

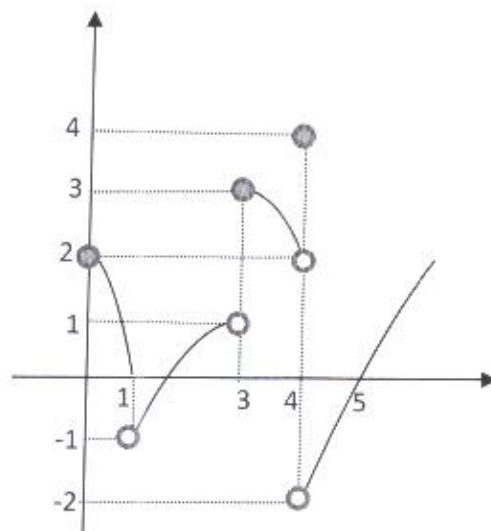
αποκρίσεις ανάγκυρας

21.

Εύρεση ορίου με σχήμα

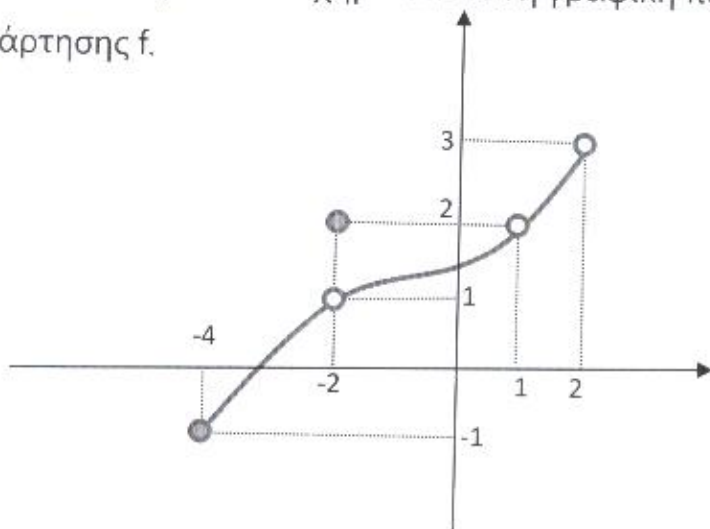
21.1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια και τιμές υπάρχουν:

- $f(0)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
- $f(1)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- $f(3)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$
- $f(4)$, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$
- $f(5)$, $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$



(Απάντ.: i. 2, 2 ii. Δ.Ο., 0 iii. 3, 1, 3, Δ.Υ., iv. 4, 2, -2, ΔΥ, v. 0, 0)

21.2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



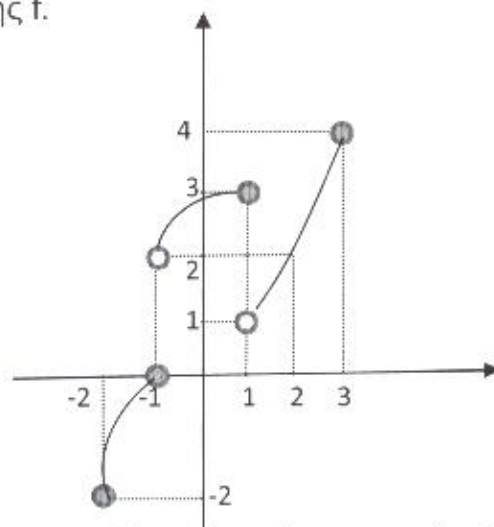
α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια και τιμές υπάρχουν:

- i. $f(-4), \lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ ii. $f(-2), \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
 iii. $f(1), \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ iv. $f(2), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(Απάντ.: α. $[-4, 1) \cup (1, 2)$, β. i. -1, -1 ii. 2, 1 iii. Δ.Ο., 2 iv. Δ.Ο., 3)

21.3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



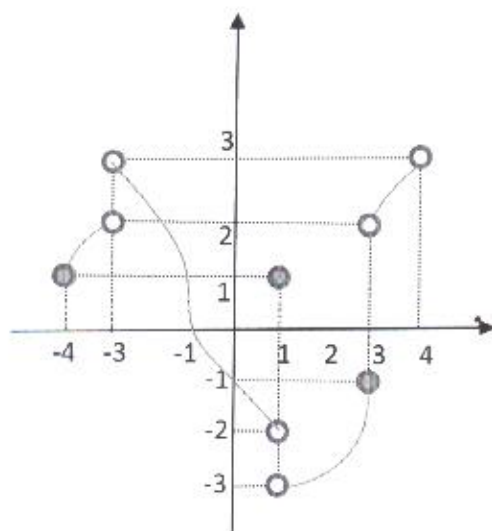
α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

β. Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν:

- i. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 ii. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
 iii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
 iv. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
 v. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

(Απάντ.: α. $[-2, 3]$, $f(A) = [-2, 0] \cup (1, 4]$ β. i. -2, ii. 0, 2, Δ.Υ. iii. 3, 1, Δ.Υ. iv. 2, 2, 2 v. 4)

21.4. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β. Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια και τιμές υπάρχουν:

i. $f(-4)$, $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$

ii. $f(-3)$, $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

iv. $f(1)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

v. $f(3)$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

vi. $f(4)$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

(Απάντ.: α. $A = [-4, -3) \cup (-3, 4]$ β. i. 1, Δ.Ο., 1, 1, ii. Δ.Ο., 2, 3, Δ.Υ., iii. 0, -1 iv. 1, -2, -3, Δ.Υ.

v. -1, -1, 2, Δ.Υ.

vi. Δ.Ο., 3, Δ.Ο., 3)

21.5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x + \alpha}{x - 2}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-1, 2)$.

i. Να βρείτε τον αριθμό α και το πεδίο ορισμού της f .

- ii. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.
- iii. Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

(Απάντ.: i. $\alpha = -6$ iii. 5)

21.6. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{(2x-1)\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .
- ii. Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

(Απάντ.: i. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ii. Δεν υπάρχει

21.7. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ όταν:

- i. $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 - 4}$ στο $x_0 = 2$ ή $x_0 = -2$
- ii. $f(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}$, $x_0 = -2$

21.8. Δίνεται $f(x) = \sqrt[3]{x^2-6x} - \sqrt{x^2-16}$. Να βρεθεί, αν ορίζεται το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

21.9. Να βρεθεί το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να έχει έννοια η εύρεση του $\lim_{x \rightarrow \kappa^2-5\kappa+6} f(x)$ όταν $f(x) = \frac{3x+5}{\sqrt{4-x^2}}$



22.

Ιδιότητες Ορίου

22.1. Να βρείτε τα όρια:

- i. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 - 2x^3 + 3x + 1)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 2} [(x + 3)^5(x + 4)]$
 iii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6-x}{x^2-3x+3}$ iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2-2x+6}$
 $\lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 - 2x + 1)(\sin \pi x)]$

(Απάντ.: 3, 2, 1, 3, 1)

22.2. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 5x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

- i. το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$
 ii. το $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + 2g(x)]$

(Απάντ.: i. 1, -1, ii. -1)

22.3. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -2$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$, όταν:

- i. $\varphi(x) = 3f(x)$ ii. $\varphi(x) = 3f(x) - 2$
 iii. $\varphi(x) = \frac{5f(x)}{f^3(x)-2}$ iv. $\varphi(x) = \sqrt{2f^2(x)+1}$

(Απάντ.: -6, -8, 1, 3)

22.4. Αν $\lim_{h \rightarrow 0} f(5+h) = 10$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) - 2)$.

