1. Πεδίο Ορισμού

1.1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \dfrac{2x-1}{-x^2+2x+3}$ ii. $f(x) = \dfrac{7-x}{|x-1|-5}$

iii. $f(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$ iv. $f(x) = \ln(-x^2 - 3x + 4)$

v. $f(x) = \dfrac{e^x}{\ln(x-1)}$

(Απάντ: i. $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1,3) \cup (3, +\infty)$ ii. $D_f = (-\infty, -4) \cup (-4, 6) \cup (6, +\infty)$

iii. $D_f = (-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$, iv. $D_f = (-4, 1)$ v. $D_f = (1, 2) \cup (2, +\infty)$)

1.2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+5x-6}$ ii. $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x-2}$

iii. $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x|-4}}{x^2+4}$ iv. $f(x) = \dfrac{\ln(x+4)}{\sqrt{1-x}}$

(Απάντ: i. $D_f = (-\infty, -6) \cup (-6, 1) \cup (1, +\infty)$ ii. $D_f = [-3, 2) \cup (2, 3]$

iii. $D_f = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$, iv. $D_f = (-4, 1)$)

1.3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \dfrac{x-3}{2x^2-x-1}$ ii. $f(x) = \dfrac{4}{2\sigma\upsilon\nu x-1}$

iii. $f(x) = \dfrac{2}{x^3+1} + \dfrac{x}{x^3+6x+7}$ iv. $f(x) = \dfrac{3x}{2\eta\mu x+3}$

v. $f(x) = \dfrac{x}{|x|-3}$ vi. $f(x) = \dfrac{1}{e^{2x}-e^x-2}$

vii. $f(x) = \dfrac{5}{2\eta\mu x+4}$ viii. $f(x) = \dfrac{8}{\ln(x-1)-1}$

(Απάντ: i. $D_f = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$ ii. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}\}$

iii. $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ iv. $D_f = \mathbb{R}$ v. $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$

vi. . $D_f = (-\infty, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$ vii. $D_f = \mathbb{R}$ viii. $D_f = (1, e+1) \cup (e+1, +\infty)$)

1.4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$ ii. $f(x) = \sqrt{2\ln^2 x+\ln x}$

iii. $f(x) = \ln(e^x-1)$ iv. $f(x) = \sqrt{x^2-4} + \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$

v. $f(x) = \sqrt{|x-1|-4}$ vi. $f(x) = \sqrt{\dfrac{e^x-2}{e^x-1}}$

(Απάντ: i. $D_f = [-2, 1]$ ii. $D_f = (0, e^{-\frac{1}{2}}] \cup [1, +\infty)$ iii. $D_f = (0, +\infty)$

iv. $D_f = (4, +\infty)$ v. $D_f = (-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$ vi. $(-\infty, 0) \cup [\ln 2, +\infty)$)

1.5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{1}{(\lambda+1)x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-3}$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Απάντ: $D_f = \begin{cases} R-\{-1\}, \text{ αν } \lambda=-1 \\ R-\left\{-1, \frac{3-\lambda}{1+\lambda}\right\}, \text{ αν } \lambda\neq-1 \end{cases}$)

1.6. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \ln[(\lambda - 2)x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda + 1]$ είναι το $\mathbb{R}$.

(Απάντ: $\lambda \in (3, +\infty)$)

1.7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$ ii. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

iii. $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ iv. $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

v. $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

(Απάντ: i. $\mathbb{R}$-{-1, 1}, ii. [-2, 2], iii. $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, iv. $\mathbb{R}$, v. $\mathbb{R}^*$)

1.8. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{3}x^3 - 3x + 2$ ii. $f(x) = x^2 - 4x + ημ\frac{π}{5}$

iii. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ iv. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

v. $f(x) = \frac{x}{x^2-4x}$ vi. $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-3x+2}$

(Απάντ: i. $\mathbb{R}$, ii. $\mathbb{R}$, iii. $\mathbb{R}^*$, iv. $\mathbb{R}$-{1}, v. $\mathbb{R}$-{0, 4}, vi. $\mathbb{R}$-{1, 2})

1.9. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ ii. $f(x) = \frac{e^x}{ημx-2}$

iii. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ iv. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

v. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ vi. $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$.

(Απάντ: i. $\mathbb{R}$, ii. $\mathbb{R}$, iii. $\mathbb{R}^*$, iv. $(0, +\infty)$, v. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, vi. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$)

1.10. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{1}{e^x-1}$ ii. $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

iii. $f(x) = \sqrt{2-e^x}$ iv. $f(x) = \sqrt{\frac{e^x-1}{3-e^x}}$

v. $f(x) = \ln(\ln x)$ vi. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

(Απάντ: i. $\mathbb{R}^*$, ii. $\mathbb{R}^*$, iii. $(-\infty, \ln 2)$, iv. $[0, \ln 3)$, $(1, +\infty)$, vi. $(0, e)$)

1.11. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$ ii. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

iii. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ iv. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

v. $f(x) = \sqrt[3]{x^6}$ vi. $f(x) = (x-2)^{-\frac{3}{4}}$

(Απάντ: i. $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$, ii. $[-3, 3]$, iii. $(-1, 1)$, iv. $\mathbb{R}$, v. $\mathbb{R}$, vi. $(2, +\infty)$)

1.12. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - \ln x}$ ii. $f(x) = \ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

iii. $f(x) = \sqrt{\ln(\ln x)}$ iv. $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^x$

v. $f(x) = \sqrt{e^x - e^{-x}}$ vi. $f(x) = (\ln x)^x$

(Απάντ: i. $(0, 1] \cup [e, +\infty)$, ii. $(0, 1]$, iii. $[e, +\infty)$, iv. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$, v. $[0, +\infty)$, vi. $(1, +\infty)$)

1.13. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \sqrt{2\alpha x^2 - \alpha^2 x - 1}, \alpha \in \mathbb{R}$. Αν για τη συνάρτηση f είναι γνωστό ότι $1 \in A$, τότε να βρείτε την τιμή του α καθώς και το πεδίο ορισμού της f.

(Απάντ: $\alpha = 1$, $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$)

1.14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{e^x - 1} + 2}{x - \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του α, αν είναι γνωστό ότι το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο $A = [0, +\infty)$.

(Απάντ: $\alpha < 0$)

1.15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - \alpha x + 1}$. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε το πεδίο ορισμού της f να είναι το σύνολο $A = \mathbb{R}$.

(Απάντ: $\alpha \in [-2, 2]$)

1.16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(e^x - 1)$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

α) $g(x) = \sqrt{f(x)}$ β) $g(x) = \ln f(x)$

γ) $g(x) = \sqrt{\dfrac{f(x)}{x^2}}$.

(Απάντ: ii. α) $\mathbb{R}$, β) $\mathbb{R}^*$, γ) $\mathbb{R}^*$)

2. Τύπος Συνάρτησης

2.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$. Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού της f

ii. τις τιμές f(2) και f(f(2))

(Απάντ: i. $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ii. 0, 2)

2.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τις τιμές f(-1) και f(f(2)).

ii. Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 5.

iii. Αν α, β ≠ 0, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{f(\alpha+\beta)-f(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}$$

(Απάντ: i. 2, 26 ii. x = 2 ή x = -2 iii. 4)

2.3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\alpha x+2\alpha}$, με α > 0, για την οποία ισχύει f(10) = 6. Να βρείτε:

i. τον αριθμό α

ii. το πεδίο ορισμού της f

iii. τις τιμές f(25) και $f\left(f\left(-\dfrac{5}{3}\right)\right)$

(Απάντ: i. α = 3 ii. $D_f = [-2, +\infty)$ iii. 9, 3)

2.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+10x+2\alpha}{x^3+\alpha}$ για την οποία ισχύει f(1) = 3.

i. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 1$.

(Απάντ: i. $\alpha = 8$ ii. $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ iii. $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1] \cup [4, +\infty)$)

2.5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln(x+\alpha)}{\ln(\beta-x)}$ για την οποία ισχύει $f(-1) = 1$ και $f(-6) = 0$. Να βρείτε:

i. τους αριθμούς α και β

ii. το πεδίο ορισμού της f

(Απάντ: i. $\alpha = 7$, $\beta = 5$ ii. $D_f = (-7, 4) \cup (4, 5)$)

2.6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+\alpha}$ για την οποία ισχύει $f(13) - f(-3) = 4$. Να βρείτε:

i. τον αριθμό α

ii. το πεδίο ορισμού της f

iii. το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $g(x) = \dfrac{\ln(x+f(f(33)))}{x^2-f(f(-2))\cdot|x|}$

(Απάντ: i. $\alpha = 3$ ii. $D_f = [-3, +\infty)$ iii. $D_g = (-3, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$)

2.7. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{3-\log(x+\alpha)}$

για την οποία ισχύει $f(101) = 1$. Να βρείτε:

i. την τιμή του α.

ii. το πεδίο ορισμού της f.

iii. το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $g(x) = \sqrt{f\left(f\left(\dfrac{11}{10}\right)\right)-\ln(x-f(2)}$

(Απάντ: i. $\alpha = -1$ ii. $(1, 10^3 + 1]$ iii. $(\sqrt{3}, e^{\sqrt{3}} + \sqrt{3})$)

2.8. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2-3, & \text{αν } -5 \le x \le 1 \\ 4x-2, & \text{αν } 1 < x < 15 \end{cases}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να βρείτε τις τιμές f(-2), f(3), f(1) και f(f(-4)).

iii. Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 6.

