1. Εύρεση $f'(x_0)$ (με ορισμό)

1.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Να βρείτε τις $f'(0)$ και $f'(1)$.

Απ: -1, 3

1.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+4}$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη:

i. στο 0 ii. στο -4

Απ: i. $\frac{1}{4}$, ii. Δ.Ο.

1.3. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}-4, & \text{αν } x \geq 1 \\ x^2 - x - 2, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι:

i. η f είναι συνεχής στο 1

ii. η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1

Απ: ii. $\frac{1}{4}$, 1

1.4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x+1}+4, & \text{αν } x \geq 0 \\ \eta\mu x + 6, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\frac{df(0)}{dx}$

Απ: 1

1.5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x, & \text{αν } x \leq 1 \\ \eta\mu(x-1), & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=1}$

Απ: 1

1.6. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2+\lambda x-2, & \text{αν } x\le 1 \\ x-\lambda, & \text{αν } x>1 \end{cases}$

η οποία είναι συνεχής στο 1.

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$

ii. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Απ: i. $\lambda = 1$, ii. όχι, 3, 1

1.7. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -3x+\lambda, & \text{αν } x\le 1 \\ \dfrac{x^2-6x+3}{x}, & \text{αν } x>1 \end{cases}$

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

ii. Για $\lambda = 1$ να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Απ: i. $\lambda = 1$, ii. όχι, -3, -1

1.8. Να ελέγξετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο x_0 που κάθε φορά δίνεται.

i. $f(x) = \begin{cases} 4-2x^2, & x\le -1 \\ 4x+2, & x>-1 \end{cases}, \; x_0=-1$

ii. $f(x) = \begin{cases} x^2+3x-3, & x\le 1 \\ \sqrt{x+3}+x-2, & x>1 \end{cases}, \; x_0=1$

iii. $f(x) = \begin{cases} x^2\cdot \eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}, \; x_0=0$

iv. $f(x) = \begin{cases} x^2+x-1, & x\le 2 \\ 3x^2-7, & x>2 \end{cases}, \; x_0 = 2$

v. $f(x) = |x-3|+2, \; x_0=3$

1.9. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\text{συν}x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ στο } x_0 = 0.$$

(Απάντ.: $\frac{1}{2}$)

2. Εύρεση $f'(x_0)$ (συναρτησιακά)

2.1. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $1 - x^4 \leq f(x) \leq 1 + x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να Αποδείξετε ότι:

i. $f(0) = 1$

ii. η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$

iii. η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

2.2. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$|f(x) - 2| \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την $f'(0)$.

Απ: i. A(0, 2), ii. 0

2.3. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει: $f^3(x) + 8x \cdot ημx \cdot f(x) = x \cdot ημ^2 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

i. το $f(0)$ ii. το $f'(0)$

Απ: i. 0, ii. 1

2.4. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005$$

i. Να αποδείξετε ότι:

α. $f(0) = 0$ β. $f'(0) = 1$

ii. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\lambda(f(x))^2}{2x^2+(f(x))^2}=3$

Απ: ii. $\lambda = 8$

2.5. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x^2-7x}{x^2-2x}=2$.

i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$

ii. Να Αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την $f'(0)$

iii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\eta\mu x}{\sqrt{x+4}-2}$

2.6. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 2, για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{xf(x)-2f(2)}{x-2}=7$ και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2f(2)-4f(x)}{x-2}=-8$

i. Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f'(2)$

ii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-\sqrt{x-1}}{x-2}$

Απ: i. 1, 3 ii. $\frac{5}{2}$

2.7. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x^2}{x-2}=-1$

i. Να βρείτε την τιμή $f(2)$

ii. Να Αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε την $f'(2)$

iii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x)-\sqrt{4x+12}}{x^2-1}$

Απ: i. 4, ii. 3, iii. 6

2.8. Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $ημx - x^2 \le f(x) \le ημx + x^3$

i. Να βρεθεί το f(0).

ii. Να βρεθεί η $f'(0)$.

Απ: i. 0 ii. 1

2.9. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $\left||f(x)| - x^2\right| \le 2x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Απ: $f'(0) = 0$

2.10. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει: $x - 3x^2 + 2x^3 \le f(x) \le x + 2x^3 + 5x^4$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Απ: $f'(0) = 1$

2.11. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x^2+3}}{x-1} = 7$, τότε

i. Να βρεθεί το f(1).

ii. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και βρείτε την $f'(1)$.

Απ: i. 2 ii. $\frac{15}{2}$

2.12. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. Αν $f'(1) = 4$, $f(1) = 3$ να βρεθεί η τιμή του ορίου: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f^2(x)-9}{x^2+2x-3}$.

Απ: 6

2.13. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}=2$

i. Να βρεθεί το $f(1)$.

ii. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

iii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = (x^4 - 2x^2 + 1)\cdot f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και βρείτε την $g'(1)$.

Απ: i. 3 ii. $f'(1) = 2$ iii. 0

2.14. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)\eta\mu x+\eta\mu^3 x-\eta\mu x}{x^2} = 0.$$

i. Να βρεθεί το $f(0)$. ii. Να βρεθεί η $f'(0)$.

Απ: i. 1 ii. 0

2.15. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o = 2$ και ισχύει

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)+x^2}{x-2}=3$ να δείξετε ότι $f'(2) = -1$.

2.16. Να βρείτε την παράγωγο της συνάντησης

$f(x) = 2 - x + x\eta\mu|x|$ στο σημείο $x_0 = 0$.

Απ: -1

2.17. Αν $x + 1 \leq f(x) \leq x^2 + x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i. $f(0) = 1$

ii. $1 \geq \frac{f(x)-f(0)}{x} \geq x+1$, για $x < 0$ και $1 \leq \frac{f(x)-f(0)}{x} \leq x+1$, για $x > 0$

iii. $f'(0) = 1$

2.18. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $ημ^2x - x^4 \leq xf(x) \leq ημ^2x + x^4$, να αποδείξετε ότι:

i. $f(0) = 0$ ii. $f'(0) = 1$

2.19. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 4$, να αποδείξετε ότι:

i. $f(0) = 0$ ii. $f'(0) = 4$

2.20. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 0$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-x}{x^2} = 7$.

i. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και βρείτε την $f'(0)$.

ii. Να βρεθεί η τιμή του ορίου: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4 + 8f^2(x)}{2x^4 + f^2(x)}$.

Απ: i. 1 ii. 8

2.21. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f^3(x) + 3f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να Αποδείξετε ότι:

i. η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

ii. η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Απ: $f'(0) = \frac{1}{3}$

2.22. Δίνεται συνάρτηση g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $|g(x)|\le 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

i. $\lim_{x\to 0} x\cdot g(\frac{1}{x}) = 0$

ii. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\eta\mu x + x^2\cdot g(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Απ: ii. $f'(0) = 2$

2.23. Έστω οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$. Αν $f(0) = g(0)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) - g(x) \le x$ δείξτε ότι $f'(0) = g'(0) + 1$.

2.24. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 4$ συναρτήσεις f, g οι γραφικές παραστάσεις των οποίων τέμνονται στο σημείο Α(4, 4). Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) + 16 \le g(x) + x^2$ δείξτε ότι $f'(4) = 8 + g'(4)$.

2.25. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ τότε δείξτε ότι η συνάρτηση g για την οποία ισχύει $g(x)=(x^2-3x+2)\cdot f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $g'(1)=-f(1)$.

2.26. Έστω η συνεχής συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(\alpha) \neq 0$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση f για την οποία για κάθε πραγματικό x ισχύει: $f(x) = |x - \alpha| \cdot g(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$.

2.27. Αν για τις συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f(x) \neq 0$, και $g(x) = 2f(x) + \dfrac{x^2}{3f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε την $g'(0)$.

Απ: $g'(0) = 4$

2.28. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και για τη συνάρτηση g ισχύει: $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2 - x + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την $g'(1)$.

Απ: $g'(1) = f'(1) - f(1)$

3. Εύρεση παραμέτρων (με ορισμό)

3.1. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{αν } x \geq 2 \\ x^2 + \alpha x + \beta, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο 2.

Απ: $\alpha = 8$, $\beta = -12$

3.2. Να υπολογισθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq 1 \\ \sqrt{x^2+3}, & x > 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Απ: $\alpha = -\frac{3}{2}$, $\beta = \frac{5}{2}$

3.3. Έστω $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ \gamma x^2 + x - 3, & x > 2 \end{cases}$. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

Απ: $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$

3.4. Αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + \alpha, & x < 0 \\ -3x^2 + \beta x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Να βρείτε τους πραγματικούς α, β.

Απ: $\alpha = 1$, $\beta = -3$

3.5. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \alpha$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x) + x \cdot f(x) + x\eta\mu x = x^3 + 2x^2$. Να βρείτε τον $\alpha > 0$.

Απ: $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

3.6. Έστω συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x^2+x+2} - \lambda x$.

i. Να βρείτε τον πραγματικό λ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x+1} = 1$.

ii. Αν για την g γνωρίζετε ότι $f^2(x) \le g(x) \le x^4 + x + 2$ για κάθε $x \ge 0$ να εξετάσετε αν g παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Απ: i. $\lambda = 0$ ii. $g'(0) = 1$

4. Αλλαγή Μεταβλητής

4.1. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - ημx}{x^2 + x} = 2$$

i. Να βρείτε την τιμή f(0).

ii. Να Αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την $f'(0)$.

iii. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(4x)}{x}$ β. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(ημx)}{x^2 - x}$

Απ: i. 0, ii. 3, iii. α. 12 β. -3

4.2. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 2$, για την οποία ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 f(1) - f(x)}{x - 1} = 4$

i. Να Αποδείξετε ότι f(1) = 3

ii. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f^2(x) - 4f(x) + 3}{x^2 - 3x + 2}$ β. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - \sqrt{x+8}}{ημ(x-1)}$

Απ: ii. α. -4, β. $\frac{11}{6}$

4.3. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0, με $f'(0) = 2$.

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(2x) - f(0)}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(7x) - f(3x)}{x}$

Απ: i. 4, ii. 8

4.4. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=f'(1)=2$.

Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-2}{\sqrt{x}-1}$ ii. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)+x^2-3x}{x^2-1}$ iii. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(4-x)-2}{x-3}$

Απ: i. 4 ii. $\frac{1}{2}$ iii. -2

4.5. Δίνεται συνάρτηση $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$, για την οποία ισχύει:$f(x + y) = f(x) + f(y) + 3xy$ για $x, y \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και ισχύει: $f'(x_0) = 3x_0 + 1$

4.6. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 3$, της οποίας η γραφική παράσταση δεν διέρχεται Από την αρχή των αξόνων.

Επιπλέον ισχύει: $f(x + y) = f(x)\cdot f(y) - ημx\cdot ημy$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και ισχύει: $f'(x_0) = 3f(x_0) - ημx_0$

Απ: i. 1

4.7. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0 και στο 3, με $f'(3) = 5$. Επιπλέον ισχύει: $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Να βρείτε την $f'(0)$

Απ: ii. 2

4.8. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Να Αποδείξετε ότι:

i. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + \lambda h) - f(x_0)}{h} = \lambda \cdot f'(x_0)$, $\lambda \neq 0$

ii. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + 5h) - f(x_0 + 4h)}{h} = f'(x_0)$

4.9. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ παραγωγίσιμη στο 1, για την οποία ισχύει: $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε την τιμή f(1)

ii. Να Αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$ με $f'(x_0) = f'(1) + \dfrac{f(x_0)}{x_0}$

4.10. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 2 με $f'(2) = 3$, για την οποία ισχύει ότι: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f^2(2+h) - f^2(2)}{h} = 6$. Να βρεθεί το f(2).

Απ: 1

4.11. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f(1+h) = 2+3h+3h^2+h^3$, για κάθε $h \in \mathbb{R}$, να Αποδείξετε ότι:

i. $f(1) = 2$ ii. $f'(1) = 3$

4.12. Αν η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η C_f διέρχεται Από το σημείο Α $(x_0, 2)$ να βρείτε την τιμή του ορίου: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5f(x_0 + h) - 10}{h}$.

Απ: $5f'(x_0)$

4.13. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ να βρείτε το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-3h)}{4h+\eta\mu 4h}$.

Απ: $\frac{f'(x_0)}{2}$

4.14. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ δείξτε ότι: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(4x)-f(2x)}{x} = 2f'(0)$.

4.15. Θεωρούμε την συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x+y) = f(x)\,f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Έστω επίσης μια συνάρτηση g τέτοια ώστε $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$ και $f(x) = 1 + xg(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να Αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = f(x_0)$.

4.16. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}^*_+$ και συνεχής στο σημείο $x_0>0$ για την οποία ισχύει: $x \cdot f(x_0) + x_0 \cdot f(x) = 2x \cdot f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*_+$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Απ.: $f'(x_0) = -\frac{f(x_0)}{x_0}$, $x_0 > 0$

4.17. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$, $\alpha \neq 0$. Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{\alpha^2 f(x) - x^2 f(\alpha)}{x-\alpha}$ ii. $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{x^3 f(\alpha) - \alpha^3 f(x)}{\alpha^2 (x-\alpha)}$

Απ: i. $\alpha^2 f'(\alpha) - 2\alpha f(\alpha)$ ii. $-\alpha f'(\alpha) + 3f(\alpha)$

4.18. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } \alpha < x < x_0 \\ g(x), & \text{αν } x_0 \le x < \beta \end{cases}$.

Αν $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$, να δείξετε ότι η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και αντιστρόφως, δηλαδή αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$.

4.19. Για τη συνάρτηση f ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ η σχέση $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$ (1). Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 2$, να δείξετε ότι:

i. $f(1) = 1$ και $f(0) = 0$

ii. η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = 2 \dfrac{f(x)}{x}$ για κάθε $x \neq 0$.

4.20. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με

$f(0) = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$f(x) + f(2x) + f(3x) + \ldots + f(100x) \le 101 \cdot ημ(100x)$ (1).

Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$.

4.21. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(2x) - f(x)}{x} = 2010$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ να βρείτε την $f'(0)$.

Απ: $f'(0) = 2010$

4.22. Η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Αν η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f^3(x)+2f^2(x), & x<1 \\ f^2(x)+2, & x\geq 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο 1, να βρείτε την $f'(1)$.

Απ: $f'(1) = 0$

4.23. Η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x+h^2)}{h} = f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

4.24. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 1$ και ισχύει $f^2(x) + g^2(x) = (x^2 - 1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι $[f'(1)]^2 + [g'(1)]^2 = 4$.

4.25. Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-x}{x^2} = 7$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και να βρείτε την $f'(0)$.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+8[f(x)]^{\nu}}{2x^4+[f(x)]^{\nu}}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ άρτιος.

Απ: i. $f'(0) = 1$, ii. αν $\nu = 4$: 3, αν $\nu < 4$: 8, αν $\nu > 4$: $\frac{1}{2}$

4.26. Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε:

i. $f(x + y) + xy = f(x) + f(y) + \lambda^2 xy$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (1)

ii. $f(1) = 1$ και $f(2) = 5$ (2)

iii. η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Να δείξετε ότι:

i. $|\lambda| = 2$ ii. η f είναι παραγωγίσιμη στο 1

4.27. Θεωρούμε τη συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη στο 0 και για την οποία ισχύει

$f(x + y) = \dfrac{f(x) + f(y)}{1 - f(x) \cdot f(y)}$ για κάθε x, y $\in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ αν $f(x) \cdot f(y) \neq 1$ για κάθε x, y $\in \mathbb{R}$.

4.28. Η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 1$ και $f(0) \neq 0$. Αν για κάθε x, y $\in \mathbb{R}$ ισχύει:

$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) - ημx \cdot ημy$ (1), να δείξετε ότι

$f(x) - f'(x) = ημx$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4.29. Για τη συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ για κάθε x, y>0 (1). Αν $f'(1) = 0$, να δείξετε ότι $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x > 0$.

4.30. Οι f, g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν οι σχέσεις:

- $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ (1) για κάθε x, y $\in \mathbb{R}$
- $f(x) = 1 + xg(x)$ (2), $x \in \mathbb{R}$ και
- $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$ (3)

Να δείξετε ότι $f'(x) = f(x)$.

5. Συναρτήσεις Πολλαπλού Τύπου

5.1. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$f(1) = f'(1) = 1$ και $g(1) = g'(1) = 2$

Να βρείτε την παράγωγο στο 1 των επόμενων συναρτήσεων:

i. $h_1(x) = x^2 \cdot f(x) - g(x) \cdot \sqrt{x}$

ii. $h_2(x) = (f(x) + g(x)) \cdot \ln x$

iii. $h_3(x) = \dfrac{f(x) \cdot g(x)}{x^2}$

Απ: i. 0, ii. 3, iii. 0

5.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 - 3}$. Να βρείτε:

i. την παράγωγο της f

ii. το $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$

Απ: ii. 2

5.3. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (x^2 + 2x - 7)e^x$

Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f'(x)}{\sqrt{x+3} - 2}$

Απ: 24e

5.4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & \alpha\nu\, x \leq 0 \\ x^2 + x, & \alpha\nu\, x > 0 \end{cases}$

Να βρείτε την παράγωγο της f.

5.5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x, & \alpha\nu\, x \le 2 \\ x^3 + 2\alpha x^2 - x + 4, & \alpha\nu\, x > 2 \end{cases}$

η οποία είναι συνεχής. Να βρείτε:

i. την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

ii. την παράγωγο της f

Απ: i. $\alpha = 1$

5.6. Δίνεται η επόμενη συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -x + \alpha, & \alpha\nu\ x \le -\dfrac{4}{3} \\ 2x + 1, & \alpha\nu\, x > -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

η οποία είναι συνεχής.

i. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

ii. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -\dfrac{4}{3}$

iii. Για $x \neq -\dfrac{4}{3}$, να βρείτε την $f'(x)$ και να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f'(x) = \dfrac{1}{2}$.

Απ: i. $\alpha = 3$ iii. $x = -5/4$

5.7. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ ii. $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}$

5.8. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^3 + x, \alpha\nu\, x \le 1 \\ 2x^2, \quad \alpha\nu\, x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε:

i. την $f'(x)$ ii. την $f''(x)$

5.9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ημx - x \cdot συνx$

Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{x^2}$ ii. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f''(x)}{x}$

5.10. Να βρείτε μη μηδενικό πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει: $P(x) = (x + 1)[P''(x)]^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

5.11. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει: $|f(x) - xe^x| \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

ii. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $g(x) \cdot (συνx - f(x)) = \dfrac{x^2 + x + 2}{e^x}$

Να βρείτε τις τιμές $g(0)$ και $g'(0)$.

5.12. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) \cdot g(x) + (f(x) + g(x)) \cdot συνx = (x^2 + 4x - 5)e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 1.

i. Να βρείτε σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα $y'y$ η γραφική παράσταση της g.

ii. Να Αποδείξετε ότι $f'(0) - g'(0) = \dfrac{1}{2}$

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - g(x) - 4}{ημx}$

5.13. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ iii. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$ iv. $\lim\limits_{x\to \ln 3}\dfrac{e^x-3}{x-\ln 3}$

Απ: i. 1, ii. 2, iii. 1/e, iv. 3

5.14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot συνx$

i. Να βρείτε την παράγωγο της f.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cdot συνx-e^x}{x}$

5.15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = α\cdot συνx$ και $g(x) = βx^3 - x$, με $α, β \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $f'\left(\dfrac{π}{6}\right) = -2$ και $g''(2) = 24$.

i. Να βρείτε τις τιμές των α και β

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g(x)}$

iii. Αν $h(x) = f(x)\cdot g(x)$, τότε:

α) να βρείτε την τιμή $h'(0)$

β) να Αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε: $(ξ - 1)h'(ξ) = e^ξ - ξ$

5.16. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} x^3\cdot ημ\dfrac{1}{x}, & αν\, x\neq 0 \\ 0, & αν\, x=0 \end{cases}$$

5.17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{ημ3x}$ ii. $\lim\limits_{x\to +\infty}(f'(x)\cdot ημx)$

5.18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f''(x)}{f'(x)}$ ii. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6f'(x) - f''(x)}{f(x)}$

5.19. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^{x^2 + \alpha x}$ για την οποία ισχύει $f'(0) = 2$.

i. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln(\ln f(x))$. Να βρείτε:

α. το πεδίο ορισμού της g.

β. το $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{g(x)} \cdot g''(x))$

5.20. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^7 - x^4 + 6x - 1$ ii. $f(x) = 2x^3 + \ln x - \sqrt{3}$

iii. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - x$ iv. $f(x) = \text{συν}x - \sqrt{3}\,\text{ημ}x + \ln 3$

(Απάντ.: i. $f'(x) = 7x^6 - 4x^3 + 6$ ii. $f'(x) = 6x^2 + \dfrac{1}{x}$

iii. $f'(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ iv. $f'(x) = -\text{ημ}x - \sqrt{3}\,\text{συν}x$)

5.21. Ομοίως των συναρτήσεων:

i. $f(x) = (x^2 - 1)(x - 3)$ ii. $f(x) = e^x \text{ημ}x$ iii. $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

iv. $f(x) = \dfrac{\text{ημ}x + \text{συν}x}{1 + \text{συν}x}$ v. $f(x) = x^2 \text{ημ}x\text{συν}x$

Απ: i. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$ ii. $f'(x) = e^x(\text{ημ}x + \text{συν}x)$ iii. $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2}$ iv. $f'(x) = \dfrac{\text{συν}x - \text{ημ}x + 1}{(1 + \text{συν}x)^2}$

v. $f'(x) = x\text{ημ}2x + x^2\text{συν}^2x - x^2\text{ημ}^2x$

5.22. Ομοίως των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \dfrac{e^x}{\ln x}$ ii. $f(x) = εφx + σφx$

iii. $f(x) = \dfrac{ημx}{e^x}$ iv. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x+1}{x-1}$

Απ: i. $f'(x) = \dfrac{xe^x \ln x - e^x}{x\ln^2 x}$ ii. $f'(x) = \dfrac{1}{συν^2 x} - \dfrac{1}{ημ^2 x}$ iii. $f'(x) = \dfrac{συνx - ημx}{e^x}$ iv. $f'(x) = \dfrac{4x^2+4}{(x^2-1)^2}$

5.23. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \begin{cases} 2x^2+3x, & x<0 \\ 12\sqrt{x}+6x, & x\geq 0 \end{cases}$ ii. $f(x) = \begin{cases} x^2+ημx, & x\leq 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$

Απ: i. $f'(x) = \begin{cases} 4x+3, \; x<0 \\ \dfrac{6}{\sqrt{x}}+6, \; x>0 \end{cases}$ ii. $f'(x) = \begin{cases} 2x+συνx, \; x\leq 0 \\ 1, \quad x>0 \end{cases}$

5.24. Αν $f(x) = \dfrac{2(x+1)}{x-1}$ και $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, να εξετάσετε αν υπάρχει διάστημα τέτοιο ώστε να ισχύει $f' = g'$.