(Απάντ.: 8)



23.**Απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$** **23.1.** Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{x + 8}$

iv. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}}$

v. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

(Απάντ.: i. -2 ii. 8 iii. -16 iv. 1 v. $\frac{1}{2}$, vi. 4)**23.2.** Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 7x + 10}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$

v. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 + 3x - 5}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 6x + 8}$

(Απάντ.: i. 2 ii. $\frac{10}{3}$ iii. $+\frac{3}{4}$ iv. $\frac{1}{2}$ v. $\frac{3}{7}$)**23.3.** Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2 + 3x + 2}$

ii. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha x^2 - (1 + \alpha^2)x + \alpha}{x^2 - \alpha^2}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$

vii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{4x^2 + 9x + 2}$

vi. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 + 4x + 1}{2x + 1}$

(Απάντ.: i. 0 ii. $\frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}$ iii. 27 iv. $\frac{8}{3}$ v. $-\frac{1}{7}$ vi. 0)

23.4. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x^2 - x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 6}{x - 2}$

iii. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x^2 - 1}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

(Απάντ.: i. -3 ii. 5 iii. $-\frac{3}{4}$ iv. $\frac{1}{2}$)

23.5. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-5}}{x-3}$

v. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \sqrt{x+5}}{x^2 - x - 2}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+3}}{x^2 - 9}$

(Απάντ.: i. $\frac{1}{2}$ ii. $\frac{1}{24}$ iii. $\frac{1}{2}$ iv. $-\frac{1}{2}$ v. $-\frac{3}{4}$ vi. $\frac{1}{36}$)

23.6. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 \cdot (\sqrt{x+6} - 2)}{x^2 + 2x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{\sqrt{x^2 + x + 3} - 3}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$

v. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x+1} - x + 1}$

(Απάντ.: i. -1 ii. 0 iii. $\frac{3}{8}$ iv. -12 v. $-\frac{4}{3}$)

23.7. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 25} + \sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x} - 5}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x} - 2}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6} - \sqrt{x} - 3}{\sqrt{x^2} - 9}$

v. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x - 4} - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^2} - 1}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x} + 2}{\sqrt{x^2} - 4}$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

(Απάντ.: ii. $\sqrt{10}$ iv. 0 vii. $\frac{1}{3}$, viii. $\frac{2}{3}$)

$$\text{viii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$$

23.8. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^v - 1}{x^2 - 1}, v \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1}{x^{k+1} - x^k + x - 1}, k \in \mathbb{N}^*$$

(Απάντ.: i. $\frac{v}{2}$ ii. 0)

23.9. Αν $k + \lambda + \rho = 0$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{kx^v + \lambda x^\mu + \rho}{x - 1}, v, \mu \in \mathbb{N}^*$

(Απάντ.: $k\nu + \lambda\mu$)

23.10. Αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^v - 3^v}{x - 3} = 27\nu$, να βρείτε το $\nu \in \mathbb{N}^*$

(Απάντ.: $\nu = 4$)

23.11. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda^2(x^2 - x) + x(\lambda + 2) - \lambda - 2}{x - 1} = \lambda + 6$, να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Απάντ.: $\lambda = -2$ ή $\lambda = 2$)

23.12. Αν $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x - 3}$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $9\alpha + 3\beta + \gamma = 0$, να

βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

(Απάντ.: $6\alpha + \beta$)



24.**Πλευρικά**

24.1. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & \text{αν } x \leq -1 \\ 5x + 7, & \text{αν } x > -1 \end{cases}$. Να

βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(Απάντ.: 2)

24.2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x + 3}, & \text{αν } x < -3 \\ 3x + 5, & \text{αν } x \geq -3 \end{cases}$. Να

βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

(Απάντ.: -7, -1, δεν υπάρχει)

24.3. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & \text{αν } x > 1 \\ \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - x}, & \text{αν } 0 < x < 1 \end{cases}$. Να

βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

(Απάντ.: $\kappa = -2$, $\mu = 0$)

24.4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x+1}, & \text{αν } x > 0 \\ \frac{x^2 + x - 4}{x^2 - 2x - 4}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$. Να

βρείτε, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(Απάντ.: -3, 1)

24.5. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x < 1 \\ x^2 - \kappa x + 2, & x \geq 1 \end{cases}$. Να βρεθεί η

τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

(Απάντ.: $\kappa = 1$)

24.6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \kappa x + \lambda, & x \leq -1 \\ 3x + 1, & -1 < x < 2. \\ x^2 - \lambda x + \kappa - 2, & x \geq 2 \end{cases}$. Να

βρεθούν τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

(Απάντ.: $\kappa = 3$ και $\lambda = 1$)

24.7. Αν $f(x) = \begin{cases} \kappa x + \lambda, & x \leq 1 \\ \frac{\kappa x^2 + \lambda x + 3}{x+1}, & x > 1 \end{cases}$. Αν $f(2) = 1$ και υπάρχει το

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, να βρεθούν τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

(Απάντ.: Δ.Υ.)

24.8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \kappa x^2 + \lambda x + \frac{1}{2}, & \text{αν } x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$ Να

βρεθούν τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

) και να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

(Απάντ.: $\kappa = 1, \lambda = -1$)

24.9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & \text{αν } x < -1 \\ \kappa x + \mu, & \text{αν } -1 \leq x \leq 1. \\ x^2 + 2x + 5, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

(Απάντ.: $\kappa = 5, \mu = 3$)

24.10. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - (\kappa + 1)x + \kappa}{x - 1}, & x < 1 \\ \frac{\lambda(x^2 - 1)}{\sqrt{x} - 1}, & x > 1 \end{cases}$. Να

βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει η σχέση $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 8$.

(Απάντ: $\kappa = -7, \lambda = 2$)

24.11. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο της συνάρτησης f στο x_0 όταν:

i. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 2 \\ x^2 + 3, & x > 2 \end{cases}$ και $x_0 = 2$

ii. $f(x) = \begin{cases} 2x + 10, & x < -3 \\ x^2 + x - 2, & x > -3 \end{cases}$ και $x_0 = -3$

24.12. Να βρείτε (εφόσον υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, αν $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x \geq 0 \\ \frac{x^2 + x}{x}, & x < 0 \end{cases}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, αν $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x < 1 \end{cases}$

24.13. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x \leq 1 \\ 4\alpha x - \beta - 1, & x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε

τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 7$.



25.**Απόλυτο****25.1.** Να υπολογισθούν τα όρια:

i.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x-2| - |x+2|}{x}$$

ii.
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|-3x^2 - x - 1| - 5}{x^2 - 1}$$

iii.
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 5|x+1| - 7}{x^2 + 3|x+3| - 7}$$

iv.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x-2| - |x^2 - 2|}{|x+1| - 1}$$

v.
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-4| - 2|x-1|}{|x+1| - 3}$$

(Απάντ.: i. -2, ii. $\frac{7}{2}$, iii. 7, iv. -1, v. -3)**25.2.** Να υπολογισθούν τα όρια:

i.
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2| + x^2 - 3x + 2}{x-2}$$

ii.
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 3x + 2| + 3(x-2)}{x^2 - 4}$$

iii.
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 3x| + x - 3}{x^2 - 9}$$

iv.
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2| + |x^2 - 4| + x - 2}{x^2 + x - 6}$$

v.
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x^2 - 9| + |x-3|}{|x+2| - 5}$$

(Απάντ.: i. Δ.Υ., ii. Δ.Υ., iii. Δ.Υ., iv. $\frac{6}{5}$, v. 7)**25.3.** Να υπολογισθούν τα όρια:

i.
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 9| + |x^2 - 4x + 3|}{|x^2 - 5x + 6|}$$

ii.
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x| - 1}$$

iii.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3|x|}{x^2 - 3|x|}$$

iv.
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 3x + 2| + |x^2 - 1|}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$$

v.
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 2x - 3| + |x-3|}{|x^2 - 4x + 3| + x^2 - 6x + 9}$$

(Απάντ.: i. 8, ii. 2, iii. -1, iv. 3, v. $\frac{5}{2}$)

26.**Κριτήριο Παρεμβολής**

26.1. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $|f(x) + \sqrt{x^2 + 5} - x^2| \leq 2|x^2 - 3x + 2|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

(Απάντ.: 1)

26.2. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για τη συνάρτηση f ισχύει $4x^2 - 16 \leq f(x) - 1 \leq x^4 - 4x^2$, να βρεθούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2}$.