(Απάντ: i. D_f = [-5, 15) ii. 1, 10, -2, 13, 50 iii. x = 2 ή x = -3)

2.9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x+\alpha, & \text{αν } -6 \le x < -1 \\ x^2+\beta, & \text{αν } -1 \le x < 7 \end{cases}$

για την οποία ισχύει f(-2) = 5 και f(5) = 24.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

iii. Να βρείτε τις τιμές f(-1) και f(f(-3)).

iv. Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 3.

(Απάντ: i. D_f = [-6, 7) ii. α = 7, β = -1, iii. 0, 15 iv. x = 2 ή x = -4)

2.10. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} |x|+\alpha, & \text{αν } -8 \le x \le -2 \\ x^2+\alpha+4, & \text{αν } -2 < x \le 3 \\ \sqrt{x+4}, & \text{αν } 3 < x \le 15 \end{cases}$

για την οποία ισχύει f(-4) + f(1) + f(12) = 7. Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού της f.

ii. τον αριθμό α.

iii. τις τιμές f(-2), f(3) και f(f(f(-5))).

(Απάντ: i. D_f = [-8, 15] ii. α = -3 iii. -1, 10, 3))

2.11. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2-x^2, & \text{αν } x \le 1 \\ 1-x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού της f.

ii. τις τιμές f(1) και f(f(4))

iii. τους πραγματικούς αριθμούς α για τους οποίους ισχύει $f(\sigma\upsilon\nu\alpha) = \frac{7}{4}$.

(Απάντ: i. $\mathbb{R}$ ii. 1, -7 iii. $\alpha = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$)

2.12. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} |x|+\alpha, & \alpha\nu -3 \le x \le 6 \\ \sqrt{x-2}, & \alpha\nu\, 6 \le x \le 12 \end{cases}$

Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού της f.

ii. τον αριθμό α

iii. τις τιμές f(-2) και f(f(11)).

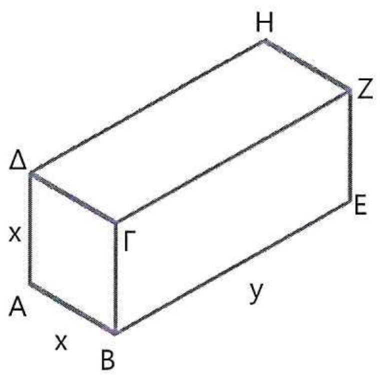
(Απάντ: i. $D_f = [-3, 12]$ ii. α = -4 iii. -2, -1)

2.13. Έστω η συνάρτηση f με: $f(x) = \begin{cases} x^2-3, & \alpha\nu\ x<1 \\ 2x+2, & \alpha\nu\ x\ge 1 \end{cases}$

και α πραγματικός αριθμός, με α ∈ (0, 1). Να προσδιορίσετε τον α ώστε να ισχύει: $[f(\alpha) + f(\alpha+1)]\left[\alpha f\left(\frac{1}{\alpha}\right)+f\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\right] = 1$

(Απάντ: $\alpha = \frac{1}{2}$)

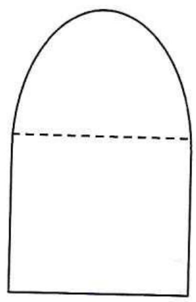
2.14. Ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει τετράγωνη βάση ΑΒΓΔ με πλευρά x και πλάτος ΒΕ = y. Αν η περίμετρος του ΒΕΖΓ είναι 20, να εκφράσετε ως συνάρτηση του x τον όγκο του κουτιού.



(Απάντ: $V(x) = 10x^2 - x^3$, $0 < x < 10$)

2.15. Σε έναν δήμο όλοι οι καταναλωτές νερού πληρώνουν 6€ πάγιο κάθε μήνα, ανεξαρτήτως αν καταναλώνουν ή όχι νερό. Για τα πρώτα $12m^3$ νερού πληρώνουν $0,60€/m^3$. Για κάθε m^3 νερού επιπλέον από τα $12m^3$ πληρώνουν $0,80€/m^3$. Αν σε έναν μήνα καταναλωθούν x m^3 νερό, να εκφράσετε το κόστος του νερού ως συνάρτηση του x.

2.16. Το διπλανό σχήμα αποτελείται από ένα ορθογώνιο και ένα ημικύκλιο και έχει περίμετρο 30. Να εκφράσετε το εμβαδόν του διπλανού σχήματος ως συνάρτηση του μήκους x της βάσης του ορθογωνίου.



2.17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x^3 + 1$. Να βρείτε τις τιμές:

i. $f(g(2))$ ii. $g(f(4))$
iii. $f(f(16))$ iv. $g(g(0))$.

2.18. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 4 είναι τιμή της συνάρτησης f, όταν:

i. $f(x) = x^2 - 4x + 8$ ii. $f(x)= \dfrac{x^2-4}{x-2}$
iii. $f(x) = e^{x-1} + 3$ iv. $f(x) = e^x + \dfrac{x}{\ln 2} + 1$

2.19. Για τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρείτε δύο αριθμούς α, β από το πεδίο ορισμού τους τέτοιους, ώστε να ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

i. $f(x) = x^3 - 2$ ii. $f(x) = x^3 + 2$
iii. $f(x) = e^{x^3} - 3x$ iv. $f(x) = 3\ln x - x$

v. $f(x)=2^x-x^3$ vi. $f(x)=x-2ημx$.

2.20. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x)=x+\ln x-1$ και $g(x)=e^x+x-1$.

Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες θέτοντας στη θέση της παρένθεσης τον κατάλληλο αριθμό.

i.	$0=f(\ )$	ii.	$e=f(\ )$
iii.	$0=g(\ )$	iv.	$e^2+1=f(\ )$
v.	$e=g(\ )$	vi.	$1+\ln 2=g(\ )$.

2.21. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=(x-1)^2+1$.

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$

ii. Να αποδείξετε ότι $f(2-α)+f(2-β)=f(α)+f(β)$.

2.22. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=e^x$.

i. Να βρείτε τον αριθμό $α=f(\ln 2)+f(\ln 3)$.

ii. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=e^x\cdot\dfrac{e^h-1}{h}$, για κάθε $h\neq 0$.

2.23. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, με $f(x)=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, για κάθε $x\neq 0$.

ii. $f(x)\geq 4$, για κάθε $x\neq 0$.

2.24. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(\ln 2)=\dfrac{5}{4}$.

ii. $f(-x)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii. $f(x)\geq 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2.25. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \sqrt{x^2+1}+x$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) \cdot f(-x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. $x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{1+x^2}+1$, για κάθε $x > 0$.

iii. $\frac{f(x)-f(-x)}{2} = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2.26. Δίνεται η συνάρτηση f: A $\to \mathbb{R}$, με $A = (0, +\infty)$ και $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

i. $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

ii. $f(x) \geq 2$

iii. $\sqrt{f^2(x)-2} \geq \sqrt{2}$

iv. $f\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 2\sqrt{x^2+1}$.

2.27. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{3})$

ii. $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$, για κάθε $x \neq 0$.

iii. $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iv. $f(x) + f(-x) = 0$

2.28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2x}$. Θεωρούμε, επίσης, ένα σημείο Α (2, 0) του άξονα x΄x.

i. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την απόσταση ενός τυχαίου σημείου M(x, f(x)) από το σημείο Α.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης.

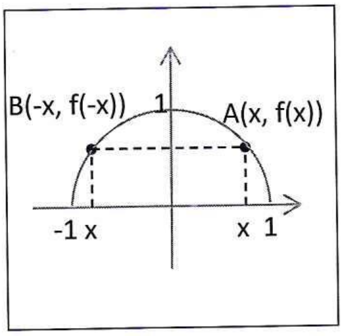
iii. Να βρείτε την τιμή της παραπάνω συνάρτησης για x = 2.

2.29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

i. Να εκφράσετε συναρτήσει του x την απόσταση ενός τυχαίου σημείου M(x, f(x)) Cf από την αρχή των αξόνων.

ii. Να δείξετε ότι $OM \geq \sqrt{2}$.

2.30. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Να εκφράσετε συναρτήσει του x το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και να βρείτε το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης.



2.31. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει πλάτος 4m και μεταβλητό μήκος. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f που εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου συναρτήσει του μήκους της διαγωνίου του.

2.32. Μια βιοτεχνία παράγει x $(0 \leq x \leq 15)$ αντικείμενα που κοστίζουν $10x^2 \cdot e^{-\frac{x}{6}}$ ευρώ, ενώ πωλούνται στην τιμή $P = 50e^{-\frac{x}{6}}$ ευρώ το ένα.

i. Να εκφράσετε το κέρδος Π από την πώληση των x αντικειμένων ως συνάρτηση του x.