Απ: $x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$

5.25. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = (3x^4 + 4x^3)^{-2}$ ii. $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$ iii. $f(x) = ημ(\dfrac{1}{1+x^2})$

iv. $f(x) = \ln(\dfrac{1}{x} - x)$ v. $f(x) = e^{-x^2}$

Απ: i. $f'(x) = \dfrac{-24\cdot(x+1)}{x^7\cdot(3x+4)^3}$ ii. $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$ iii. $f'(x) = συν(\dfrac{1}{x^2+1})\cdot\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ iv. $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)}$

v. $f'(x) = e^{-x^2}(-2x)$

5.26. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0, όταν:

i. $f(x) = x^2\sqrt{1+x^3}$, $x_0 = 2$ ii. $f(x) = (2x)^{\frac{1}{3}} + (2x)^{\frac{2}{3}}$, $x_0 = 4$

iii. $f(x) = x^3 ημ^3(πx)$, $x_0 = \frac{1}{6}$ iv. $f(x) = \frac{x^2+2}{2-x}$, $x_0 = 3$

Απ: i. 20 ii. $\frac{5}{6}$ iii. $\frac{6+\sqrt{3}π}{576}$ iv. 5

5.27. Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες και βρείτε την παράγωγό τους.

i. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7$ ii. $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \sqrt{7}$

iii. $h(x) = \frac{1}{3}e^x + \ln x + ημ\,\frac{π}{8}$ iv. $φ(x) = (συνx + 1)^4$

v. $κ(x) = \ln(x^2 + 3) + e^3$

Απ: i. $f'(x) = 3x^2 - 10x$ ii. $g'(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ iii. $h'(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{1}{x}$

iv. $φ'(x) = -4ημx(συνx + 1)^3$ v. $κ'(x) = \frac{2x}{x^2-3}$

5.28. Βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = (x^2 + 1)\cdot(συν\,3x + 7)$ ii. $g(x) = x^3 \cdot e^x \cdot \ln x$

iii. $φ(x) = \frac{e^x+\ln x}{4}$ iv. $κ(x) = \frac{\ln 2x}{x}$ v. $h(x) = x^2\cdot εφx$

vi. $t(x) = 2^x\cdot e^x$ vii. $p(x) = \frac{x^4\ln x}{x^2+1}$

Απ: i. $f'(x) = 2x\cdot(συν3x + 7) - 3ημ3x(x^2 + 1)$ ii. $g'(x) = 3x^2e^x\ln x + x^3e^x\ln x + x^2\cdot e^x$ iii. $φ'(x) = \frac{e^x}{4} + \frac{1}{4x}$

iv. $κ'(x) = \frac{1-\ln 2x}{x^2}$ v. $h'(x) = 2x\cdotεφx + \frac{x^2}{συν^2x}$ vi. $t'(x) = 2^x\ln 2\cdot e^x + 2^x\cdot e^x$

vii. $P'(x) = \frac{2x^5\ln x+4x^3\ln x+x^5+x^3}{(x^2+1)^2}$)

5.29. Όμοια των συναρτήσεων:

i. $f(x) = ημ(e^{x^2})$ ii. $g(x) = συν\sqrt[5]{x}$

iii. $h(x) = ημ(\sqrt{x^2+1}-3)$ iv. $φ(x) = e^{x^2+3x} + \ln(x^2+6)$

Απ: i. $f'(x) = συν\, e^{x^2} \cdot e^{x^2} \cdot 2x$ ii. $g'(x) = -\dfrac{ημ\sqrt[5]{x}}{5\sqrt[5]{x^4}}$ iii. $h'(x) = \dfrac{xσυν(\sqrt{x^2+1}-3)}{\sqrt{x^2+1}}$

iv. $φ'(x) = (2x+3)\cdot e^{x^2+3x} + \dfrac{2x}{x^2+6})$

5.30. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων όπου αυτή ορίζεται.

i. $f(x) = \begin{cases}(7x^2+2)ημx, & x \le 0\\ 9x^2συνx+2x, & x>0\end{cases}$ ii. $f(x) = \begin{cases}ημ2x, & x \ge 0\\ x^2+2x, & x<0\end{cases}$

iii. $f(x) = \begin{cases}x^3, & x \le 2\\ x^2+8x-12, & x>2\end{cases}$

Απ: i. $f'(x) = \begin{cases}14xημx+(7x^2+2)συνx, & x\le 0\\ 18xσυνx-9x^2ημx+2, & x>0\end{cases}$ ii. $f'(x) = \begin{cases}2συν2x, & x \ge 0\\ 2x+2, & x<0\end{cases}$, iii. $f'(x) = \begin{cases}3x^2, & x \le 2\\ 2x+8, & x>2\end{cases}$

5.31. Αν $f(x) = \sqrt{x}\,ημx$, να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

5.32. Να βρείτε τα α, β ∈ ℝ ώστε η συνάρτηση f: ℝ→ℝ με $f(x) = x^2|x-α| - |x-β|$ να είναι παραγωγίσιμη στο ℝ.

Απ: α = β = 1 ή α = β = -1 (α = β)

6. $h(x) = f(x)^{g(x)}$

6.1. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^{\ln x}$ ii. $f(x) = 2^{5x-3}$

iii. $f(x) = (\ln x)^x$ iv. $f(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

Απ: i. $f'(x) = 2x^{\ln x} \cdot \dfrac{\ln x}{x}$ ii. $f'(x) = 5 \cdot 2^{5x-3} \cdot \ln 2$ iii. $f'(x) = (\ln x)^x \cdot [\ln(\ln x) + \dfrac{1}{\ln x}]$

iv. $f'(x) = e^{\sigma\upsilon\nu x} \cdot (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu^2 x)$

6.2. Όμοια των συναρτήσεων:

i. $f(x) = (x^2 + 1)^x,\ \ x \in \mathbb{R}$ ii. $g(x) = x^{\sqrt{x}},\ \ x > 0$

iii. $h(x) = (\sigma\upsilon\nu x)^{2x},\ \ x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ iv. $\varphi(x) = (\ln x)^{x^2},\ \ x \in (1, +\infty)$

v. $\kappa(x) = x^{\eta\mu x},\ \ x > 0$

Απ: i. $f'(x) = (x^2 + 1)^x \cdot [\ln(x^2 + 1) + \dfrac{2x^2}{x^2+1}]$ ii. $g'(x) = x^{\sqrt{x}} \cdot [\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \dfrac{\sqrt{x}}{x}]$

iii. $h'(x) = (\sigma\upsilon\nu x)^{2x} \cdot (2\ln\sigma\upsilon\nu x - \dfrac{2x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x})$ iv. $\varphi'(x) = (\ln x)^{x^2} \cdot (2x\ln\ln x + \dfrac{x}{\ln x})$ v. $\kappa'(x) = x^{\eta\mu x} \cdot (\sigma\upsilon\nu x \ln x + \dfrac{\eta\mu x}{x}))$

7. Συναρτησιακά

7.1. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει: $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2\sqrt{f(xy)}$

για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$. Να Αποδείξετε ότι:

$$f'(x) - f'(y) = -\frac{y-x}{\sqrt{f(xy)}}\cdot f'(xy)$$

7.2. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. αν η f είναι άρτια, τότε η f′ είναι περιττή

ii. αν η f είναι περιττή, τότε η f′ είναι άρτια

7.3. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ άρτια και δύο φορές παραγωγίσιμη με: $f(1) = f'(1) = f''(1) = 2$

Αν $g(x) = x^3\cdot f'(x) + f^2(x)$, να βρείτε τη $g'(-1)$

7.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

ii. Να βρείτε την $(f^{-1})'$

7.5. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και 1-1, με $f(2) = 2$ και $f'(2)=1$.

i. Να βρείτε την $(f^{-1})'(2)$

ii. Θεωρούμε τη $g(x) = f^3(x) + 2f(x) - 8$

α. Να Αποδείξετε ότι η g είναι 1-1

β. Να βρείτε τη $(g^{-1})'(4)$

7.6. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο και $f(x) \neq -2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$f^2(x) - f(x^2) = 4x^3 + 2x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

ii. Να Αποδείξετε ότι $f(-1) \neq 0$

iii. Να Αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 5\xi$.

7.7. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

με $f(x) = x \cdot ημ\frac{1}{x}$ και $g(x) = -x^6 \cdot f''(x) - x$

i. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

iii. Να βρείτε τη $g'(x)$

iv. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} g'(x)$

v. Να Αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$.

7.8. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h, φ τέτοιες, ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x να ισχύει: $h(x) = f(x) - xg(x)$ και $\varphi(x) = xf(x) + e^x g(x)$. Αν οι h, φ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι και η συνάρτηση $\kappa(x) = f(x) + g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

7.9. Αν $f(x) = (\alpha x + \beta)\, e^x$ να Αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$.

7.10. Να δείξετε ότι:

i. Αν $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x$ τότε $f'(x) + f(x)\varepsilon\varphi x - \eta\mu 2x = 0$

ii. Αν $f(x) = \ln\dfrac{1}{x+1}$ τότε $x\,f'(x) + 1 = e^{f(x)}$

7.11. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R τέτοια ώστε για κάθε

$x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$f(x + y) = f(x) + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2$.

7.12. Αν για την συνάρτηση f ισχύει $e^{x^2 - f(x)} = x^{f(x)+1}$ για κάθε $x > 1$. Να βρείτε τον τύπο της f και την παραγωγό της.

Απ: $f(x) = \dfrac{x^2 - \ln x}{\ln x + 1}$, $\quad f'(x) = \dfrac{2x^2\ln x + x^2 - 1}{x(\ln x + 1)^2}$

7.13. Δίνεται η συνάρτησης $f: (0, \pi) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}$.
Να δείξετε ότι: $f'(x) = (\eta\mu x)^{1+\sigma\upsilon\nu x} \cdot [-\ln(\eta\mu x) + \sigma\varphi^2 x]$.

7.14. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g και για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(x)=(x^2+x+1)\cdot g(e^x+1)$.

Αν $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-3}{x-2}=5$ να βρεθεί η $f'(0)$.

Απ: 8

7.15. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $\left|f(x)-\sqrt{x+3}\right| \leq 2x^2-4x+2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν για την συνάρτηση g ισχύει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = (x-1)\cdot f(x)$, να βρείτε την $g'(1)$.

Απ: 2

7.16. Αν $f(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)$, δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ ισχύει:

i. $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\rho_1}+\frac{1}{x-\rho_2}+\frac{1}{x-\rho_3}$

ii. $\frac{f'(0)}{f(0)}=-\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}\right)$

7.17. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = ημx$, $x \in A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. Αν θεωρήσουμε ότι f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την $(f^{-1})'(x)$.

Απ: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1, 1)$

7.18. Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(x) = |x|$ και g με $g(x) = x^2+1$.

i. Να βρείτε την $(gof)'(x)$ αν ορίζεται.

ii. Να βρείτε την $(gof)(x)$.

iii. Τι παρατηρείτε; Να εξηγήσετε γιατί.

Απ: i. $(gof)'(x) = 2x$, $x \neq 0$, ii. $(gof)(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$

7.19. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(xy) = f(x) + f(y)$ (1) για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ και $f'(y) \neq 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι:

i. $\dfrac{f'(x)}{f'(y)} = \dfrac{y}{x}$

ii. $f'(1) + f'(-1) = 0$

8. Από Παραγωγίσιμη στο x_0 Παραγωγίσιμη στο Α

8.1. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ και 1 – 1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, να δείξετε ότι $(f^{-1})'\ (f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ για κάθε $x \in \Delta$ όταν η f^{-1} είναι συνεχής στο Δ.

8.2. Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε x, $y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη 0 στο να δειχθεί ότι είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = f'(0)$.

8.3. Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε
$f(x+y) = f(x)+f(y)+2xy(x + y) - 2004$ για κάθε x, $y \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 2004$, να δείξετε ότι η f παραγωγίζεται σ' όλο το $\mathbb{R}$.

Απ: $f'(x) = 2x^2 + 2004$

8.4. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$f(x+y) = f(x) - f(y)$, για κάθε x, $y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, να αποδειχθεί ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

8.5. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για την οποία ισχύει
$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, για κάθε x, $y \in \mathbb{R}^*$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να αποδειχθεί ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

8.6. Δίνεται συνάρτηση $f\colon R \to R$ με $f(x) \neq 0$ για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

8.7. Δίνεται συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

8.8. Δίνεται συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(xy) = yf(x) + xf(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

8.9. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 2}{x - 1} = \kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την $g'(1)$ αν $g(x) = (x^4 + 2x^2 + 5)f(x)$.

Απ: $g'(1) = 8\kappa + 16$

8.10. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση $f(x) - 2y^3 \leq f(x + y) \leq f(x) + 2y^3$ (1) για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

9. Εύρεση Εφαπτομένης που γνωρίζω το Σημείο Επαφής

9.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 9$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$.

Απ: $y = -x + 5$

9.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2-5x+4}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

Απ: $y = -3$

9.3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2+|x-3|$. Να εξετάσετε αν ορίζεται εφαπτομένη ευθεία της C_f στο σημείο της $A(3, f(3))$.

9.4. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $e^{xf(x)} + 3f(x) = 19$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$.

Απ: $y = -\frac{3}{2}x + 6$

9.5. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^2(x) - 2f(x^2) = -4x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε:

i. την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$

ii. το όριο $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-\sqrt{2x-1}}{x^2-x}$

Απ: i. $y = 2x-1$ ii. 1

9.6. Δείξτε ότι ορίζεται εφαπτομένη της C_f της συνάρτησης f με

$f(x) = \begin{cases} (5x^2+3)\eta\mu x, & x \le 0 \\ 4x^3 \sigma\upsilon\nu x + 3x, & x > 0 \end{cases}$ στο σημείο Α(0, f(0)). Κατόπιν να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο Α.

Απ: $f'(0) = 3$, $y = 3x$

9.7. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$x^2 + 2x + \lambda \le f(x) \le 2x^2 + 1 + \lambda$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο Μ(1, f(1)).

ii. Αν η εφαπτομένη αυτή τέμνει τους άξονες στα σημεία Α, Β με (ΟΑΒ) = 2 να βρεθούν οι τιμές του λ και οι αντίστοιχες εφαπτομένες.

Απ: i. $y = 4x + \lambda - 1$, ii. • $\lambda = 5$: $y = 4x + 4$ • $\lambda = -3$: $y = 4x - 4$

9.8. Αν $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x < 0 \\ \eta\mu x + 1, & x \ge 0 \end{cases}$ να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο Α(0, 1) και σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.

Απ: $f'(0) = 1$

9.9. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3$ σε οποιοδήποτε σημείο της $M(\alpha, \alpha^3)$, $\alpha \ne 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο Ν εκτός του Μ. Επίσης να δείξετε ότι στο σημείο Ν η κλίση της εφαπτομένης της C_f είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο Μ.

Απ: $N(-2\alpha, -8\alpha^3)$

9.10. Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ σε ένα κοινό σημείο τους $M(\xi, \frac{1}{\xi})$, $\xi \neq 0$. Αν Α, Β είναι τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες x'x και y'y αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

i. Το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του $\xi \in \mathbb{R}^*$.

Απ: ii. (ΟΑΒ) = 2τ.μ.

9.11. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}$ στο κοινό σημείο τους Α(1, 1), είναι κάθετες.

Απ: $f'(1) \cdot g'(1) = -1$

9.12. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(1) > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(fof)(x) = x^2 - x + 1$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο M(1, f(1)).

Απ: y = x

9.13. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο οι εφαπτομένες είναι κάθετες.

Απ: Α(1, 1)

9.14. Έστω f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $g(x) = f(x) - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των G_f, G_g

στα σημεία $A(x_o, f(x_o))$, $B(x_o, g(x_o))$ αντίστοιχα διέρχονται από το ίδιο σημείο του $y'y$.

9.15. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: $2(f(x))^2 - (g(x))^3 + 9 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(1) = 3$ και $f'(1) = -2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $M(1, g(1))$.

Απ: $y = -\frac{8}{9}x + \frac{35}{9}$

9.16. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της Δ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της C_g με $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα $x'x$ υπό γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$.

9.17. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2}{x}$, $x > 0$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$.

ii. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται Από την εφαπτομένη και τους θετικούς ημιάξονες είναι σταθερό.

Απ: i. $y = -\frac{2}{x_0^2}x + \frac{4}{x_0}$ ii. $(OAB) = 4$τ.μ.

9.18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f^{-1} στο $M(-1, f^{-1}(-1))$.

9.19. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2+\eta\mu^{\nu}x+\sqrt{x}, & \alpha\nu\ x \geq 0 \quad \nu \in N^* \\ 2-\sqrt{-x}, & \alpha\nu\ x < 0 \quad \nu \geq 2 \end{cases}$$

Να βρείτε αν υπάρχει η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$.

Απ: $x = 0$

9.20. Δίνεται συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(0) = e - 1$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f με $f(x) = [1 + g(x)]^x$ στο σημείο $M(0, f(0))$ σχηματίζει με τον άξονα x′ x γωνία 45^0.

Απ: Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(0) = 1$

9.21. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \ln f(x)$ ορισμένη στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(e) = e$. Η f είναι 1 – 1 και παραγωγίσιμη με $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Αν x_0 ρίζα της $g'(x) = 0$ με $g(x) = \frac{F(x)}{f(x)}$, να δείξετε ότι οι εφαπτομένες των $F(x)$, $f(x)$ στα σημεία $A(x_0, F(x_0))$ και $B(x_0, f(x_0))$ αντίστοιχα τέμνονται πάνω στον άξονα x′ x.

9.22. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιττή και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η κλίση της C_f στο $A(2, 3)$ είναι -1, να βρείτε την εφαπτομένη της $g(x) = x^2 \cdot f(x)$ στο σημείο $B(-2, g(-2))$.

Απ: $y = -16x - 44$

9.23. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(x+1)+x=f(1-x)-x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι κάθετη στην $y = x$.

9.24. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = -1$ έχει εξίσωση $y = 3x + 1$.

Αν $f(x) = g[e^{x-2} - 2συν(\pi x)]$ να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(2, f(2))$.

Απ: $y = 8x + 4$

10. Εύρεση Εφαπτομένης που δε γνωρίζω το Σημείο Επαφής

10.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x - 2)^4$. Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού της f.

ii. την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): 10x - 2y + 5 = 0$.

Απ: i. $x > 2$, ii. $y = 5x - 12$

10.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^{x^2-4x}$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που είναι παράλληλες στον άξονα x΄x.

Απ: $y = e^{-3}$ και $y = 0$

10.3. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - 7x + 5$, με $\alpha \in \mathbb{R}$
Οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία της $M(1, f(1))$ και $N(-3, f(-3))$ είναι μεταξύ τους παράλληλες. Να βρείτε:

i. τον αριθμό α

ii. τις εφαπτομένες της C_f που είναι κάθετες στην ευθεία $(\zeta): x - 7y + 21 = 0$

Απ: i. $\alpha = 3$, ii. $y = -7x + 5$ και $y = -7x + 32$

10.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{7-2x}{3-x}$. Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(3, 0)$.

10.5. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f της συνάρτησης $f(x) = -3x^2 + 2$ που είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $2y - x + 1 = 0$.

Απ: $y = \frac{x}{2} + \frac{97}{48}$

10.6. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ που διέρχονται από το σημείο $A(-3, 4)$ και να βρεθούν οι εφαπτομένες αυτές.

Απ: $y = -4x - 8$, $y = -28x - 80$

10.7. Έστω συνάρτηση $f(x) = \ln x + 1$. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Απ: $y = x$

10.8. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον άξονα των x, όταν:

i. $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ii. $f(x) = \frac{x}{e^x}$ iii. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

Απ: i. $A(2, 4)$, $B(-2, -4)$ ii. $A(1, \frac{1}{e})$ iii. $A(1, 2)$, $B(-1, -2)$

10.9. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$ οι οποίες άγονται από το σημείο $A(0, -1)$.

Απ: $ε_1$: $y = 2x - 1$ στο $M(1, 1)$ $ε_2$: $y = -2x - 1$ στο $N(-1, 1)$

10.10. Έστω μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο διάστημα (–1, 1), για την οποία ισχύει: $f(ημx) = e^x συνx$, για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

i. Να βρείτε την $f'(0)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

Απ: i. 1

10.11. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $(3, +\infty)$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(x^2) = e^{x+1} + \ln(x-3)$, για κάθε $x > 3$. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(16, f(16))$.

Απ: $y = \frac{e^5+1}{8}x - e^5 - 2$

10.12. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(2+x) - f(2-x) = -2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $A(2, f(2))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y = x$.

Απ: $f'(2) = -1$

10.13. Να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$ που διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.

Απ: $y = \frac{1}{4}x + 1$ στο $M(4, 2)$

10.14. Αποδείξτε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f της συνάρτησης $f(x) = 2x + (1-x)\ln x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $2x - y = 28$.

10.15. Έστω συνάρτηση $f(x) = \alpha\ln x + x$ με $x > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\alpha \in (1, e^2)$, έτσι ώστε η C_f να έχει εφαπτομένη την $y = 2x + 1$.

10.16. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$f(x) = x - e^{2x} - 1 + f'(x)$ (1)

$f(x) = x + \frac{1}{4} f''(x)$ (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να δείξτε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 0$.

iii. Έχει η C_f εφαπτομένη παράλληλη στον $x'x$;

Απ: ii. $y = 3x + 1$, iii. δεν έχει

10.17. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2ημxσυνx - 2ημ^2x$, $x \in [0, 2\pi]$, στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Απ: $x = \frac{\pi}{8}$, $x = \frac{5\pi}{8}$, $x = \frac{9\pi}{8}$, $x = \frac{13\pi}{8}$

11. Όταν ε εφάπτεται στη C_f

11.1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Δείξτε ότι η ευθεία $y=4x-6$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f.

Απ: στο A(3, 6)

11.2. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = 4x - 1$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + \alpha x + 2\beta$ στο σημείο A(1, 3).

Απ: $\alpha = 2$, $\beta = 0$

11.3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)= x^2 + 2x - 2$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = \alpha x - 3$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f.

Απ: ε_1: $y = 4x - 3$ στο A(1, 1) με $\alpha = 4$ ε_2: $y = -3$ στο B(−1, −3) με $\alpha = 0$

11.4. Να Αποδείξετε ότι η ευθεία $y = -x + 2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Απ: στο A(0, 2)

11.5. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = e^{x^2-x-2}$ και $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x$. Δείξτε ότι η εφαπτομένη της C_f στο M(−1, 1) εφάπτεται και στη C_g.

Απ: η $y = -3x - 2$ στη C_g στο A(2, -8)

11.6. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A(\xi, f(\xi))$, $\xi>0$ της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(-\xi, 0)$ εφάπτεται της C_f στο A.

Απ: $y = \frac{\sqrt{\xi}}{2\xi}x + \frac{\sqrt{\xi}}{2}$

11.7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = -x^2 - x$. Να Αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A(0, 1) εφάπτεται και στην C_g.