(Απάντ.: 1, 16)

26.3. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $3x \leq f(x) + 4 \leq 2x^2 - x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - 1| - 2}{x - 1}$.

(Απάντ.: -1, -3)

26.4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $4x^2 - 13 \leq (x - 2)f(x) + 3 \leq x^4 - 4x^2 + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το $A = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

(Απάντ.: 16)

26.5. Αν $|f(x) - 3x + 5| \leq x^2$ για κάθε $x \neq 0$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(Απάντ.: -5)

26.6. Αν $2 - |x - 1| \leq f(x) - 2x \leq x^2 - 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

(Απάντ.: 4)

26.7. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$|f(x) - x + 2| \leq x^2 - 2x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1.$$

26.8. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{3x+3} \leq (x-2)f(x) + 3 \leq 3\sqrt{x+7} - 6 \text{ για κάθε } x \in (1, 3). \text{ Να υπολογίσετε το } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

(Απάντ.: $\frac{1}{2}$)

26.9. Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $3x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 3x$ για

$$\text{κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2 + x} = 3.$$

26.10. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$x \leq f(x) \leq x^2 + x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Αν } g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} + 1, & x < 0 \\ f(x) + 2, & x \geq 0 \end{cases} \text{ να}$$

$$\text{βρεθεί το } \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

(Απάντ.: 2)

26.11. Η συνάρτηση h είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{ισχύει } |h(x) - 1| \leq |x^2 + x|. \text{ Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 0} h(x).$$

(Απάντ.: 1)

26.12. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$|(x+1)f(x) - x^2 - 5x - 4| \leq x^2 + 2x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

(Απάντ.: 3)

26.13. Αν $x^2 + 4x \leq f(x) \leq 3x^2 + 2$ για κάθε $x > -3$ να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-5}{x-1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)-1|-4}{\sqrt{x+3}-2}$ iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)+4}-3}{\sqrt{2f(x)-6}-2}$

(Απάντ.: i. 5, ii. 6, iii. 24, iv. $\frac{1}{3}$)

26.14. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} [4g(x) - 3f(x)] = 0$ και για κάθε περιοχή του x_0 ισχύει ότι $4g(x) < 0 < 3f(x)$ να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, δεδομένου ότι υπάρχουν.

(Απάντ.: 0)

26.15. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f^2(x) - 4f(x) \leq x - 4$, να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

26.16. Αν $f^2(x) - 2f(x) + \sin^2 x \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

26.17. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^2(x) \leq 4xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(Απάντ.: 0)

26.18. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{f^2(x) - 4f(x)}{x+2} \leq x-2 \text{ για κάθε } x > -2. \text{ Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

(Απάντ.: 2)

26.19. Αν η f είναι άρτια, η g περιττή στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x) \cdot (\sqrt{x+2} - 2)] = 2$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \cdot g(x)]$.

(Απάντ.: -24)



27.**Αλλαγή Μεταβλητής****27.1.** Να υπολογιστούν τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} + 6}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{x - 4\sqrt{x} + 3}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[5]{x-2} - 1}{x-3}$

27.2. Να υπολογιστούν τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 3\sqrt{x} + 2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$

(Απάντ.: i. -4 ii. -1)

27.3. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$

1. Να υπολογιστούν τα όρια:

i. $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - \sqrt{2-f(x)}}{\sqrt{f(x)} - 1}$

ii. $B = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|f^2(x) - 3f(x)| - 2}{|f(x)| - 1}$

(Απάντ.: i. 3, ii. 1)

27.4. Δίνεται η συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) - 9}{f(x) - 3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) - 2f(x) - 3}{f^2(x) - 3f(x)}$

(Απάντ.: 6, $\frac{4}{3}$)**27.5.** Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$, να βρεθούν τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)+4} - 3}{f(x) - 5}$, ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)+4} + \sqrt{f(x)-4} - 4}{f(x) - 5}$

(Απάντ.: i. $\frac{1}{6}$ ii. $\frac{2}{3}$)

27.6. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ και } f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Να}$$

$$\text{αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

27.7. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{ και } f(xy) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε}$$

ότι:

$$\text{i. } f(1) = 0$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \text{ με } x_0 \neq 0$$

27.8. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 5x + 7} - 1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^7 + 3x^4)^2 - 3(x^7 + 3x^4) + 2}{x^7 + 3x^4 - 2}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt[5]{x-1} - 1}$$

27.9. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

$$= 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0. \text{ Να βρείτε τα όρια:}$$

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(g(x))}{4g(x)}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} g\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

27.10. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$. Να

αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} = 1$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(4x)}{2x + 3f(x)} = 1$$

27.11. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{\sqrt{x}-2} = 1$.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+4)}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(3+\sqrt{x})}$

27.12. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ και f είναι άρτια, να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x-2) + f(2-x)].$$

(Απάντ.: 8)

27.13. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x^2+3x)}{2x^2-3x}$

(Απάντ.: -3)

27.14. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{f(x)} = 4$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(27x)}{f(x)}$.

(Απάντ.: 64)



28.**Τριγωνομετρικά****28.1.**

Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \eta\mu x}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x}}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x}{\eta\mu x}$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \eta\mu x} - \sqrt{1 - \eta\mu x}}{2x}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x(\sqrt{1+x} - 1)}$

vii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(2 + \eta\mu x)}{(x + \eta\mu x)^2}$

(Απάντ.: i. 4 ii. 0, iii. 1, iv. -1, v. $\frac{1}{2}$, vi. 1, vii. $\frac{1}{2}$)**28.2.**

Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 6x}{\eta\mu 8x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\varphi 2x}{\eta\mu x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x - \eta\mu x}{x}$

v. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{2}}{2(x-1)}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{\sqrt{4x+1} - 1}$

(Απάντ.: i. $\frac{3}{4}$ ii. 2, iii. 2, iv. 2, v. $-\frac{\pi}{4}$, vi. 2)**28.3.**

Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^4 \eta\mu \frac{1}{x})$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta\mu \frac{2}{x}}{\eta\mu x}$

(Απάντ.: i. 0, ii. 0)

28.4.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{(x - \pi)^2}$. Να υπολογιστείτο $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$.

(Απάντ.: 0)

28.5. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$i. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+\eta\mu x} - \sqrt{2-\eta\mu x}}{x}$$

$$ii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \eta\mu x}{3x + \eta\mu x}$$

(Απάντ.: i. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ii. $\frac{1}{2}$)

28.6. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$i. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(x-3)}{x^2 - 7x + 12}$$

$$ii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{4x^2 + 3x}$$

$$iii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\epsilon\phi x + 1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{x\eta\mu x}$$

$$iv. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu 4x}$$

$$v. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x+9} - 3}$$

(Απάντ.: i. -1 ii. $\frac{1}{3}$ iii. 3, iv. $\frac{3}{4}$ v. 18)

28.7. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi(\eta\mu x)}{\eta\mu(\epsilon\phi x)}$

(Απάντ.: 1)

28.8. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xf(x) + f(-2x)\eta\mu x}{x^2 - 3\eta\mu^2 x}$

(Απάντ.: 0)

28.9. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 9$, να βρεθεί το όριο: $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^4 f(x)} - \eta\mu^2 x}{x^2 + \eta\mu^2 x}$

(Απάντ.: 1)

28.10. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\eta\mu^2 x + 2xf(x) \leq f^2(x) \leq \eta\mu^2 x + x(x + 2f(x)) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