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες είναι $Π(x) > 0$.

2.33. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x)= -x^2 +5x$, $x \in [1, 3]$. Αν M(x, y) τυχαίο σημείο της C_f με $x \in (1, 3)$ να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την κατακόρυφη απόσταση d μεταξύ της C_f και του ΑΒ και να βρείτε την τιμή της για x = 2.

2.34. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) = \ln x$ και η ευθεία $y = x$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο $M(x, f(x))$ της C_f.

i. Να εκφράσετε συναρτήσει του x, την απόσταση ΟΜ.

ii. Να εκφράσετε, ως συνάρτηση του x, την απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία $y = x$ και να βρείτε την τιμή της για $x = 1$. (να θεωρήσετε γνωστό ότι $\ln x < x$, για κάθε $x > 0$).

2.35. Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(x + 1, f(x+1))$ για $x > 1$.

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{f(x+1)+f(x)}{2} < f\left(\frac{2x+1}{2}\right)$.

ii. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του x όπου Γ, Δ οι προβολές των Α, Β στον x΄x.

iii. Αν E(x) η συνάρτηση του ερωτήματος β, τότε να αποδείξετε ότι $E(2) < E(3) < \ln\frac{7}{2}$

2.36. Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, ένα τυχαίο σημείο $M(x, f(x))$ της C_f καθώς και το σημείο $N\left(0, \frac{1}{4}\right)$ του άξονα y΄y.

Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την απόσταση ΜΝ καθώς και την απόσταση ΜΛ του σημείου Μ από την ευθεία $y = -\frac{1}{4}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι ίσες.

3. Σχετική Θέση Γραφικών Παραστάσεων

3.1. Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ii. $f(x) = |3x - 2| - 4$

iii. $f(x) = e^x + 2$ iv. $f(x) = \ln(x + 2)$

(Απάντ.: i. A(1, 0), B(3, 0), Γ.(0, 3), ii. A(0, -2), B(2, 0), Γ($-\frac{2}{3}$, 0), iii. A(0, 3), iv. A(0, ln2) B(-1, 0))

3.2. Να βρείτε τη σχετική θέση με τον άξονα x΄x των γραφικών παραστάσεων και συναρτήσεων:

i. $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$ ii. $f(x) = \ln|x + 4|$

iii. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 16$ iv. $f(x) = \frac{x^2-4}{1-|x|}$

(Απάντ.: Πάνω από τον x΄x: i. ($-\frac{1}{2}$, 3) ii. $(-\infty, -5) \cup (-3, +\infty)$, iii. $(-\infty, -4)$ iv. $(-2, -1) \cup (1, 2)$)

3.3. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ και $g(x) = x^2 + x + 1$

ii. $f(x) = x\ln x - 2x$ και $g(x) = x$

iii. $f(x) = 4^x + 2$ και $g(x) = 6(2^x - 1)$

iv. $f(x) = e^x \cdot \ln x + 6$ και $g(x) = 2e^x + 3\ln x$

(Απάντ.: i. A(0, 1) B(1, 3) Γ(-3, 7) ii. A(e^3, e^3) iii. A(1, 6) B(2, 18)

iv. A(ln3, 6 + 3ln(ln3)) B(e^2, $2e^{e^2} + 6$))

3.4. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x) = x^2 - 4x + |x - 2|$, $g(x) = |x - 2| - x + 4$ και $h(x) = 7 - x$

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία:

i. η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g

ii. η C_h βρίσκεται πάνω από τη C_g

(Απάντ.: i. $x \in (-1, 4)$ ii. $x \in (-1, 5)$)

3.5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ και $g(x) = x^3 - 3x^2 + \beta - 6\alpha$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Αν η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο -3 και η C_g τέμνει τον άξονα y΄y στο -6, να βρείτε:

i. τους αριθμούς α και β

ii. τα σημεία τομής των C_f και C_g.

(Απάντ.: i. $\alpha = -1$, $\beta = -12$ ii. Α(-1, -10), Β(2, -10), Γ(3, -6))

3.6. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=-x^2+\alpha x+1-\alpha$ και $g(x) = x^2 + x - 2\alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 2$. Να βρείτε:

i. τον αριθμό α

ii. τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g.

(Απάντ.: i. $\alpha = 3$ ii. $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$)

3.7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha x - 4$ και $g(x) = |x - 2| - 3\alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν οι C_f και C_g τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = -1$, να βρείτε:

i. τον αριθμό α

ii. τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

iii. τα σημεία τομής της C_g με τους άξονες.

(Απάντ.: i. $\alpha = 3$ ii. $x < -4$ ή $x > 1$ iii. Β(11, 0) Γ(-7, 0) Α(0, -7))

3.8. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{\ln(x+\alpha)}{\ln(x+\beta)}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τέμνει τον άξονα x΄x στο -8 και διέρχεται από το σημείο Α(-1, 3). Να βρείτε:

i. τους αριθμούς α και β

ii. το πεδίο ορισμού της f

iii. τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = 2$.

(Απάντ.: i. $\alpha = 9$, $\beta = 3$ ii. $D_f = (-3, -2) \cup (-2, +\infty)$ iii. B(0, 2))

3.9. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln(x^2 - 2x + \alpha)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε:

i. τον αριθμό α

ii. το πεδίο ορισμού της f

iii. τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x

iv. τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = 2\ln 3$.

(Απάντ.: i. $\alpha = 1$ ii. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ iii. $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$ iv. A(4, 2ln3)), B(-2, 2ln3))

3.10. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln(|x - 2| + \alpha)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$

Αν η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο 4, να βρείτε:

i. τον αριθμό α και το πεδίο ορισμού της f

ii. τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

iii. τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία: $y = -2\ln\dfrac{1}{2}$

(Απάντ.: i. $\alpha = -1$, $D_f = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ ii. $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ iii. A(-3, ln4) B(7, ln4))

3.11. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \ln x$ και $g(x) = |\ln x|$

ii. $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln\frac{1}{x}$

iii. $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln(e^2 \cdot x)$

iv. $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln(-x)$

3.12. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \alpha x - 1$, με $\alpha \in \mathbb{R}$

Αν η C_f διέρχεται από το σημείο Α(2, 1), τότε:

i. Να βρείτε τον αριθμό α

ii. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

(Απάντ.: i. $\alpha = 3$)

3.13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^x)$.

i. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα x΄x.

ii. Να βρείτε τη σχετική θέση της C_f με τον άξονα x΄x

(Απάντ.: i.δεν έχει, ii. για $x < 0$ $f(x) < 0$)

3.14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2$ και η ευθεία ε: $y = 2x - 2$.

i. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της ε.

ii. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και ε.

(Απάντ.: i. Α(1, 0), Β($\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ -2, Γ(-$\sqrt{2}$, -2$\sqrt{2}$ -2, ii. $f(x) > y$ όταν $x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$)

3.15. Έστω ότι γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha\ln(x + 1) + \beta$ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $e - 1$ και τον άξονα y΄y στο 2.

i. Να βρείτε τα α, β

ii. Να βρείτε το σημείο της C_f που έχει τεταγμένη $2 - 2\ln 2$.

(Απάντ.: i. $\alpha = -2$, $\beta = 2$ ii. Α(1, 2-2ln2))

3.16. Να βρείτε τη σχετική θέση των συναρτήσεων f και g για τις οποίες ισχύει:

i. $f(x) = g(x) + x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = g(x) + \ln x - 1,\ x > 0$

(Απάντ.: C_f πάνω από C_g: i. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ii. $(e, +\infty)$)

3.17. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^x$, να χαράξετε πρόχειρα τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f_1(x) = -e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = e^x - 1$, $f_4(x) = e^x + 1$.

3.18. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \ln x$, να χαράξετε πρόχειρα τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f_1(x) = |\ln x|$, $f_2(x) = \ln\frac{1}{x}$, $f_3(x) = \ln x + 1$, $f_4(x) = \ln(x - 1)$.

3.19. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ ii. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

iii. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$ iv. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$

3.20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x - \alpha}{x}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\ln 2, \dfrac{1}{\ln 2}\right)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f καθώς και την τιμή του α.

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x, x΄ για κάθε $x \in A$.

(Απάντ: i. $A_f = \mathbb{R}^*$, $\alpha = 1$)

3.21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2(\ln x - 1)$. Να βρείτε:

i. Το πεδίο ορισμού A της f.

ii. Τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της Cf με τους άξονες x΄x και y΄y.

iii. Το διάστημα στο οποίο η Cf βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

(Απάντ: i. $A = (0, +\infty)$, ii. $A(e, 0)$, iii. $(0, e)$)

3.22. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{e^x}{1-e^x}$ και $g(x) = \ln\dfrac{x}{x+1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.

ii. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η Cf βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

iii. Αν $M(\alpha, \beta) \in$ Cf, τότε να δείξετε ότι $M'(\beta, \alpha) \in$ Cg.