Απ: στο B(−1, 0)

11.8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 2$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τα α, β ∊ R για τα οποία οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

Απ: $\alpha = 0$, $\beta = -1$

11.9. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3x - 2$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ δυο κοινά σημεία και εφάπτεται αυτής σε ένα από τα σημεία αυτά.

Απ: A(1, 1), B(-2, -8), εφάπτεται στο A

11.10. Έστω f μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(1) = 1$ και g η συνάρτηση που ορίζεται Από την ισότητα $g(x) = f(x^2 + x + 1) - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να Αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο A(1, f(1)) εφάπτεται της C_g στο B(0, g(0)).

Απ: κοινή η $y = x + f(1) - 1$

11.11. Έστω C_f η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^{\lambda \cdot x^2}$ με $\lambda > 0$.

i. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής της παράστασης που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

ii. Να δείξετε ότι τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτομένων με την C_f βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη στον άξονα των x.

Απ: i. $y = \sqrt{2\lambda e}\,x$ στο $A(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2\lambda}, \sqrt{e})$, $y = -\sqrt{2\lambda e}\,x$ στο $B(-\frac{\sqrt{2\lambda}}{2\lambda}, \sqrt{e})$

11.12. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = -3x + 6$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 5x + 7$.

12. Κοινή εφαπτομένη

12.1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $x - 2y = 0$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$

12.2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 3$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$ έχει εξίσωση $y = -3x-1$. Να βρείτε:

i. τους αριθμούς α και β

ii. τις εφαπτομένες της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία $(\zeta): 12x - 2y + 2011 = 0$.

Απ: i. $\alpha = -3$ και $\beta = -3$, ii. $y = 6x + 8$ και $y = 6x - 10$

12.3. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x, & \alpha\nu\; x \geq 2 \\ 3x^2 - 10x - 4\alpha, & \alpha\nu\; x < 2 \end{cases}$$ και η συνάρτηση

$g(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε τον αριθμό α

ii. Να βρείτε την $f'(x)$

iii. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$ εφάπτεται και στη C_g στο σημείο της $B(3, g(3))$, τότε να βρείτε τους αριθμούς β και γ.

Απ: i. $\alpha = -2$, ii. $\beta = -4$ και $\gamma = 1$

12.4. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - 3x + 4$ και $g(x) = 3(x^2 - x)$ σε ένα κοινό τους σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

12.5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x - 2$ και $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_f και C_g.

12.6. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι C_f, C_g των συναρτήσεων $f(x)=\alpha x^2+\beta x+2$ και $g(x) = \dfrac{x-1}{x}$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

Απ: $\alpha = 3$, $\beta = -5$

12.7. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) = x\,[f(x) - x^2]$, για κάθε $x > 0$

i. Βρείτε το κοινό σημείο της C_f με την ευθεία $y = -x + 1$

ii. Αποδείξτε ότι η πιο πάνω ευθεία εφάπτεται στην C_f.

Απ: i. $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ii. στο Α

12.8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{-x}$ και $g(x) = -\ln x$. Να Αποδείξετε ότι η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία τομής των C_f, C_g με τους άξονες είναι κοινή τους εφαπτομένη.

Απ: η $y = -x + 1$ κοινή στα $A(0, 1)$, $B(1, 0)$

12.9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3αx + β$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η ευθεία που περνά Από τα σημεία M(1, 3) και N(2, 6) να εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f στο σημείο M.

Απάντ.: $α = \frac{1}{3}$, $β = 1$

12.10. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x)=\frac{1}{2e}x^2$ και $g(x) = \ln x$. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g εφάπτονται και να βρείτε της εξίσωση της κοινής εφαπτομένης.

Απ: $y = \frac{\sqrt{e}}{e}x - \frac{1}{2}$ στο $M(\sqrt{e}, \frac{1}{2})$

12.11. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x^2 - 1) = g(2x - 2)$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει κοινό σημείο των C_f, C_g στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.

12.12. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}εφθ$,

$θ \in (-\frac{π}{2}, 0) \cup (0, \frac{π}{2})$ τέμνει τον άξονα x' x σε περισσότερα από ένα σημεία, να δείξετε ότι η κλίση της g σε αυτά τα σημεία είναι η ίδια. Ποια είναι η κλίση αυτή;

12.13. Έστω συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x - \dfrac{\alpha^2+1}{4}x^2$ με $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία τομής της με τον $x'x$ σχηματίζουν γωνίες παραπληρωματικές.

12.14. Για τις συναρτήσεις f, g, φ ισχύουν:

i. η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii. η φ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

iii. $g(x) = f(x) \cdot \varphi'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iv. $[\varphi(x)]^2 + [\varphi'(x)]^2 = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αν $A(x_0, y_0)$ είναι ένα κοινό σημείο των C_f, C_g να δείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο Α.

12.15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f, C_g.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g, την οποία και να προσδιορίσετε.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο τομής των C_f, C_g με τετμημένη $x_0 \neq 0$ στο οποίο οι εφαπτομένες των C_f, C_g σχηματίζουν γωνία ω με $\text{εφ}\omega = \dfrac{1}{7}$.

iv. Αν x_1 η τετμημένη σημείου της C_g που είναι ακέραια ρίζα της εξίσωσης $f'(x) + g'(x) = 7\text{εφ}\omega$, να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο $(x_1, g(x_1))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία αμβλεία.

Απ: i. O(0, 0), A(1, 1), ii. y = 0

13. Εύρεση Παραμέτρων

13.1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x) = -2x^2 + \alpha x$ και $g(x) = -x^2 + (\alpha - 4)x + 4$, με $\alpha \in \mathbb{R}$

Οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία τους $A(1, f(1))$ και $B(1, g(1))$ αντίστοιχα, είναι μεταξύ τους κάθετες.

i. Να βρείτε τον αριθμό α.

ii. Να Αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν σε κοινό τους σημείο κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Απ: i. $\alpha = 5$ ii. $y = 3x$

13.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha e^x + \beta x^2$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η ευθεία

$y = -6x + 2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f', στο σημείο της $A(0, f'(0))$.

i. Να βρείτε τους αριθμούς α και β

ii. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$

Απ: i. $\alpha = 2$ και $\beta = -4$ ii. $-\infty$, 0

13.3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x) = \alpha x^2 - x + 2$ και $g(x) = x^2 - (\alpha + 1)x + 3$, με $\alpha \in \mathbb{R}$

Οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία τους $A(-1, f(-1))$ και $B(-1, g(-1))$ είναι μεταξύ τους παράλληλες. Να βρείτε:

i. τον αριθμό α

ii. τις κοινές εφαπτομένες των C_f και C_g

Απ: i. $\alpha = 1$ ii. $y = -x + 2$

13.4. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x)=\alpha x^2+\beta x$. Να βρείτε τους α, $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $M(3, -9)$ και να έχει στο σημείο αυτό εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x΄x.

Απ: $\alpha = 1$, $\beta = -6$

13.5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x+\alpha}{x+\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε τη τιμή του α, για την οποία η κλίση της C_f στο σημείο της $A(0, 1)$ είναι ίση με $\frac{1}{2}$.

Απ: $\alpha = 2$

13.6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f, διέρχεται Από το σημείο $A(1, 2)$ και εφάπτεται της ευθείας $y = x$ στην αρχή των αξόνων.

Απ: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$

13.7. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο f δεύτερου βαθμού του οποίου η γραφική παράσταση να εφάπτεται των ευθειών $y = x + 1$ και $y = 3x - 1$ στα σημεία $A(0, 1)$ και $B(1, 2)$ αντιστοίχως.

13.8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f'(x) = 2\nu x\sqrt{(\nu x^2-\nu+1)^2+\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ και η $g(x) = 8\nu x^{\eta\mu x}$, $x > 0$. Να βρείτε τον $\nu \in \mathbb{N}^*$ ώστε η εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$ να είναι παράλληλη της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 1$.

Απ: $\nu = 15$

13.9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \frac{32}{x^2} + \alpha$ και $g(x) = -x^2 + \alpha + 16$ με $x \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ οι C_f, C_g έχουν δυο κοινά σημεία Α και Β με κοινή εφαπτομένη σε αυτά.

ii. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των Α, Β όταν το α διατρέχει το $\mathbb{R}$.

Απ: ii. $x = -2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

13.10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2 - e^{\alpha x}$, $g(x) = e^{2\alpha x}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ οι εφαπτομένες των C_f, C_g στο κοινό τους σημείο είναι κάθετες μεταξύ τους;

Απ: $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

13.11. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(\kappa - x) = f(\kappa + x)$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $A(\kappa-\alpha, f(\kappa-\alpha))$ και $B(\kappa+\alpha, f(\kappa+\alpha))$, $\kappa \neq \alpha \in \mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

13.12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 2x + \alpha$ και $g(x) = \ln(x - 1)$. Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$ αν οι εφαπτομένες των C_f, C_g που διέρχονται από το σημείο $A(1, 0)$ είναι κάθετες.

Απ: $\alpha = \frac{e^2 + 4}{4}$

13.13. Να βρείτε τις ευθείες της μορφής $x+2y-3+\kappa(3x-y-2)=0$, $\kappa \in \mathbb{R}^*$, που εφάπτονται στη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - x + 2$.

Απ: $y = -x + 2$, $y = 3x - 2$

13.14. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = x^2 - x + 1$ και $f(x) = e^{\alpha x+\beta}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα α, β αν οι συναρτήσεις $g(x)$ και $f^{(4)}(x)$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $A(1, g(1))$.

Απ: $\alpha = 1$, $\beta = -1$

13.15. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(1) = f(1) + f(0)$ (1). Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη της C_f στο x_0 να περνά από το σημείο $O(0, 0)$.

14. Ευθύγραμμη Κίνηση

14.1. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στο επίπεδο κατά τέτοιο τρόπο, ώστε οι συντεταγμένες του να είναι συναρτήσεις του χρόνου t (sec): $x(t) = 3t^2$ (m) και $y(t) = t^3 - 3t$, $t \geq 0$.

i. Πότε το κινητό διέρχεται από τον x΄x;

ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της Απόστασης του M Από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή $t = 1$ sec.

iii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του κινητού τη χρονική στιγμή $t = 2$ sec.

Απ: i. $t = 0$ ή $t = \sqrt{3}$, ii. $f'(1) = \frac{18\sqrt{13}}{13}$ m/sec, iii. $\upsilon'(2) = 12$ m/sec^2

14.2. Δίνονται δυο ομόρροπες ημιευθείες Ax, By με AB = 8m η κοινή τους κάθετος. Δυο κινητά M, N ξεκινούν συγχρόνως από τα A και B αντίστοιχα και κινούνται πάνω στις ημιευθείες, ώστε σε χρόνο t sec ($t \geq 0$) τα διαστήματα που διανύουν τα κινητά M, N να είναι αντίστοιχα $S_1(t) = 6t^2$ και $S_2(t) = t^3$ (m). Να βρεθούν οι χρονικές στιγμές που ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης MN είναι θετικός. Δηλαδή πότε η Απόσταση MN αυξάνεται.

Απ: $(0, 4)$, $(6, +\infty)$

15. Γεωμετρία

15.1. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Η πλευρά ΑΒ ελαττώνεται με ρυθμό 2cm/sec και η ΒΓ αυξάνεται με ρυθμό 3cm/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού και της περιμέτρου του ορθογωνίου όταν (ΑΒ) = 12cm και (ΒΓ) = 6cm.

Απ: $\Pi'(t) = 2cm/sec$ και $E'(t) = -6cm^2/sec$

15.2. Έστω σφαίρα με μεταβλητή ακτίνα r. Αν η ακτίνα σε cm κάθε χρονική στιγμή t δίνεται Από τη σχέση $r(t)=12-4t-t^2$ με $t \in [0,2]$ τότε να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου και της επιφάνειας της σφαίρας όταν r = 7cm.

Απ: $-1176cm^3/sec$

15.3. Σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Να βρεθεί η ακτίνα της r, τη χρονική στιγμή t_0 όπου οι ρυθμοί μεταβολής του όγκου και του εμβαδού της επιφάνειάς της είναι αριθμητικά ίσοι ($r'(t_0) \neq 0$).

Απ: 2

15.4. Ο όγκος μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό 18π cm^3/sec.

i. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης της επιφάνειας της σφαίρας όταν η ακτίνα της είναι 3cm.

ii. Να βρείτε την ακτίνα της σφαίρας όταν η επιφάνεια της αυξάνεται με ρυθμό $6cm^2$/ sec.

Απ i. $\frac{3}{2}$ cm^2/ sec) ii. $\frac{3}{2}$

15.5. Έστω $x > 0$ και E το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ που ορίζουν τα σημεία O (0,0), A(0,x+ 1) και B(x^2 + 2x, 0). Αν ο x μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm/ sec να βρείτε:

i. Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ε όταν x = 2cm.

ii. Το ρυθμό μεταβολής της Απόστασης των σημείων Α, Β όταν x = 4cm.

Απ: i. 52 cm^2 / sec ii. $\frac{1960}{\sqrt{601}}$

15.6. Ο όγκος V ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνεται με ρυθμό 100 cm^3/sec. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η ακτίνα r τη χρονική στιγμή t_0, που αυτή είναι ίση με 9 cm;

Απ: $\frac{100}{324\pi}$ cm/sec

15.7. Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό 10cm^2/sec, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής όταν r = 85 cm.

Απ: 425 cm^3/sec

15.8. Έστω Τ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ που ορίζουν τα σημεία O(0, 0), A(x, 0) και B(0, lnx), με $x > 1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Τ, όταν x = 5 cm.

Απ: ln25 + 2 cm^2/sec

15.9. Έστω $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$ θεωρούμε τα σημεία $O(0, 0)$, $B(5, 0)$ και τυχαίο σημείο $A(x, f(x))$ στη γραφική παράσταση της f. Αν ο x αυξάνεται με ρυθμό 4cm / sec να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ όταν x = 25 cm.

Απ: 1 cm^2 / sec

15.10. Ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνονται ΑΒ = 2 cm, ΑΓ = 8 cm ενώ η γωνία Α αυξάνεται με ρυθμό 6 rad / sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ όταν $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$.

Απ: 24

15.11. Οι διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου αυξάνονται με ρυθμό 8m/sec, 6m/sec, 4m/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου του τη χρονική στιγμή που οι διαστάσεις του είναι 12m, 10m, 8m αντίστοιχα.

15.12. Η βάση ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι 12m και οι δυο άλλες πλευρές του αυξάνονται με ρυθμό 8m/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου όταν οι ίσες πλευρές είναι 10m.

Απ: 60 m^2 / sec

15.13. Έστω $x > 1$ και τα σημεία $A(x - 1, 0)$, $B(0, \ln x)$.

i. Αν το x αυξάνεται με ρυθμό 3 cm/s να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΑΒ τη χρονική στιγμή κατά την οποία x = 2 cm.

ii. Επίσης να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ την ίδια χρονική στιγμή.

Δίνεται ότι $\ln 2 \approx 0{,}7$ και $\sqrt{1{,}49} \approx 1{,}22$.

Απ: i. 3,32 cm/s, ii. 1,8 cm^2/sec

15.14. Οι κορυφές τριγώνου ΟΑΒ έχουν συντεταγμένες $O(0, 0)$, $A(0, x + 1)$, $B(x^2 + 2x, 0)$, $x > 0$. Το x είναι συνάρτηση του χρόνου t (σε sec). Ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με 4 m/s. Να βρείτε τις συντεταγμένες των Α και Β τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου είναι 52 m^2/sec.

Απ: $A(0, 3)$ και $B(8, 0)$

15.15. Μια ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda > 0$. Το λ είναι συνάρτηση του t (σε sec). Η ε στρέφεται γύρω Από το σημείο $A(4, 2)$ με ρυθμό μεταβολής του λ ίσο με 10^{-2} m/sec. Αν η ε τέμνει τους Οx, Oy στα σημεία Μ, Ν αντίστοιχα, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΝ τη χρονική στιγμή που η ε περνά Από το $B(5, 4)$.

(Απ: $E'(t_0) = \frac{15}{2} \cdot 10^{-2}$ m^2/sec

15.16. Ένα ισοσκελές ΑΒΓ τρίγωνο έχει σταθερή βάση ΒΓ = 10 cm, ενώ η κορυφή Α κινείται με ταχύτητα 2cm/sec. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η κορυφή Α απέχει από τη βάση 12cm να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

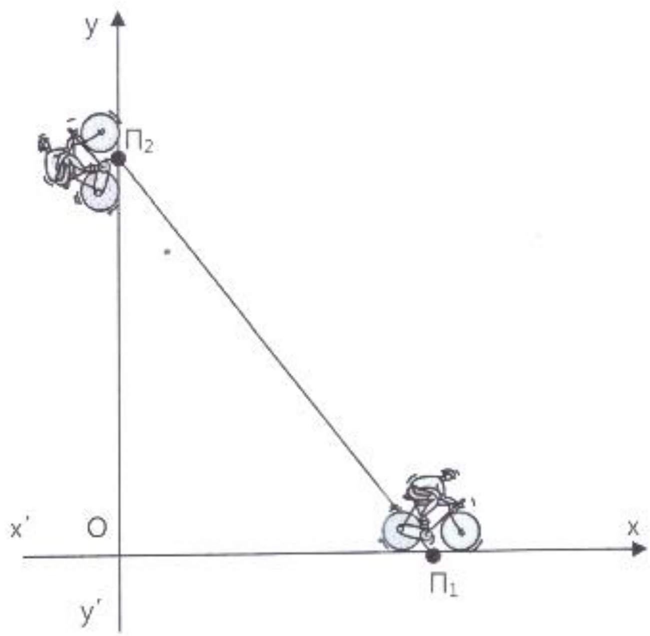
i. της γωνίας Α ii. Της πλευράς ΑΒ

iii. Του εμβαδού του τριγώνου

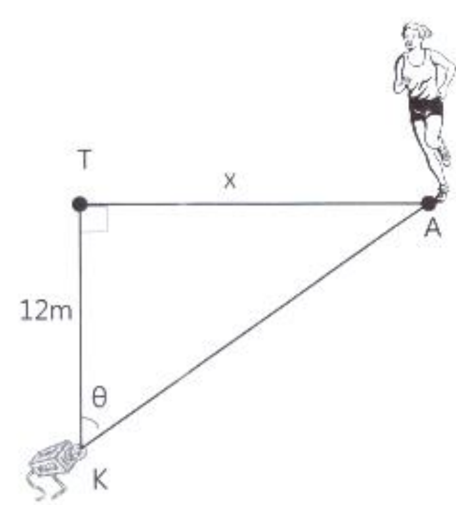
Απ: i. $-\frac{10}{169}$ ii. $\frac{24}{13}$ iii. 10 cm^2 / sec

16. Γωνία - Σκάλα

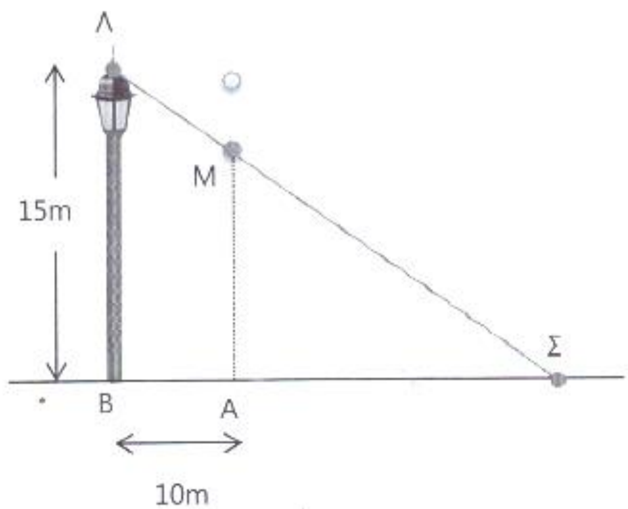
16.1. Δύο ποδηλάτες $Π_1$ και $Π_2$ ξεκινούν ταυτόχρονα τη στιγμή $t_0 = 0$ Από το σημείο Ο. Ο ποδηλάτης $Π_1$ κινείται ανατολικά με σταθερή ταχύτητα 30km/h, ενώ ο ποδηλάτης $Π_2$ κινείται βόρεια με ταχύτητα 40km/h. Να αποδείξετε ότι η απόσταση $Π_1Π_2$ των ποδηλατών αυξάνεται με σταθερό ρυθμό.



16.2. Ένας αθλητής (Α) τρέχει προς το σημείο τερματισμού (Τ) και μια κάμερα, που απέχει 12m από το σημείο Τ, είναι συνεχώς στραμμένη πάνω του, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο αθλητής τη στιγμή που απέχει 16m Από τον τερματισμό τρέχει με ταχύτητα 6m/s. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ΑΚΤ.



16.3. Μια λάμπα (Λ) ανάβει στην κορυφή ενός φανοστάτη ύψους 15m. Από ύψος 15m και σε Απόσταση 10m Από τον φανοστάτη αφήνουμε να πέσει μια μπάλα (Μ), όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε πόσο γρήγορα κινείται η σκιά (Σ) της μπάλας 0,5s Από τη στιγμή που αφήσαμε τη μπάλα να πέσει.



(Δίνεται ότι $g = 10m/s^2$)

16.4. Μια σκάλα με σταθερό μήκος ℓ ακουμπάει σε έναν τοίχο. Το κάτω άκρο της γλιστράει με σταθερό ρυθμό α cm/sec α >0. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται η μία γωνία που σχηματίζει η σκάλα με τον τοίχο είναι ίδιος με το ρυθμό που μειώνεται η γωνία που σχηματίζεται με το δάπεδο.

(Απ: $\theta'(t_0) = -\omega'(t_0)$)

17. Κίνηση σε Καμπύλη

17.1. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = x^2$.Ένα σημείο Μ(x, y) κινείται πάνω στην παραβολή. Να βρεθεί η θέση του σημείου όταν οι ρυθμοί μεταβολής των συντεταγμένων του είναι ίσοι και διάφοροι του μηδενός.

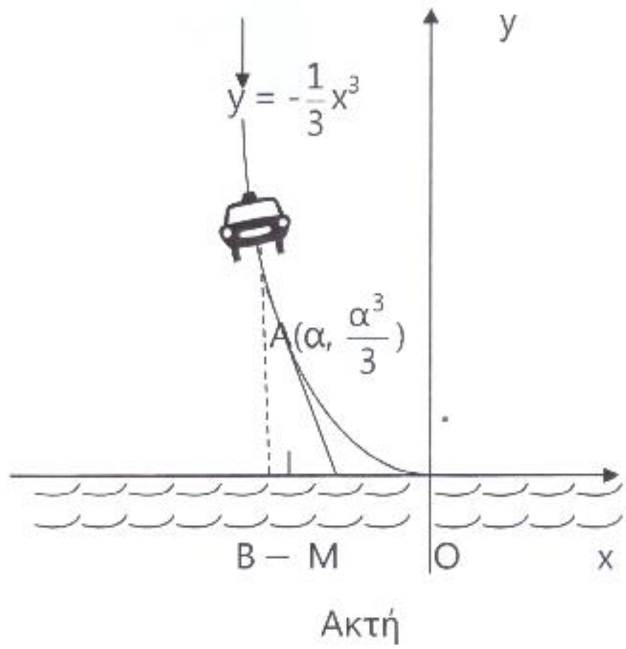
Απ: $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

17.2. Ένα κινητό Μ ξεκινά Από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \frac{1}{4}x^2$, $x \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Απ: Μ(2, 1)

17.3. Ένα περιπολικό κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \leq 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα) αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\alpha(t)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3.

