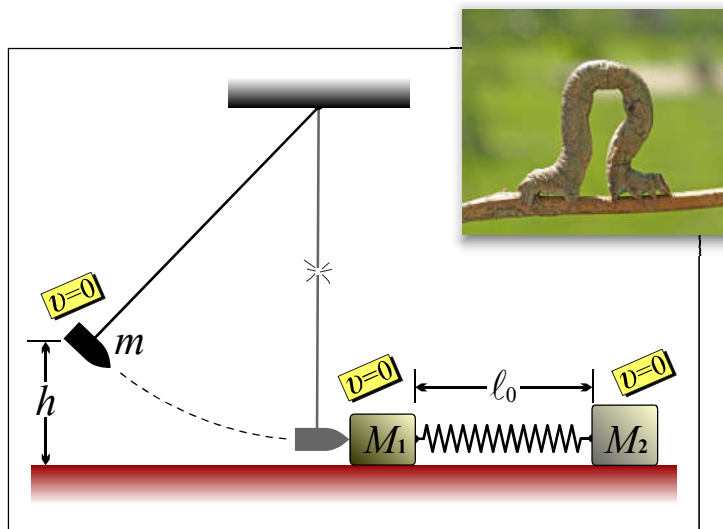
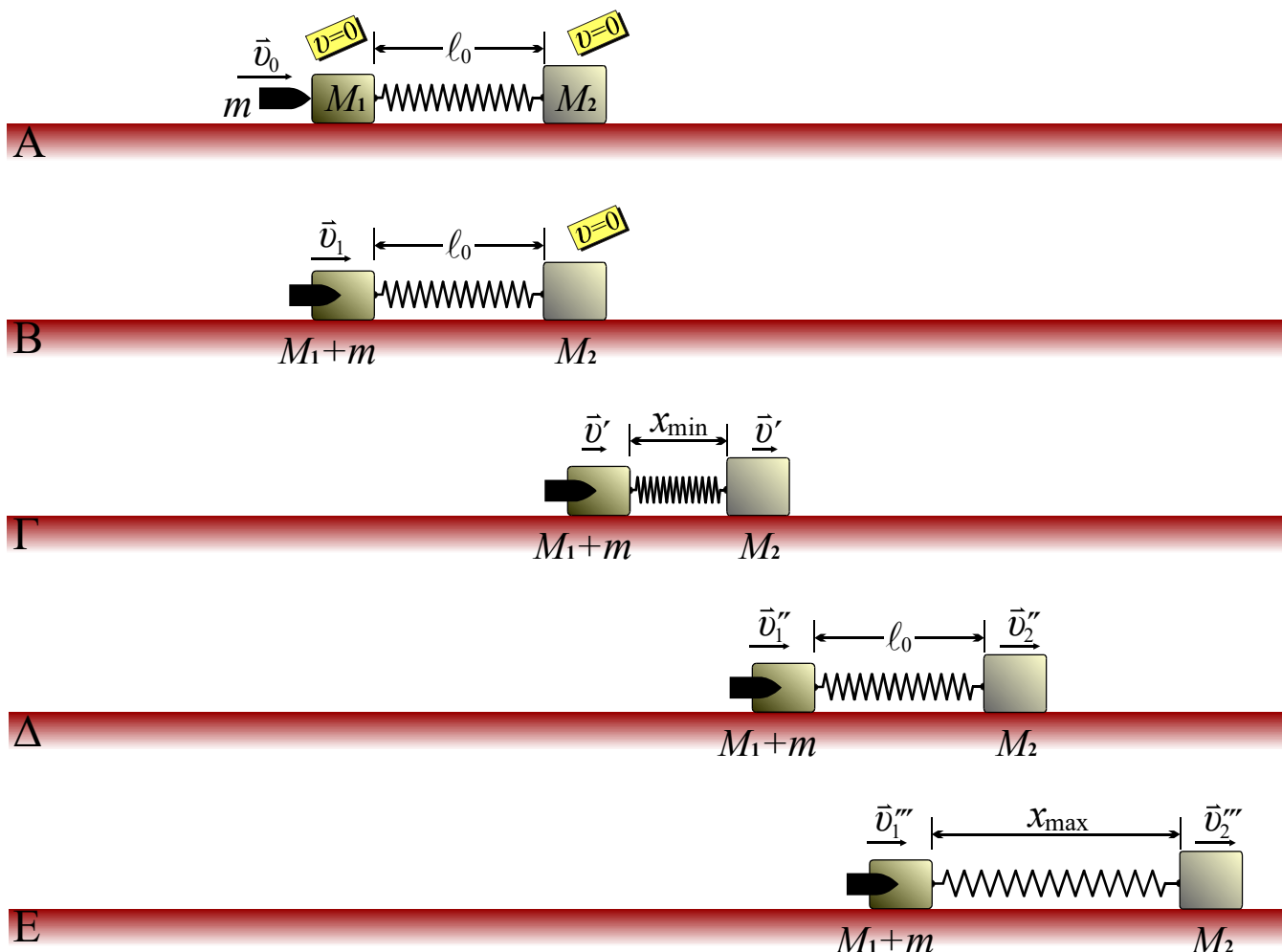