(Απάντ: i. $(-\infty, 0)$, $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, ii. $(0, +\infty)$)

3.23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + x$ και $g(x) = 2x^2 + 2$.

i. Να βρείτε το κοινό σημείο των Cf και Cg.

ii. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η Cf βρίσκεται κάτω από τη Cg.

(Απάντ: i. $A(2, 10)$, ii. $(-\infty, 2)$)

3.24. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 \cdot e^x + 1$ και $g(x) = x^2 + 1$.

i. Να βρείτε το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων Cf και Cg.

ii. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η Cf βρίσκεται πάνω από τη Cg.

(Απάντ: i. $A(0, 1)$, ii. $(0, +\infty)$)

3.25. Να βρείτε τη σχετική θέση καθώς και τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g, όταν:

i. $f(x) = g(x) + x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = g(x) + \ln x - 1, x > 0$

iii. $f(x) = g(x) + e^x - 1, x \in \mathbb{R}$

iv. $f(x) = g(x) + x^2 - 3x + 2, x \in \mathbb{R}$

(Απάντ: i. A(1, f(1)), B(-1, f(-1)), ii. A(e, f(e)), iii. A(0, f(0)), iv. A(1, f(1)), B(2, f(2))

3.26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \alpha x$.

i. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε η Cf βρίσκεται πάνω από τη Cg, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε οι Cf και Cg να έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

3.27. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: A \to \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{2f^2(x)+f(x)+1}{4x^2+x+1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η C_g είναι πάνω από τον άξονα x΄x.

3.28. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f^3(x) + f^2(x) + 2f(x) = x^2 + x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3.29. Έστω $A = (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$ και η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) = 9x^2 - 1$.

i. Να δείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα y΄y.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x.

(Απάντ.: ii. $A(-\frac{1}{3}, 0)$ $B(\frac{1}{3}, 0)$)

4. Σύνολο Τιμών

4.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$. Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού της f.

ii. το σύνολο τιμών της f.

(Απάντ.: i. R-{2}, ii.R-{2})

4.2. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(Απάντ.: $[2, +\infty)$)

4.3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9-\sqrt{x+1}}$. Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού της f.

ii. το σύνολο τιμών της f.

(Απάντ.: i. [-1, 80], ii. [0, 3])

4.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+1}{|x+1|-2}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 2 ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

(Απάντ.: $(-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, +\infty)$)

4.5. Να γράψετε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^4$ ii. $f(x) = x^5$ iii. $f(x) = συνx$

iv. $f(x) = ημ^2x$ v. $f(x) = e^x+1$ vi. $f(x) = \ln x + 1$

(Απάντ.: i. $[0, +\infty)$ ii. $\mathbb{R}$ iii. [-1, 1), iv. [0, 1], v. $(1, +\infty)$, vi. $\mathbb{R}$)

4.6. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & αν -2<x\leq 1 \\ \dfrac{2}{x}, & αν x>1 \end{cases}$

i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

ii. Με τη βοήθεια της C_f να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(Απάντ: ii. (0, 5))

4.7. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -x, & αν x\leq 0 \\ e^x, & αν x>0 \end{cases}$

i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

ii. Με τη βοήθεια της C_f να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(Απάντ: ii. [0, +∞))

4.8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + |x - 2|$

i. Να γράψετε τον τύπο της f χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

iii. Με τη βοήθεια της C_f να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(Απάντ: iii. [2, +∞))

4.9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{x^2+3x+\alpha}{x+2}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

Η C_f διέρχεται από το σημείο Α(-1, 0).

i. Να βρείτε τον πεδίο ορισμού της f και τον αριθμό α.

ii. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

iii. Με τη βοήθεια της C_f να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(Απάντ.: i. $\alpha = 2$ και $x \neq -2$, ii. $f(x) = x + 1$, iii. $\mathbb{R} - \{-1\}$)

4.10. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -x^2-1, & \text{αν} x \le 0 \\ -2, & \text{αν} 0<x<1 \\ \dfrac{3}{x}, & \text{αν} x \ge 1 \end{cases}$

i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

ii. Με τη βοήθεια της C_f να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(Απάντ.: ii. $(-\infty, -1] \cup (0, 3]$)

4.11. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, & \text{αν} |x|>1 \\ x^2, & \text{αν} |x| \le 1 \end{cases}$

i. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

ii. Με τη βοήθεια της C_f να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(Απάντ.: ii.$[0, 1]$)

4.12. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}, & \text{αν} x<-1 \\ -x+4, & \text{αν} -1 \le \chi \le 1 \\ \ln\dfrac{1}{x}, & \text{αν} x>1 \end{cases}$

i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

ii. Με τη βοήθεια της C_f να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(Απάντ.: ii.$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup [3, 5]$)

4.13. Δίνεται συνάρτηση με $f(x) = 2 + e^{x-1}$

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \sqrt{5}$ έχει μια τουλάχιστον λύση.

4.14. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ ii. $f(x) = x^2 - 2$

iii. $f(x) = |x| + 3$ iv. $f(x) = \sqrt{x-3}$

v. $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ vi. $f(x) = e^x - 3$

vii. $f(x) = e^{-x} - 1$

(Απάντ: i. $[1, +\infty)$, ii. $[-2, +\infty)$, iii. $[3, +\infty)$, iv. $[0, +\infty)$, v. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, vi. $(-3, +\infty)$, vii. $(-1, +\infty)$)

4.15. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = e^{x-1} + 2$ ii. $f(x) = 1 - \sqrt{x-1}$

iii. $f(x) = \ln(x - 1)$ iv. $f(x) = (x-2)^2 - 1$

v. $f(x) = 2\ln(e^x + 1) - 1$ vi. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

(Απάντ: i. $(2, +\infty)$, ii. $(-\infty, 1]$, iii. $\mathbb{R}$, iv. $[-1, +\infty)$, v. $(-1, +\infty)$, vi. $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$)

4.16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

ii. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μια λύση:

α. $f(x) = 0$

β. $f(x) = \sqrt{2}$

γ. $f(x) = ημθ$, $θ \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(Απάντ: $[1, +\infty)$)

4.17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x^2 + 1$. Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i. $g \circ f$ ii. $f \circ g$

(Απάντ.: i. $(g\circ f)(x) = x + 1, x \geq 0$ ii. $(f\circ g)(x) = \sqrt{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$)

4.18. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{x+4}$ και $g(x) = \frac{1}{x-3}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i. g o f ii. f o g

(Απάντ.: i. $\frac{x+4}{-2x-12}$, $x \neq -6$ και $x \neq -4$ ii. $\frac{1}{4x-11}$, $x \neq \frac{11}{4}$ και $x \neq 3$)

4.19. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+2}$ και $g(x) = x^2 + 4$. Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i. g o f ii. f o g

(Απάντ.: i. $x + 6$, $x \geq -2$ ii. $\sqrt{x^2+6}$, $x \in \mathbb{R}$)

4.20. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = \ln x$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i. f o g ii. g o f

(Απάντ.: $\sqrt{1-\ln x}$, $(0, e]$ ii. $\ln\sqrt{1-x}$, $(-\infty, 1)$)

4.21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x^2-9}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

ii. Να ορίσετε τη συνάρτηση f o f.

(Απάντ.: i. $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$ $f(x) = \frac{x+4}{x+3}$ ii. $\frac{5x+16}{4x+13}$, $x \neq -\frac{13}{4}$, $x \neq -3$, $x \neq -\frac{5}{2}$, $x \neq 3$)

4.22. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + 1$ και $g(x) = x^2 - 2x + 3$. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f o g και g o f.

(Απάντ.: Α(1, 3))

4.23. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2x + \alpha$ και $g(x) = 3x + 2\alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 1$.

i. Να βρείτε τον αριθμό α.

ii. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι ίσες.

(Απάντ.: i. $\alpha = -1$)

4.24. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + \lambda$ και $g(x) = -4x - 2\lambda + 4$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν οι συναρτήσεις fof και gog είναι ίσες, να βρείτε τον αριθμό λ.

(Απάντ.: $\lambda = 12$)

4.25. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$, $g(x) = x^2-1$ και $h(x) = \sqrt{x-2}$. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g \circ h$.

(Απάντ.: $(fogoh)(x) = \sqrt{x^2-10x+21}$ $x \in [2, 3] \cup [7, +\infty)$)

4.26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x - 1$ και $g(x) = 7x - \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι ίσες.