28.11. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι

$$|f(x)\eta\mu x - 3x| \leq x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τα όρια:}$$

i. $A = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\text{ii.} \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + 11\mu x}{xf(x) + 11\mu x}$$

(Απόντ.: i. 3 ii. 2)

28.12. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$4x\sqrt{x^2+3} \leq (x-1)f(x) + 8x \leq 5x^2 + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρεθεί το $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x) + \eta\mu\pi x}{x^2 - 3x + 2}$

(Απάντ.: $A = -2 + \pi$)

28.13. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $\Delta = (-1, 1)$, η οποία για κάθε $x \in \Delta$ ικανοποιεί τη σχέση $|x| - x^2 \leq f(x) \leq x^2 + |x|$. Να βρείτε τα:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - \eta \mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta_{\mu} x}$$

(Απάντ.: i. -4 ii. 1)

28.14. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \rho \in \mathbb{R}$ και

$f(x) \leq 3x \leq x^5 \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$, να βρείτε το ℓ και το

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xf^3(x) + \eta\mu 2x}{4\eta\mu x + x^2}$$

(Απάντ.: 0, $A = \frac{1}{2}$)

28.15. Για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f^2(x) + g^2(x) \leq 2f(x)g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

28.16. Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Να βρείτε

το όριο: $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x) - f(-3x)\eta\mu 2x}{4x^2 - 2\eta\mu^2 x}$

(Απάντ.: 4)

28.17. Να βρείτε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\varphi 2x}{x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\varphi 3x}{\eta\mu 2x}$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^2 + 5x}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{3x+4}-2}$

28.18. Να υπολογίσετε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(kx) + \eta\mu(vx)}{x^2 + x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \right)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 25} - 5}{\eta\mu x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x}{\epsilon\varphi x - 1}$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \epsilon\varphi x} - \sqrt{1 - \epsilon\varphi x}}{\eta\mu x}$

(Απάντ: iv. 2)

28.19. Να βρείτε το θετικό ακέραιο n ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + \eta\mu 2x + \dots + \eta\mu nx}{x} = 28$$

28.20. Να βρείτε το θετικό ακέραιο n ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \times \eta\mu 2x \times \dots \times \eta\mu nx}{x^n} = 120$$

28.21. Να υπολογίσετε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^n \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^n \frac{1}{x} \right)$



29.**Συναρτησιακά**

29.1. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} = 5$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(Απάντ.: 6)

29.2. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - x^2 + x - 5) = 7$,
να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

(Απάντ.: 14)

29.3. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)f(x) = 5$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x^2 - 3x + 2} = 4$, να υπολογιστεί
το: $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$

(Απάντ.: -20)

29.4. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1} = 1$, να βρεθούν τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x) + 3} - 2}{\sqrt{x} - 1}$

(Απάντ.: i. 1 ii. 1)

29.5. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2} = 3$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 8}{x^2 - 4}$.

(Απάντ.: $\frac{5}{2}$)

29.6. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{x}}{x} = 2$ και

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 1}{x} = 3$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot g(x) - \sqrt{x}}{x \mu x}$.

(Απάντ.: 2)

29.7. Αν f, g είναι συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(\sqrt{x^2 + 4x + 4} - 2)g(x)] = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(x + 3 - \sqrt{2x^2 + 3x + 9})f(x)] = 1, \text{ να υπολογίσετε το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

(Απάντ.: 1)

29.8. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(x)}{x^2 + \varepsilon \varphi 3x} = 6$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(Απάντ.: 18)

29.9. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + x^2 - x + 2) = 3$.

$$\text{Να αποδειχθεί ότι } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) - 3}{f^2(x) - 1} = 2$$

(Απάντ.: 2)

29.10. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x}{x - 1} = 2$, να βρεθεί

$$\text{το: } L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f(x) - 2}{\sqrt{f^2(x) + 3} - 2}$$

(Απάντ.: 6)

29.11. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x)(2x^2 + 3x - 14)] = 11$, να βρείτε

$$\text{το: } \lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \cdot g(x)]$$

(Απάντ.: 1)

29.12. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} (xf(x)) = 10$, $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x)\eta\mu x) = 2$ και $g(x) \neq 0$ κοντά στο

$$0, \text{ να βρείτε το: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(Απάντ.: 5)

29.13. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x\eta\mu x} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 0} [(\sqrt{x^2 + 1} - 1)g(x)] = 5$, να βρείτε τα

όρια:

i. $A = \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)g(x)]$

ii. $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - x^4 g(x)}{f(x) + \eta \mu^2 x}$

(Απάντ.: i. 30, ii. $\frac{3}{2}$)

29.14. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - x^2 + x - 5 = 7$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

29.15. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x) = 5$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x^2 - 3x + 2} = 4$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)g(x)]$

29.16. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - 2g(x)] = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 2} [2f(x) + g(x)] = 6$, υπολογίστε τα $\lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

29.17. $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu(6x)} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{1+x} - 1)g(x) &= 10 \end{aligned} \right\}$ βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$

29.18. $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\eta \mu 3x - xg(x)}{4x} &= 5 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\eta \mu 3x + xg(x)}{4x} &= 7 \end{aligned} \right\}$ βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

29.19. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\sqrt{3x+4} - 2} = 5$ βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$



30.

Συνδυαστικά

30.1. Αν $f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) - 4g(x) \leq -5 + \eta\mu x$, τότε να βρείτε τα όρια των f, g στο 0.

(Απάντ.: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$)

30.2. Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x)) = 0 = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)g(x) \text{ να αποδειχθεί ότι } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0.$$

30.3. Αν $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - g(x)}{f(x) + g(x)} = 0 \text{ να αποδειχθεί ότι } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell.$$

30.4. Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι: $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x)) = 8$ και

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) - g(x)) = 4 \text{ να βρείτε τα: } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$$

(Απάντ.: 6, 2)

30.5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \leq 0 \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) - g(x)) = 0$, να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$

30.6. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f^3(x) - xf^2(x) + x^2f(x) = x^2\eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν το όριο $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ είναι πραγματικός αριθμός να αποδειχθεί ότι $A = 1$.

30.7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x)g(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{\alpha\} \text{ και } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$$

$$\text{Να αποδειχθεί ότι } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f^4(x) + g^6(x)}{f^2(x) + g^4(x)} = 0.$$

30.8. Αν $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 4$, να υπολογίσετε το $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha - h)}{h}$

(Απάντ.: 8)

30.9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι:

$$f^2(x) + g^2(x) + x^2 = \eta\mu^2 x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 0.$$

30.10. α. Δίνεται συνάρτηση f που ορίζεται κοντά στο x_0 για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

β. Δίνεται συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^2 - 3x - 7 \leq f^2(x) - 6f(x) \leq x^2 - 4x - 5. \text{ Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

(Απάντ.: 3)

30.11. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 1} [f^2(x) + g^2(x) + 6f(x) - 8g(x)] = -25$, να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

30.12. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ τέτοια, ώστε να ισχύει $\eta\mu^2 x - 3x^2 + f^2(x) = xf(x)$, για κάθε $x > 0$. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$, να προσδιοριστεί.