Απ: $x'(t_0) = 2$



17.4. Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Καθώς περνάει Από το σημείο $A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει Από το α.

Απ: $3\sqrt{3}$ μονάδες / sec

17.5. Ένα κινητό κινείται στον κύκλο c: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$. Καθώς διέρχεται Από το σημείο A(–1, –1) η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες ανά sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του κινητού στο σημείο I.

Απ: $\frac{8}{3}$ μονάδες/sec

17.6. Ένα σημείο M(x, y) κινείται σε επίπεδο κατά τέτοιο τρόπο, ώστε οι συντεταγμένες του να είναι συναρτήσεις του χρόνου t έτσι ώστε x = f(t) και y = g(t). Η απόσταση του M σε κάθε χρονική στιγμή t από την αρχή των αξόνων δίνεται από τη σχέση $(OM)^2 = t^3 - 12t + 16$, t σε sec, $t \geq 0$ και x, y σε m.

i. Να εξετάσετε αν υπάρχουν χρονικές στιγμές που το κινητό περνά Από τη αρχή των αξόνων O(0, 0).

ii. Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του κινητού όταν διέρχεται Από την αρχή των αξόνων, αν $\upsilon(t) = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$.

iii. Αν $x = t - 4$, να βρείτε σε ποίο σημείο η τροχιά του κινητού τέμνει τον y' y.

Απ: t = 2, ii. $\sqrt{6}$ m/sec, iii. A(0, 4 $\sqrt{3}$

17.7. Ένα κινητό Α διαγράφει μια τροχιά στο επίπεδο που δίνεται Από τη σχέση $f(x) = 10 - x^2$, $x \geq 0$. Ένα δεύτερο κινητό Β κινείται πάνω σε μια ευθεία ε, εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο $x_0 = 1$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της κατακόρυφης Απόστασης των Α, Β για x = 2 και x = 4.

Απ: g΄(2) = 2 και g' (4) = 6

17.8. Ένα πλοίο Π κινείται προς Βορρά με ταχύτητα 6 km/h. Ένα δεύτερο πλοίο Ρ κινείται προς Ανατολάς με ταχύτητα 8 km/h. Το πλοίο Ρ διέρχεται στις 4 μ.μ. Από το σημείο στο οποίο βρισκόταν το Π πριν Από δυο ώρες.

i. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της μεταξύ τους Απόστασης στις 3 μ.μ.

ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της μεταξύ τους Απόστασης στις 5 μ.μ.

iii. Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία η μεταξύ τους Απόσταση μένει αμετάβλητη;

Απ.: i. s'(3) = -2,8 km/h, ii. s'(5) = 8,73 km/h, iii. 3μμ και 17 min

17.9. Ένα σημείο M(x, y) κινείται πάνω στην καμπύλη $c{:}3x^2 - y^2 = 12$. Οι συντεταγμένες του M είναι συναρτήσεις του χρόνου t. Η τεταγμένη του M αυξάνεται με ρυθμό 6 m/sec. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του όταν x = 4m;

Απ: 3m/sec ή -3 m/sec

17.10. Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς θεωρούμε ένα σταθερό σημείο P στον y΄y έτσι ώστε P(0, 16). Η ευθεία x = 6 τέμνει τον x΄x στο B(6, 0). Ένα σημείο A κινείται στην ευθεία x = 6 προς το B. Για κάθε θέση του A, η PA τέμνει τον x΄x στο Γ. Αν το A πλησιάζει το B με ταχύτητα 1 m/s, να βρείτε με ποια ταχύτητα πλησιάζει το Γ στο σημείο B, όταν το A απέχει 6m Από το B.

Απ: $\frac{24}{25}$ m/sec

18. Οικονομία

18.1. Σε μια μικρή βιομηχανία χημικών προϊόντων βρέθηκε ότι το εβδομαδιαίο κέρδος σε εκατοντάδες ευρώ Από την παραγωγή και πώληση x κιλών προϊόντος την εβδομάδα δίνεται από τη σχέση $P(x) = -0{,}004x^2 + 7{,}2x - 18, x > 0$. Να βρεθεί:

i. Το μέσο κέρδος σε μια μεταβολή της παραγωγής Από 100 κιλά σε 130 κιλά την εβδομάδα.

ii. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους όταν η παραγωγή είναι 100 κιλά την εβδομάδα.

Απ: i. 7,6 εκατομ. € ii. 6,4 εκατομ. €

18.2. Το κόστος παραγωγής K(x) και η τιμή πώλησης Π(x), σε ευρώ x μονάδων ενός προϊόντος δίνονται από τις συναρτήσεις:

$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 10x^2 + 300x + 1000$ και $\Pi(x) = 76x + 125, x > 0$.

Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους

$P(x) = \Pi(x) - K(x)$ είναι θετικός.

Απ: $8 < x < 28$

18.3. Το κόστος παραγωγής K(x) και η τιμή πώλησης Π(x), x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος, δίνονται Από τις συναρτήσεις: $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$ και $\Pi(x) = 420x$ αντιστοίχως. Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους, $P(x) = \Pi(x) - K(x)$, είναι θετικός.

Απ: $5 < x < 35$

19. Εφαρμογή – Συμπέρασμα θ. Rolle

19.1. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = xe^{x-1} + \alpha x^2 - (\alpha + 1)x$, με $\alpha \in \mathbb{R}$
Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

19.2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - 3\alpha x - 8$, με $\alpha \in \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-3, 3]$. Να βρείτε τον αριθμό α και στη συνέχεια να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $f'(x) = 0$ που ανήκουν στο διάστημα $(-3, 3)$.

19.3. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0, \pi] \to \mathbb{R}$. Να Αποδείξετε ότι:

i. η συνάρτηση $g(x) = f(x)ημx$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, \pi]$

ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) + f'(\xi)σφ\xi = 0$.

19.4. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f'(\alpha) = f(\alpha)$ και $f'(\beta) = f(\beta)$, τότε δείξτε ότι:

i. Για τη συνάρτηση $g(x) = [f'(x) - f(x)] \cdot e^{2x}$, εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

ii. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = \dfrac{f'(x_0) + f''(x_0)}{2}$

19.5. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta]\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β).

i. Αποδείξτε ότι για τη συνάρτηση F με $F(x)=e^{f(x)}\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)$ εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

ii. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(x_0) = \dfrac{\alpha+\beta-2x_0}{(x_0-\alpha)(x_0-\beta)}$.

19.6. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε για τους πραγματικούς α, β με $\alpha < \beta$, να ισχύει $3f^2(\alpha) + 2f^2(\beta) = 2[3f(\alpha) + 2f(\beta)] - 5$. Δείξτε ότι η C_f έχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη παράλληλη στον x′x.

19.7. Έστω οι θετικοί α, β με $\alpha<\beta$ και $\alpha, \beta \neq 1$, τέτοιοι ώστε $\alpha^\beta = \beta^\alpha$ Δείξτε ότι:

i. Για τη συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$. Εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

ii. $\alpha < e < \beta$.

20. Εύρεση Παραμέτρων

20.1. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2+\alpha x+4, & \alpha\nu\, x\le 1 \\ \beta x^2-5x+\gamma, & \alpha\nu\, x>1 \end{cases}$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [-1, 3]. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ∈ $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $f'(x) = 0$, που ανήκουν στο διάστημα (-1, 3).

20.2. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(1) = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = xf(x) + \alpha x^2 - 4$, με $\alpha\in\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [0, 1].

i. Να βρείτε τον αριθμό α

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \xi(4 - f'(\xi))$

Απ: i. $\alpha = -2$

20.3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+1, & x\le 0 \\ x^3+\beta x^2+2x+\gamma, & x>0 \end{cases}$.

Να προσδιορίσετε τους α, β, γ ∈ $\mathbb{R}$, ώστε για την f να εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle στο [−1, 1].

Απ: $\alpha = 2$, $\beta = -4$, $\gamma = 1$

20.4. Δίνεται f συνεχής στο [0, 1] και παραγωγίσιμη στο (0, 1) με $f(0) = \kappa$ και $f(1) = \kappa + 2$.

i. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η $g(x) = f(x) - \alpha x^2$ να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα [0, 1].

ii. Για το α που βρήκατε να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ έτσι ώστε: $f'(\xi) = 4\xi$.

Απ: i. $\alpha = 2$

21. Αντιπαραγώγιση σε Συναρτησιακή Σχέση

21.1. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 3$ και $f(2) = 6$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 2\xi$.

21.2. Δίνεται συνάρτηση συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με $f(2) - f(0) = 6$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 3\xi^2 - \xi$

21.3. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$f(1) = e^2 - e$ και $f(2) = \dfrac{e^2}{2}$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε: $x_0^2 \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \cdot x_0 - e^{x_0} = 0$

21.4. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(6) = 3f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2, 6)$ τέτοιο, ώστε: $\xi f'(\xi) = f(\xi)$

21.5. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{\text{συν}\xi - f(\xi)}{\xi}$

21.6. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1, 2] \to [1, 2]$ για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και $f(2) = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) \cdot f'(f(\xi)) = 1$

21.7. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = -f(\xi)$

21.8. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\frac{f(2)}{f(1)} = \sqrt{e}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $\xi^2 f'(\xi) = f(\xi)$.

21.9. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει: $f(0) = f(2) = 2$ και $f(1) = 3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 4 - 6\xi$.

21.10. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,-2)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(3, -1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$

21.11. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(\alpha) - g(\beta) = 1$ και $g(\alpha) - f(\beta) = -1$. Δείξτε ότι υπάρχει $\theta \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\theta) + g'(\theta) = 0$.

21.12. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο [2, 3] και παραγωγίσιμη στο (2, 3) με $f(3) = f(2) + 19$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ ώστε $f'(x_0) = 10x_0 - 6$.

21.13. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [1, 4] και παραγωγίσιμη στο (1, 4). Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 4)$ τέτοιο ώστε: $2x_0[f(4) - f(1)] = 15f'(x_0)$.

21.14. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \lambda x^2 - (\lambda + 1)x$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο [0, 1].

ii. Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτηση g με $g(x) = \lambda - 4x^3$ έχει με την ευθεία $y = 2\lambda x - 1$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

21.15. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0, π] τέτοια ώστε $f(0) - f(\pi) = -2$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ έτσι ώστε:

$f'(\xi) = e^{\eta\mu\xi} \cdot \sigma\upsilon\nu\xi + \eta\mu\xi$

21.16. Έστω συνάρτηση f για την οποία εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα [0,2004]. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi > 0$ έτσι ώστε: $f'(\xi) = 2\xi - 2004$.

22. Ύπαρξη Ρίζας της $f'(x) = 0$ με γνωστή f

22.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = συνx \cdot lnx$. Να αποδείξετε ότι:

i. η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$

ii. η εξίσωση $x^x = e^{σφx}$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

22.2. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) - f(0) = e$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f'(x) - 2x = e^x$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0, 1).

22.3. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = 2$. Να Αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$f'(x) - ημx = συνx$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

22.4. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(2) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) + xf'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0, 2).

22.5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)ημx$. Να Αποδείξετε ότι:

i. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.

ii. Η εξίσωση $εφx = 1 - x$ έχει μια τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.

23. Ύπαρξη Ρίζας σε Εξίσωση

23.1. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα που δίνονται κάθε φορά.

i. $(x^2 - 1)$ συνx + 2xημx = 0 στο $(-1, 1)$

ii. α·συνx + βσυν2x + γσυν3x = 0 στο $(0, \pi)$ αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$

iii. $4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x - \alpha - \beta - \gamma = 0$ στο $(0, 1)$ αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$

24. Το πολύ ν -Ρίζες

24.1. Δείξτε ότι η εξίσωση ημx + x^2 = 1 έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

25. Ακριβώς ν -Ρίζες

25.1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^3 + 3x = 1 - 3ημx$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα, η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

25.2. Δίνεται συνάρτηση $f: \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ και

$f''(x) \neq -f(x)$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$f'(x)ημx = f(x)συνx$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$.

25.3. Δίνεται συνάρτηση $f: [1, 3] \to \mathbb{R}$ με:

$f(1) = 2$, $f(2) = \ln(2e^3)$ και $f(3) = \ln(3e^4)$

Να αποδείξετε ότι:

i. η γραφική παράσταση της: $g(x) = f(x) - \ln x - x$

έχει δύο οριζόντιες εφαπτομένες στο διάστημα $[1, 3]$

ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,3)$ τέτοιο, ώστε $\xi^2 f''(\xi) = -1$

25.4. i. Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x) \neq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να Αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ημ\frac{x}{2} = x$ αληθεύει μόνο για $x = 0$.

26. Εφαρμογή - Απόδειξη Σχέσεων

26.1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & \alpha\nu\, x \le 1 \\ 2x^2 - (\beta+1)x + 2\beta - 1, & \alpha\nu\, x > 1 \end{cases}$$

με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Για τη f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[-1, 3]$.

i. Να βρείτε τις τιμές των α και β.

ii. Να εφαρμόσετε το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[-1, 3]$.

Απ: i. $\alpha = -1$ και $\beta = 0$

26.2. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(\alpha) = 2\beta + 6\alpha$ και $f(\beta) = 5\beta + 3\alpha$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f'(\xi) = 3$

26.3. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ και $f(4) = 3$

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1, \xi_2 \in (1, 4)$, διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία της $A(\xi_1, f(\xi_1))$ και $B(\xi_2, f(\xi_2))$ να είναι μεταξύ τους κάθετες.

26.4. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(10) = 9 + f(1)$. Να Αποδείξετε ότι:

i. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 10)$, ώστε: $f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 3$

ii. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 10)$, ώστε: $4f'(x_1) + 5f'(x_2) = 9$

26.5. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $f'(x) >$ συνx, για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Δείξτε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)>1$.

26.6. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) < x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(4) - f(2) < 6$.

26.7. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [4, 6] τέτοια ώστε $f(6) - f(4) = 2$. Δείξτε ότι υπάρχουν ξ_1, $\xi_2\in(4, 6)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2$.

27. Συνδυασμός Θεωρημάτων

27.1. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει: $f(3) - f(0) = 9$ και $f'(0) > 0$.

Να αποδείξετε ότι:

i. υπάρχει $x_0 \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = x_0^2$

ii. υπάρχει $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 3\xi$.

27.2. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι: $f(2) - f(1) = 3$

και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι κάθετη στην ευθεία $2x + 8y - 2011 = 0$. Να Αποδείξετε ότι:

i. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 2x_0$.

ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 3x_1$.

27.3. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται Από την αρχή των αξόνων και επιπλέον ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)f(x) + \eta\mu(x^2-1)}{\sqrt{x+3}-2} = 12$

i. Να βρείτε την τιμή f(1)

ii. Να Αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)f(\xi) = \xi$.

27.4. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)f(x)+\eta\mu(x^2-4)}{\sqrt{x-1}-1} = -2$ και

$f^2(x) + f(x^2) = 2x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε τις τιμές f(2) και f(1)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της A(1, f(1)).

iii. Να Αποδείξετε ότι η εξίσωση: $(x - 3)f'(x) + f(x) = 1$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (1, 2)

Απ: i. $f(2) = -5$, $f(1) = -2$, ii. $y = -2x$

27.5. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)f(x)+\eta\mu(x-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

ii. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Να Αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα x΄x, σχηματίζει μ΄ αυτόν γωνία 45°.

27.6. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f:[\alpha, 2\alpha] \to \mathbb{R}$, με $\alpha > 0$ για την οποία ισχύει $f(\alpha) = \alpha$ και $f(2\alpha) = 2\alpha$. Να αποδείξετε ότι:

i. υπάρχει $x_0 \in (\alpha, 2\alpha)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = 3\alpha - x_0$

ii. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, 2\alpha)$, διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.

27.7. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν: $f(1) = -6$, $f(3) = -2$ και $f(5) = 22$

Να αποδείξετε ότι:

i. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 5)$ με: $f'(\xi_1) = 2$ και $f'(\xi_2) = 12$

ii. υπάρχει $\xi \in (1, 5)$, ώστε $f'(\xi) = 2\xi$.

27.8. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(1) = \alpha$, $f(2) = \beta$, $f(4)=\alpha + \beta$ και $f(5) = 2\alpha + 4$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να Αποδείξετε ότι:

i. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 5)$, ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 4$

ii. υπάρχει $\xi \in (1, 5)$, ώστε $f'(\xi) = 2$

27.9. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει: $f(1) + f(4) = f(2) + f(3)$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 4)$, ώστε $f''(\xi) = 0$.

27.10. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$ και $f(5) = 20$. Να αποδείξετε ότι:

i. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 5)$, με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1)=6$ και $f(x_2)=12$

ii. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1, 5)$, ώστε $\dfrac{2}{f'(\xi_1)} + \dfrac{3}{f'(\xi_2)} + \dfrac{4}{f'(\xi_3)} = 2$

27.11. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(1)=3$, $f(3)=7$ και $f(5)=11$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 5)$, ώστε $f''(\xi) = 0$.

27.12. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν $f(1) = 2$ και $f(3) = f(4) = 6$. Να αποδείξετε ότι:

i. υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$, ώστε $f(x_0) = 6$

ii. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$, διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε:

$$\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 1$$

27.13. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι:

i. υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε: $5f(x_0) = 2f(\alpha) + 3f(\beta)$

ii. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (\alpha, \beta)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$, ώστε

$$\frac{3}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} = \frac{5}{f'(\xi)}$$

27.14. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(3) \neq 0$ και $3f(1) = 9f(3) = f(5)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 5)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

27.15. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(1) - g(3) = -4$ και $1 < f'(x) < 2 < g'(x) < 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $2 < f(3) - g(1) < 6$

ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε:

$f(\xi) - \xi = g(4 - \xi) - 1$

27.16. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 3$ και $|f'(x)| \le 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι $4 - x \le f(x) \le x + 2$ για κάθε $x \ge 1$.

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) + 2x}{x^2 + 1}$

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 3\xi - 4$.

27.17. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, με $f(1)=f(3)=0$ και $f(2) > 0$. Να αποδείξετε ότι:

i. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$ με $\xi_1 < \xi_2$, ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$

ii. υπάρχει $\xi \in (1, 3)$, ώστε $f''(\xi) < 0$

27.18. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2f(x) - 2x \le f(4) + f(-4)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

i. $f(4) - f(-4) = 8$

ii. υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (-4, 4)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): $y = x + 2010$

iii. υπάρχει $x_0 \in (-4, 4)$, ώστε $f(x_0) = f(-4) + 4$

iv. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-4, 4)$, ώστε: $\dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} = 2$

27.19. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β).

Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma, \delta \in (\alpha, \beta)$ έτσι, ώστε $f(\gamma)f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι:

i. υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 στο διάστημα (α, β) τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

ii. υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1) > 0$ και $f''(\xi_2) < 0$

iii. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

27.20. Δίνεται συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Αν η C_f διέρχεται Από τα σημεία Α(1, 2005) και Β(-2, 1), να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία: (ε): $y = -\dfrac{1}{668}\cdot x + 2005$

27.21. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xf(x) - \eta\mu 3x \cdot \eta\mu 4x}{\eta\mu^2 x} = -2$

Επίσης, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α(3, f(3)) έχει εξίσωση $y = -2x + 12$

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της Β(0, f(0))

ii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{xf(x) - 18}{x^2 - 9}$

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 3)$, ώστε $f''(\xi) = -4$.

Απ: i. y = 10x ii) 0

27.22. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο [1, 2]. Αν $f(1) = f(2) - \frac{7}{3}$ και $f'(1) > 4$ τότε δείξτε ότι:

i. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = x_0^2$.

ii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 4\xi$.

27.23. i. Να αποδείξετε ότι $\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Αν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}$, να Αποδείξετε ότι για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|\beta - \alpha|$.

27.24. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [0, 4] και ισχύει: $2 \leq f'(x) \leq 5$ για κάθε $x \in (0, 4)$. Αν $f(0) = 1$, να αποδείξετε ότι $9 \leq f(4) \leq 21$.

27.25. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [–1, 1] και ισχύει $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Αν $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

27.26. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$ και $g(x) = -x^2 + 2x + 1$, έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία , τα A(0, 1), B(1, 2).

27.27. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + \sqrt{8} = 0$ δεν μπορεί να έχει περισσότερες Από δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

27.28. Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $\alpha > 0$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\alpha \cdot f(\beta) = \beta \cdot f(\alpha)$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.

27.29. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) = x^4 - 6x^2 + 7\alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. Δείξτε ότι υπάρχουν τρία σημεία Α, Β, Γ της C_f στα οποία οι εφαπτομένες της είναι παράλληλες στον άξονα x΄x.

ii. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ έχει σταθερό εμβαδόν.

Απ: i. $A(-\sqrt{3}, 7\alpha - 9)$ $B(0, 7\alpha)$ $\Gamma(\sqrt{3}, 7\alpha - 9)$ ii. $9\sqrt{3}$ τ.μ.

27.30. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $2f(5) = f(3) + f(7)$. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f''(x_0) = 0$.

27.31. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη της οποίας η γραφική παράσταση έχει με την παραβολή $y = x^2$ τρία κοινά σημεία με τετμημένες $\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2$ με $\alpha > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \alpha + 2)$ έτσι ώστε $f''(x_0) = 2$.

27.32. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1, 8]$ τέτοια ώστε $f(8) = 2f(1)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 8)$ τέτοια ώστε: $2f'(\xi_1) + 5f'(\xi_2) = f(1)$.

27.33. Δίνεται συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

i. Αν $f(p) = 0$ με $p \in (\alpha, \beta)$ δείξτε ότι ο p είναι μοναδικός.

ii. Αν $\alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) = 0$ δείξτε ότι υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in (\alpha, \beta)$ με $\rho_1 < \rho_2$ τέτοια ώστε: $$\frac{1}{f'(\rho_1)} + \frac{1}{f'(\rho_2)} = -p\left(\frac{1}{f(\alpha)} + \frac{1}{f(\beta)}\right).$$

27.34. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$ με $f'(x) + f'(-x) = 0$ για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$ και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-\alpha, \alpha)$.

i. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της C_f παράλληλη στον $x'x$.

ii. Υπάρχει $\xi \in (-\alpha, \alpha)$ με $f'(\alpha) = \alpha \cdot f''(\xi)$.

27.35. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \gamma] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(\alpha) < \alpha$, $f(\gamma) < \gamma$ και $f(\beta) > \beta$ όπου $\beta \in (\alpha, \gamma)$. Δείξτε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στην ευθεία $y = x + 1$.