(Απάντ.: $\alpha = -2$, $\alpha = 3$)

4.27. Δίνεται συνάρτηση $f: [-16, 5] \to \mathbb{R}$ και οι συναρτήσεις $g(x) = 3x - 4$ και $h(x) = 9 - x^2$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $\varphi(x) = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x)$

(Απάντ.: $x \in [-4, -2] \cup [2, 3]$)

4.28. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-2}$ και $g(x) = \ln(x-2)$. Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i. $g \circ f$ ii. $f \circ g$

(Απάντ.: i. $(g\circ f)(x) = \ln(\sqrt{x-2} - 2)$, $x > 6$ ii. $(f\circ g) = \sqrt{\ln(x-2)-2}$ $x \geq e^2 + 2$)

4.29. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$ αν

i. $f(x) = x^2$ και $g(x) = \ln x$

ii. $f(x) = ημx$ και $g(x) = \sqrt{1-x^2}$

iii. $f(x) = \dfrac{5\pi}{4}$ και $g(x) = εφx$.

(Απάντ.: i. $(g\circ f)(x) = \ln x^2$, $x \neq 0$ ii. $(g\circ f)(x) = \sqrt{1-ημ^2x}$, $x \in \mathbb{R}$ iii. $(g\circ f)(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$)

4.30. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 4$ και $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i. $f \circ g$ ii. $g \circ f$ iii. $g \circ g$

(Απάντ.: i. $\dfrac{1}{(x-2)^2} + 4$, $x \neq 2$ ii. $\dfrac{1}{x^2+2}$, $x \in \mathbb{R}$ iii. $\dfrac{x-2}{-2x+5}$, $x \neq \dfrac{5}{2}$)

4.31. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i. $g \circ f$ ii. $f \circ g$ iii. $f \circ \dfrac{1}{f}$

(Απάντ.: i. $\sqrt{\dfrac{2}{x-1}}$, $x \neq 1$ ii. $\dfrac{2\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}-1}$, $x \in [2, 3) \cup (3, +\infty)$ iii. $\dfrac{2x-2}{-x-1}$, $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$)

4.32. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x - 1$ και $g(x) = 3αx + 1$. Για ποια τιμή του $α \in \mathbb{R}$ ισχύει $g \circ f = f \circ g$;

(Απάντ.: $α = 0$)

4.33. Δίνεται η συνάρτηση f: [-2, 1] → ℝ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων.

i. $g(x) = f(2x - 3)$ ii. $h(x) = f(x^2)$ iii. $\varphi(x) = f(\ln x)$

(Απάντ: i. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, ii. $[-1, 1]$, iii. $[e^{-2}, e]$)

4.34. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το A=(0, 1], να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(x + 2) + f(\ln x)$.

(Απάντ.: Δεν ορίζεται)

4.35. Αν $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = 3\sqrt{x} - 2$ να ορίσετε τις συναρτήσεις f o g και g o f.

4.36. Δίνεται f: [0, 5) → ℝ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h, με $h(x) = f(x^2 - 4) + f(x + 1)$

(Απάντ: [2, 3))

4.37. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$. Να ορίσετε τη συνάρτηση gof.

4.38. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές:

i. $f(x) = \dfrac{x^5 - \eta\mu x}{x^2 - 1}$

ii. $f(x) = \dfrac{|x| + x^6}{\sqrt{9 - x^2}}$

iii. $f(x) = |x - 8| + |x + 8|$

iv. $f(x) = \ln\dfrac{3-x}{3+x}$

v. $f(x) = \dfrac{1}{1+2^x} - \dfrac{1}{2}$

4.39. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

i. $f(x) = \dfrac{x^2-|x|}{x^2+|x|}$ ii. $f(x) = \dfrac{συνx}{|x|}$

iii. $f(x) = \ln(1-x^2)$ iv. $f(x) = x \cdot e|x|$

v. $f(x) = \dfrac{ημx}{2+ημx}$ vi. $f(x) = xημx$

4.40. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές.

i. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ ii. $f(x) = \dfrac{ημx}{x}$

iii. $f(x) = \dfrac{1-συνx}{x}$ iv. $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

v. $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ vi. $f(x) = \dfrac{x^3ημx}{\ln|x|+1}$.

vii. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$.

(Απάντ: i. Άρτια, ii. Άρτια, iii. Περιττή)

4.41. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες

i. $f(x) = x\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ ii. $f(x) = x\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ iii. $f(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

4.42. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = 5 - \sqrt{6-x}$ ii. $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x - 3x^5 + 1$

iii. $f(x) = 3 - \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}+1}$ iv. $f(x) = \ln(x-2) + 3x^2$

v. $f(x) = e^x + x^3+1$ vi. $f(x) = \dfrac{2}{x} - \ln x$

4.43. Εξετάστε τη μονοτονία των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{5-\sqrt{5-x}}$ ii. $f(x) = \ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

iii. $f(x) = (x-1)^3 - 2$ iv. $f(x) = e^{\sqrt{4-x}} - 3$

v. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$ vi. $f(x) = \begin{cases} 4x+3 & \text{αν } x<2 \\ 1-2x & \text{αν } x\geq 2 \end{cases}$

4.44. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x)= x^3+3x$ ii. $f(x)= x^3+2\ln x$

iii. $f(x)= e^x+2x$ iv. $f(x)= x^2+\ln x$

v. $f(x)= \dfrac{2}{x}-\ln x+1$ vi. $f(x)= x^2+\sqrt{x}$

vii. $f(x)= e^x-e^{-x}$ viii. $f(x)= e^{-x}+\dfrac{1}{x}$

ix. $f(x)= \left(\dfrac{2}{3}\right)^x-4x$ x. $f(x)= \sqrt{x}\cdot e^x+x$

4.45. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

i. $f(x)= x^2+\ln(x^2+1)$ ii. $f(x)= \dfrac{3}{x^2+1}$

iii. $f(x)= \dfrac{2}{1+e^{-2x}}$

4.46. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i. $f(x)= \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ ii. $f(x)= \dfrac{e^x}{e^x+1}$

iii. $f(x)= \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ iv. $f(x)= \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$

v. $f(x)= \dfrac{x}{x+1}$, $x>-1$ vi. $f(x)= \dfrac{x^3}{x^3+1}$, $x>0$

4.47. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία στο διάστημα Δ τις παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$, $\Delta=[0,+\infty)$

ii. $f(x)=x+\ln(x^2+1)$, $\Delta=[0,+\infty)$

iii. $f(x)=x^{2x}$, $\Delta=(1,+\infty)$

iv. $f(x)=x^{\ln x}$, $\Delta=(1,+\infty)$

v. $f(x)=(\ln x)^x$, $\Delta=(e,+\infty)$

4.48. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, όταν:

i. $f^3(x)+2f(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii. $f(x)+e^{f(x)}=3x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iii. $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

5. Ισότητα Συναρτήσεων

5.1. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Αν δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του ℝ στο οποίο ισχύει f(x) = g(x).

i. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ και $g(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

ii. $f(x) = \dfrac{2x^2+4x-16}{x^2-3x+2}$ και $g(x) = \dfrac{2x+8}{x-1}$

iii. $f(x) = \dfrac{x^2-3|x|}{x^2}$ και $g(x) = \dfrac{|x|-3}{|x|}$.

(Απάντ.: i. f(x) = g(x) για $x \neq 2$, ii. f(x) = g(x) όταν $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$, iii. f(x) = g(x) για $x \neq 0$)

5.2. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Αν δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του ℝ στο οποίο ισχύει f(x) = g(x).

i. $f(x) = \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+5}$ και $g(x) = \sqrt{x^2+4x-5}$

ii. $f(x) = \sqrt{x+3}\cdot\sqrt{3-x}$ και $g(x) = \sqrt{9-x^2}$

iii. $f(x) = \sqrt{|x|-2}\cdot\sqrt{|x|+2}$ και $g(x) = \sqrt{x^2-4}$

iv. $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1}{x^2-2x+1}$ και $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

(Απάντ.: i. f(x) = g(x) για $x \geq 1$, ii. f(x) = g(x) για $x \geq 2$ ή $x \leq -2$,
iii. f(x) = g(x) για $x \in [-3, 3]$, iv. f(x) = g(x) για $x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$)

5.3. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Αν δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του ℝ στο οποίο ισχύει f(x) = g(x).

i. $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 4)$ και $g(x) = \ln(x - 1) + \ln(x + 4)$

ii. $f(x) = \dfrac{e^{2x}-xe^x}{xe^x}$ και $g(x) = \dfrac{e^x}{x} - 1$

(Απάντ.: i. f(x) = g(x) για $x \geq 1$, ii. f(x) = g(x) για $x \neq 0$)

5.4. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\lambda x+\lambda+1}{x-2\lambda} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{\lambda^2x^2-4\lambda}{x^2-(3\lambda+1)x+4}, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε για ποια τιμή του λ οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

(Απάντ.: $\lambda = 1$)

5.5. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f, g: \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}$

με $f(x) = x^{13} - x^{14}$ και $g(x) = x^{2013} - x^{2014}$. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

(Απαντ: ίσες)

5.6. Να εξετάσετε για ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις f, g ισχύει $f = g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι $f = g$.

i. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ και $g(x) = x+1$

ii. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$

iii. $f(x) = x$ και $g(x) = \ln e^{x}$

iv. $f(x) = x^x$ και $g(x) = e^{x\ln x}$

v. $f(x) = \sqrt{x^2-x}$ και $g(x) = \sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$

vi. $f(x) = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x$ και $g(x) = 1$

vii. $f(x) = \dfrac{x^2-|x|}{x^2+|x|}$ και $g(x) = \dfrac{|x|-1}{|x|+1}$

viii. $f(x) = \ln x(x-1)$ και $g(x) = \ln x + \ln(x-1)$

ix. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ και $g(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$.