(Απάντ.: 2)

30.13. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με την ιδιότητα:

$$g^3(x) + xg^2(x) + x^2g(-x) = x^2 \eta \mu 10x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Αν το } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$$

$\in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $L = 2$

30.14. Αν για κάθε $x \in (1, 3)$ ισχύει $4g(x) < 0 \leq f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 4g(x)) =$

$$0, \text{ να δείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$$

30.15. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} (h^2(x) + g^2(x)) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} (h(x) + g(x)) = 0$, να

υπολογίσετε τα όρια:

- | | | | |
|------|---------------------------------------|-----|--|
| i. | $\lim_{x \rightarrow x_0} (h(x)g(x))$ | ii. | $\lim_{x \rightarrow x_0} (h(x) - g(x))$ |
| iii. | $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ | iv. | $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ |

(Απάντ.: i. 0 ii. 0 iii. 0 iv. 0)

30.16. Αν ισχύει $3f(x) - \eta \mu f(x) = 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0}$

$$\frac{f(x)}{x}$$

30.17. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x - 4) = f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 1}{x - 3} = 4$, να

$$\text{βρεθεί το } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{f(x) - 1}{x - 7}$$

(Απάντ.: 4)

30.18. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(x) = f(2 - x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Αν ισχύει } \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + x^2 + 2x) = 5, \text{ να}$$

$$\text{βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

30.19. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$, να

υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(4x) - f(-x) \cdot \eta\mu 3x}{4x^2 - 2\eta\mu^2 x}$

30.20. Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \frac{x^\nu + \alpha x^2 + \beta}{x-1}$ $\nu \in \mathbb{N}$ και

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για την οποία $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$ και η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την

οποία $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ και $f^3(x) - 2xf^2(x) - 4\alpha x^2 f(x) + 8\beta x \eta\mu^2 x = 0$ για κάθε x .

- Να βρείτε τα α, β ως συνάρτηση του ν .
- Αν α, β αρνητικοί, να βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$.

30.21. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f^2(x)}{x^2} + g^2(x) \right) = 0$, τότε να δεχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

30.22. Έστω το πολυώνυμο $\pi(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$, $\gamma \neq 0$ αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ και

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f \circ \pi \circ f)(x)}{x}$

30.23. Αν $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + (5+2\alpha^2)x + \beta - 1}{x - \frac{1}{2}} = 15$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

30.24. Αν $|f^3(x) - 8x^3| \leq x^3 - \eta\mu^3 x$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

30.25. Αν $|xf(x) - x^2| \leq \eta\mu^3 x \cdot \eta\mu \frac{\pi}{x^3}$, $x \in \mathbb{R}^*$. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

30.26. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$, να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(3x) + f(-x) \cdot \eta\mu(\alpha x)}{4x^2 - \eta\mu^2 x} = 7$

30.27. Αν $f(x) = \eta \mu x \geq x^2 \sigma \nu \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \alpha$, να βρείτε τον α .

30.28. Αν $3\sqrt{x^2+5}-9 \leq (2x-4)f(x) \leq 4(x-\sqrt{2x})$ να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}$$



31.

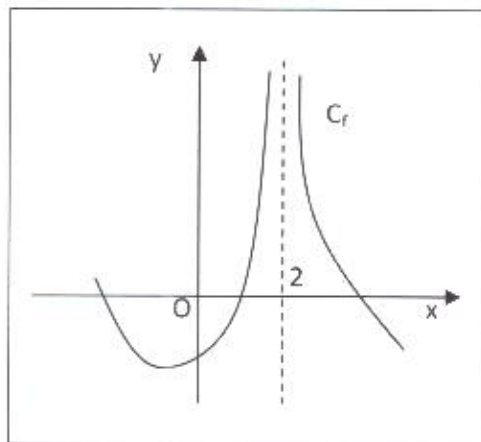
Υπολογισμός

31.1. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 2} (-f(x))$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ iv. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{f(x)}$

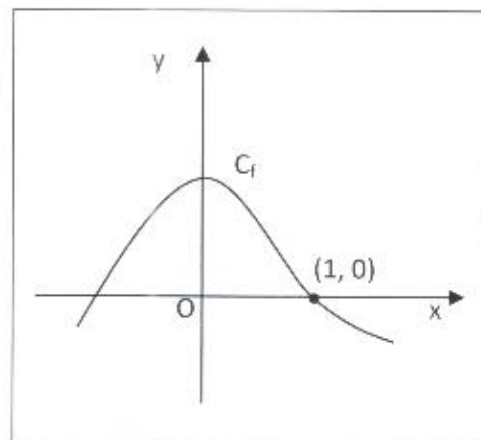
v. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)f(x)}{x^2-5x+6}$ vi. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{|x-2|}$



31.2. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

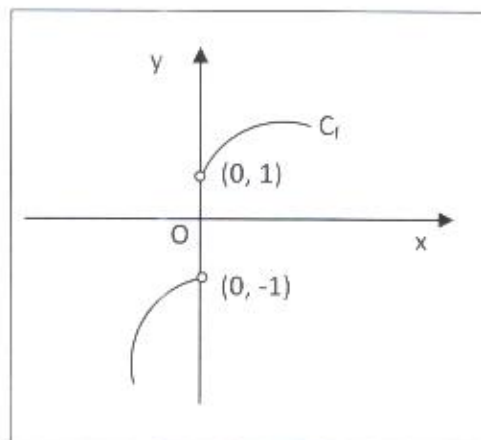
i. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{f(x)(x-1)}$



31.3. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$



31.4. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-4}{x^2}, (-\infty)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-10}{|x-2|}, (-\infty)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{x^2-6x+9}, (+\infty)$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+11}{x^3+2x^2}, (+\infty)$

v. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+6}{x^3+4x^2+4x}, (-\infty)$

31.5. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-8}{x^3-3x-2}, (+\infty)$

ii. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x^2+1}{\eta\mu x-1}, (-\infty)$

iii. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}, (+\infty)$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2-1}{\eta\mu^2 x}, (-\infty)$

v. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, (+\infty)$

31.6. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+4}{x-3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-3}{x^2-4}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2-2x-8}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-6}{x^3-1}$

v. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x^3+4x^2+3x}$

31.7. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^3-4x^2+x+6}$

ii. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\sigma\upsilon\nu x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2x+1}{\eta\mu x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{2x-1}{\ln x-1}$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+e}{e^x-1}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+\pi}{e^x+x-1}$

(Απάντ.: Δ.Υ.)

31.8. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^3 - x^2 - x + 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x - 5}{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27}$

(Απάντ.: i. δεν υπάρχει ii. $+\infty$ iii. $+\infty$ iv. δεν υπάρχει)

31.9. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(3x)}{x|x|}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 5}{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5-x^2}}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \left| \frac{x+2}{x-2} \right|$

iv. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}-2}$

(Απάντ.: i. $+\infty$ ii. $-\infty$ iii. $+\infty$ iv. $+\infty$)

31.10. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x}{x-3} - \frac{3}{x^2 - 7x + 12} \right)$
 $\left[\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 + x - 2} \right]$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1}$

(Απάντ.: δεν υπάρχουν)

31.11. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu x - 1}{1 - \sigma\upsilon\eta x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 - 5\sigma\upsilon\eta x}{2\eta\mu x}$

(Απάντ.: i. $-\infty$ ii. $-\infty$)

31.12. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 2$. Να

βρεθεί ο $\mu \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu x)f(x) + \mu x^2}{2\eta\mu^2 x - 3xf(x)} = -4$

31.13. Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+3}{(x-2)^2}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-2}{|x-1|}$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

31.14. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τα παρακάτω όρια

i. της $f(x) = \frac{x-2}{(x-1)(x+2)}$ στο $x_0 = -2$

ii. της $f(x) = \frac{x^3 + x^2}{|x+1|}$ στο $x_0 = -1$

31.15. Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x^2-4} - \frac{x}{x^2-2x} \right)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{\eta \mu x}$

31.16. Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων να βρείτε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{cx^2 + 2x + d}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt{x-\beta} - \sqrt{x-\alpha}}{x^2 - \alpha^2}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + (b+2)x - 16}{x^2 - 4}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{c^2 - \sqrt{c^2 - x^2}}{x}, c \neq 0$



32.