Τα σώματα μαζών M_1 και M_2 είναι δεμένα στο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k και ηρεμούν πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος (ℓ_0). Βλήμα μάζας m είναι δεμένο σε νήμα και αφήνεται (χωρίς αρχική ταχύτητα) από ύψος h . Όταν το νήμα γίνεται κατακόρυφο, το βλήμα συγκρούεται πλαστικά και ακαριαία με το σώμα M_1 , ενώ ταυτόχρονα το νήμα κόβεται. Το σύστημα ξεκινά προς τα δεξιά. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση του συσσωματώματος M_1+m με το σώμα M_2 .

Δίνονται: $m = 1 \text{ kg}$ $k = 750 \text{ N/m}$
 $M_1 = 4 \text{ kg}$ $\ell_0 = 1 \text{ m}$
 $M_2 = 3 \text{ kg}$ $h = 5 \text{ m}$
 $g = 10 \text{ m/s}^2$

ΛΥΣΗ



► Κάθοδος του βλήματος m , με το νήμα:

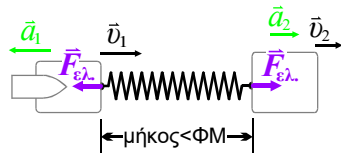
$$\underline{\text{ΑΔΜΕ:}} \quad E_{\alpha\rho\chi.} = E_{\tau\epsilon\lambda.} \Rightarrow \cancel{K_{\alpha\rho\chi.}}^0 + U_{\alpha\rho\chi.} = K_{\tau\epsilon\lambda.} + \cancel{U_{\tau\epsilon\lambda.}}^0 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} = 10 \text{ m/s}$$

► Πλαστική κρούση του m με το M_1 : ($A \rightarrow B$)

$$\underline{\text{ΑΔΟ:}} \quad p_m + \cancel{p_{M_1}}^0 = p_{m+M_1} \Rightarrow mv_0 = (m+M_1)v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{mv_0}{m+M_1} = 2 \text{ m/s}$$

► Κίνηση του συστήματος M_1+m και M_2 : ($B \rightarrow \Gamma$) ($B \rightarrow \Delta$) ($B \rightarrow E$)

$$\underline{\text{ΑΔΟ:}} \quad p_{M_1+m} + \cancel{p_{M_2}}^0 = p'_{M_1+m} + p'_{M_2} \Rightarrow (m+M_1)v_1 = (m+M_1)v'_1 + M_2v'_2 \Rightarrow 5v'_1 + 3v'_2 = 10 \quad (1) \quad \text{ΓΕΝΙΚΗ ΣΧΕΣΗ}$$