5.7. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις:

$f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ και $g(x) = -\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$.

6. Πράξεις Συναρτήσεων

6.1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-x}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις f + g, f - g, f·g και $\dfrac{f}{g}$.

(Απάντ.: $D_{f+g} = (1, +\infty)$ $D_{f\cdot g} = (1, +\infty)$, $D_{\frac{f}{g}} = (1, 3) \cup (3, +\infty)$)

6.2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x - 2$ και $g(x) = e^x - e$.

i. Να ορίσετε τη συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) \geq 0$.

(Απάντ.: i. $D_{\frac{f}{g}} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ii. $(0, 1) \cup [e^2, +\infty)$)

6.3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x + 2)$ και $g(x) = \ln(x - 2)$.

i. Να ορίσετε τις συναρτήσεις f+g, f-g, f·g και $\dfrac{f}{g}$.

ii. Να βρείτε για ποια x, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f + g βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = \ln 12$.

(Απάντ.: i. $D = (2, +\infty)$ $D_{\frac{f}{g}} = (2, 3) \cup (3, +\infty)$ ii. $(2, 4)$)

6.4. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \dfrac{x^2+\alpha}{-x-2}$ και $g(x) = \dfrac{7x+5\alpha}{2-x}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 3$.

i. Να βρείτε τον αριθμό α.

ii. Να ορίσετε τις συναρτήσεις f+g, f-g, f·g και $\dfrac{g}{f}$.

iii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f \cdot g$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

(Απάντ.: $\alpha = 4$ ii. $D = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ iii. $x \in (-\infty, -\frac{20}{7}) \cup (-2, 2)$)

6.5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{αν } x \le 2 \\ 3x+2, & \text{αν } x > 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 3+x, & \text{αν } x \le -1 \\ x-1, & \text{αν } x > -1 \end{cases}$$

Να ορίσετε τη συνάρτηση f + g.

(Απάντ.: $(f+g)(x) = \begin{cases} 2x+6, & x \le -1 \\ 2x+2, & -1 < x \le 2 \\ 4x+1, & x > 2 \end{cases}$)

6.6. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-4, & \text{αν } x \le -1 \\ x^2+2x, & \text{αν } x > -1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 + 2x$$

Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{g}{f}$.

(Απάντ: $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2}, & x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1] \\ 1, & x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty) \end{cases}$)

6.7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$(f(x) + g(x))^2 = 4f(x) \cdot g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

6.8. Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$f^2(x) + g^2(x) + 8x^2 \le 4x(f(x) + g(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

6.9. Έστω οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει

$g(x) = f(x)(2 - f(x)) + e^x - 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η C_g τέμνει τον ημιάξονα Oy΄.

6.10. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, με $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ και $g(x)=\sqrt{x-1}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i. $f+g$ ii. $f\cdot g$ iii. $\dfrac{f}{g}$

6.11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x^2$ και $g(x) = x^2 + 2x$. Να βρείτε τις τιμές:

i. $(f+g)(2)$ ii. $(f-g)(1)$

iii. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-3)$ iv. $(f\cdot g)(-1)$

(Απάντ: i. 20, ii. 0, iii. 9, iv. -3)

6.12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

- $f+g$
- $f\cdot g$
- $\dfrac{f}{g}$

Να αποδείξετε ότι $f^2(x) - g^2(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6.13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ και $g(x) = \dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$

i. να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

ii. Να αποδείξετε ότι $g(x) = \dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}$

iii. Να αποδείξετε ότι $1 - f^2(x) = g^2(x)$.

7. Σύνθεση Συναρτήσεων

7.1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \alpha\nu\, x \le 0 \\ x+1, & \alpha\nu\, x > 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 2-x, & \alpha\nu\, x < 1 \\ 2+x, & \alpha\nu\, x \ge 1 \end{cases}$$

Να ορίσετε τη f o g.

7.2. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$(f \circ f)(x) = 4x - 3$. Να βρείτε το f(1).

(Απάντ.: 1)

7.3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = x^3$ και $f_3(x) = \sigma\upsilon\nu x$

Να γράψετε καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις ως σύνθεση των συναρτήσεων f_1, f_2 και f_3:

i. $g_1(x) = e^{\sigma\upsilon\nu^3 x}$ ii. $g_2(x) = e^{3\sigma\upsilon\nu x}$ iii. $g_3(x) = \sigma\upsilon\nu^3 e^x$

iv. $g_4(x) = \sigma\upsilon\nu e^{3x}$ v. $g_5(x) = e^{\sigma\upsilon\nu x^{9}}$ vi. $g_6(x) = \sigma\upsilon\nu^9 e^{3x}$

7.4. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x - 1$ και

$(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4$. Να ορίσετε τη συνάρτηση g.

(Απάντ.: $g(x) = x^2 + 2x + 5$)

7.5. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 3x - 2$ και

$(g \circ f)(x) = 3x^2 - 6x + 10$. Να βρείτε:

i. τη συνάρτηση f

ii. τα x για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

(Απάντ.: i. $f(x) = x^2 - 2x + 4$ ii. $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$)

7.12. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει:

i. $(g \circ f)(x) = |ημx|$, αν $g(x) = \sqrt{1-x^2}$

ii. $(g \circ f)(x) = 2|εφx|$, αν $g(x) = \sqrt{x^2-4}$

(Απάντ: i. $|f(x)| = |συνx|$, ii. $|f(x) = \frac{2}{συνx}$)

7.13. Να εκφράσετε ως σύνθεση δύο ή τριών συναρτήσεων τη συνάρτηση f όταν:

i. $f(x) = ημx^2$ ii. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$

iii. $f(x) = ημ\ln(x^2 + 1)$ iv. $f(x) = \sqrt{e^{2x}+1}$

7.14. Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσότερων (μη ταυτοτικών) συναρτήσεων αν:

$f(x) = x^x$ $g(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 + 3)$

$k(x) = (\ln(x + 1) - \ln x)^2$

7.15. Να οριστεί η συνάρτηση $f \circ g$ αν

i. $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = \ln x$

ii. $f(x) = \begin{cases} x-1 & αν\ x \in (0, 2) \\ x+1 & αν\ x \in [2, 4) \end{cases}$, $g(x) = |x - 1|$

7.16. Αν $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ να αποδείξετε ότι $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7.17. Να βρεθεί ο τύπος μιας συνάρτησης f σε κάθε μια από τις περιπτώσεις:

i. Αν $f(\ln(2x)) = x + 3$, για κάθε $x > e$.

ii. Αν $(f \circ g)(x) = x^2 + x + 1$ και $g(x) = x + 1$

iii. Αν $(g \circ f)(x) =$ συν$2x$ και $g(x) = x^2$

7.18. Αν ισχύει ότι $(f \circ f)(x) = 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το $f(1)$.

7.19. Για τη συνάρτηση $f: [-5, 6] \to \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα, να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, αν ισχύει $(f\circ f)(\alpha + 1) = 3$.

7.20. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (0, 1]$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h, όταν:

i. $h(x)= f(2x-1)$ ii. $h(x) = f(x^2)$ iii. $h(x) =f(e^x)$

7.21. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)= x^2 + 1$ και $g(x) = 3x + 2$. Να αποδείξετε ότι ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ και στη συνέχεια να βρείτε για ποιές τιμές $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(g(x)) = g(f(x))$.

7.22. Να βρείτε τη συνάρτηση $g(x)$ για την οποία ισχύει $f(g(x)) =h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, όπου

i. $f(x)= 2x + 1$ και $h(x) = 2x^2 + 4x +1$

ii. $f(x)= 2x – 3$ και $h(x)= x^2 -3x$

iii. $f(x)= ex$ και $h(x)= \sqrt{x^2+1}+x$

iv. $f(x)=2x +1$ και $h(x)= 4x^2 + 4x + 3$.

7.23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x)= x^2-1$.

i. Να βρείτε τις τιμές:

α) $f(g(1))$

β) $g(f(1))$

γ) $f(g(-4))$

δ) $g(f(0))$

ii. Να ορίσετε τις συναρτήσεις fog και gof.

7.24. Να ορίσετε τη συνάρτηση fog στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $g(x)= x +2$ και $f(x) = x^2 + 1$

ii. $g(x)= x + 1$ και $f(x)= \sqrt{8-x}$

iii. $g(x)= x^2-2$ και $f(x)= \sqrt{x+1}$

iv. $g(x)= \ln x$ και $f(x)= \dfrac{1}{1-x^2}$

v. $g(x)=e^x+1$ και $f(x)= \sqrt{x-1}$.

7.25. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x)= \sqrt{x^2+1}+x$.

Να βρείτε τη συνάρτηση fog.

