



Γιατί η μελέτη των παραγώγων
ονομάζεται διαφορικός λογισμός;

Τι είναι το διαφορικό;



Ποιός φταίει;

**Gottfried Wilhelm (von)
Leibniz**

(1646 – 1716)

Αναγέννηση!

Γερμανία

Homo universalis

«ο πολυμαθέστερος ανήρ μετά
τον Αριστοτέλην

Διαφορικός και Ολοκληρωτικός
Λογισμός

Νεύτωνα



Απειροστικός Λογισμός



1 Οι πραγματικοί αριθμοί	1
1.1 Η γεωμετρική παράσταση	1
1.2 Φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί αριθμοί	1
1.3 Άρρητοι αριθμοί	2
1.4 Ένα αξιωματικό σύστημα για τους πραγματικούς	
1.5 Ασκήσεις	6
2 Πραγματικές Συναρτήσεις	9
2.1 Μερικά χρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$	9
2.1α' Διαστήματα	9
2.1β' Εσωτερικά σημεία	10
2.2 Παραδείγματα πραγματικών συναρτήσεων	
2.2α' Ακολουθίες	11
2.2β' Πολυωνυμικές συναρτήσεις	11
2.2γ' Ρητές συναρτήσεις	11
2.2δ' Τριγωνομετρικές συναρτήσεις	12
2.2ε' Πρόσημο (sgn) ενός πραγματικού αφ	
2.2στ' Ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αφ	
2.2ζ' Χαρακτηριστική Συνάρτηση	16
2.2η' Γραφική παράσταση συναρτήσεων	
2.3 Ασκήσεις	18
3 Σύγκλιση, συνέχεια	19
3.1 Ακολουθίες	19
3.1α' Σύγκλιση σε πραγματικό αριθμό	1
3.1β' Σύγκλιση στο $\pm\infty$	20
3.1γ' Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών	
3.2 Σύγκλιση και συνέχεια συναρτήσεων	26
3.2α' Όρια συναρτήσεων	26
3.2β' Ιδιότητες ορίων	28
3.2γ' Συνέχεια συναρτήσεων	31
3.2δ' Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων. Είδη ασυνεχειών	34
3.3 Ορισμένα βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις	36
3.4 Ασκήσεις	42
4 ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ	45
4.1 Βασικές έννοιες	45
4.1α' Ορισμοί και απλά παραδείγματα	45
4.1β' Ο κανόνας της αλυσίδας	49
4.1γ' Η παράγωγος ως συνάρτηση	52
4.2 Φυσική και γεωμετρική σημασία της παραγώγου	52
4.2α' Η παράγωγος στη Μηχανική	53
4.3 Η παράγωγος ως κλίση εφαπτομένης	55
4.4 Ορισμένα βασικά θεωρήματα για παραγωγίσιμες συναρτήσεις	59
4.4α' Τα θεωρήματα του Rolle και της μέσης τιμής	60
4.4β' Μονότονες Συναρτήσεις	63
4.4γ' Οι συναρτήσεις $a^x, x^a, \log$	69
4.4δ' Η εκθετική συνάρτηση $a^x, a > 0$	71
4.4ε' Οι στοιχειώδεις συναρτήσεις	84
4.5 Ασκήσεις	87
5 Το Ολοκλήρωμα Riemann	91
5.1 Το πρόβλημα του εμβαδού	91
5.1α' Η μέθοδος της εξάντλησης	91
5.1β' Ο Τετραγωνισμός της παραβολής	93
5.2 Ορισμός και βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος	95
5.2α' Ο ορισμός του Darboux	95
5.3 Ο ορισμός του Riemann	99
5.4 Η ολοκληρωσιμότητα των μονότονων και συνεχών συναρτήσεων	100
5.4α' Μονότονες συναρτήσεις	100
5.4β' Συνεχείς συναρτήσεις	101
5.5 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann	102
5.5α' Τα βασικά θεωρήματα για το ολοκλήρωμα	109
5.6 Βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης	113
5.6α' Ολοκλήρωση με αντικατάσταση	114
5.7 Ολοκλήρωση κατά μέρη	116
5.8 Η ολοκλήρωση των ορίων συναρτήσεων	118

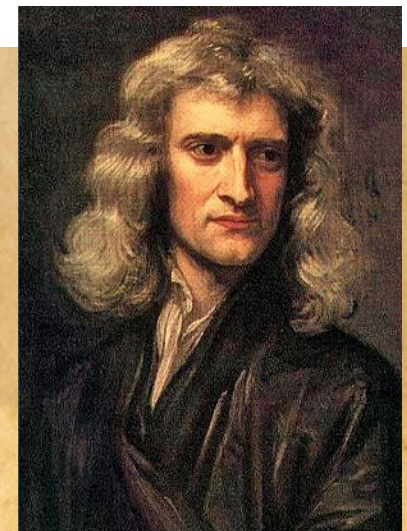
Τι είναι ο Απειροστικός Λογισμός;



Λογισμός είναι η μαθηματική μελέτη της συνεχούς μεταβολής των τιμών.