27.36. Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = 2\beta$, $f(\beta) = 2\alpha$

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 4$.

27.37. Έστω f μια παραγωγίσιμη στο [0, 2] συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύει η σχέση $(f(2)-f(1))\ (f(1)-f(0)) < 0$. Να αποδείξετε ότι ορίζεται μια τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f παράλληλη στον άξονα x΄x.

27.38. Αν μια συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και ισχύουν οι σχέσεις $f(\alpha)=f(\beta)$ και $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$: $f^{(3)}(\xi) = 0$

27.39. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f'(x) > f(\alpha)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $f(\alpha + 1) > 2f(\alpha)$.

27.40. Να λύσετε την εξίσωση $4^x + 5^x = 3^x + 6^x$.

27.41. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] με $f(\alpha) = 1$ και $f(\beta) = 2004$. Δείξτε ότι υπάρχουν διαφορετικά $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = \dfrac{6009}{\beta - \alpha}$

27.42. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [0, α] με $f(0) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, \alpha)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο ώστε να είναι

$$f'(\xi)\cdot f(\alpha - \xi) = f(\xi)\cdot f'(\xi)(\alpha - \xi).$$

27.43. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $f(0)=f(\pi)=f(2\pi)=0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)+\eta\mu x = 0$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

27.44. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = e^{2(\alpha-\beta)}\cdot f(\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να είναι $f'(x_0) = 2f(x_0)$.

27.45. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη. Αν για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει η σχέση $f(x^2) + \alpha^2 \geq \frac{8\alpha f(x)+1}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

27.46. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε να ισχύει $[f(x)]^2 \leq f(x)f(1-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$f(1-x) + (2-x)f'(x) = xf'(1-x) + f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

27.47. i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$, $\alpha < \beta$.

Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 στο οποίο η C_f δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στον $x'x$

ii. Οι συναρτήσεις f και g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $f(-\frac{\pi}{2}) = f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$ και $g(x) = f(x) + ημ2x$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε να είναι $f''(ξ) = 4ημ2ξ$.

27.48. i. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(1+x)-2x = f(x) + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι για κάθε $α \in \mathbb{R}$ υπάρχει $ξ \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να είναι $|2α - 2ξ + 1| < 1$ και $f'(ξ) = 2ξ$.

ii. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$ και $g(x) = ημx$. Να δείξετε ότι κάθε ευθεία τέμνει το διάγραμμα της συνάρτησης $φ(x) = f(x) + αg(x)$ το πολύ σε δυο σημεία.

27.49. Αν για την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f ισχύει $\ln(e^x+2)+e^{f(x)}=3e^x+4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f είναι $1-1$.

27.50. Η συνάρτηση $f: [1, 4] \to \mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και $f(1)=2$, $f(4) = 8$. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται Από την αρχή των αξόνων. Επίσης να δείξετε ότι η εφαπτομένη αυτή είναι μοναδική αν $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (1, 4)$.

27.51. Οι συναρτήσεις f, g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο $[α, β]$ και $f(α) = f'(α) = g(β) = g'(β) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $ξ \in (α, β)$ τέτοιο ώστε $f''(ξ) \cdot g(ξ)+2f'(ξ) \cdot g'(ξ)+f(ξ) \cdot g''(ξ)=0$.

28. Απόδειξη Ανισοτήτων

28.1. Αν $0 < \alpha < \beta$, να Αποδείξετε ότι: $e\alpha < \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} \cdot \beta^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} < e\beta$

28.2. Για κάθε $x \geq 0$ να Αποδείξετε ότι: $1 + x \leq e^x \leq 1 + xe^x$

28.3. Να Αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι:

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

28.4. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο [0,1] και ισχύουν $f(0)=1$, $g(1)=-1$. Αν ισχύουν $3 \leq f'(x) \leq 5$ και $2 \leq g'(x) \leq 4$ για κάθε $x \in (0, 1)$, να αποδείξετε ότι:

$7 \leq f(1) - g(0) \leq 11$.

28.5. Αν $\alpha < \beta$, να Αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$ ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και στη συνέχεια ότι:

$$e^{\alpha} < \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha} < e^{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\beta} < \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha}$$

Για τη συνάρτηση $g(x) = \ln x$ υποθέτουμε επιπλέον ότι $0 < \alpha < \beta$.

28.6. Να αποδείξετε ότι αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ τότε:

$(\beta - \alpha) \cdot \text{συν}\beta < \text{ημ}\beta - \text{ημ}\alpha < (\beta - \alpha) \cdot \text{συν}\alpha$.

28.7. Να αποδείξετε ότι ημ(α + h) < ημα + hσυνα,

όπου $0 < \alpha < \alpha + h < \frac{\pi}{2}$.

28.8. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο R δείξτε ότι $f'(x) < f(x + 1) - f(x) < f'(x + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

28.9. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [-2, 2] με $f(2) = 2$, $f(-2) = -2$ και $-1 \le f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in [-2, 2]$ να βρείτε το f(0).

Απ: $f(0) = 0$

28.10. Αν η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$, με $f(\gamma) > 0$ να Αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f''(\xi) < 0$.

28.11. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [α, β] για την οποία ισχύει $f'(x) + f(x) = 1$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Δείξτε ότι $e^{\alpha}(\beta - \alpha) < e^{\beta}f(\beta) - e^{\alpha}f(\alpha) < e^{\beta}(\beta - \alpha)$.

28.12. i. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

ii. Να βρείτε το όριο της $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ όταν $x \to +\infty$.

Απ: ii. 1

28.13. Η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ έχει παράγωγο $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x_0) = 0$ με $x_0 \in (\alpha, \beta)$, να δείξετε ότι $\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\alpha)} < f(x_0) < \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$.

28.14. Για κάθε $\kappa > 0$ να δείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\frac{3\kappa}{5\sqrt[5]{\kappa^4}} + \sqrt[5]{\kappa} > \sqrt[5]{4\kappa}$.

28.15. i. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \alpha+1]$ $\alpha \in \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = 2010$ και $-1 \leq f'(x) \leq 2$ για κάθε $x \in (\alpha, \alpha+1)$.
Να δείξετε ότι $2009 \leq f(\alpha+1) \leq 2012$.
ii. Να λυθεί η εξίσωση $\alpha^x - \beta^x = (\alpha + 1)^x - (\beta + 1)^x$ με $1 < \alpha < \alpha+1 < \beta$.

28.16. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \alpha+1]$, $\alpha > 0$ με $|f''(x)| \leq \varphi$, με $\varphi > 0$ και $x \in [\alpha, \alpha+1]$. Αν $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in (\alpha, \alpha+1)$, να δείξετε ότι $|f'(\alpha)| + |f'(\alpha+1)| \leq \varphi$.

28.17. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) \leq M < 0$, $M < 0$ να δείξετε ότι:

i. $f(x) \leq xM + f(0)$, αν $x > 0$

ii. $f(x) \geq xM + f(0)$, αν $x < 0$

iii. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

iv. η f είναι αντιστρέψιμη

29. Σταθερή Συνάρτηση

29.1. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για τη ν οποία ισχύει $f(2) = 3$ και $xf'(x)=3x - 2f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2f(x) - x^3$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x) = \dfrac{4+x^3}{x^2}$

29.2. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ και $f'(x) = f(x)\sigma\varphi x$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

i. Να Αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$ είναι σταθερή στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x) = 2\eta\mu x$

29.3. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(4) = 4e^{-2}$ και $2\sqrt{x}\cdot f'(x) + f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ για κάθε $x \geq 0$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $g(x) = e^{\sqrt{x}}\cdot f(x) - \sqrt{x}$ είναι σταθερή στο $[0, +\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+2}{e^{\sqrt{x}}}$

29.4. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) = -\dfrac{3f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 2$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^3 f(x)$ είναι σταθερή.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο A(0, 1).

Απ: ii. $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $x > 0$, iii. $y = -\dfrac{3}{8}x + 1$

29.5. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) = \dfrac{4}{x} \cdot f(x)$ για κάθε $x > 0$ και $f'(2) = 64$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^4}$ είναι σταθερή.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^8 - 12x^4 + x} - f(x))$.

Απ: ii. $f(x) = 2x^4$ iii. -3

29.6. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ μ
ε

$f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α. η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f'(x) + f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή

β. $(f(x)e^x)' = e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. ο τύπος της f είναι $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

29.7. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(2) = 3$ και $f'(x) = -\dfrac{f(x)}{x^2 + x}$ για κάθε $x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{xf(x)}{x+1}$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

β. Να βρείτε τον τύπο της f.

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$, ώστε $f(\xi) = e^{\xi}$.

Απ: $f(x) = \dfrac{2x+2}{x}$

30. Εύρεση Συνάρτησης

30.1. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(2) = 5$ και $f'(x) = 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x) = x^2 + 3x - 5$

30.2. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 3$ και $f'(x) = e^x - ημx$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x) = e^x + συνx + 1$

30.3. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για τ ην οποία ισχύει $f(1) = 3$ και $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x) = \sqrt{x} + \ln x + \frac{1}{x} + 1$

30.4. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και $f'(x) = 2x \cdot ημx + x^2 \cdot συνx$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x) = x^2 ημx$

30.5. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ και $f'(x) = -\frac{xημx + συνx}{x^2}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x) = \frac{συνx}{x} + 1$

30.6. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\pi) = 0$ και $xf'(x) + f(x) = \text{συν}x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x) = \dfrac{\text{ημ}x}{x}$

30.7. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\ln 2) = \ln 16$ και $f'(x)x - f(x) = x^2 e^x$ για κάθε $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x) = xe^x + 2x$

30.8. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f\colon (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi^2}{72}$ και $f'(x)\text{ημ}x - f(x)\text{συν}x = 2x\text{ημ}^2x$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x) = x^2\text{ημ}x$

30.9. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x) = \ln \dfrac{e^x + 1}{2}$

30.10. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(0) = e$ και $f'(x) - 2xf(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x)\, e^{x^2+1}$

30.11. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(1) = 2$ και $xf'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

i. τον τύπο της f. ii. το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)\eta\mu x)$.

Απ: i. $f(x) = \dfrac{2}{x}$, ii. 0

30.12. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) - f(x) = e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε:

i. τον τύπο της f

ii. το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Απ: i. $f(x) = e^x\eta\mu x$ ii. 0

30.13. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) - f(x) = \dfrac{e^{2x} + 2xe^x}{e^x + x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ διέρχεται από το σημείο $B(2, 2)$. Να βρείτε:

i. την εξίσωση της εφαπτομένης (ε)

ii. τον τύπο της f.

Απ: i. $y = x$, ii. $f(x) = e^x\ln(e^x + x^2)$

30.14. Δίνεται συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει: $x^2 f''(x) + xf'(x) - f(x) = 3x^2$ για κάθε $x > 0$. Αν επιπλέον ισχύει: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x) - 3x^2}{x^2 - 4x + 3} = 2$ να βρείτε:

i. τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

ii. τον τύπο της f.

Απ: i. $f(1) = 3$, $f'(1) = 2$, ii. $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{x}$

30.15. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει: $f'(x) + xf''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2017$. Να αποδείξετε ότι είναι $f(x) = 2017$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

30.16. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(-2) = 3$ και $(x-1)f'(x) = 2x^2 + x - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x) = x^2 + 3x + 5$

30.17. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1) = 4$, $f(-1) = -2$ και: $xf'(x) - 2f(x) = x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^3 - x^2, & x < 0 \end{cases}$

30.18. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(\pi) = 1$ και $x^2 f'(x) = f(x)(x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

i. τον τύπο της f ii. το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Απ: i. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\eta\mu x}{x}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ ii. 1

30.19. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 1$ και $f(-1) = -4$ και $x^3f'(x) + x^2f(x) = 1$ για κάθε

$x \neq 0$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f.

ii. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ β. $\lim\limits_{x\to -\infty} (xf(x))$ γ. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{f(x)}$

Απ: i. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x^2}, & x > 0 \\ \dfrac{3x-1}{x^2}, & x < 0 \end{cases}$

30.20. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{e}$ και $xf'(x) = (x-1)f(x)$ για κάθε $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

30.21. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(0, \dfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$ και $f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = f(x)\eta\mu x$ για κάθε $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x) = 2e^x\eta\mu x$

30.22. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οπο ία ισχύει: $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$ έχει εξίσωση $y = 5x + 3$. Να βρείτε:

i. τις τιμές $f'(0)$ και $f(0)$ ii. τον τύπο της f.

Απ: i. 5,3 ii. $f(x) = e^x(2x + 3)$

30.23. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει: $f(0)=2f'(0) =1$ και $f''(x)f(x)+(f'(x))^2 = f(x)f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

(Υποδ: διατήρηση προσήμου)

Απ: $f(x) = \sqrt{e^x}$

30.24. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 0$ και $xf'(x) - f(x) = x$ για κάθε $x > 0$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f.

ii. Να Αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται Από το σημείο $A(4, 5)$.

Απ: i. $f(x) = x\ln x$

30.25. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και $f(x) + f'(x) = 2xe^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 0)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ): $ex + y + 2017 = 0$.

Απ: i. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

30.26. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f\colon (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\ln f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \ln 2$ και $f'(x)\text{συν}x + f(x)\text{ημ}x = f(x)\text{συν}x$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x} = 2\text{ημ}x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

Απ: i. $f(x) = e^x\,\text{συν}x$

31. Εύρεση Μονοτονίας - Ακροτάτων

31.1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = (x - 1)e^x$ ii. $f(x) = \dfrac{x+2}{e^x}$

Απ: i. $(-\infty, 0]$ f ↘ $[0, +\infty)$ f ↗ , Ε: $f(0) = -1$ ii. $(-\infty, -1]$ ↗ , $[-1, +\infty)$ ↘ Μ: $f(-1)$

31.2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1, & \text{αν } x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 7, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 - 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ -2x^3 + 3x^2 - 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

Απ: i. f ↘ όταν $x \in (-\infty, 1]$ και όταν $x \in [2, 3]$, f ↗ όταν $x \in [1, 2]$ και όταν $x \in [3, +\infty)$

ii. f ↘ όταν $x \in [-1, 0]$ και όταν $x \in [1, +\infty)$, f ↗ όταν $x \in (-\infty, -1]$ και όταν $x \in [0, 1]$

31.3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση:

$f(x) = 3e^x + x^2 - 3x + 7$

Απ: f ↗ όταν $x \in [0, +\infty)$ και f ↘ όταν $x \in (-\infty, 0]$

31.4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση:

$f(x) = 2e^{x-1} - x^2 + 3$

Απ: f ↗ όταν $x \in [1, +\infty)$ και f ↘ όταν $x \in (-\infty, 1]$

31.5. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση:

$f(x) = x^3 - 6συνx - 3x^2$

Απ: f ↗ στο $\mathbb{R}$

31.6. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$$

Απ: $(0, 1]$ ↘ $[1, +\infty)$ ↗ Ε: $f(1) = 1$

31.7. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση:

$$f(x) = (\lambda - 1)x^3 + 6x^2 + 3(\lambda + 2)x - 7$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. .

Απ: $\lambda \geq 2$

31.8. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xf(x) - \eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} = -4$

i. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Απ: i. $f(0) = f'(0) = 0$, ii. $(-\infty, 0]$ ↗ $[0, +\infty)$ ↘ Μ: $x = 0$

31.9. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = -3$ και $f'(x)x - f(x) = 2x\ln x$ για κάθε $x > 0$

i. Να βρείτε τον τύπο της f.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Απ: i. $f(x) = -3x + x(\ln x)^2$ ii. f ↗ όταν $x \in (0, e)$ και f ↘ όταν $x \in [0, +\infty)$

31.10. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^3 - 3x$

ii. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$

iii. $f(x) = -x^3 + 12x^2 - 5$

iv. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$

Απ: i. Τ.Μ. $f(-1) = 2$, Τ.Ε. $f(1) = -2$, ii. Τ.Μ. $f(1) = 19$, Τ.Ε. $f(3) = 15$, iii. Τ.Μ. $f(0) = -5$, Τ.Ε. $f(8) = 251$
iv. Τ.Μ. $f(1) = 0$, Τ.Ε. $f(3) = -28$

31.11. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5$, με $x \in [-1, 3]$

ii. $f(x) = \dfrac{2x+11}{x+1}$, με $x \in [2, 8]$

iii. $f(x) = \dfrac{10x}{x^2+1}$, με $x \in [-2, 2]$

iv. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, με $x \in (-1, 1]$

Απ: i. Τ.Μ. $f(-1) = 14$, Τ.Ε. $f(0) = 5$, Τ.Μ. $f(1) = 6$, Τ.Ε. $f(2) = 5$, Τ.Μ. $f(3) = 14$

ii. Μ: $f(2) = 5$, Ε: $f(8) = 3$, iii. Τ.Μ. $f(-2) = 4$, Τ.Ε. $f(-1) = -5$, Τ.Μ. $f(1) = 5$, Τ.Ε. $f(2) = 4$, iv. Ε: $f(0) = 0$, Τ.Μ. $f(1) = \frac{1}{2}$

31.12. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \begin{cases} x^2+2x-6, & \alpha\nu\, x \le 2 \\ x^2-8x+14, & \alpha\nu\, x > 2 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+3, & \alpha\nu\, x \le 0 \\ -x^2+6x+3, & \alpha\nu\, x > 0 \end{cases}$

Απ: i. $(-\infty, -1]$ $\searrow$ $[-1, 2]$ $\nearrow$ $[2, 4]$ $\searrow$ $[4, +\infty)$ $\nearrow$ άρα Τ.ΕΛ. $f(-1) = -7$, $f(4) = -2$, Τ.ΜΕΓ $f(2) = 2$

ii. $(-\infty, -1]$ $\searrow$ $[-1, 3]$ $\nearrow$ $[3, +\infty)$ $\searrow$ Τ.ΕΛ. $f(-1) = 2$, Τ.Μ. $f(3) = 12$

31.13. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$

και α, β πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 54$

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

iii. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης f.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$.

Απ: ii. $(-\infty, -2]$ $\nearrow$ $[-2, 3]$ $\searrow$ $[3, +\infty)$ $\nearrow$ iii. ΤΜ: στο $x_0 = -2$ ΤΕ: στο $x_0 = 3$

31.14. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 + \kappa x^2 + 3x - 2$

όπου $x \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{R}$, της οποία η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1, 1). Να αποδείξετε ότι:

i. $\kappa = -1$

ii. η συνάρτηση f δεν έχει τοπικά ακρότατα

iii. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

31.15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 2xe^{2x} - 1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

Απ: i. $(-\infty, 0]$ ↗ $[0, +\infty)$ ↘ ΟΛ.ΜΕΓ $f(0) = 0$ ii. $x = 0$

31.16. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την επόμενη συνάρτηση: $f(x) = 6x\ln x - 6x - x^3$

Απ: γν. φθ. στο $(0, +\infty)$

31.17. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f.

Απ: f γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, \frac{1}{2}]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{1}{2}, 1]$

31.18. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f με $f(x) = \text{συν}x + \frac{x^2}{2} + 3$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Απ: f γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$

31.19. Έστω συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + \mu x^2 + \left(\mu + \frac{4}{3}\right)x + 1$ όπου $\mu \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του μ για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Απ: $-1 \leq \mu \leq 4$

31.20. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{\lambda x^2 + 1}{x + 1}$ να είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(-1, +\infty)$.

Απ: $\lambda \in [-1, 0)$

31.21. Έστω $f(x) = \alpha x^3 + 3\alpha x^2 + 2x + 3$. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Απ: $0 \leq \alpha \leq \frac{2}{3}$

31.22. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R^*$ για τις οποίες η συνάρτηση

$f(x) = \alpha x^3 + 3x^2 + x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Απ: $\alpha \geq 3$

31.23. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με: $g(0) = 1$ και $f'(x) = g^2(x) \neq 0$, $f^2(x) + g^2(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i. $g'(x) = -g(x) \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

ii. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

iii. Η g είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα Από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$.

Απ: ii. f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ iii. g γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$))

31.24. Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^3}$ ii. $g(x) = x^3 \ln x,\ x \in (0, 4]$ iii. $h(x) = x(x - 1)^3$

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 0)$, $(0, 2]$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$ Τ.Μ. στο $x = 2$ το $f(2) = \frac{1}{4}$, ii. g γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^{-\frac{1}{3}}]$ και g γνησίως αύξουσα στο $[e^{-\frac{1}{3}}, 4]$ Ε. στο $x = e^{-\frac{1}{3}}$ το $g(e^{-\frac{1}{3}}) = -\frac{1}{3e}$ και Τ.Μ. στο $x = 4$ το $g(4) = 4^3 \ln 4$, iii. h γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \frac{1}{4}]$ και h γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{4}, +\infty)$ Ε. στο $x = \frac{1}{4}$ το $h(\frac{1}{4}) = -\frac{27}{256}$

31.25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$.

i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^4 - 8x^2 = -5$.

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στα $[-2, 0]$, $[2, +\infty]$ και f γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -2]$, $[0, 2]$ Τ.Ε. στο $x = -2$ το $f(-2) = -11$ και στο $x = 2$ το $f(2) = -11$ Τ.Μ. στο $x = 0$ το $f(0) = 5$, ii. 4 ρίζες, iii. $Rf = [-11, +\infty)$

31.26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

i. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f.

ii. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακρότατων της f τότε να υπολογίσετε τον λ ώστε τα σημεία $A(0, 0)$, $B(x_1, f(x_1))$ και $\Gamma(x_2, f(x_2))$ να είναι συνευθειακά.

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 2]$, $[3, +\infty)$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[2, 3]$ Τ.Μ. στο $x = 2$ το $f(2) = 28 + \lambda$ Τ.Ε. στο $x = 3$ το $f(3) = 27 + \lambda$, ii. $\lambda = -30$ $B(2, -2)$ $\Gamma(3, -3)$)

32. Θεώρημα FERMAT

32.1. Για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι:

$x^2 + x \geq 2 + \alpha \ln x$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$.

32.2. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει: $f^2(x) \leq 4f(x^2) - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(1)$

ii. Να Αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$

Απ: i. $f(0) = 2$ $f(1) = 2$

32.3. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε:

$f^3(x) + 3f(x) = e^x + \sigma\upsilon\nu x + 2x^3 + 2x + 7$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Απ: f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

32.4. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $(f(x))^3 + 3f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $\alpha^2 < 3\beta$. Να αποδείξτε ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Απ: f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

32.5. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ τέτοια ώστε $f^2(x) + xf(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}$ για κάθε $x > 0$. Αν για $x = x_0$ η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο τότε να βρεθεί ο x_0.

Απ: $x_0 = 1$

32.6. Αν $f(x) = x^3 + 3(\lambda + 1)x^2 + (3\lambda + 3)x + 6$, να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Απ: $\lambda \in [-1, 0]$

32.7. Αν $f(x) = \lambda x^3 + 2x^2 + \lambda x + 1$, να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η f να μην παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Απ: $\lambda \in (-\infty, \frac{-2\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

32.8. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \left(\alpha\sqrt{x} + \beta\right) \cdot x^2$ να παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ακρότατο με τιμή -3.