7.26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln (x + \sqrt{x^2+1})$ και

$g(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$. Να βρείτε τη συνάρτηση fog.

7.27. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ και $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Να βρείτε τη συνάρτηση fog.

7.28. Για κάθε x $\in \mathbb{R}$ -{0,1}, θεωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων: A= $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$,

όπου $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\dfrac{1}{x}$, $f_3(x)=1-x$, $f_4(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $f_5(x)=\dfrac{x-1}{x}$

και $f_6(x)=\dfrac{x}{x-1}$. Να αποδείξετε ότι $f_i \circ f_j \in A$, για κάθε i, j= 1, 2, ..., 6.

(Δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσετε όλες τις περιπτώσεις. Να κάνετε τυχαία επιλογή 2 περιπτώσεων).

7.29. Να εκφράσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως σύνθεση δύο συναρτήσεων, όπου καμία από αυτές να μην είναι η g(x) =x.

i. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^4+2}$

ii. $f(x)= \ln 2x + 2\ln x - 1$

iii. $f(x) = \dfrac{e^x-3}{e^{2x}+1}$

iv. $f(x)= (x^2+1)^x$

v. $f(x)= \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

vi. $f(x)= \dfrac{2ημx}{3-συν^2x}$.

8. Εύρεση Τύπου

8.1. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f(x) + 2f(3 - x) = 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την f.

(Απάντ.: $f(x) = -2x + \frac{13}{3}$)

8.2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε την f.

8.3. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x^2)+f(2x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

(Απάντ.: $x = 4$, $x = 0$)

8.4. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f(f(x)) = 3x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι $f(3x + 4) = 3f(x) + 4$, $x \in \mathbb{R}$

ii. Να υπολογίσετε το $f(-2)$.

8.5. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = 3x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι $f(3x - 2) = 3f(x) - 2$, $x \in \mathbb{R}$

ii. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y = 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

8.6. Να αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση που να ικανοποιεί τη σχέση $f(x) + f(2 - x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8.7. Αν $f(x) = x^2 + x + 2$ και $g(x) = x^2 - x + 2$ να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση h με $A_h = \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει

$h(f(x)) + h(g(x)) = g(f(x))$

8.8. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1$ για κάθε $x > 0$.

8.9. Αν $f(f(x)) = e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η παίρνει την τιμή 2014.

8.10. Να προσδιοριστεί ο τύπος της f:

i. Αν $(1 - x)f(x - 1) + f(1 - x) + x = 1$, $x \in \mathbb{R}$

ii. Αν ισχύει $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

8.11. Αν $f(x) = \dfrac{\alpha x+3}{2-x}$ να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$, αν ισχύει: $(f \circ f)(x) = x$, $x \neq 2$

8.12. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) + x > 0$ και
- $f^2(x) = 1 - 2xf(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

iii. Αν $g(x) = \ln x$, τότε να ορίσετε την συνάρτηση gof.

8.13. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x$, τα σημεία Α, Μ, Β της C_f καθώς και τις προβολές τους $A'(\alpha, 0)$, $M'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, 0\right)$ και $B'(\beta, 0)$ στον άξονα x΄x αντίστοιχα.

i. να εκφράσετε συναρτήσει των α, β το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΑ΄Β΄Β, καθώς και το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση Α΄Β΄ και ύψος ΜΜ΄.

ii. να αποδείξετε με αλγεβρικό τρόπο ότι ισχύει: $\frac{e^\alpha + e^\beta}{2} > e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$, για $\alpha < \beta$ και να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω ανισότητας.

8.14. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)= \alpha x + \beta$ επαληθεύει τις παρακάτω συναρτησιακές σχέσεις:

i. $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

ii. $f(x) = \frac{f(x-h)+f(x+h)}{2}$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

8.15. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

i. $2f(x) + 3f(-x) = 4x + 5$

ii. $2f(x) + 3f(1 - x) = 4x + 5$

iii. $f(x - 1) = x^2 + 4x - 1$

iv. $x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$

v. $x \cdot f(x) + f(1 - x) = 2x - x^2$.

8.16. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x^2+2) + f(3x) = \ln(x^2 - 3x + 3), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο τουλάχιστον σημεία.

(Απάντ: $f(3) = f(2) = 0$)

8.17. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(e^x - x) + f(1 - x) = 2e^x - 4x + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η f παίρνει την τιμή 2.

(Απάντ: f(1) = 2)

8.18. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(\ln(x + 1)+x) + f(x) = e^x + 2x - 1, \text{ για κάθε } x > -1.$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(Απάντ: f(0) = 0)

8.19. Δίνεται η συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$f(x \cdot y) + f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = \ln x + \ln y, \text{ για κάθε } x, y > 0.$$

i. Να δείξετε ότι:

α. $f(1)=0$ β. $f(e^2)=2$

ii. να βρείτε την f(x).

8.20. Δίνεται η συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y > 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

i. $f(1) = 0$ ii. $f(x^2) = 2f(x)$

iii. $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ iv. $f\left(\frac{x}{y}\right)$ $f(x) - f(y)$

8.21. Δίνεται η συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

i. $f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$,

ii. $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, για κάθε $x, y > 0$.

Να δείξετε ότι:

– $f(1)=1$

– $f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=1$, για κάθε $x>0$

– $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\geq 2$, για κάθε $x>0$.

8.22. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

- $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$,
- $f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$, για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$.

  i. Να δείξετε ότι $2f(x)=1=x^2+f(0)$, $x\in\mathbb{R}$.

  ii. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

  iii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

8.23. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$,
- $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. να δείξετε ότι

  α. $f(0)=1$

  β. $f(x)\cdot f(-x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. β. θεωρούμε τη συνάρτηση $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $g(x)=\ln f(x)$. Να δείξετε ότι: $g(x+y)=g(x)+g(y)$, για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$.

8.24. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)+f^3(x)=2e^x,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)>0$.

ii. Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.

iii. Να δείξετε ότι $f(x)\leq\sqrt{e^x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Απάντ: ii. $f(0)=1$)

8.25. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x+1)\leq x^2\leq f(x)+2x-1,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

8.26. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$e^{x+y} \leq f(x) \cdot f(y) \leq f(x+y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad (1).$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0$ και $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

iii. Να βρείτε τον τύπο της f.

8.27. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x + y \leq e^x f(x) + e^y f(y) \leq f(x+y) \cdot e^{x+y}, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad (1).$$

i. Να δείξετε ότι $f(0)=0$.

ii. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^{2x} \cdot f(x) + f(-x) = 0$.

iii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησής f.

8.28. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $f^2(x) = 2f(x) + e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

8.29. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

- $f(x) > 0$ και
- $(f(x)-1)(f(x)+1)=x^2 + 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση Cf.

8.30. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) > -x$ και
- $f^2(x) + 2xf(x)=1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$ και $f(1)=\sqrt{2-1}$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

iii. Θεωρούμε, επιπλέον, τη συνάρτηση $g(x)=\ln f(x)$.

iv. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότι: $g(x) + g(-x)=0$, για κάθε $x \in A$.

8.31. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $e^{f(x)} > x$ και
- $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι $f(0)=0$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

8.32. Στις παρακάτω συναρτήσεις να γίνει αλλαγή της μεταβλητής, ώστε αυτές να έχουν τη μορφή f(x).

vi. $f(2x - 1) = x^2 - 3x + 2$

vii. $f(x^3) = x^6 - 2x^2 + 1, \quad x \geq 0$

viii. $f(\ln x) = x^2 - x + 2, \quad x > 0$

ix. $f(e^x - 1) = x^2 - 3x + 1$

(Απάντ: i. $f(x) =$, ii. $f(x) = x^2 - 2\sqrt[3]{x^2} + 1, x \geq 0$, iii. $f(x) = e^{2x} - e^x + 2, x > 0$, iv. $f(x) = \ln^2(x + 1) - 3\ln(x + 1) + 1$)

8.33. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ ισχύει ότι $f(x + y) = f(x) \cdot e^{f(y)-1}$ x, $y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{f(x)-1}$ και $f(x) = e^{1-f(-x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την f.

9. Άρτια - Περιττή

9.1. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι επόμενες συναρτήσεις:

i. $f(x) = \begin{cases} x - x^4 ημx, & αν\, x \le 0 \\ x^4 ημx - x, & αν\, x > 0 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 5x^2 - 3, & αν\, x \le -1 \\ x^3 - 5x^2 + 3, & αν\, x \ge 1 \end{cases}$

9.2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x^3 + αx + α + 2}{|x| - 3}$, με $α \in \mathbb{R}$, διέρχεται από το σημείο A(-2, 4).

i. Να βρείτε τον αριθμό α.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

(Απάντ.: i. α = 2)

9.3. α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Δίνεται η περιττή συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 4x + α$, με $α \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

i. τον αριθμό α

ii. τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x

iii. τα σημεία τομής της C_f με τη γραφική παράσταση της $g(x) = -4x^2 - 3x + 4$

(Απάντ.: β.i. α = 0   ii. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ iii. A(1, -3) B(-1, 3) Γ(-4, -48))

9.4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x.