Συναρτησιακά

32.1. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, να βρείτε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \eta \mu x}{x^2 + x}$

(Απάντ.: $+\infty$)

32.2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, όταν:

i. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x+3} = +\infty$ και $x_0 = 5$.

ii. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x-2}{f(x)} = +\infty$ και $x_0 = 1$.

iii. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)(x^2 - 2x - 1)] = +\infty$ και $x_0 = 2$

iv. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \eta \mu^2 \pi x}{x+1} = +\infty$ και $x_0 = 1$

v. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)+5}{f(x)-5} = -\infty$ και $x_0 = 2$.

(Απάντ.: i. $+\infty$, ii. 0, iii. $-\infty$, iv. $+\infty$, v. 5)

32.3. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = +\infty$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+g(x)}{f^2(x)+g^2(x)} = 0$

32.4. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 3}{g(x)} = +\infty. \text{ Να βρείτε } \lim_{x \rightarrow 2} g(x).$$

(Απάντ.: 0)

32.5. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(\sqrt{x+8}-3)}{\eta \mu(\pi x)} = +\infty$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

(Απάντ.: $-\infty$)

32.6. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^2 f(x) = -4. \text{ Να βρεθούν τα όρια:}$$

i. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f^2(x) - 5f(x) + 7}{f^2(x) + 2}$

(Απάντ.: i. $-\infty$, ii. 3)

32.7. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} [4f(x) - 3xg(x)] = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 1} [-2xf(x) + 3g(x)] = +\infty$, να βρεθούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

(Απάντ.: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$)

32.8. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1+|x|}{f(x)} = -\infty$ Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

32.9. Αν $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) \cdot \eta\mu^2(\pi x)}{(x+\alpha)^2} = +\infty$ Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$



33.**Εύρεση Παραμέτρων**

33.1. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x + 2} = 3$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{x+4} - 2} = 8$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + 3x + \beta}{x^2 - 3x + 2} = -5$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + \alpha x - \beta}{1 - \sqrt{x-2}} = -10$$

33.2. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β , ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 - (\beta + 3)x + 2\alpha + \beta}{x^2 - 4x + 3} = 2$$

(Απάντ.: $\alpha = 1, \beta = 3$)

33.3. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + (\alpha - 1)x - 5\alpha + \sqrt{x^2 + 3x + 6}}{x - 2} \text{ να είναι πραγματικός αριθμός.}$$

(Απάντ.: $\alpha = 2$)

33.4. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, όταν:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x^2 + \alpha x + 4} = +\infty \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + (\beta + 2)x + 4}{x^2 - 2x + 1} \in \mathbb{R}$$

(Απάντ.: i. $\alpha = -4$, ii. $\alpha = 4, \beta = -10$)

33.5. Αν $f(x) = \frac{x^2 + 2\alpha x + \beta - 5}{x - 3}$ να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 12$$

33.6. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x + \beta \sqrt{x} - 2}{x - 1} = 5$$

33.7. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{kx^3 + (\lambda + 2)x + 4}{(x-1)^2} = L \in \mathbb{R}$, να βρεθούν τα $k, \lambda, L \in \mathbb{R}$.

33.8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^3 + 8x^2 + 3x - 2}{x^2 - \beta}$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(0, 1/2)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lambda$ να βρεθούν τα α, β και λ .

33.9. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\alpha x^2 + x + 2}{x-1} + \beta x \right) = 4$

33.10. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha x^3 + (\beta + 1)x + \gamma + 2}{(x-2)^2} = 6$

33.11. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} (|x-3|f(x)) = 2$ να υπολογίσετε τον αριθμό m ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(m^2 + 1)f^3(x) - f^2(x) + 3}{mf^3(x) + f^2(x) + 2} = 2$$

33.12. Αν $x^3 + 1 \leq f(x) + kx \leq x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$ και το διάγραμμα της f περνάει από το σημείο $A(1, 1)$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$



34.

Παραμετρικά Όρια

34.1. Για τις διάφορες τιμές των πραγματικών παραμέτρων λ, μ να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ με $f(x) = \frac{x^2 - \lambda^2 x + 8}{x^2 - 2x + 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ με $f(x) = \frac{2\lambda x^2 + \lambda^2 x - 3}{x + \sqrt{x} - x\sqrt{x} - 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ με $f(x) = \frac{3x^2 - \lambda^2 x - 4}{|x - 2|}$

34.2. Για τις διάφορες τιμές των πραγματικών παραμέτρων λ, μ να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ με $f(x) = \frac{\lambda^2 x - 4\lambda - 8}{x - 4\sqrt{x} + 4}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ με $f(x) = \frac{3x^2 + 2\lambda x - \lambda^2}{|x - 1|}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ με $f(x) = \frac{(\lambda^2 + 2)x^2 - 2(\lambda + \mu) + \mu^2}{(x - 1)^2}$

34.3. Να βρείτε τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$:

i. $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda x^2 - x}{\lambda^2 - \lambda x}, \lambda \neq 0$

ii. $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \lambda^2 x + 3}{2x - \lambda}$

(Απάντ.: $A = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{αν } \lambda \neq 1 \text{ και } \lambda \neq 0 \\ -1, & \text{αν } \lambda = 1 \end{cases}$)



35.4. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2}{2x-1} + \frac{2x}{3x+1} \right) \quad \text{ii.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3}{2x-2} + \frac{3x^2}{2x+3} \right) \\ \text{iii.} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3}{4x+1} - \frac{2x^3}{4x-3} \right) \quad \text{iv.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2+4x}{x+1} - \frac{2x^2-5x}{x-1} \right) \end{array}$$

(Απάντ: i. $+\infty$, ii. $+\infty$, iii. $+\infty$, iv. $-\infty$)

35.5. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6x^3-1}{2x+2} \cdot \frac{2x^2-2}{4-x^2} \right) \quad \text{ii.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{6x^4-2x}{4x+1} \cdot \frac{2x^3-3}{x-3x^2} \right) \\ \text{iii.} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x^2+x} \cdot \frac{x^3+2}{2x^2+3} \right) \quad \text{iv.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x+2}{x^3-1} \cdot \frac{x^2+2x}{x+1} \right) \end{array}$$

(Απάντ: i. $-\infty$, ii. $-\infty$, iii. 1, iv. 0)

35.6. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (|x^3 - 4x^2 + 2x - 1| - x^3) \\ \text{ii.} & \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x^3 + 6x^2 - 2x + 4| + x^3) \\ \text{iii.} & \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x^3 + 2x^2 - 4| - |x^3 - 2x + 1|) \\ \text{iv.} & \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x^2 + 3x - 1| - |x^3 - x^2 + 1| - x^3) \end{array}$$

(Απάντ: i. $-\infty$, ii. $-\infty$, iii. $-\infty$, iv. $-\infty$)

35.7. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4x + 1| - 4x^2}{|x^3 - x^2 + 1| - x^3} \\ \text{ii.} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^3 + x^2 - 2x + 1| + x^3}{|x^2 - 2x + 1| - x^2} \\ \text{iii.} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + |x^3 - 2x^2 + 1x - 2|}{-x^3 + x^2 - |x^3 + 6x^2 - 1|} \end{array}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - |-x^2 - 3x + 1|}{x^3 - |x^3 - 4x^2 + 1|}$$

(Απάντ: i. 3, ii. $-\infty$, iii. $\frac{2}{7}$, iv. 0)

35.8. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^3 - |x^3 - x^2 + x - 1|}{x^2 - 2x + 3}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{και} \quad \beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

(Απάντ: α. $\mathbb{R}$, β. i.1, ii. $-\infty$)

35.9. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2 + x - 1} + 2x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - 4x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 3x + 1})$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x})$

(Απάντ: i. $+\infty$, ii. $+\infty$, iii. $+\infty$, iv. $-\infty$)

35.10. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - x + 8} - x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - 3x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + x - 2} + x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{16x^2 + x - 3} + 4x$