Όταν ο Νεύτων και ο Λάιμπνιτς δημοσίευσαν τα πρώτα τους αποτελέσματα, υπήρχε μεγάλη διαμάχη σχετικά με το ποιος μαθηματικός (και κατά συνέπεια ποια χώρα) άξιζε πίστωσης. Ο Νεύτων ήταν ο πρώτος, αλλά ο Λάιμπνιτς δημοσίευσε για πρώτη φορά. Ο Νεύτων ισχυρίστηκε ότι ο Λάιμπνιτς έκλεψε τις ιδέες του από αδημοσίευτες σημειώσεις του, που ο Νεύτων είχε μοιραστεί με μερικά μέλη της Βασιλικής Εταιρείας. Αυτή η διαμάχη χωρίζει τους αγγλόφωνους μαθηματικούς από τους υπόλοιπους μαθηματικούς εδώ και πολλά χρόνια. Μια προσεκτική εξέταση των εγγράφων του Νεύτων και του Λάιμπνιτς δείχνει ότι έφτασαν στα αποτελέσματά τους ανεξάρτητα, με τον Λάιμπνιτς να ξεκινάει πρώτα με την ολοκλήρωση και τον Νεύτων με τη παραγωγή. Σήμερα τόσο Νεύτων όσο και στον Λάιμπνιτς δίνεται πίστωση για την ανάπτυξη του λογισμού ανεξάρτητα. Ο Λάιμπνιτς όμως τιμήθηκε δίνοντας το όνομά του. Ο Νεύτων ονόμασε τον λογισμό του "η επιστήμη των συνεχών αλλαγών".

Leibniz > Calculus

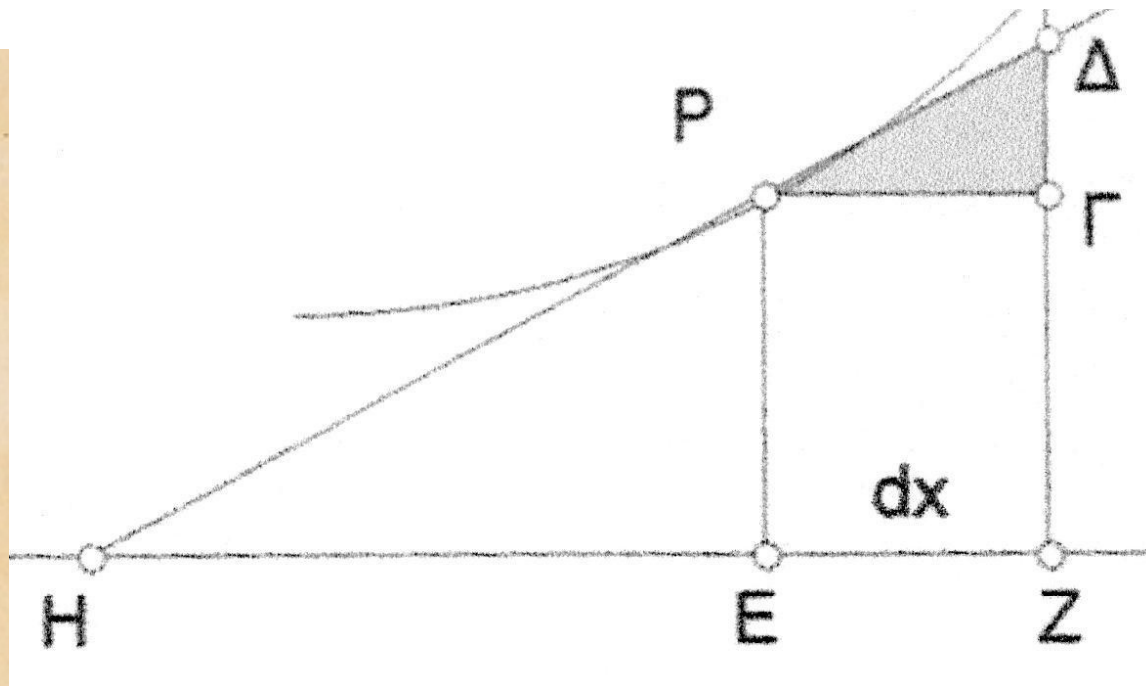


Πως ξεκίνησε ο Leibniz

«εφαπτομένη μιας καμπύλης είναι η ευθεία η οποία συνδέει δύο διαδοχικά σημεία της καμπύλης τα οποία απέχουν μεταξύ τους απείρως μικρή απόσταση»,

