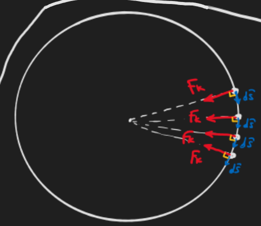
Μεγέθη Δυνάμεων & Ρυθμών σε Απλό Εκκρεμές



$dW_{F_κ}=0$ γιατί πάντα $\vec{F}_κ \perp d\vec{S}$ $\Big\}$ $W_{F_κ}=0$

όταν σε ένα σώμα έχω $\Sigma F_{ολικό} = F_κ \Rightarrow W_{\Sigma F} = W_{F_κ} = 0 \overset{ΘΜΚΕ}{\Longrightarrow} \Delta K = 0 \Rightarrow$

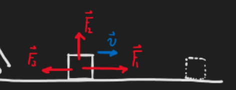
$\Rightarrow K = σταθ. \Rightarrow |\vec{υ}| = σταθ.$
$\Downarrow$
Ο.Κ.Κ.

σε αντίθεση: αν $\Sigma F_{ολικό} \neq F_κ$
↳ δηλ. υπάρχουν και άλλες (εφαπτομενικές) δυνάμεις

τότε δεν έχω $W_{\Sigma F}=0$ άρα $W_{\Sigma F} \neq 0$
$\Downarrow$
$\Delta K \neq 0$
$\Downarrow$
μη ομαλή κυκλική κίνηση

π.χ. η ΑΑΤ του απλού Εκκρεμούς.

Ρυθμός Μεταβολής της ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ



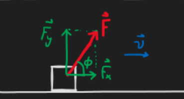
$\vec{F}_1 \uparrow\uparrow d\vec{x} \Rightarrow W_{F_1} > 0$
$\vec{F}_2 \perp d\vec{x} \Rightarrow W_{F_2} = 0$
$\vec{F}_3 \uparrow\downarrow d\vec{x} \Rightarrow W_{F_3} < 0$

$$\frac{dK}{dt} \underset{\substack{\Delta K = W_{\Sigma F} \\ \Downarrow \\ dK = dW_{\Sigma F}}}{\overset{ΘΜΚΕ}{=}} \frac{dW_{ολ.}}{dt} = \frac{dW_{F_1} + dW_{F_2} + dW_{F_3}}{dt} =$$

$(\vec{F}_2 \perp d\vec{x})$: $dW_{F_2} \to 0$

$$= \frac{(+F_1 \cdot dx) + 0 + (-F_3 \cdot dx)}{dt} = \frac{F_1 \cdot dx}{dt} - \frac{F_3 \cdot dx}{dt} =$$

$$= F_1 \cdot υ - F_3 \cdot υ = (F_1 - F_3) \cdot υ$$



$$\frac{dK}{dt} \overset{ΘΜΚΕ}{=} \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{dW_F}{dt} = \frac{F \cdot dx \cdot συνφ}{dt} = F \cdot υ \cdot συνφ$$

Ρυθμός Μεταβολής της ΒΑΡΥΤΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$\left|\frac{dU_B}{dt}\right| = \left|\frac{d(mgh)}{dt}\right| = mg\left|\frac{dh}{dt}\right| = mg \cdot |υ_y|$$

$$\frac{dU_B}{dt} = \begin{cases} +mg|υ_y| & (\text{άνοδος} \Rightarrow h:\uparrow) \\ -mg|υ_y| & (\text{κάθοδος} \Rightarrow h:\downarrow) \end{cases}$$

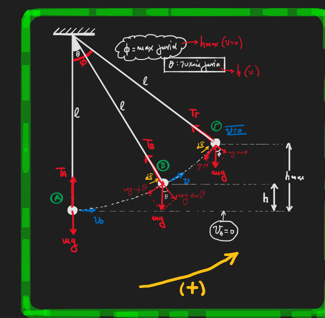
όταν δεν υπάρχουν τριβές:
... και η Μηχανική Ενέργεια Διατηρείται: ΑΔΜΕ

και όταν έχουμε άνοδο ή κάθοδο

$$E_μ = K + U_B \Rightarrow \frac{dE_μ}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU_B}{dt} \Rightarrow 0 = \frac{dK}{dt} + \frac{dU_B}{dt} \Rightarrow$$

$\frac{dE_μ}{dt} \to 0$ ($E_μ = σταθ.$)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dU_B}{dt} = -\frac{dK}{dt}}$$



ΘΕΣΗ: Β

ΑΔΜΕ(Α→Β): $K_A + U_A = K_B + U_B \Rightarrow$ ($U_A \to 0$)

$\Rightarrow \frac{1}{2}mυ_0^2 = \frac{1}{2}mυ^2 + mgh \Rightarrow$

$\overset{\cdot 2}{\Rightarrow} υ_0^2 = υ^2 + 2gh \Rightarrow \boxed{υ^2 = υ_0^2 - 2gh} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{υ = \sqrt{υ_0^2 - 2gh}}$

$F_κ = m\frac{υ^2}{\ell} \Rightarrow \Sigma F_{ακ} = m\frac{υ^2}{\ell} \Rightarrow$

$\Rightarrow T_B - mg \cdot συνθ = m\frac{υ^2}{\ell} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{T_B = mg \cdot συνθ + m\frac{υ^2}{\ell}}$

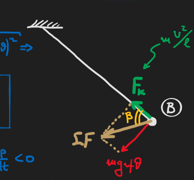
(i) θα δίνεται το h και θα βρίσκουμε το θ: $συνθ = \frac{\ell - h}{\ell}$