Απ: $\alpha = 12$, $\beta = -15$

32.9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 3$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β όταν η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα για $x_1 = 1$ και $x_2 = -\frac{5}{9}$. Στη συνέχεια καθορίστε το είδος των ακρότατων.

Απ: $\alpha = 2$; $\beta = -5$ Τ.Μ. στο $x = -\frac{5}{9}$ Τ.Ε. στο $x = 1$

32.10. Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g ισχύει $f(x) - g(x) \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξουμε ότι οι C_f, C_g στο κοινό τους σημείο O(0, 0) δέχονται την ίδια εφαπτομένη.

32.11. Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $f''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν για την f ισχύει $f'(x) + x^2 = (5 - x)f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Απ: f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

32.12. Έστω η συνάρτηση $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha - x\ell n\frac{e}{x}$, η οποία έχει τοπικό ακρότατο το $-\frac{1}{2}$

i. Να δείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$

ii. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Απ: ii. f γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και f γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ Ε στο $x = 1$ το $f(1) = -\frac{1}{2}$

32.13. Να αποδείξετε ότι, αν για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει $2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1$, τότε η f δεν έχει ακρότατα.

32.14. Αν $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 6\alpha^2x^2 - 7$, $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε η συνάρτηση f μπορεί να έχει το πολύ ένα τοπικό ακρότατο για κάθε $\alpha \neq 0$.

32.15. Αν $\alpha > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^x + \left(\frac{2}{\alpha+1}\right)^x \geq 2$ δείξτε ότι $\alpha = 2$.

32.16. Δίνεται η συνάρτηση f με

$f(x) = \left(\frac{\alpha}{3}+\gamma\right)x^3 + \beta x^2 + (\alpha+2\beta+3\gamma)x + \beta + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\gamma \neq 0$.

Αν $f(x) \geq \beta + \gamma$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 - (\alpha+2\beta)x + 2\gamma^2 = 0$, έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

32.17. Για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2<3\gamma$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0, 1)$.

(Εξετάσεις 2001)

32.18. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(x)\cdot e^{\alpha x} \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ και η εφαπτομένη της C_f στο $M(0, f(0))$ διέρχεται Από το σημείο $A(\alpha, \alpha)$ τότε να δείξετε ότι $f'(0) = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$.

33. Σύνολο τιμών - Πλήθος ριζών

33.1. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{1-x} - \ln x + 2$

ii. $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x} + 1$

iii. $f(x) = \dfrac{4-x}{x-2} + 2$

Απ: i. $[3, +\infty)$, ii. $\mathbb{R}$, iii. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

33.2. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & \text{αν} -1 \le x \le 1 \\ x^2 + x - 2, & \text{αν} \, 1 < x \le 3 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 - 7, & \text{αν} -2 \le x \le 1 \\ x\ln x - 2x, & \text{αν} \, 1 < x \le e^2 \end{cases}$

33.3. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x + συνx + \ln x$

i. Να Αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

Απ: ii. $\mathbb{R}$

33.4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln(x - 5)x + 2x - 12$

i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f;

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2017$ έχει μοναδική λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Απ: i. $x > 5$ iii. $(-\infty, +\infty)$

33.5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

Απ: i. $(-\infty, 1]$ και $[0, 2]$ f $\searrow$, $[-1, 0]$ και $[2, +\infty)$ f $\nearrow$

33.6. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$e^{x^3+2} = \alpha e^{3x^2}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

33.7. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: (0, e) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\sqrt{e}) = \ln 2$ και $e^{-f(x)} \cdot f'(x) = \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0, e)$

i. Να βρείτε τον τύπο της f

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2017$ έχει ακριβώς μία λύση.

Απ: i. $f(x) = -\ln(1 - \ln x)$

33.8. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$f(x) = 2x^3 - \kappa x^2 + 10$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

ii. Για κ = 3

α. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $(-\infty, 0]$

γ. για κάθε $\alpha \in (14, 15)$, να Αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha - 5$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$

33.9. i. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

α. $f(x) = 3\sqrt{x} + 2x - 3$ β. $g(x) = e^{x+1} + \ln x - e^2$

Απ: i. α. $R_f = [-3, +\infty)$ β. $R_g = R$

ii. Δείξτε ότι οι εξισώσεις έχουν μία μόνο πραγματική ρίζα.

α. $3\sqrt{x} = 3 - 2x$ β. $e^{x+1} + \ln x = e^2$

33.10. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{x+1} + ex - 3,\ x \in [-1, 0]$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της.

ii. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^{x-1} + ex = 3$ είναι αδύνατη στο $[-1, 0]$.

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$, $R_f = [-e - 2, e - 3]$

33.11. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα στο $(0, \pi)$.

33.12. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x\ln x - (\ln x)^2 = 2x - 1$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1, e^2)$.

33.13. Να βρείτε το πλήθος ριζών των εξισώσεων.

i. $x^3 - x^2 + 4 = 0$

ii. $x^5 + 2x^3 + 3x - 19 = 0$

Απ: i. μια ii. μια

33.14. Έστω συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1-x}{3}e^x$ με $x \in [0, 1]$.

i. Μελετήστε την f ως προς την μονοτονία και προσδιορίστε το σύνολο τιμών της.

ii. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, \frac{1}{3})$.

Απ: i. f γνησίως φθίνουσα στο [0, 1], $Rf = [0, \frac{1}{3}]$

33.15. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2\sqrt{1+x^3}$

i. Να μελετήσετε την μονοτονία της f.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να Αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\sqrt{1+x^3} = \sqrt{2} - x^3$ έχει ακριβώς μία λύση.

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$ ii. $Rf = [-1, +\infty)$

33.16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^5 + 5x - 6$ και $g(x) = 2\sqrt{x} + x - 3$.

i. Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι γνησίως αύξουσες στα πεδία ορισμού τους.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

iii. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $x^5 + 5x - 6 = 0$ και $2\sqrt{x} + x - 3 = 0$ έχουν ακριβώς μια ρίζα, την $x = 1$.

Απ: ii. $Rf = R$, $Rg = [-3, +\infty)$

33.17. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 + \ln(x + 1)$, είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Η εξίσωση $e^x = 1 - \ln(x + 1)$, έχει ακριβώς μια λύση, την $x = 0$.

33.18. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + \alpha$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[-1, 1]$.

iii. Αν $-2 < \alpha < 2$, να Αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + \alpha = 0$, έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(-1, 1)$.

Απ: ii. $Rf = [\alpha - 2, \alpha + 2]$

33.19. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$, είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα αυτά καθώς και το σύνολο τιμών της f.

ii. Η εξίσωση $x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = \alpha$ και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στα $A_1 = (-\infty, -1)$ $A_2 = (-1, 1)$ $A_3 = (1, +\infty)$ $f(A_1) = R$ $f(A_2) = R$ $f(A_3) = R$ $Rf = R$

33.20. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + 2x = 2$ έχει μία μόνο ρίζα στο $(0, +\infty)$.

ii. Να μελετήσετε τη μονοτονία της $f(x) = \dfrac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της f στο $[1, 4]$.

Απ: i. $x = 1$ μοναδική, ii. f γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, iii. $f(x) > 0$

33.21. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4x^2 + x + 1 - ημx - συνx$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο R.

ii. Μελετήστε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο R.

Απ: i. $x = 0$ μοναδική ii. f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ Ε στο $x = 0$ το $f(0) = 0$, iii. $x = 0$ μοναδική

33.22. i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$

ii. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στα $[0, 1]$, $[2, +\infty)$ και f γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, 0]$, $[1, 2]$ T.E. στο $x = 0$ το $f(0) = -1$ T.M. στο $x = 1$ το $f(1) = 0$ T.E. στο $x = 2$ το $f(2) = -1$, ii. 3 (δυο διαφορετικές και μια διπλή), iii. $Rf = [-1, +\infty)$

33.23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2ημx - x + 3$, $x \in [0, π]$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατι.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ημx = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$, έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, π)$.

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{π}{3}]$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{π}{3}, π]$ T.E. στο $x = 0$ το $f(0) = 3$ T.M. στο $x = \frac{π}{3}$ το $f(\frac{π}{3}) = \sqrt{3} - \frac{π}{3} + 3$ T.E. στο $x = π$ το $f(π) = -π + 3$

33.24. i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$ και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $\varphi(x) = 2x\ln x + x^2 - 4x + 3$.

iii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = x\ln x$ και $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ $x = 1$ μοναδική ρίζα $f(x) < 0$, $0 < x < 1$ $f(x) > 0$, $x > 1$
ii. φ γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και φ γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ Ε. στο $x = 1$ το $\varphi(1) = 0$

33.25. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = xe^{2x-1}$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

ii. Για κάποιο $\alpha > 0$ θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = \alpha$. Να βρεθεί το πλήθος των θετικών ριζών της πιο πάνω εξίσωσης.

Απ: i. f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ και f γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ Ε. στο $x = -\frac{1}{2}$ το $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2e^2}$, ii. μια στο $(0, +\infty)$

33.26. Έστω $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{8-2x}$, $x \in [2, 4]$.

i. Μελετήστε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ να έχει μια τουλάχιστον λύση.

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στο $[2, \frac{8}{3}]$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{8}{3}, 4]$ Τ.Ε. στο $x = 2$ το $f(2) = 2$ Τ.Μ. στο $x = \frac{8}{3}$ το $f(\frac{8}{3}) = \sqrt{6}$ Τ.Ε. στο $x = 4$ το $f(4) = \sqrt{2}$

33.27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 9}{x^2 - 4}$.

i. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

ii. Να βρεθεί το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

33.28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \le 1 \\ \ln x, & 1 < x < e \\ \dfrac{e}{x}, & x \ge e \end{cases}$

i. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

ii. Να βρεθεί το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

33.29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \in [-2, 3] \\ x^3 - 6x^2 + 30, & x \in (3, 5] \end{cases}$

Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

33.30. Αν $f(x) = x^{11} + \dfrac{11}{x^4 + 11} - 111$ με $x \ge 1$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

34. Επίλυση Εξισώσεων - Ανισώσεων

34.1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $e^x = 1 - 2x$

ii. $3x^2 + 2x = 5 - \ln x$

iii. $e^{x-1} + x^3 = 3 - x$

iv. $(x^2 + 3x + 4)e^x = 4$

34.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e}{x} - \ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $\frac{e}{x} = \ln x$ β. $\frac{e}{|x|+3} - \frac{e}{2|x|+1} = \ln\frac{|x|+3}{2|x|+1}$

Απ: i. f $\searrow$ για $x > 0$

34.3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^2 + 2\ln x = 2x$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

34.4. Δίνεται συνάρτηση $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $xf''(x) = 4x - f'(x)$ για κάθε $x > 0$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = 3x - 5$.

i. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$

ii. Να βρείτε τον τύπο της f

iii. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, e)$.

Απ: i. $f(1) = -2$, $f'(1) = 3$, ii. $f(x) = x^2 + \ln x - 3$

34.5. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

i. $2^x + 3^x < 5^x$ ii. $\dfrac{x+5}{x+2} - \ln x \le 2$

iii. $1 + \ln x < \dfrac{4-2x^2}{x+1}$ iv. $\ln(x^2 + 1) + e^x \ge 1 - x$

Απ: i. $x > 1$, ii. $x > 1$, iii. $x < 1$, iv. $x \ge 0$

34.6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x - x$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

ii. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \le x + 6$

β. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x^2+3x} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2+10} > x^2 + 3x - 10$

γ. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1} < \sigma\upsilon\nu x - x - 1$

Απ: i. f $\searrow$ ii. $x \ge -2$, $x \in [-5, 2]$, $x > 0$

34.7. Δίνεται μια συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$f(x) = -f(2 - x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) έχει μοναδική ρίζα.

iii. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g, στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x'x, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^o.

34.8. Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x + 1) = x$

34.9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$

i. Αν $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι τοπικά ακρότατα της f, με $x_1 < x_2 < x_3$, να Αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.

ii. Αν $0 < \alpha < 1$, να Αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(-1, 0)$.

34.10. Δίνεται συνάρτηση $f: [1, 4] \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύουν: $f(2) < f(1) < f(4) < f(3)$

Να αποδείξετε ότι:

i. η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο $(1, 4)$.

ii. η εξίσωση $f''(x) + 2xf'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1, 4)$.

34.11. Δίνεται συνάρτηση $f:[1, 4] \to \mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[1, 4]$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $[-3, 2]$ και ισχύουν $f(1) = -2$ και $f(4) = 1$. Να Αποδείξετε ότι:

i. υπάρχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f κάθετη στην ευθεία: (ζ): $2x + 2y - 2011 = 0$

ii. η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο $(1, 4)$

iii. η εξίσωση $f'(x) = (e^x + x^2)f(x)$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1, 4)$.

34.12. i. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x - x$, $x \in \mathbb{R}$ και $0 < \alpha < 1$.

ii. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η ισότητα: $\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2)$ όπου $0 < \alpha < 1$.

Απ: i. f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. ii. $\lambda = 2$ ή $\lambda = -1$

34.13. i. αποδείξτε ότι η εξίσωση $e^x + 2x = 1$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ii. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f^3(x) + f^2(x)\cdot f(x) = e^x + x^2 - x - 4,\ x \in \mathbb{R} \text{ και } f(x) \neq 0.$$

Αποδείξτε ότι η f παρουσιάζει μοναδικό ακρότατο.

iii. Προσδιορίστε το είδος του ακρότατου.

Απ: i. $x = 0$ μοναδική, iii. Ε στο $x = 0$

34.14. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f με $f(x) = (\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x$. Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση

$$(3^{x-1}+4^{x-1})5^{1-2x} < (3^{1-2x} + 4^{1-2x})5^{x-1}.$$

Απ: f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, $x > \frac{2}{3}$

35. Απόδειξη Ανισοτήτων

35.1. Δίνεται η συνάρτηση f: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \sigma\varphi x - x$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

ii. Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta} < \beta - \alpha$

(Υποδ.: ημ(α -β) =ημασυνβ -ημβσυνα)

Απ: f $\searrow$

35.2. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 1$ και $xf'(x) > 2x^2 + 1$ για κάθε $x > 0$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) > x^2 + \ln x$ για κάθε $x > 1$

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - x^2 = \ln x$

35.3. Δίνεται συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει: $xf''(x) + f'(x) = -1$ για κάθε $x > 0$

και η C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ έχει οριζόντια εφαπτομένη την ευθεία με εξίσωση $y = -1$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

iii. Αν $\alpha > \beta > 1$, να Αποδείξετε ότι $\ln\frac{\alpha}{\beta} < \alpha - \beta$

iv. Να λύσετε την ανίσωση $|x| - 2 < \ln\frac{2|x|+1}{|x|+3}$

Απ: i. $f(x) = \ln x - x$, ii. f $\searrow$ iv. $-2 < x < 2$

35.4. Να αποδείξετε ότι:

i. $x^2 \geq 1 + 2\ln x$ για κάθε $x > 0$

ii. $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$

iii. $(1 - x)e^x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iv. $\ln(ex) \leq x$ για κάθε $x > 0$

35.5.

i. Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση: $f(x) = 6e^x(x-1) - x^2(2x + 3)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Απ: ii. f ↗ όταν $x \in (-\infty, 0]$ και f ↘ όταν $x \in [0, +\infty)$, ολ. ελαχ. $f(0) = -6$

35.6. Έστω $f(x) = \eta\mu x - x$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f.

ii. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ ισχύει $\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha < \beta - \alpha$.

Απ: i. f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

35.7. Έστω $f(x) = x^{2001} + x^{199} + 100x + \alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης f.

ii. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\lambda^{4002} + \lambda^{398} + 100\lambda^2 > (3\lambda - 2)^{2001} + (3\lambda - 2)^{199} + 100(3\lambda - 2).$$

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ii. $\lambda \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

35.8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^5 + x^3 + x - 2004$.

i. Να εξεταστεί η f ως προς τη μονοτονία και

ii. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$ $f(\alpha^2 + \beta^2) > f(2\alpha\beta)$.

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

35.9. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$, $x>0$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 0.

iii. Να λυθεί η ανίσωση: $\ln(2\lambda^2+2)-\frac{1}{\lambda^2+3}>\ln(\lambda^2+3)-\frac{1}{2\lambda^2+2}$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στο [1, +∞) και γνησίως φθίνουσα στο (0, 1] ii. x = 1 iii. λ > 1 ή λ < -1

35.10. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση f(x) = ημx – xσυνx είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.

ii. ημx – xσυνx > 0, για κάθε x∈$(0, \frac{\pi}{2})$.

iii. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{ημx}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο ανοικτό διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

35.11. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση f(x) = 2ημx + εφx – 3x, $x\in[0, \frac{\pi}{2})$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. 2ημx + εφx ≥ 3x, για κάθε $x\in[0, \frac{\pi}{2})$.

35.12. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0, 6] της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται Από το σημείο Α(0, 1). Αν $f'(x) > x$ για κάθε $x \in [0, 6]$ δείξτε ότι:

i. Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \dfrac{x^2}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 6].

ii. $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 6]$.

iii. Το σημείο Β(6, 18) δεν ανήκει στη C_f.

35.13. I. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^{\lambda x}}{x^2 + \lambda^2}$ με $\lambda > 1$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

ii. Δείξτε ότι $e^{\lambda x} \geq 1 + \left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^2$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

iii. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και $\alpha - \beta = \dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{\alpha^2 + \lambda^2}{\beta^2 + \lambda^2}$ δείξτε ότι $\alpha = \beta$.

Απ: Α. i. f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

II.

i. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση f με $f(x) = e^x(x^2 + 3) + 7x - 3$.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $e^x(x^2 + 3) = 3 - 7x$.

iii. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

$e^{\lambda}(\lambda^2 + 3) - 7\lambda^2 = e^{\lambda^2}(\lambda^4 + 3) - 7\lambda$.

Απ: Β. i. f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ii. $x = 0$ μοναδική   iii. $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$

35.14. i. Να αποδείξετε ότι ημx + $\frac{x^3}{3} > -x$ για κάθε $x > 0$.

ii. Δίνεται συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ τέτοια ώστε:

$$g^3(x)+g(x)=\frac{1}{12}x^4-\text{συν}x+\frac{1}{2}x^2 \text{ για κάθε } x>0.$$

Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης g.

Απ: ii. g γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

35.15. Αν για την συνάρτηση f ισχύει $f(0) = 0$ και $f'(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ για κάθε $x > 0$ δείξτε ότι $0 < f(x) < x$, για κάθε $x > 0$.

35.16. i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x - \ln(1 + x) \text{ και } g(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

ii. Δείξτε ότι $x-\frac{x^2}{2}\le \ln(x+1)\le x$ για κάθε $x \ge 0$.

iii. Αν για μια συνάρτηση h είναι $h(x) > 0$ για $x \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=+\infty$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{h(x)}$.

Απ: i. f γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και g γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$ iii. 0

35.17. Έστω οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει $f'(x)\, g(x) < f(x)\, g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $g(x) \neq 0$, δείξτε ότι $f(9) \cdot g(10) > f(10)\, g(9)$.

35.18. i. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x - x > -1$.

ii. Δίνεται η συνάρτηση g ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g(R) = (-1, +\infty)$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$g^2(x) + 2g(x) = 2e^x - x^2 + 2x$, μελετήστε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Απ: ii. g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

35.19. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

I. α) $e^x > 1 + x$ β) $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

II. α) $συνx > 1 - \frac{1}{2}x^2$ β) $ημx > x - \frac{1}{6}x^3$

III. α) $(1+x)^ν > 1 + νx$, $ν \in \mathbb{N}$ με $ν \geq 2$

β) $(1+x)^ν > 1 + νx + \frac{ν(ν-1)}{2}x^2$, $ν \in \mathbb{N}$ με $ν \geq 3$

35.20. Να αποδείξετε ότι $x^α - αx \leq 1 - α$ για κάθε $x > 0$ όταν $0 < α < 1$.

35.21. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο [2, 8] με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [2, 8]$. Αν $f(2) = f(8)$, τότε:

i. Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο (2, 8), έστω x_0.

ii. Αποδείξτε ότι για $x = x_0$ η f παρουσιάζει ελάχιστο.

iii. Αν $f(x_0) = 1$ δείξτε ότι $f(8) + 2f(2) > 3$.

35.22. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και f' γνησίως φθίνουσα στο (α, β).

i. Δείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

ii. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα μόνο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε η f να παρουσιάζει μέγιστο στο x_0.

iii. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$f'(x_1) - f'(x_2) > \frac{2f(x_0)}{\beta - \alpha}$$

35.23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Υπολογίστε τους πραγματικούς α, β, γ όταν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο 1 η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα των x στο σημείο με τετμημένη –1 και δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο 2. Για τις τιμές αυτές να μελετήσετε την μονοτονία και τα ακρότατα της f.

Απ: $\alpha = -\frac{9}{2}$, $\beta = 6$, $\gamma = \frac{23}{2}$ f γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 1]$, $[2, +\infty)$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$

Τ.Μ. στο $x = 1$ το $f(1) = 14$ Τ.Ε. στο $x = 2$ το $f(2) = \frac{27}{2}$

35.24. i. Να μελετήσετε την f με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ως προς της μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι $\ln x \le \frac{x}{e}$, $x > 0$.

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$ Μ στο $x = e$ το $f(e) = \frac{1}{e}$

35.25. i. Να μελετήσετε την f με $f(x) = \ell nx - x + 1$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι $\ell nx \leq x - 1$, $x > 0$.

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ i. f γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ M στο $x = 1$ το $f(1) = 0$

35.26. Δίνεται η συνάρτηση f με $f''(x) < 0$ για $x \in [1, 3]$ και $f(2) = 0$, $f(3) = 1$. Να δείξετε ότι $f(x) < x - 2$ αν $x \in [1, 2]$ και $f(x) > x - 2$ αν $x \in (2, 3)$.

35.27. i. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 2)$ ισχύει η σχέση $x^x(2 - x)^{2-x} \geq 1$.

ii. Αν $\alpha, \beta \in (0, 2)$, να δείξετε ότι $\alpha^\alpha(2 - \alpha)^{2-\alpha} + \beta^\beta(2 - \beta)^{2-\beta} \geq 2$.

iii. Αν $\alpha \in (0, 2)$ και $\alpha + \beta = 2$, να δείξετε ότι $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \geq 1$.

35.28. Αν για τις παραγωγίσιμες στο $[0, +\infty)$ συναρτήσεις f, g ισχύει:

$f'(x) = g'(x) + e^x + \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \geq 0$, δείξτε ότι

$f(0) + g(x) \leq g(0) + f(x)$.

35.29. Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι: $f^3(x) + \beta \cdot f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\beta^2 < 3\gamma$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.

