

Σύνθεση συναρτήσεων και αντίστροφη συνάρτησηΠανελλαδικές 2017

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x, x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}, x \neq 1$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

(Μονάδες 5)

B2. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right), x \in (0,1)$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και ότι $h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

Επαναληπτικές 2019

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + 1$ και $g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x-2}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ και τύπο $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

(Μονάδες 5)

Πανελλαδικές 2020

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ και
- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = e^x$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$

(Μονάδες 5)

B2. Αν $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ με $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

(Μονάδες 8)

Πανελλαδικές 2020 (Παλαιό σύστημα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}, x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{3\}$.

(Μονάδες 5)

B2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, f^{-1} είναι ίσες.



(Μονάδες 8)

B3. Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

(Μονάδες 6)

Επαναληπτικές 2020

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha$ και $g(x) = x + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = -1$

(Μονάδες 5)

B2. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή τους εφόσον αυτή υπάρχει.

(Μονάδες 6)

B3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\varphi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)}$.

(Μονάδες 6)

Επαναληπτικές 2020 (Παλαιό σύστημα)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x+1)^2 - 1$ με $x \in [-1, +\infty)$, και $g(x) = x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της, f^{-1} .

(Μονάδες 8)

Αν $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1$, $x \in [-1, +\infty)$ τότε:B3. Να βρείτε τη συνάρτηση $f^{-1} \circ g$.

(Μονάδες 6)

Επαναληπτικές 2021

Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ και η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2, x < 0$.

(Μονάδες 8)

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h = g \circ f^{-1}$ είναι η $h(x) = \frac{x-1}{x}, x < 0$

(Μονάδες 6)



Πανελλαδικές 2022

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty,1]\rightarrow\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^4-2x^2+1$ και η συνάρτηση $g:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$

(Μονάδες 6)

B2. Αν $h(x)=(x-1)^2, x\in[0,1]$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι 1-1 (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6).

(Στο επόμενο ερώτημα δίνεται $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}, x\in[0,1]$)

(Μονάδες 9)

Πανελλαδικές 2023

Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\frac{4-e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση

$h:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\ln x$.

B1. να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$

(Μονάδες 5)

Επαναληπτικές 2023

Δίνονται οι συναρτήσεις $g,h:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με τύπους $g(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ και

$h(x)=\ln x$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$

(Μονάδες 6)

B2. Αν $f(x)=\frac{x+1}{x-1}, x>1$ να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f^{-1}=f$ (όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f).

(Μονάδες 6)

Πανελλαδικές 2024

Δίνονται οι συναρτήσεις $g:[1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ και

$h:[1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

B1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f=\frac{g}{h}$ και $r=g\cdot h$.

(Μονάδες 6)



Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$ και $r(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1$.

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι $f^{-1} = f$ (μονάδες 5), όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f .

(Μονάδες 7)

Επαναληπτικές 2024

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2 \ln x - 1$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x - 2$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

(Μονάδες 6)

Αν $h(x) = 2 \ln(x-2) - 1, x > 2$ τότε:

B3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

(Μονάδες 7)