Αρχικά ($v_1 = 2 \text{ m/s}$, $v_2 = 0$) αλλά και στη συνέχεια (όπου $v_1' > v_2'$) τα σώματα εκατέρωθεν του ελατηρίου πλησιάζουν. Το ελατήριο συσπείρεται και έτσι ασκεί δυνάμεις στα σώματα (προς τα έξω) επιβραδύνοντας το συσσωμάτωμα M_1+m και επιταχύνοντας το M_2 . Όσο, όμως, έχουμε $v_1' > v_2'$ τα σώματα πλησιάζουν. Όταν $v_1' = v_2' = v'$, τα σώματα θα βρίσκονται στην ελάχιστη απόσταση, γιατί την αμέσως επόμενη στιγμή (λόγω των δυνάμεων) θα έχουμε $v_2' > v_1'$ και τα σώματα θα ξεκινήσουν να απομακρύνονται. Επομένως, τη στιγμή που οι ταχύτητες των σωμάτων γίνουν ίσες, το ελατήριο θα παρουσιάζει τη μέγιστη συσπείρωσή του ($\Delta\ell_{\max}$) και τα σώματα θα βρίσκονται στην ελάχιστη απόστασή τους ($x_{\min}$).

► Κοινή ταχύτητα σωμάτων στην ελάχιστη απόστασή τους: ($B \rightarrow \Gamma$)

$$(1): \quad 5v' + 3v' = 10 \Rightarrow v' = \frac{5}{4} \text{ m/s}$$

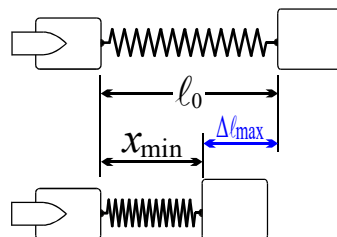
► Κίνηση του συστήματος μέχρι τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου: ($B \rightarrow \Gamma$)

$$\underline{\text{ΑΔΜΕ:}} \quad E_{(B)} = E_{(\Gamma)} \Rightarrow K_{(B)}^{\text{ολ.}} + U_{(B)}^{\text{ελ.αστ.}} = K_{(\Gamma)}^{\text{ολ.}} + U_{(\Gamma)}^{\text{ελ.αστ.}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(M_1+m)v_1^2 = \frac{1}{2}(M_1+m)v'^2 + \frac{1}{2}M_2v'^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell_{\max}^2 \Rightarrow \Delta\ell_{\max} = \frac{1}{10} m$$

ΜΕΓΙΣΤΗ
ΣΥΣΠΕΙΡΩΣΗ
ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ

► Για το ελατήριο: ($B \rightarrow \Gamma$)



$$\ell_0 = x_{\min} + \Delta\ell_{\max} \Rightarrow x_{\min} = \frac{9}{10} m$$

ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ
ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Όπως είπαμε, μετά την ελάχιστη απόσταση, λόγω των δυνάμεων *Hooke*, τα σώματα θα ξεκινήσουν να απομακρύνονται (θα έχουμε τώρα $v_2' > v_1'$). Όταν το ελατήριο φτάσει πάλι στο φυσικό του μήκος...

► Κίνηση του συστήματος από το φυσικό μήκος του ελατηρίου μέχρι ξανά το φυσικό μήκος: (B → Δ)

$$\underline{\text{ΑΔΜΕ:}} \quad E_{(B)} = E_{(\Delta)} \Rightarrow K_{(B)}^{\text{ολ.}} + \cancel{U_{(B)}^{\text{ελαστ.}}} = K_{(\Delta)}^{\text{ολ.}} + \cancel{U_{(\Delta)}^{\text{ελαστ.}}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}(M_1 + m)v_1^2 = \frac{1}{2}(M_1 + m)v_1''^2 + \frac{1}{2}M_2v_2''^2} \quad (2)$$

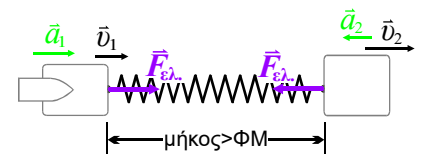
$$\underline{\text{ΑΔΟ:}} \quad p_{M_1+m} + \cancel{p_{M_2}^0} = p_{M_1+m}'' + p_{M_2}'' \Rightarrow \boxed{(m + M_1)v_1 = (m + M_1)v_1'' + M_2v_2''} \quad (3)$$