35.30. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

ii. *Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο* ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

iii. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln\alpha)$, με $\alpha > 0$, και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$, με $\beta \in \mathbb{R}$, ταυτίζονται, τότε να Αποδείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

iv. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες.

35.31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

ii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)]$

iii. Να λύσετε την ανίσωση:
$e^{-x} + \ln(e^{-x} + x^2) > x + 1 + \ln(x^2 + x + 1)$

iv. Να εξηγήσετε γιατί η f είναι 1-1 και να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων και συναρτήσεων f και f^{-1}.

35.32. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x$ και $g(x) = \ln x$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο μοναδικό κοινό τους σημείο και να βρεθεί.

Απ: $y = x - 1$ στο $A(1, 0)$

35.33. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [1, e]$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, να δείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας $x_0 \in (1, e)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) + x_0 \ln x_0 = x_0$.

35.34. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x) < 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα το πολύ $x_0 > 1$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0^3$.

35.35. Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x + x$ και $g(x) = e^{2-x} - x + 2$ δεν μπορούν να έχουν 2 διαφορετικά σημεία τομής.

35.36. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_0) = 0$.

ii. Δείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

35.37. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x + 3$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ αντιστρέφεται.

ii. Δείξτε ότι δεν υπάρχει $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε: $f^{-1}(2) = y$.

35.38. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(-1, f(-1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y + 2x = 1$ δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) + 2x = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-1, 1)$.

35.39. Αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση g είναι 1 – 1 να δείξετε ότι η εξίσωση: $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

35.40. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \to \alpha} f(x) = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση την οποία και να προσδιορίσετε.

ii. Αποδείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, \alpha)$.

Απ: i. $x = \alpha$

35.41. Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$f(0) - g(0) = 2$, $f(1) = g(1)$ και $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Δείξτε ότι $f(x) - g(x) = 2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$

ii. Αν ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της $g(x) = 0$ δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x) + 2 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ρ_1, ρ_2)

35.42. i. Να αποδείξετε ότι $\ell nx \geq \dfrac{x-1}{x}$ για κάθε $x > 0$.

ii. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x(1 - \ell nx) + \dfrac{\ell nx}{8}$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Να Αποδείξετε ότι η $f'(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο $(1, \dfrac{6}{5})$.

iii. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.

Απ: iii. f γνησίως αύξουσα στο $(0, x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, +\infty)$

35.43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ex - e^x + \alpha^2$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

ii. Να δείξετε ότι $e^{x-e} \geq \dfrac{e-1}{x-1}$ για κάθε $x \geq e$.

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

35.44. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f(0) = 0$.

Αν $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x > 0$ να δείξετε ότι:

i. $g'(x) = \dfrac{1}{x}(f'(x) - g(x))$

ii. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, να Αποδείξετε ότι και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

35.45. Να δείξετε ότι για κάθε

i. $x > 3$ ισχύει $3x - \ln(x-3)^3 \geq 12$

ii. $x \geq 1$, $2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} \geq 3$

iii. $x \in \mathbb{R}$, $\alpha x^2 + \eta\mu x \geq x$ με $\alpha > \dfrac{1}{2}$

iv. $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha^{x^2-4} - \alpha^{x-2} \leq \left(x^2 - 4\right) - (x-2)$, $x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

35.46. i. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς e^{π}, π^{e}.

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$ Μ. στο $x = e$ το $f(e) = \dfrac{1}{e}$, ii. $e^{\pi} > \pi^{e}$

35.47. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$, $x > 1$ δεν έχει κανένα ακρότατο.

ii. Αν $\kappa, \lambda \in (1, +\infty)$ και $\dfrac{\ln\lambda}{\ln\kappa} > \dfrac{\lambda - 1}{\kappa - 1}$ να δείξετε ότι $\lambda < \kappa$.

Απ: i. f γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

35.48. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = 4x^2 - 4\alpha x + \alpha^2 - 2\alpha + 2$ με $x \in [0, 2]$. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης να είναι ίση με 3.

Απ: $\alpha = -\dfrac{1}{2}$

35.49. i. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = xe^x - e^x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα της f.

ii. Έστω συνάρτηση φ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε :

$$\ell n(\varphi^2(x) + 1) + e^{\varphi(x)} = (x - 2)e^x + 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η φ δεν έχει κανένα τοπικό ακρότατο.

Απ: i. f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ Ε στο $x = 0$ το $f(0) = 1$

35.50. Να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f με: $f(x) = (1 - \kappa)x^2 + \kappa(1 - x)^2$, να γίνεται μέγιστη.

Απ: $\kappa = \dfrac{1}{2}$

35.51. Έστω $f(x)=e^{\lambda x}-x$, με $\lambda>0$

i. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μοναδικό ελάχιστο.

ii. Για ποια τιμή του λ η ελάχιστη τιμή της f γίνεται μέγιστη.

Απ: ii. $\lambda = 1$

35.52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$ και το σημείο $A\left(\frac{5}{2},0\right)$.

i. Να προσδιορίσετε σημείο Μ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f έτσι ώστε η Απόσταση ΑΜ να είναι ελάχιστη.

ii. Αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι κάθετη στην ΑΜ.

Απ: i. $M(1, \frac{3}{2})$

35.53. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}$ και η ευθεία $\varepsilon: y = \frac{3}{2}x + 3$.

i. Να βρείτε σημείο Ρ στη C_f το οποίο βρίσκεται πλησιέστερα στην ε.

ii. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο Ρ και να Αποδείξετε ότι είναι παράλληλη στην ε.

Απ: i. $P(3, 3)$ ii. $y = \frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

35.54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ και το σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha> e^{-1}$.

i. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο Ι.

36. Προβλήματα

36.1. Ένα μικρό ναυπηγείο έχει τη δυνατότητα να κατασκευάζει κατ΄ έτος μέχρι και είκοσι (20) σκάφη ενός συγκεκριμένου τύπου. Το κόστος κατασκευής (σε χιλιάδες €) x σκαφών εκφράζεται με τη συνάρτηση $K(x) = 4x^2 + 30$ και τα έσοδα Από τις πωλήσεις τους (σε χιλιάδες €) με τη συνάρτηση: $E(x) = 3x^2 + 20x$.

i. Να βρείτε το κόστος κατασκευής πέντε (5) σκαφών.

ii. Να βρείτε τον τύπο P(x) της συνάρτησης του κέρδους του ναυπηγείου.

iii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του κέρδους.

iv. Πόσα ακόμη πρέπει να κατασκευάζει το ναυπηγείο κατ΄ έτος για να έχει το μέγιστο κέρδος;

36.2. Τη χρονική στιγμή t = 0 χορηγείται σε έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση: $f(t) = \dfrac{\alpha t}{1+\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2},\ t \geq 0$

όπου α και β είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετριέται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

i. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β.

ii. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική όταν η συγκέντρωση είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

36.3. Ένα τουριστικό λεωφορείο έχει διανύσει Απόσταση 625km με σταθερή ταχύτητα x km την ώρα. Σύμφωνα με τον κώδικα οδικής κυκλοφορίας, το μέγιστο όριο ταχύτητας είναι 90km την ώρα. Τα καύσιμα κοστίζουν 1,6€ το λίτρο, η ωριαία κατανάλωση είναι $5{,}5 + \frac{x^2}{200}$ λίτρα και η αμοιβή του οδηγού είναι 20€ την ώρα.

i. Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος K(x) της διαδρομής είναι: $K(x) = \frac{18000}{x} + 5x,\ 0 < x \leq 90$

ii. Να βρείτε την ταχύτητα του λεωφορείου για την οποία το κόστος της διαδρομής γίνεται ελάχιστο.

36.4. Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα Από ένα προϊόν με κόστος που δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = \frac{\alpha}{4}\cdot x^3$, όπου $x \in (0, +\infty)$, και η παράμετρος α παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα $\left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$. Τα έσοδα από την πώληση x ποσότητας του προϊόντος δίνονται από τη συνάρτηση $E(x) = x^2$, με $x \in (0, +\infty)$

i. Να βρείτε την ποσότητα x_0 για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος, το οποίο συμβολίζουμε με M(α).

ii. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$ για την οποία το $M(\alpha)$ γίνεται μέγιστο, καθώς και το μέγιστο αυτό κέρδος.

36.5. Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με τον χρόνο t σύμφωνα με τη συνάρτηση: $f(t) = \frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}}$, με $t \geq 0$ όπου $A > 0$. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους $K(t)$ Από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή δίνεται Από τη συνάρτηση: $K'(t) = \frac{A}{4}e^{-\frac{t}{7}}$, με $t \geq 0$

Υποθέτουμε ότι $K(0) = 0$. Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία πρέπει να πουληθεί η μηχανή, ώστε το συνολικό κέρδος $P(t)$ Από τα βιβλία που πουλήθηκαν, συν την αξία της μηχανής, να γίνεται μέγιστο.

36.6. Ένα φάρμακο χορηγείται σε ασθενή. Έστω $f(t)$ η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά Από t χρόνο απότην χορήγηση του, $t \geq 0$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ είναι $\frac{8}{t+1} - 2$ τότε.

i. Να βρείτε τη συνάρτηση $f(t)$.

ii. Σε ποια χρονική στιγμή t, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου η συγκέντρωση του στον οργανισμό του ασθενούς γίνεται μέγιστη.

iii. Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t=8$ υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό ενώ πριν τη χρονική στιγμή t=10 η επίδραση του φαρμάκου έχει μηδενιστεί ($\ln 11 \simeq 2{,}4$). *(Εξετάσεις 2000, Τεχνολογική Κατεύθυνση)*

Απ: i. $f(t) = 8\ln(t+1) - 2t,\ t \geq 0$ ii. $t = 3$

36.7. Αν υποθέσουμε ότι το πλήθος των ατόμων που προσβάλλονται ημερησίως Από μία συγκεκριμένη επιδημία t ημέρες μετά την πρώτη της εμφάνιση δίνεται Από τη σχέση $P(t) = -t^3 + 120t^2 + 20,\ t \in [0, 120]$.

i. Να βρεθεί μετά Από πόσες ημέρες το πλήθος των ημερησίων θυμάτων της επιδημίας θα γίνει μέγιστο και

ii. Ποια χρονική στιγμή μέχρι να γίνει αυτό ο ρυθμός αύξησης των ασθενών ανά ημέρα θα γίνει μέγιστος.

Απ: i. 80 ii. 40η ημέρα

36.8. Έχει διαπιστωθεί ότι η αξία ενός προϊόντος αυξάνεται με τον χρόνο t με ρυθμό $-t^3 + 12t^2 + 343$ εκατοντάδες ευρώ το έτος με $0 \leq t \leq 13$. Το κόστος Αποθήκευσης σε εκατοντάδες ευρώ για το χρονικό διάστημα των t ετών δίνεται Από τον τύπο $K(t) = 4t^3$. Η ιδανική στιγμή για να πουληθεί το προϊόν είναι όταν η διαφορά της αξίας του και του κόστους γίνει μέγιστη, να βρεθεί σε πόσα έτη μετά την έναρξη της Αποθήκευσης είναι η ιδανική αυτή στιγμή.

Απ: 7

36.9. Ένα ταξιδιωτικό γραφείο έκλεισε αεροπλάνο με 400 θέσεις για ένα ταξίδι στο Παρίσι. Αν συμπληρωθεί το αεροπλάνο η τιμή για κάθε επιβάτη είναι 600 ευρώ. Αν όμως οι επιβάτες είναι λιγότεροι, τότε η τιμή του εισιτηρίου αυξάνεται κατά 50 ευρώ για κάθε κενή θέση.

i. Ποια θα ήταν η ιδανικότερη οικονομικά περίπτωση για τους επιβάτες και

ii. Ποια για το ταξιδιωτικό γραφείο.

Απ: i. 600, ii. 10.300

36.10. Βιοτέχνης παρέχει x μονάδες ενός προϊόντος την ημέρα με $x \in (0, 500)$ και τις πουλάει $\pi(x) = 3000 - 2x$ ευρώ την μονάδα. Το ημερήσιο κόστος παραγωγής των x μονάδων δίνεται Από τη σχέση $K(x) = 2000x + 20000$ ευρώ.

i. Να βρεθεί η παραγωγή που δίνει το μέγιστο κέρδος.

ii. Αν το κόστος αυξηθεί, δίνοντας για διαφήμιση $x + 20$ ευρώ ανά μονάδα να βρεθεί η παραγωγή που θα Απάντοφέρει το μέγιστο κέρδος.

iii. Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των δύο ερωτημάτων.

Απ: i. 250 μονάδες, ii. 163 μονάδες

36.11. Δύο σημεία Α, Β, κινούνται αντίστοιχα πάνω στους άξονες x΄x και ψ΄ψ σύμφωνα με τις εξισώσεις $x(t)=2t-9$ και $\psi(t)=-3t+7$ $(t \geq 0)$.

i. Να βρείτε την απόσταση τους τη χρονική στιγμή t.

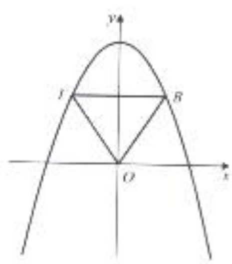
ii. Για ποια τιμή του t αυτή η απόσταση γίνεται ελάχιστη; Ποια είναι η θέση των σημείων Α, Β τη χρονική αυτή στιγμή;

Απ: i. $f(t) = \sqrt{13t^2 - 78t + 130}$ ii. $t = 3$, $A(3, -3)$, $B(3, -2)$

36.12. Σε ένα συγκεκριμένο αεροπορικό δρομολόγιο μια εταιρεία μεταφέρει 26.000 επιβάτες το μήνα με εισιτήριο 59€. Η εταιρεία πρόκειται να αυξήσει την τιμή του εισιτηρίου. Μετά Από έρευνα βρέθηκε ότι με κάθε 3€ αύξηση η επιβατική κίνηση θα μειωθεί κατά 1.000 επιβάτες το μήνα. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η νέα τιμή του εισιτηρίου ώστε τα έσοδα της εταιρείας στο συγκεκριμένο δρομολόγιο να μεγιστοποιηθούν.

Απ: i. 68,5 €

36.13. Στο σχήμα φαίνεται τμήμα παραβολής με εξίσωση $y=\frac{1}{14}\left(48-x^2\right)$ και το ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ με ΟΒ = ΟΙΙΙ. Να βρείτε τα σημεία Β, Γ για τα οποία το (ΟΒΓ) γίνεται μέγιστο. Ποιο είναι το μέγιστο αυτό εμβαδό.



Απ: $B(4, \frac{16}{7})$, $\Gamma(-4, \frac{16}{7})$ $(OB\Gamma) = \frac{64}{7}$

36.14. Στο πρώτο τεταρτημόριο ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων δίνεται το σημείο Ρ(α, β). Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται Από το Ρ και τέμνει τους Οx, Oy στα Α, Β αντίστοιχα, έτσι ώστε το ΑΒ να είναι ελάχιστο. Να βρείτε αυτό το μήκος αν α = 8 και β = 27.

Απ: (ε): $\beta^{\frac{1}{3}} x + \alpha^{\frac{1}{3}} y - \alpha^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{1}{3}} (\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}) = 0$ και $\ell = 13\sqrt{13}$

36.15. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και Μ σημείο της C_f με τετμημένη c, $c \in [\frac{1}{2}, 1]$. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ τέμνει τον $x'x$ στο Ι. Από το σημείο Β(2, 0) η κάθετη στον $x'x$ τέμνει την εφαπτομένη στο Γ(x, y). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ και να βρείτε τον c έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου να γίνεται ελάχιστο.

Απ: $E = \frac{(c+4)^2}{12\sqrt[3]{c}}$, $c \in [\frac{1}{2}, 1]$, $c \geq \frac{4}{5}$. Τότε $E = \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$

36.16. Κινητό κινείται ε ελλειπτική τροχιά με εξίσωση $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Καθώς περνάει απ΄ το σημείο $M\left(4, -\frac{12}{5}\right)$ η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες ανά sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένη x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το Μ.

36.17. Έστω $f(x) = 2e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Ένα ορθογώνιο έχει δύο κορυφές στον άξονα x΄x και τις άλλες δύο πάνω στη C_f. Να δείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο όταν οι κορυφές του ορθογωνίου που βρίσκονται πάνω στη C_f είναι τα σημεία καμπής της.

37. Κυρτότητα - Σημείο Καμπής

37.1. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 8$

ii. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 1$

iii. $f(x) = \dfrac{x^5}{20} - \dfrac{x^3}{2} - x^2 + 1$

iv. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x$

37.2. Δίνεται πραγματικός αριθμός $\alpha \in (0,\ 1)$ και η συνάρτηση

$f(x) = \alpha^x - x$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = \lambda^2 - \lambda - 2$

37.3. Να βρείτε τα διαστήματα όπου η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων εφόσον υπάρχουν.

i. $f(x) = xe^{2x} + 1$

ii. $g(x) = x \cdot \ln^3 x - 2$

iii. $h(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 10$

iv. $\varphi(x) = x\ln x - x^2 + \dfrac{1}{4}$

Απ: ii. $(0, \frac{1}{e^2}]$ $[\frac{1}{e^2}, 1]$ $[1, +\infty)$

i. f κοίλη στο $(-\infty, -1]$ και f κυρτή στο $[-1, +\infty)$ Σ.Κ. $A(-1, -e^{-2})$

ii. g κοίλη στο $[e^{-2}, 1]$ και g κυρτή στα $(0, e^{-2}]$, $[1, +\infty)$

Σ.Κ. $A(e^{-2}, -\frac{8}{e^2})$, $B(1, 0)$

iii. h κοίλη στο $[1, 3]$ και h κυρτή στα $(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$

Σ.Κ. $A(1, -16)$, $B(3, 0)$

iv. φ κοίλη στο $[\frac{1}{2}, +\infty)$ και f κυρτή στο $(0, \frac{1}{2}]$

Σ.Κ. $A(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{4})$)

37.4. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{2\alpha}{3}x^3 + \left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}\right)x^2 + \left(\alpha^3 + 7\right)x - 5\alpha^2.$$

Να δειχθεί ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

37.5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 - 3$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$.

Απ: $\alpha \in [-2, 2]$

37.6. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ και να Αποδείξετε ότι δυο Από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

Απ: $A(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $O(0, 0)$, $\Gamma(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$

37.7. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$, έχει για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y = -x^2 + 2$.

37.8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

i. Να Αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

ii. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακρότατων και x_3 η θέση του σημείου καμπής, να Αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

Απ: i. Τ.Μ. Α(0, 2) Τ.Ε. Β(2, –2) Σ.Κ. (1, 0)

38. Κυρτότητα - Εφαπτομένη

38.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^4$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$

iii. Να αποδείξετε ότι $e^{2x} \geq 1 + 2x - x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

38.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x + \alpha \ln x)^2$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία: (ζ): $8x - 2y + 2011 = 0$

i. Να βρείτε τον αριθμό α και την εξίσωση της (ε).

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

iii. Να αποδείξετε ότι $3 + (x + \ln x)^2 \geq 4x$ για κάθε $x > 0$.

Απ: i. $\alpha = 1$

38.3. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $e^{f(x)} + f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

iv. Να αποδείξετε ότι $xf'(x) \leq f(x) \leq \frac{x}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

v. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$, ώστε: $2f(\xi) = (\xi - 1)\sqrt{e^{\xi}}$

Απ: ii. $y = \frac{1}{2}x$

38.4. Έστω συνάρτηση f, με $f(x) = e^{-2004x}$.

i. Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

ii. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο M(0, 1).

iii. Δείξτε ότι $e^{-2004x} \geq 1 - 2004x$, για κάθε $x \in R$.

Απ: ii. $y = -2004x + 1$

38.5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2 - 2x\ln x$, $x \in (0, +\infty)$ και $\alpha > 0$.

i. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

ii. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο A(1, f(1)) και να προσδιορίσετε τον α, ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(Απ: i. f κοίλη στο $(0, \frac{1}{\alpha}]$ και f κυρτή στο $[\frac{1}{\alpha}, +\infty)$ ii. $y = (2\alpha - 2)x - \alpha + 2$, $\alpha = 2$)

38.6. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν για τη συνάρτηση g ισχύει $g(x)f'(x) = 2f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να Αποδείξετε ότι αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(x_0, f(x_0))$ τότε η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y - 2x + 5 = 0$.

Απ: $g'(x_0) = 2$

39. Συναρτησιακά

39.1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ και $g(x)=2x+f(x)$.

i. Να αποδείξετε ότι $\ln x < x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

iii. Να μελετήσετε την g ως προς τα κοίλα – κυρτά και τα σημεία καμπής.

iv. Να εξετάσετε τη θέση της g ως προς την ευθεία $\psi = 2x$.

v. Να βρείτε το σημείο x_0 στο οποίο η εφαπτομένη της g είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = 2x$.

Απ: iii. g κοίλη στο $(0,\ e^{\frac{3}{2}}]$ και g κυρτή στο $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ Σ.Κ. $A(e^{\frac{3}{2}}, 2e^{\frac{3}{2}} + \dfrac{2\ln\frac{3}{2}}{3})$

iv. C_g κάτω Από την $y = 2x$ στο $(0, 1)$, πάνω στο $(1, +\infty)$, v. $A(e, 2e + \frac{1}{e}))$

39.2. Έστω f με $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 + \ln 2010$. Να δείξετε ότι:

i. η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

ii. $x^4 + 5x^2 + 4 \geq 2x(x^2 + 4)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

39.3. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, η οποία σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση:

$f''(x) > 4(f'(x) - f(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $g(x) = f(x)\cdot e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

39.4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2x^4 + 3\alpha x^3 + 3\alpha^2 x^2 + 5x - 6$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημείο καμπής.

39.5. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι: $f^2(x) + e^x = 3f(x) - \alpha^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου $0 < \alpha \neq 1$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

39.6. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $(f'(x))^3 + 3f'(x) = e^x + \text{συν}x + x^3 + 3x + 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$.

39.7. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f^2(x) + xf(x) + x^2 = 5f(x)$. Δείξτε ότι η C_f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

39.8. Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

39.9. i. Έστω συνάρτηση f με $f(x)=1 - xe^{-x}$. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Αν για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση g ισχύει: $(g'(x))^2 - g'(x) = (x+1)e^{-x} + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η C_g δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

Απ: i. f γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ Ε. στο $x = 1$ το $f(1) = \frac{e-1}{e}$

39.10. i. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ, παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, +\infty)$ και ισχύει $f(x)f''(x) > (f'(x))^2$, να δείξετε ότι η $g(x) = \ln f(x)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

ii. Να βρεθεί το διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x)=\ln(x^2+2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

Απ: ii. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

39.11. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f^2(x) + f(x)\,(x-8) + x^2 = 0$.

Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημείο καμπής.