(Απάντ: i. $+\infty$, ii. $-\infty$, iii. $+\infty$, iv. $-\frac{1}{8}$)

35.11. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{9x^2 + 4})$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{9x^2 + 2x})$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x + 6} - x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} + x)$

(Απάντ: i.0, ii. $-\frac{1}{3}$, iii.3, iv. $\frac{3}{2}$)

35.12. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 - x + 1} - \sqrt{4x^2 - 1x - 4})$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{25x^2 + x - 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 2})$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 6x + 2})$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x - 1})$

(Απάντ: i. $+\infty$, ii. $+\infty$, iii.2, iv. $\frac{5}{4}$)

35.13. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^2 - 2x + 4} - x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^2 + 3x - 6} + 2x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt[3]{x^2 - 2})$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3 - 4x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 4})$

(Απάντ: i. $-\infty$, ii. $-\infty$, iii. $+\infty$, iv. $+\infty$)

35.14. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2+1}}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+x-3}}{1-2x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}}{2x^2 - 4x + 3}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 4x^2 + 2x - 1}}{x-2}$

(Απάντ: i.2, ii. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, iii. 0, iv. $-\infty$)

35.15. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-2x}}{x-1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1x+6} - 2x}{x - \sqrt{9x^2+x-1}}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2-1} - \sqrt{4x^2+6x}}{\sqrt{x^2-3x+1} + x}$

(Απάντ.: i.0, ii. -1, iii. 0, iv. $+\infty$)

35.16. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-x+2} - \sqrt[3]{x^3-x})$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2x-4} + \sqrt{4x^2-x+6} - 3x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2+2x-6} - \sqrt{x^2+x-2} + 2x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2-5x} - \sqrt{4x^2+x-1})$

(Απάντ.: ii. $\frac{3}{4}$, iii. $\frac{1}{3}$, iv.2)

35.17. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^3+4x) - \ln(x^2+2)]$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - \ln(x^2+3x)]$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [2\ln(x^2+1) - \ln(x^2+3)]$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(x^4+3) - \ln(x^2+3) \right]$

(Απάντ.: i. $+\infty$ ii. $-\infty$ iii. $+\infty$ iv. 0)

35.18. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(3^x+5^x) - x]$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(2^x-7) - x]$

(Απάντ.: i. $+\infty$ ii. $-\infty$)

35.19. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια.

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - 2x^2 \right)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+4} - \frac{x^2}{3x-1} \right)$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2+3x+6}{(x+1)^2+5}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4-2x^3+1}{2x^4+x^3+3}$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^3+x^2+4}$

(Απάντ.: i. $-\infty$, ii. $+\infty$, iii. 5, iv. 2, v. 0)

35.20. Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια.

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+5} - 2x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2+3x+1} - 3x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+5x+4} + x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+7}}{x+1}$

v. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+4x+3} - \sqrt{x^2+4x-3})$

vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2-3} - 2x)$

vii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2+8} - 3x + 4)$

viii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x} + x}{4x^3+x}$

ix. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - x)$

(Απάντ.: i. $+\infty$, ii. $\frac{3}{2}$, iii. $-\frac{5}{2}$, iv. -1, v. 0, vi. 0, vii. 4, viii. 0, ix. $\frac{1}{2}$)

35.21. Αν $f(x) = \frac{|x^3+x+1| + |x^3-x-8| + |x^2+x+1|}{|x^3+x^2+1| + x^3 - x^2 - 7}$, να βρεθούν τα

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(Απάντ.: 1, $-\infty$)

35.22. α. Να υπολογισθούν τα όρια.

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1} - 3 \cdot 3^x + 1}{1 - 2 \cdot 3^{x+2}}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3^{x+1}}{e^{x+2} + 3^x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} + 2^x - 1}{4^{x+1} + 2 \cdot 4^x - 1}$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2^x}{2^x + 5 \cdot 4^x}$

v. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{x+1} + 4^x}{3^x + 4^{x+1}}$

vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2 \cdot 4^x}{e^{x+1} - 2^{x+1}}$

β. Αν $f(x) = \frac{2 \cdot 4^x - 3 \cdot 5^x + 6^x}{3 \cdot 4^x - 2 \cdot 3^x + 6^x}$, να βρεθούν τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(Απάντ.: α. i. 0, ii. $\frac{1}{e^2}$, iii. 0, iv. 0, v. 3, vi. $+\infty$, β. i. 1, ii. 0)

35.23. α. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x^2} = 0$

β. Να υπολογίσετε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5 - \eta\mu x}{x^2 - x + 1}$ ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta\mu \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + x} + x}$ iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \eta\mu \frac{1}{x} + x^2}{x^2 - 1}$

(Απάντ.: β. i. 1, ii. -2, iii. 2)

35.24. Έστω η συνάρτηση $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x^7 + 2x^4 + 5x^2 + x \eta\mu^2 x + x \sigma\upsilon\nu x \quad (1)$$

Να βρείτε τα όρια i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

35.25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4e^{2x} - e^x + 3}{e^{2x} - 1}$, $x \in \mathbb{R}^*$. Να

υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

35.26. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + 4}{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2}$ ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x}$

35.27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{5^x - 2^x}{5^x + 2^x}$, $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε

τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

35.28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x^2 + 1}{x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

35.29. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + \eta \mu^2 x}{x + 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x \eta \mu x}{x^2 + 5}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x(1 + \sigma \upsilon \nu^2 x)]$

v. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \sigma \upsilon \nu 3x)$

vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x + \ln x}{\eta \mu x - \ln x}$

35.30. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^{3x} - 5 \cdot 2^x + 7)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x + 2}{5^{x+1} + 4}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{2x} - e^x + 1}{e^{2x} + 1}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 7^x}{3^x + 4^x}$

35.31. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\ln x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + e^x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

35.32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(e^x) = 2$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 0} f(\ln x) = 1$
- iii. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln f(x) = +\infty$
- iv. $\lim_{x \rightarrow -1^-} e^{f(x)} = 0$

35.33. Να βρεθούν τα όρια στο $+\infty$ των παρακάτω συναρτήσεων.

- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4 - x^3 + 2)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 4x^2 + 3x + 1)$

35.34. Να βρεθούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + x - 2}{3x^3 + 5}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x^3}{2x^5 + 1}$

35.35. Να βρεθούν τα όρια στο $+\infty$ και στο $-\infty$ των παρακάτω συναρτήσεων.

- i. $f(x) = \frac{x^2 - |x - 5|}{x^2 + |x - 3|}$
- ii. $f(x) = \frac{|x^2 + 2x| - 3x + 1}{|4x^2 - 1| + |x|}$

35.36. Να βρεθούν τα όρια

- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 5x - 3} - \sqrt{x^2 + 1})$,
- ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{4x^2 + 3x})$

35.37. Να βρεθούν τα όρια

- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x - 5} + \sqrt[5]{x^5 - 4x + 2}}{\sqrt[7]{x^7 - 8x^6 + 2} + 6x - 3}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 6} + 7 - 2x}{\sqrt[3]{x^6 - 4x + 9x + x - 7}}$

35.38. Να βρείτε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x+5} - x + 2)$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2-5x+7} + 3x - 2)$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-5} - \sqrt{x^2-4x+2}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7}}.$

35.39. Να υπολογίσετε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{16x^2-5x+3} - 5x + 2)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4+6x-1} - 4x^2 + 4 + \sqrt{9x^4+2x^3-2})$

35.40. Αν $3 - \sqrt{4x^2+5x-3} \leq f(x) - 2x \leq 3 - \sqrt{4x^2-x+6}$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

35.41. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $|(3+x^4)f(x) - 3x^4| \leq x^2 + 1$, να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

35.42. Να υπολογίσετε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^v \eta \mu \frac{2}{x^6} \right)$

iii. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\eta \mu x}{x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 2x^2 \eta \mu \frac{1}{x} + 6}{4x^3 + 5x^2 \eta \mu \frac{6}{x} + 12}$