Αν και δεν έχουμε ελαστική κρούση των M_1+m και M_2 (ούτε καν κρούση), οι εξισώσεις (2) και (3) είναι ακριβώς αυτές που αιτιολογούν τους γνωστούς τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης δύο σφαιρών, με τη μια να είναι αρχικά ακίνητη. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \longrightarrow & v_1'' &= \frac{(M_1 + m) - M_2}{(M_1 + m) + M_2} v_1 = \frac{1}{2} \text{ m/s} & \& & v_2'' &= \frac{2(M_1 + m)}{(M_1 + m) + M_2} v_1 = \frac{5}{2} \text{ m/s} \\ v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \longrightarrow & & & & & \end{aligned}$$

Βλέπουμε πως τη στιγμή που το ελατήριο έχει πάλι το φυσικό του μήκος (κατάσταση Δ), το σώμα M_2 έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το συσσωμάτωμα M_1+m (δηλαδή $v_2'' > v_1''$). Άρα, τα σώματα θα συνεχίσουν να απομακρύνονται και το ελατήριο, τώρα, θα επιμηκύνεται.

Το επιμηκυνόμενο ελατήριο “τραβάει” τα σώματα *προς τα μέσα*, δηλαδή επιβραδύνει το M_2 και επιταχύνει το M_1+m . Έτσι, η ταχύτητα του M_2 μειώνεται ενώ του M_1+m αυξάνεται. Όσο, όμως, $v_2 > v_1$ τα σώματα θα συνεχίσουν να απομακρύνονται και το ελατήριο θα συνεχίζει να αυξάνει το μήκος του. Αυτό θα σταματήσει όταν $v_1''' = v_2'''$, γιατί την αμέσως επόμενη στιγμή το M_1+m θα έχει (πάλι) μεγαλύτερη ταχύτητα από το M_2 και τα σώματα θα αρχίσουν (πάλι) την προσέγγιση. Επομένως, τη στιγμή που οι ταχύτητες των σωμάτων γίνουν πάλι ίσες, το ελατήριο θα παρουσιάζει τη μέγιστη εκτόνωσή του ($\Delta \ell_{\max}$) και τα σώματα θα βρίσκονται στην μέγιστη απόστασή τους ($x_{\min}$).



Για τη νέα κατάσταση των ίσων ταχυτήτων ισχύει πάλι η γενική σχέση (1) και έτσι έχουμε:

$$(1): \quad 5v''' + 3v''' = 10 \Rightarrow \boxed{v_1''' = v_2''' = v''' = \frac{5}{4} \text{ m/s}}$$

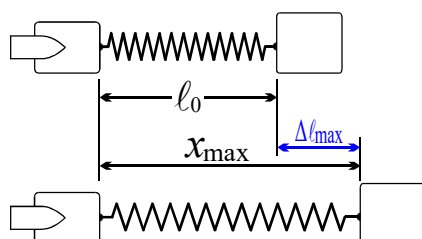
► Κίνηση του συστήματος μέχρι τη μέγιστη εκτόνωση του ελατηρίου: (B → Ε)

Εφαρμόζοντας ΑΔΜΕ από το Β στο Ε, έχουμε ακριβώς τους ίδιους όρους όπως και στην προηγούμενη ΑΔΜΕ (από το Β στο Γ), μόνο που τώρα το $\Delta \ell_{\max}$ αντιπροσωπεύει τη μέγιστη εκτόνωση του ελατηρίου:

$$\boxed{\Delta \ell_{\max} = 1/10 \text{ m}}$$

ΜΕΓΙΣΤΗ
ΕΚΤΩΝΩΣΗ
ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ

► Για το ελατήριο: (B → Ε)



$$x_{\max} = \ell_0 + \Delta \ell_{\max} \Rightarrow \boxed{x_{\max} = \frac{11}{10} \text{ m}}$$

ΜΕΓΙΣΤΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ
ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