39.12. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) ενώ $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Υπάρχει $\gamma\in(\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\gamma) > 0$. Να δείξετε ότι:

i. υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) < 0$

ii. αν η f είναι κοίλη στο $[\alpha, \beta]$ τότε:

α. υπάρχει μόνο ένα $x_0\in(\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

β. είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

39.13. i. Έστω συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$(x^2 + x + 1)\cdot f''(x) + xe^{f(x)} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η C_f έχει ένα μόνο σημείο καμπής.

40. Εύρεση Παραμέτρων

40.1. Έστω ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού

$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,\ \alpha \neq 0.$

i. Να αποδείξετε ότι έχει πάντοτε ένα σημείο καμπής.

ii. Βρείτε τη συνθήκη μεταξύ των συντελεστών του πολυωνύμου, ώστε στο σημείο καμπής να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

iii. Αν η P έχει δύο θέσεις τοπικών ακρότατων έστω x_1, x_2, δείξτε ότι: $P''(x_1) + P''(x_2) = 0$.

Απ: i. Σ.Κ. στο $x_0 = -\dfrac{\beta}{3\alpha}$ ii. $\beta^2 = 3\alpha\gamma$

40.2. Αν $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + 3x^2 + 2$, να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να έχει:

i. 2 σημεία καμπής

ii. κανένα σημείο καμπής

Απ: i. $\alpha \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ ii. $\alpha \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$

40.3. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το A(-1, 4)

Απ: $\alpha = 2$ και $\beta = 6$

40.4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2x^4 + 2\alpha x^3 + 3x^2 + 13x - 21$, με $\alpha \in \mathbb{R}$

Να βρείτε για ποιες τιμές του α, η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Απ: $\alpha \in [-2, 2]$

40.5. Δίνεται η συνάρτηση f με

$f(x)=(\alpha+2)x^3-(2\alpha-1)x^2-3\beta x-2\beta$ με $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών α, β ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το A(1, 0).

Απ: $\alpha=-7,\ \beta=2$

40.6. Δίνεται η συνάρτηση f με

$f(x)=x^3+3(\kappa+1)x^2+(3\kappa+3)x+6$.

i. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η f δεν έχει ακρότατα.

ii. Για τη μεγαλύτερη τιμή του κ που προσδιορίσατε να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Απ: i. $\kappa\in[-1,0]$ ii. f κοίλη στο $(-\infty,-1]$ και f κυρτή στο $[-1,+\infty)$ Σ.Κ. A(−1, 5)

40.7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+15$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τους πραγματικούς α, β, γ ώστε η f να παρουσιάζει ακρότατα στις θέσεις $x_1=1$, $x_2=3$ και σημείο καμπής το σημείο A(2, 17).

ii. Για τις τιμές των α, β, γ που προσδιορίσατε να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών της f.

Απ: i. $\alpha=1,\ \beta=-6,\ \gamma=9$ ii. f γνησίως αύξουσα στα $(-\infty,1]$, $[3,+\infty)$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[1,3]$
Τ.Μ. στο $x=1$ το $f(1)=19$ Τ.Ε. στο $x=3$ το $f(3)=15$ f κοίλη στο $(-\infty,2]$ και f κυρτή στο $[2,+\infty)$ Σ.Κ. A(2, 17)

41. Κυρτότητα - Θ.Μ.Τ. -Συνδυαστικές

41.1. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Η f είναι κυρτή και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A(0, f(0)) έχει εξίσωση $y = 2x + 4$.

i. Να βρείτε τις τιμές $f'(0)$ και $f(0)$

ii. Να αποδείξετε ότι $f(-3) + f(3) > 8$

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x + 2) - f(x) > 4$ για κάθε $x > 0$.

41.2. Να δείξετε ότι αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ στρέφει τα κοίλα άνω τότε: $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) < \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

41.3. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι: $f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

41.4. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και $f''(x)\cdot f(x) - [f'(x)]^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

i. η συνάρτηση g με $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ είναι γνησίως μονότονη και ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω.

ii. για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(\dfrac{x_1+x_2}{2}) \leq \sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}$

41.5. i. Η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα άνω για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και διέρχεται Από το O(0, 0). Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $3f(x) > 4f(\frac{3x}{4})$.

ii. Δίνεται η συνάρτηση g που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $g'(x_0) > 0$ τότε να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

41.6. i. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β). Έστω $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f''(x_0) = 0$ και $f'''(x) \neq 0$. Να δείξετε ότι το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

ii. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln\frac{\alpha^x + \beta^x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha \neq$

β. Να δείξετε ότι:

α. η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

β. αν $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\alpha\beta = e^2$

41.7. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη με

$[f'(x)]^2 + f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = e^{f(x)}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν $\alpha < \beta$ να δείξετε ότι $g(\alpha) + g(\beta) > 2g(\frac{\alpha + \beta}{2})$.

iii. Αν $\alpha \neq \beta$ να δείξετε ότι $\frac{e^{f(\alpha)} + e^{f(\beta)}}{2} > e^{f(\frac{\alpha+\beta}{2})}$.

41.8. Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Αν υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\gamma) > 0$, να δείξετε ότι:

i. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) < 0$

ii. υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) < 0$

iii. αν η f είναι κυρτή στο $[\alpha, \beta]$ τότε:

α. υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

β. $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

41.9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x\ln x$, $x > 0$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

ii. Έστω $0 < \alpha < \beta < \gamma$.

α. Να δείξετε ότι $(\gamma - \beta)[f(\beta) - f(\alpha)] < (\beta - \alpha)[f(\gamma) - f(\beta)]$.

β. Αν $\alpha + \gamma = 2\beta$, να δείξετε ότι $\beta^\beta < \sqrt{\alpha^\alpha \cdot \gamma^\gamma}$.

γ. Αν $\alpha + \gamma = 1$, να δείξετε ότι $\alpha^\alpha \cdot \gamma^\gamma \geq \frac{1}{2}$.

41.10. Δίνεται κυρτή συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ με συνεχή παράγωγο στο (α, β) και $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$. Α η f δεν έχει ακρότατα στο $[\alpha, \beta]$, να δείξετε ότι:

i. η f είναι αντιστρέψιμη

ii. υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\gamma) = 1$

iii. $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

iv. η f είναι γνησίως αύξουσα

42. Εύρεση Ασύμπτωτων

42.1. Δίνεται συνάρτηση $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} [(x - 1)f(x) - 3x^2 + x] = 2011$. Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Απ: $y = 3x + 2$

42.2. Η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Να βρείτε τις ασύμπτωτες στο $+\infty$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i. $g(x) = f(x) - 4x + 5$ ii. $h(x) = \dfrac{xf(x)}{2x-3}$

Απ: i. $y = -2x + 6$, ii. $y = x + 2$

42.3. Αν η ευθεία $y = 3x + 5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της συνάρτησης f, τότε να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)(x+1) - 3x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$

42.4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{2}, & x < 2 \\ \dfrac{x^2-5x+6}{2(x-1)}, & x \geq 2 \end{cases}$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(0, f(0))$

iii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{1}{2}x - 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$

42.5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x + \lambda, & \text{αν } x \le 1 \\ \frac{x^2 - 8x + 4}{4x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$,

με $\lambda \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

ii. Για $\lambda = 0$:

α. να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

β. να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$

Απ: i. $\lambda = 0$, ii. $y = \frac{1}{4}x - 2$

42.6. Έστω f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες, ώστε να ισχύει $f(x) - g(x) = x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ευθεία με εξίσωση $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f καθώς $x \to +\infty$.

i. Να βρείτε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$ β. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x) + 3x + \eta\mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1}$

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g καθώς $x \to +\infty$

Απ: i. α. 2, β. $-\frac{5}{7}$

42.7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+2x+\kappa}{x}$, όπου κ είναι πραγματικός αριθμός.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της M(1, f(1)) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, να βρείτε την τιμή του κ.

iii. Για κ = 1:

α. να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

β. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

42.8. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2x - 1$. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)\ln(1+e^x)}{x^2f(x)-2x^3}$

43. Εύρεση παραμέτρων

43.1. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{\alpha x^2 - (\alpha - 3\beta + 2)x + 5}{2x - 4}$,

με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Αν η ευθεία $3x - y + \beta = 0$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, τότε να βρείτε:

i. τις τιμές των α και β

ii. τις ασύμπτωτες της C_f

43.2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{(2 - \alpha)x^2 - \kappa x + 2}{x - 3}$

με $\alpha, \kappa \in \mathbb{R}$ και $x \neq 3$. Η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

i. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha = 1$ και $\kappa = 3$

β. υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in (1, 2)$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

44. Εύρεση Ορίου

44.1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x+2}{x^2-4}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$ iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+5\eta\mu x}{2x-\eta\mu x}$

Απ: $\frac{7}{4}$, 1, 1, 8

44.2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\eta\mu x}$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{e^x-1}$ iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$

Απ: 1, 1, 1, $\frac{1}{2}$

44.3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{2\theta-\pi}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x^{50}-1}$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-e^{x-1}}{x-\ln x-1}$ iv. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu(\pi x)}{(x-1)^2}$

Απ: -2, 2 -1, $\frac{\pi^2}{2}$

44.4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\eta\mu 2x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x-\eta\mu x}$ iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-2^x}{x}$

Απ: $-\frac{1}{6}$, 4, ln3

44.5. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-συν2x}{1-συνx}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2ημx}{x^3}$

iii. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{συν^2 3x}{συν^2 x}$ iv. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{ημ(x^2-2x+1)}{(x-1)\ln x}$

Απ: 4, $\frac{2}{3}$, -9, 1

44.6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

iii. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(e^x+2)}{x}$ iv. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^2+\ln x}{x^2+2\ln x}$

Απ: 0, 0, 1, 4

44.7. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{12x+\ln x}{4x+\ln x}$ ii. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)^{15}}{\ln(x+2)^5}$

iii. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+2)}{\ln(x^2+5)}$ iv. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(e^x-1)}{\ln x}$

Απ: 3, 3, 1, 1

44.8. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{σφx}$ ii. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^3 x}{x^2}$

iii. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln(x^2-1)}$ iv. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-e^{-x}}{x^2}$

Απ: 0, 0, 1, -∞

44.9. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ, ώστε να ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\alpha e^{2x} + \beta x + \gamma}{(x-1)^2} = 2$

Απ: $\alpha = \dfrac{1}{e^2}$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$

44.10. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\eta\mu 2x}{x^3} + \alpha + \dfrac{\beta}{x^2} \right) = 0$

44.11. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to +\infty} [x(e^{\frac{1}{x}} - 1)]$ ii. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\varepsilon\varphi \cdot e^{\frac{1}{x}})$

ii. $\lim\limits_{x\to 1^-} [\ln x \cdot \ln(\ln x)]$ iv. $\lim\limits_{x\to 0^+} [\eta\mu x \cdot \ln(e^x - 1)]$

Απ: 1, 0, 0, 0

44.12. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sqrt{x} \cdot \ln x)$ ii. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \right]$

iii. $\lim\limits_{x\to -\infty} (xe^x)$ iv. $\lim\limits_{x\to 0^+} [(e^x - 1)\ln x]$

Απ: 0, 1, 0, 0

44.13. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x\ln\dfrac{x+1}{x-1} \right)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0^+} [x\ln(\ln(x+1))]$

iii. $\lim\limits_{x\to 0^+} [\varepsilon\varphi x \cdot \ln(\eta\mu x)]$ iv. $\lim\limits_{x\to 0^+} [(e^x-1)\sigma\varphi x]$

Απ: 2, 0, 0, 1

44.14. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - \ln x)$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x - x^2)$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x-e^x)$ iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x^2-\ln x)$

Απ: $+\infty$, $-\infty$, $-\infty$, $+\infty$

44.15. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ ii. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\eta\mu x}\right)$

iii. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ iv. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x\eta\mu x}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}\right)$

Απ: 1, $-\infty$, $-\infty$, $\frac{1}{3}$

44.16. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sigma\varphi x-\dfrac{1}{x}\right)$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{\frac{1}{x}} - x)$ iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^x+1) - x + 2]$

Απ: $-\infty$, 1, 2

44.17. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) =$

$$\begin{cases} -x^2, & \alpha\nu\ x\le 0 \\ \alpha x+\beta, & \alpha\nu\ 0<x<1, \quad \text{όπου } \alpha, \beta\in\mathbb{R} \\ 1+x\ln x, & \alpha\nu\ x\ge 1 \end{cases}$$

i. Να βρείτε τα α και β, ώστε η f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

ii. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$, να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$

β. $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

44.18. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ4x}{5x}$ ii. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln 2x-3e^{3x})$ iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{εφ2x}{εφ3x}$

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx-x^2}{x^3-x}$ v. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^{x^2}-3}{4-4συνx}$ vi. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2\ln x)$

vii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+(x-1)}{x^2-e^{x-1}}$ viii. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x+\ln x}{x+\ln x}$ ix. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{x^2}$

Απ: i. $\frac{4}{5}$ ii. $-\infty$ iii. $\frac{2}{3}$ iv. -1 v. $\frac{3}{2}$ vi. 0 vii. 2 viii. 3 ix. $+\infty$

44.19. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-ημx}{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}}$ ii. $\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x-x^2+1)$

iii. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x^3+x^2+x+1)\ln x}{e^{2x}}$ iv. $\lim\limits_{x\to 0}(εφx\ln x)$ v. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{2-x}$

Απ: i. 1 ii. $+\infty$ iii. 0 iv. 0 v. 0

44.20. Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-ημx}{e^x-e^{-x}-2x}$

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-συνx}{x^2}$ v. $\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x-x)$ vi. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{1-e^{2\sqrt{x}}}$

Απ: i. 1 ii. 1 iii. $\dfrac{1}{2}$ iv. $\dfrac{3}{2}$ v. $+\infty$ vi. $-\frac{1}{2}$

44.21. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^5}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ iii. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3^x-2^x}{x}$

iv. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x-x)$ v. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x-2)e^{-3x}\right]$

Απ: i. 0 ii. $\dfrac{1}{2}$ iii. $+\infty$ iv. $-\infty$ v. 0

44.22. Αν $f(x)=\begin{cases} e^x + x(\ln x - e - 1), & x>0 \\ 1 & , x=0 \end{cases}$ να δείξετε ότι:

i. Η f είναι συνεχής στο $x = 0^+$.

ii. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.

44.23. Αν $f(x)=\begin{cases} xe^{1-x^2} & , x\le 1 \\ \alpha x^2+\beta x, & x>1 \end{cases}$ να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$

ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Απ: $\alpha = -2$, $\beta = 3$

44.24. Αν $f(x)=\begin{cases} \ln^3 x & , 0<x\le e \\ \alpha x+\beta, & x>e \end{cases}$ να βρεθούν οι τιμές των

α, β ∈ ℝ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = e$. Στη συνέχεια βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο A(e, f(e)).

Απ: $\alpha = \frac{3}{e}$, $\beta = -2$ $y = \frac{3}{e}x - 2$

44.25. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{\ln(x+1)}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^4}$ iii. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

Απ: i. 1 ii. $+\infty$ iii. 0

44.26. Να βρείτε τις τιμές των α, β∈R, ώστε η συνάρτηση

$f(x)=\begin{cases} \eta\mu x+\alpha, & x\le 0 \\ e^{\beta x}, & x>0 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Απ: $\alpha = 1$ $\beta = 1$

45. Συναρτησιακά

45.1. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Θέτουμε:

$A = \dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ και $B = \dfrac{f'(\alpha) - Ag'(\alpha)}{g(\alpha)}$.

Αν φ είναι πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ -{α} τέτοια, ώστε: $\dfrac{f(x)}{(x-\alpha)^2 g(x)} = \dfrac{A}{(x-\alpha)^2} + \dfrac{B}{x-\alpha} + \dfrac{\varphi(x)}{g(x)}$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ -{α}, να αποδείξετε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\alpha} \varphi(x)$.

45.2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \alpha$. Να δείξετε ότι:

i. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{xf(x) - \alpha f(\alpha)}{x-\alpha} = f(\alpha) + \alpha f'(\alpha)$

ii. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{e^x f(x) - e^\alpha f(\alpha)}{x-\alpha} = e^\alpha[f(\alpha) + f'(\alpha)]$

45.3. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$, όπου f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

45.4. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^3}$ αν υπάρχει.

Απ: δεν υπάρχει – Προσοχή το De L' Hospital δεν εφαρμόζεται

45.5. Η f είναι τέσσερις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(0)=f(0)=0$ και $f''(0)=2$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{xf'(x)}$.

Απ: 1

45.6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{1}{x-3}\ln\dfrac{x}{3}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lambda$.

iii. Αν για τον μιγαδικό $z \neq 1$ ισχύει η σχέση $\left|\dfrac{z+i}{z-1}\right| = \lambda$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Απ: i. $D_f = (0, 3)\cup(3, +\infty)$, ii. $\lambda = \dfrac{1}{3}$, iii. $(x + \dfrac{1}{8})^2 + (y + \dfrac{9}{8})^2 = (\dfrac{3\sqrt{2}}{8})^2$, vi. κ. ι. η $x = 0$ και ο. ι. η $y = 0$ στο $+\infty$)

45.7. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις: $f''(x) = g''(x) + e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 0$. Αν η ευθεία ε: $y = 2x + 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε:

i. Να εκφράσετε τη συνάρτηση f συναρτήσει της g.

ii. Να βρείτε την ασύμπτωτη της Cg στο $+\infty$.

iii. Αν $g''(0) = \dfrac{1}{e}$ να δείξετε ότι η συνάρτηση h με $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x\neq 0$ δεν έχει στο $x = 0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη, αν οι f, g έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο.

Απ: i. $f(x) = g(x) + e^{-x} + x - 1$, ii. π. ι. η $y = x + 4$

45.8. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι:

i. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f'(x-2h) - f'(x)}{h} = -2f''(x)$

ii. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - 4f(x-2h) + 3f(x-3h)}{h^2} = 6f''(x)$

45.9. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$ και $f(x) \cdot f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

i. Να βρείτε τα όρια:

i. $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{x}$ ii. $B = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$

ii. Αν $\Gamma = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xf'(x) + f^2(x) + e^{2\eta\mu x} - 2\eta\mu x - 1}{x^2 + f(x)f'(x)}$, να δείξετε ότι $\Gamma = 4$.

Απ: i. i. $A = 2$, ii. $B = 1$

45.10. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$.

i. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt{x} f'(\frac{\alpha}{\sqrt{x}})] = \alpha$.

ii. Να βρείτε το όριο $A = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(\frac{\alpha}{\sqrt{x}})]^x$.

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\alpha) = A$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $g'(\alpha)$ έχει τουλάχιστο μια εφαπτομένη παράλληλη στον $x'x$ σε σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(-2, 2)$.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο $A(1, g(1))$ και να δείξετε ότι $g(\alpha) \geq \alpha\sqrt{e}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Απ: ii. $A = e^{\frac{\alpha^2}{2}}$, iii. ii. $y = e^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha$

45.11. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 4$. Έστω $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

i. Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f'}$ στο $M(0, f'(0))$.

ii. Να βρείτε τα όρια: $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$, $B = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$, $\Gamma = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{1-\text{συν}x}$.

iii. Να δείξετε ότι $g'(0) = 2$.

iv. Να βρείτε την g' για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

v. Να δείξετε ότι η g' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

vi. Να βρείτε τα όρια: $\Delta = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+1-\text{συν}x}{x^2+f(x)}$,

$E = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{x\text{ημ}x+\text{συν}x-1}$.

Απ: i. $y = 4x$, ii. $A = 0$, $B = 4$, $\Gamma = 8$, iv. $g'(x) = \begin{cases} \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$, vi. $\Delta = \dfrac{1}{6}$, $E = 6$

45.12. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο.

i. Να βρείτε το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3f(x-2h)-4f(x)+f(x+6h)}{h^2}$.

ii. Αν η ευθεία με εξίσωση $y = x - 1$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3f(x-2h)-4f(x)+f(x+6h)}{h^2} = 24f'(x)$, να βρείτε την f.

iii. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Απ.: i. $24f''(x)$, ii. $f(x) = e^{x-1} - 1$, iii. $y = -1$

46. Μελέτη - Χάραξη Γραφικής Παράστασης

46.1. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις και να σχεδιάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις:

i. $f(x) = x^3 - 3x^2$ ii. $f(x) = x^4 - 4x^3$

46.2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

46.3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = x^2 \ln x$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε τη μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

47. Επαναληπτικές Ασκήσεις

47.1. Για $\lambda \in \mathbb{R}$ δίνεται η συνάρτηση:

$f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 3x + 1$, με $x \in \mathbb{R}$

i. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, να βρείτε την τιμή του λ

ii. Για $\lambda = 0$

α. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 9x$.

γ. να Αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - \sqrt{x} = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.

47.2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & \text{αν } x \leq 1 \\ 2x + 3, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$, με

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να Αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$.

ii. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να Αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 4$.

iii. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 4$, να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$

47.3. Δίνεται η συνάρτηση:

$f(x) = x\ln(x + 1) - (x + 1)\ln x$, με $x > 0$

i. Να αποδείξετε ότι:

α. $\ln(x + 1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$

β. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

ii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right]$

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha \in (0, +\infty)$ τέτοιος, ώστε: $(\alpha + 1)^{\alpha} = \alpha^{\alpha+1}$

47.4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x + \alpha, & \text{αν } x \le 1 \\ (1 - e^{-x+1})\ln(x - 1), & \text{αν } x \in (1, 2] \end{cases}$

i. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{1 - e^{-x+1}}{x - 1}$

ii. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

iii. Για $\alpha = -1$, να Αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x.

47.5. Δίνεται μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 8x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να Αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1

ii. Να Αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο $(0, 1)$

iii. Αν για τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$f(g(x) - 3x) = f(x^2 + 2)$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το x_0, στο οποίο η g παρουσιάζει ελάχιστο.

iv. Να γίνει η γραφική παράσταση της f.

47.6. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{4x}, \quad x \in (0, +\infty)$

i. Να αποδείξετε ότι: $f\left(\dfrac{1}{e^5}\right) > 0$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right) < 0$ και $f(e^5) > 0$

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$.

iii. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$

47.7. Έστω $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x)=2000+|\ln(x-1)|$ και $c \in \mathbb{R}$ με $c > 2000$.

i. Να βρείτε την παράγωγο της f.

ii. Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = c$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της C_f στα Α και Β είναι κάθετες μεταξύ τους.

47.8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x$, με $x > 0$.

i. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

iii. Έστω η συνάρτηση: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{f(x)}, & \text{αν } x > 0 \\ \kappa, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

α. Να βρείτε την τιμή του κ, ώστε η g να είναι συνεχής β. Αν $\kappa = -\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, e).

47.9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x\ln x, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία της συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

iv. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f'(x + 1) > f(x + 1) - f(x)$ για κάθε $x > 0$

47.10. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \alpha^x - \ln(x + 1)$ με $x > -1$, όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$

i. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να Αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

ii. Για $\alpha = e$:

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (-1, 0] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, +∞)

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να Αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1, 2).

47.11. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 0$ και $f'(x) \cdot x - f(x) = x$ για κάθε $x > 0$