

13. Συνέχεια – Bolzano + Σύνολο τιμών

1) $2x^7 + 8x = 7$ στο $(0,1)$.

2) $2x^3 + x^2 + 2\alpha^2 x + 3\alpha - 1 = 0$ στο $(-1,1)$.

3) Δίνεται f συνεχής με $f(1) = -2, f(2) = 2, f(3) = -4$. Να αποδειχθεί ότι η f δεν αντιστρέφεται.

4) $\frac{2^x}{x+1} + \frac{3^x}{x-2} = 0$ στο $(-1,2)$.

5) (2024_Δ1) Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{\ln x + x}{x}$. όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f((0, +\infty)) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

6) Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta \mu x$ και $g(x) = x - 1$ έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

7) Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f^3(x) - 2f^2(x) + 3f(x) = 3x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

8) $f(x) = x^{2^v} - 3x + 1, v \in \mathbb{N}^*$. Να αποδειχθεί ότι έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $[0,3]$.

9) Η $x^3 + x + \ln x = 3$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1, 2)$.

10) Η $\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-\beta} + \frac{3}{x-\gamma} = 0$ έχει μόνο δύο ρίζες ($\alpha < \beta < \gamma$).

11) Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, με $0 \leq f(x) \leq \ln 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]: f(\sin(\pi x_0)) = \ln(x_0 + 1)$.

12) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\ln x = x^2 - 4x + 2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

13) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x + e^{\phi x}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, \frac{\pi}{2})$.