Τι είναι το διαφορικό

Το διαφορικό dy της τεταγμένης y ενός σημείου P είναι μια ποσότητα, η οποία έχει λόγο προς τη διαφορά dx της τετμημένης x του P , ίσο με το λόγο της y προς την υποεφαπτομένη της καμπύλης στο P . η διαφορά dx μπορεί να είναι μια οποιαδήποτε ποσότητα.



$$\text{Τα τρίγωνα } P\Gamma\Delta \text{ } \overset{\Delta}{\sim} \text{ } PHE: \frac{\Gamma\Delta}{P\Gamma} = \frac{PE}{HE} \Rightarrow \frac{\Gamma\Delta}{dx} = \frac{y}{HE}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{HE}.$$

Που οδήγησε αυτός ο συμβολισμός;

λογισμού. Καθορίζει κανόνες διαφόρισης, εύρεσης μεγίστων και ελαχίστων και συνδέει τα σημεία ακροτάτων (για πρώτη φορά) με το μηδενισμό της πρώτης παραγώγου. Συνδέει επίσης το μηδενισμό της δεύτερης παραγώγου με τα σημεία καμπής της καμπύλης και αποδεικνύει διάφορες προτάσεις και θεωρήματα που υπήρξαν βασικά για την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας.

Οι αρχές της ολοκλήρωσης διατυπώθηκαν από τον Ισαάκ Νεύτονα και τον Γκότφριντ Βίλχελμ Λάιμπνιτς στο τέλος του 17ου αιώνα. Μέσα από το **θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού**, που ανέπτυξαν ανεξάρτητα, η ολοκλήρωση συνδέεται με την **παραγώγιση** και το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης μπορεί εύκολα να υπολογιστεί μόλις γίνει γνωστή η αντιπαράγωγος. Τα ολοκληρώματα και οι παράγωγοι έγιναν τα βασικά εργαλεία του **απειροστικού λογισμού**, με πολυάριθμες εφαρμογές στην επιστήμη και τη μηχανική.

Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται **σύμβολο** ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος S της λέξης Summa (άθροισμα). Οι αριθμοί α και β

Άλλοι συμβολισμοί



Κατά τον συμβολισμό του **Νεύτωνα** για την παραγωγή, τοποθετείται μια τελίτσα πάνω από την συνάρτηση που παριστάνει την παράγωγο. Αν $y=f(t)$, τότε τα

$$\dot{y} \quad \text{and} \quad \ddot{y}$$

Ένας από τους πιο κοινούς σύγχρονους συμβολισμούς για την διαφορίση, και μερικές φορές καλείται ως τονική διαφορίση^[7], οφείλεται στον **Ζοζέφ Λουί Λαγκράνζ** και χρησιμοποιεί τον τόνο έτσι, ώστε η παράγωγος μια συνάρτησης $f(x)$ συμβολίζεται με $f'(x)$ ή απλούστερα f' . Όμοια, η δεύτερη και η τρίτη παράγωγος συμβολίζονται

$$(f')' = f'' \quad \text{και} \quad (f'')' = f''' .$$

Ο **Ζοζέφ Λουί Λαγκράνζ** (*Joseph-Louis Lagrange* ή *Giuseppe Lodovico Lagrangia*, 25 Ιανουαρίου 1736 – 10 Απριλίου 1813) ήταν **Ιταλός μαθηματικός, φυσικός και αστρονόμος**, που έζησε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του στην **Πρωσία** και τη



Τάδε έφη Leibniz...

Το μυστικό της ανάλυσης είναι η καθιέρωση κατάλληλης ορολογίας και συμβολισμού και η τέχνη της καλής χρήσης των συμβόλων.

Διαβάστε και το ιστορικό σημείωμα των σελίδων 182-183 του σχολικού βιβλίου!

ΠΗΓΕΣ:

- http://me.math.uoa.gr/dipl/dip_kontou_Isidora.pdf
- http://me.math.uoa.gr/dipl/dipl_mikeli.pdf
- www.wikipedia.org



This work is licensed under
a Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported License.

It makes use of the works of
Kelly Loves Whales and Nick Merritt.