x + e^y) \geq e^{\frac{x+y}{2}}$.
15. Δίνεται η κυρτή συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο Δ . Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \Delta$ και για κάθε $\lambda \in [0, 1]$ ισχύει η σχέση $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

- 16.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\lambda e^x - x^2$, $x \in \mathbb{R}$, και $\lambda > 0$ παράμετρος.
Α) Να αποδείξετε ότι σε κάθε τιμή του $\lambda > 0$, η f έχει ένα μόνο σημείο καμπής.
Β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων καμπής της f όταν ο λ διατρέχει το διάστημα $(0, +\infty)$.

ΜΕΡΟΣ 5

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ - ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

1. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

Πιθανές θέσεις για κατακόρυφες ασύμπτωτες είναι σημεία x_0 τα οποία δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f , αλλά υπάρχει περιοχή γύρω τους της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, b)$, ή (a, x_0) , ή (x_0, b) η οποία ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . Αν σε ένα τέτοιο σημείο κάποιο από τα παρακάτω όρια

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ ή } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

είναι είτε $+\infty$, είτε $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

Συγκεκριμένα, κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

- Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται,
- Στα σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

Για παράδειγμα, αν το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $(1,4) \cup (4,7] \cup (10,15]$, τότε θα ερευνήσουμε τα σημεία 1, 4, 10 για κατακόρυφες ασύμπτωτες.

2. ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$) τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

3. ΠΛΑΓΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$), αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\lambda x + \beta)) = 0$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (\lambda x + \beta)) = 0$).

Εναλλακτικά, η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$), αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in R \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta \in R,$$

$$\text{αντιστοίχως } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in R \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta \in R.$$

Αποδεικνύεται ότι

- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
- Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

4. 1ος ΚΑΝΟΝΑΣ DE L' HOSPITAL $\left(\frac{0}{0}\right)$

Αν $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, όπου $a \in R \cup \{+\infty, -\infty\}$ και υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

5. 2ος ΚΑΝΟΝΑΣ DE L' HOSPITAL $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

Αν $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, όπου $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ και υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ασκήσεις

Ασύμπτωτες

1. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:
A) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ B) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$ Γ) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ Δ) $f(x) = \eta\mu \frac{1}{x}$
E) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$
2. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:
A) $f(x) = \frac{x|x+2|}{x^2-1}$ B) $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x^2} & x < 0 \\ \frac{2x^2+1}{x} & x > 0 \end{cases}$
3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων
A) $f(x) = \frac{3|x|-2x+1}{x+3}$ B) $f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ Γ) $f(x) = \frac{x^3-1}{x+1}$ Δ) $f(x) = \frac{x^5-2x^4}{x^2-1}$
4. Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η $f(x) = \frac{\beta x^2+12}{x+\alpha}$ να έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$ και η ευθεία $x = -2$ να είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης.
5. Να βρείτε τα λ, μ για τα οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x(e^{1/x} - \lambda) - \mu) = 1$.

Κανόνες L' Hospital

6. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια
A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \eta\mu x - 1}{x^2}$ B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\eta\mu x)}{\eta\mu 2x}$ Γ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$ Δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1)$
7. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια
A) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\varepsilon\phi x} \right)$ B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\sqrt{x^2+1}} - e^x)$ Γ) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x \ln(x-2)}{\ln(e^x - e^2)}$
8. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια
A) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ B) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\eta\mu x}$ Γ) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$
9. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x} & 0 < x \neq 1 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι

 - i) Η f είναι συνεχής
 - ii) $f'(1) = -1/2$
 - iii) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$
10. Να προσδιορίσετε τις τιμές των παραμέτρων α, β έτσι ώστε να ισχύει
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + \alpha x \sigma\upsilon\nu x + \beta \eta\mu x}{x^3} = 1$.
11. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = x e^{1/x}$

ΜΕΛΕΤΗ - Γραφική Παράσταση Συναρτήσεων

12. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x$.
13. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = 8x - x^3$.
14. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.
15. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x + \frac{2}{x^2}$.
16. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$
17. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x \ln x$
18. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = xe^{1/x}$.
19. Να μελετήσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$ τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1-\eta\mu x}{\eta\mu x}$.
20. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$.
21. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
22. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\ln x+1}$.
23. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^x$.
24. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$.