$ημθ = \sqrt{1 - συν^2θ}$

(ii) θα δίνεται η θ και θα βρίσκουμε το h: $h = \ell(1 - συνθ)$

$\left|\frac{dP}{dt}\right| = |\Sigma F| = \sqrt{F_κ^2 + (mgημθ)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\left|\frac{dP}{dt}\right| = \sqrt{m^2\frac{υ^4}{\ell^2} + m^2g^2ημ^2θ}}$



άνοδος: $υ:\downarrow \Rightarrow P:\downarrow \Rightarrow \frac{dP}{dt} < 0$

$\boxed{\frac{dP}{dt} = -\sqrt{m^2 υ^4/\ell^2 + m^2g^2ημ^2θ}}$

$εφβ = \frac{απέν.}{προσκ.} = \frac{mgημθ}{F_κ} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{εφβ = \frac{mgημθ}{mυ^2/\ell}}$

- $\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{ολ.}}{dt} = \frac{dW_{mgημθ} + dW_{mgσυνθ} + dW_{T_B}}{dt} =$

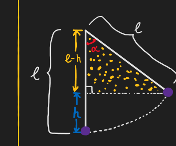
 ($m\vec{g}ημθ \uparrow\downarrow d\vec{S}$), ($mgσυνθ \perp d\vec{S}$) → 0, ($T_B \perp d\vec{S}$) → 0

 $= \frac{-mgημθ \cdot dS}{dt} = -mgημθ \cdot υ \Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dt} = -mg \cdot ημθ \cdot υ}$

 άνοδος: $υ:\downarrow \Rightarrow K:\downarrow \Rightarrow$
 $\Rightarrow dK/dt < 0$

- $\frac{dU_B}{dt} \overset{ΑΔΜΕ}{=} -\frac{dK}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dU_B}{dt} = +mg \cdot ημθ \cdot υ}$

 άνοδος: $h:\uparrow \Rightarrow U_B:\uparrow \Rightarrow$
 $\Rightarrow dU_B/dt > 0$



$συνα = \frac{προσκ.}{υποτ.} \Rightarrow \boxed{συνα = \frac{\ell - h}{\ell}} \Rightarrow$

αν δίνεται το h, βρίσκω το α

$\Rightarrow \ell \cdot συνα = \ell - h \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \ell - \ell \cdot συνα \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{h = \ell(1 - συνα)}$ → αν δίνεται το α, βρίσκω το h

$ημ^2α + συν^2α = 1 \Rightarrow \boxed{ημα = \pm\sqrt{1 - συν^2α}}$

$α < 90° \rightsquigarrow ημα > 0$

ΘΕΣΗ: Α

$\Sigma F_{ακτ.} = F_κ$ (θα πρέπει η $\Sigma F_{ακτ.}$: να δείχνει το κέντρο)

$T_A - mg = m\frac{υ_0^2}{\ell}$

$\boxed{T_A = mg + m\frac{υ_0^2}{\ell}}$ $T_A > mg$

- $\frac{dP}{dt} = \Sigma F \equiv \Sigma F_{ακτ.} = m\frac{υ_0^2}{\ell}$ $(= T_A - mg)$
- $\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F_{ακτ.}}}{dt} = \frac{dW_{F_κ}}{dt} = 0$ ($\vec{F}_κ \perp d\vec{S}$)
- $\frac{dU_B}{dt} \overset{ΑΔΜΕ}{=} -\frac{dK}{dt} = 0$

ΘΕΣΗ: Γ

ΑΔΜΕ(Α→Γ): $K_A + U_A = K_Γ + U_Γ \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mυ_0^2 = mgh_{max} \Rightarrow \boxed{h_{max} = \frac{υ_0^2}{2g}}$

$\boxed{συνφ = \frac{\ell - h_{max}}{\ell}}$ $\boxed{ημφ = \sqrt{1 - συν^2φ}}$

$\Sigma F_{ακτ.} = F_κ \Rightarrow$

$\Rightarrow T_Γ - mg \cdot συνφ = m\frac{υ^2}{\ell} \Rightarrow$ ($υ^2 \to 0$)

$\Rightarrow \boxed{T_Γ = mg \cdot συνφ}$

$\boxed{\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -mg \cdot ημφ}$ $(\Sigma F_{ακτ.} = 0)$

$m\vec{g}\cdot ημφ \uparrow\downarrow \vec{S}$

αφού έχω άνοδο: $υ:\downarrow \Rightarrow P = m \cdot υ:\downarrow \Rightarrow \frac{dP}{dt} < 0$

$dW_{F_κ} = dW_{T_Γ} + dW_{mg \cdot συνφ}$

$$\frac{dK}{dt} \overset{ΘΜΚΕ}{=} \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{dW_{F_κ} + dW_{mgημφ}}{dt} =$$

$dW_{F_κ} \to 0$ ($\vec{F}_κ \perp d\vec{S}$)

$= \frac{-mgημφ \cdot dS}{dt} = -mg \cdot ημφ \cdot υ =$

$m\vec{g} \cdot ημφ \uparrow\downarrow d\vec{S}$

$= -mg \cdot ημφ \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dt} = 0}$

$\frac{dU_B}{dt} = -\frac{dK}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dU_B}{dt} = 0}$

- αν θεωρήσω το Γ ως το τελευταίο σημείο της ανόδου, τότε $\frac{dP_{(Γ)}}{dt} < 0$
- αν, όμως, το Γ θεωρηθεί ως το πρώτο σημείο της καθόδου, τότε η υ θα αρχίσει να αυξάνεται, άρα και η ορμή, επομένως θα πρέπει να γράψω:

$\frac{dP_{(Γ)}}{dt} > 0 \rightsquigarrow \frac{dP_{(Γ)}}{dt} = +mgημφ$