35.43. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{16+x^2} - 4) \eta \mu \frac{4}{x}$

35.44. Να βρεθούν τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$ ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \eta\mu x)$

35.45. Να βρεθούν τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$ ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \sigma\upsilon\nu x}{x^2 - \sigma\upsilon\nu x}$

35.46. Να βρεθούν τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)$ iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right)$

35.47. Βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \cdot \eta\mu x}{x^2 + 1}$ ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left|x^3 \eta\mu \frac{1}{x} - 2x^2 + 1\right| + x + 2}{x^2 - x + 2006}$

35.48. Να υπολογίσετε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - 43^x + 2}{3^{x-2} + 2^{x-1}}$ ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{x+2} - 4^x + 3}{64^{x-2} + \alpha^{x-3}}, \alpha > 0$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha^{x+2} - \alpha^{-x}}{\alpha^x + \alpha^{-x}}$ iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{1 + 3^{x+1}}$

v. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x - 3^{x+1}}{4^x + 3^{x-1}}$ vi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x - 3^{x+1}}{4^x + 3^{x-1}}$

35.49. Αν $f(x) = \ln \frac{x-3}{2x}$, να βρείτε :

- i. Το πεδίο ορισμού της f
- ii. Τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

35.50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + \kappa^2}{x}\right), \kappa > 0$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- iii. Να δείξετε ότι η $f(x) - \ln x > 0$ και να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$.



36. Συναρτησιακά

36.1. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^4 + x^2 + 1)f(x)] = 2014$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

36.2. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + 2x - 3}{x + 5} = 7$.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(Απάντ.: 5)

36.3. Οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x + \sqrt{x}} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x - \sqrt{x})g(x)] = 5. \text{ Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow +\infty}$$

$$[f(x)g(x)].$$

(Απάντ.: 5)

36.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{\alpha^{2x} + e^{2x}}{e^x} - x$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty}$

$$f(x).$$

(Απάντ.: $+\infty$, αν $\alpha > e$; $\ln 2$, αν $\alpha = e$; 0 , αν $0 < \alpha < e$)

36.5. Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 4} \leq f(x) \leq \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1}, \quad x > 0. \text{ Να βρείτε τα όρια:}$$

$$\text{i. } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{ii. } B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{iii. } \Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \eta \mu \frac{1}{x}]$$

(Απάντ.: i. $+\infty$, ii. 1, iii. 1)

36.6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = 0$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)] = 0. \text{ Να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

36.7. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ με:

$$f(xy) = f(x)f(y) - \sqrt{xy} (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \text{ για κάθε } x, y \geq 0. \text{ Να βρείτε:}$$

- i. τον τύπο της f ii. το όριο $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

(Απάντ.: i. $f(x) = x + \sqrt{x}$, $x \geq 0$ ii. 1)

36.8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^8(x) + g^8(x)}{f^2(x) + g^2(x)} = 0$.

36.9. Αν για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 7x - 3}} = 4$,

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(Απάντ.: $+\infty$)

36.10. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x}{4x + 3} = 9$ Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3x - 7}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 3x}$

(Απάντ.: i. 35, ii. $+\infty$, iii. $\frac{19}{2}$)

36.11. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x + 1} = 3$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{3x + 1}$.

(Απάντ.: 2)

36.12. Εάν για τις συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}^+$ ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} \cdot g(x) - x \cdot f(x)) = -5$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x) + 2g(x)) = 4$. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot g(x)]$

(Απάντ.: 0)

36.13. Έστω f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \cdot \sqrt{x}}{\eta \mu x} = 3$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) (\sqrt{x^2 + 1} + x)}{x + 1} = 2$. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x))$

(Απάντ.: 0)

36.14. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + 2x - 3}{x + 4} = 6$
να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

36.15. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x + \sqrt{x}} = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{x})g(x) = 5$. Να βρεθεί το
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)]$



37.**Παραμετρικά Όρια**

37.1. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow \infty} [(\lambda^2 - 4)x^3 + (\lambda + 2)x - 3]$ για τις
 διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

(Απάντ.: $\begin{cases} -\infty, & \lambda \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty) \\ +\infty, & \lambda \in (-3, 3) \\ -3, & \lambda = 3 \end{cases}$)

37.2. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda - 1)x^3 + (\lambda - 2)x^2 - 3x + 5}{x^2 - x - 1}$ για τις
 διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

(Απάντ.: $\begin{cases} +\infty, & \lambda \in (1, +\infty) \\ -\infty, & \lambda \in (-\infty, 1) \\ -1, & \lambda = 1 \end{cases}$)

37.3. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 - 3x + 2} + \lambda x)$ για τις διάφορες
 τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Απάντ.: $+\infty$, αν $\lambda > -3$
 $-\infty$, αν $\lambda < -3$
 $-\frac{1}{3}$, αν $\lambda = -3$)

37.4. Να βρεθούν τα όρια στο $+\infty$ και στο $-\infty$ των παρακάτω
 συναρτήσεων για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. $f(x) = (2\alpha - 1)x^3 + (\alpha - 1)x^2 + 3x - 2$

ii. $f(x) = (\alpha^2 - \alpha - 2)x^3 + 2x^2 - 6x - 7$

37.5. Να υπολογίσετε το όριο για τις διαφορές του μ
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\mu - 2)x^3 + 2x - 1}{(\mu - 1)x^2 + 3}$

37.6. Για τι διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε τα όρια στο $\pm\infty$ των παρακάτω συναρτήσεων

i.
$$f(x) = \frac{(2\alpha+4)x^5 + 2\alpha x^4 - 5}{(\alpha+3)x^4 - 7x^3 + 3}$$

ii.
$$f(x) = \frac{(\alpha^2 - \alpha - 2)x^3 - (\alpha - 1)x^2 + 3x - 9}{(\alpha - 1)x^2 + 3x - 7}$$



38.**Εύρεση Παραμέτρων****38.1.** Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-2)x^2 + (3\alpha-2\beta)x + 7}{(\beta+3)x - 13} = 4$$

(Απάντ.: $\alpha = 2, \beta = -1$)**38.2.** Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x-2} + \alpha x + \beta \right) = 5$$

(Απάντ.: $\alpha = -1, \beta = 3$)**38.3.** Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\beta > 0$, ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha \sqrt{x^2+3} - \sqrt{\beta x^2 - 12x + 5}) = 3$$

(Απάντ.: $\alpha = 2, \beta = 4$)**38.4.** Έστω συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x^2+x+2} - \lambda x$.

- i. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ έτσι ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x+1} = 1$.
- ii. Για την τιμή του λ που βρήκατε να υπολογίσετε εφόσον υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)-2}{x^3}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$$

(Απάντ.: i. $\lambda = 0$, ii. $\alpha. +\infty$, $\beta. \frac{1}{2}$)

38.5. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\alpha x + \beta - \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right) = 2$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \alpha x - \beta \right) = 3$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x} + \sqrt{9x^2 + 3x + 1} + \alpha x + \beta \right) = 0$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha x^2 + 1}{\beta x + 1} + x + 1 \right) = 2$

(Απάντ.: i. $\alpha = 1, \beta = 2$, ii. $\alpha = 1, \beta = -3$, iii. $\alpha = -5, \beta = \frac{7}{12}$, iv. $\beta = 1, \alpha = -1$)

38.6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^2}{x^2 + 2} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^2} = 2$. Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha + 1)f(x) + g(x) + 3\sin^2 x}{f(x) + g(x) + \eta \mu x} = 6$

38.7. Αν $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x^2 + 4} - \alpha x + \beta$ να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

38.8. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 3} + 2\alpha x + \beta) = 3$