(Απάντ.: i. $\mathbb{R}$ ii. O(0, 0))

9.5. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(x + y) + f(x - y) = 2(f(x) + f(y))$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων.

ii. η f είναι άρτια.

iii. ισχύει $f(|x|) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

9.6. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την τιμή f(0)

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

(Απάντ.: i. $f(0) = 1$)

9.7. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$x^3[f(x) + f(-x) + 6] = 3f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

(Απάντ.: $f(x) = 2x^3$, $x \in \mathbb{R}$)

9.8. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μη σταθερή, για την οποία ισχύει $f(x + y) = \alpha \cdot f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$

ii. Να βρείτε το f(0)

iii. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

9.9. Έστω οι συναρτήσεις $f: A_f \to \mathbb{R}$, $g: A_g \to \mathbb{R}$ με $f(A_f) \subseteq A_g$. Να αποδειχτούν οι προτάσεις:

α. Αν η f είναι άρτια, τότε και η $g \circ f$ είναι άρτια.

β. Αν η f είναι περιοδική, τότε και η g ο f είναι περιοδική με την ίδια περίοδο.

9.10. Να βρεθούν οι συναρτήσεις f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αν για κάθε x, y $\in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) + f(y) + f(xy) = x + y + xy$

9.11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι είναι άρτια
ii. Να βρείτε τα σημεία όπου η C_f τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.
iii. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x

9.12. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, από τις οποίες η f είναι άρτια και η g είναι περιττή. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $h = f \cdot g$ είναι περιττή.
ii. Η συνάρτηση $h = g^2$ είναι άρτια.
iii. Η συνάρτηση $h = f \cdot |g|$ είναι άρτια.

9.13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{e^x-1}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) - f(-x) = 0$, για κάθε $x \neq 0$.
ii. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$ και στη συνέχεια με τη βοήθεια του παραρτήματος α να δείξετε ότι τελικά $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

9.14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$.

i. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο A = R.
ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

9.15. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$|f(x + y)| = |f(x) + f(y)|, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε την τιμή f(0) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

9.16. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

9.17. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2f(x) + f(-x) = \frac{3}{x^2+1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι άρτια.

β. Να βρείτε τον τύπο της f.

9.18. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) \le \frac{x^3}{x^2+1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

9.19. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \dfrac{\alpha - x}{x+3}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο A(-5, -4).

i. Να βρείτε τον αριθμό α.

ii. Να ορίσετε τη συνάρτηση f o g.

iii. Να αποδείξετε ότι η f o g είναι περιττή.

(Απάντ.: i. $\alpha = 3$ ii. $x \in (-3, 3)$ $fog(x) = \ln\dfrac{3-x}{x+3}$)

10. Μονοτονία

10.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x + 2)^2 - 1$

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $(-2, +\infty)$.

iii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

iv. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να εξετάσετε αν η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

10.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - |x - 1|$.

i. Να γράψετε τον τύπο της f χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

10.3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{4(\alpha+\sqrt{x})}{3\alpha+\sqrt{x}}$, όπου α πραγματικός αριθμός. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(25, 3).

i. Να βρείτε τον αριθμό α.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 4 - \dfrac{8}{3+\sqrt{x}}$

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

(Απάντ.: i. $\alpha = 1$ iii. γν. αύξουσα)

10.4. Δίνεται η επόμενη συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{\alpha \cdot e^x}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$ όπου

α πραγματικός αριθμός. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y'y στο $\sqrt{2}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τον αριθμό α.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}$

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

(Απάντ.: i. $(-\infty, 0)$, $\alpha = 2$ iii. γν. αύξουσα)

10.5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 3x^2+\alpha, & \alpha\nu\, x>0 \\ x+2, & \alpha\nu\, x\le 0 \end{cases}$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(f(0)) = 14$

i. Να βρείτε τον αριθμό α.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Απάντ.: i. $\alpha = 2$)

10.6. Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(x) - f(y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ για κάθε x, y > 0. Επιπλέον ισχύει ότι «αν α > 1 τότε f(α) > 0». Να δείξετε ότι η f είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$

10.7. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$e^x - e^{-x} \le 2f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

10.8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(-x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$ και στη συνέχεια (με τη βοήθεια του (α) ερωτήματος) ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

10.9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$.

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

α. $f(x)>0$

β. $f(x)\cdot f(-x)=1$ (1)

ii. Να αποδείξετε ότι η f $\nearrow$ $[0,+\infty)$ και στην συνέχεια με τη βοήθεια της (1) ότι η είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

10.10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\sqrt{x-1}}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \ln f(x)$.

ii. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης g.

iii. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

10.11. Έστω οι συναρτήσεις f,g,h: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε:

$$(g\circ f)(x) = h(x),\ x \in \mathbb{R}$$

i. Να αποδείξετε ότι, αν οι συναρτήσεις g,h είναι γνησίως αύξουσες, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης $g(x) = \alpha x+\beta x+x$, με $\alpha,\beta> 1$

iii. Αν για την συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha f(x)+\beta f(x)+f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

10.12. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ και $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1+x}\right)$

i. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση $g\circ f$.

iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

10.13. Δίνεται η συνάρτηση f: $A \to \mathbb{R}$, με $A=[1,+\infty)$ και

$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Θεωρούμε ,επιπλέον ,τις συναρτήσεις g, h: $[0,+\infty) \to \mathbb{R}$,με:

$$g(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \text{ και } h(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α. $g^2(x)-1 = h^2(x)$ β. $h(x) \geq 0$ $x \geq 0$ γ. $g(x) \geq 1$

iii. Να βρείτε τη συνάρτηση

iv. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

10.14. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια , ώστε $f(x)+e^{f(x)} = 2x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε την τιμή f(0) και να μελετήσετε τη θέση της C_f ως προς τον άξονα x΄x για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Απάντ: ii. f(0) = 0, πάνω x΄x $x > 0$
κάτω x΄x $x < 0$)

11. Ανίσωση με Μονοτονία

11.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{1}{2x^2+3} - \frac{1}{x^2+2x+6} > \sqrt{2x^2+3} - \sqrt{x^2+2x+6}$$

(Απάντ.: i. γν. φθίνουσα ii. $-1 < x < 3$)

11.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 8e^{2-x} - 2x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 4$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $8(e^{2-x^2} - e^{2-x}) > -2x(1 - x)$

(Απάντ.: i. γν. φθίνουσα ii. $x > 2$ iii. $(0, 1)$)

11.3. Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(1, 5) και B(-2, 7)

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(|x|-4)-6) - 5 < 0$

(Απάντ.: i. γν. φθίνουσα ii. $x \in (-2, 2)$)

11.4. Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$. Η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα.

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h = \frac{f}{g}$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2)g(3x) - f(3x)g(x^2) > 0$

(Απάντ.: i. γν. αύξουσα ii. $x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$)

11.5. Δίνεται γνησίως φθίνουσα συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(2, 2). Θεωρούμε επίσης, και τη συνάρτηση $g(x)=3f(x)-(fof)(x)$.

i. Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $3(f(|x|) - 1) > (f \circ f)(|x|) + 1$

(Απάντ.: i. γν. φθίνουσα ii. $x \in (-2, 2)$)

11.6. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = e^x + x^5 + x^3 + x - 1$ και $g(x) = 2 - x - x^3 - \ln x$. Να λυθούν οι ανισώσεις $f(x) > 0$, $g(x) > 0$

(Απάντ.: $x > 0$, $0 < x < 1$)

11.7. i. Αν $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ τότε να αποδειχθεί ότι η f είναι γν. φθίνουσα.

ii. Να λυθεί η ανίσωση $3^x + 4^x > 5^x$.

(Απάντ.: ii. $x < 2$)

11.8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $\ln x > 1 - x$ ii. $e^x > \frac{1-x}{1+x}$

(Απάντ: i. $x > 1$, ii. $x > 0$)

11.9. Για τη συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $2f^5(x) + f(x) = 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα.

ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 + x - 1) < 1$

11.10. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x$ είναι γνησίως αύξουσα και να λύσετε την ανίσωση

$2^{3x-x^2} - 2^{6-2x} > x^2 - 5x + 6$.

11.11. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $f(0) = 1$, τότε να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $f(2x-3)<1$

ii. $f(x^2-3x+2)>1$

iii. $f(2f(x)-2)<1$

iv. $f(e^{f(x)}-e)>1$

v. $f(f(x)) > f(1)$

vi. $f(3f(x)-2)<f(2f(x)-1)$.

11.12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^{-x} - x$.

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $f(x)>1$

β. $f(-x)<3$

γ. $f(f(x)-2)<3$

δ. $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{2} > x$

ε. $2^x(x+3)>1$

στ. $1< 2^x(x+6)$

11.13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)= e^{-x} - x^3$

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, με $x < y$, ισχύει $e^{-x} - e^{-y} > x^3 - y^3$.

ii. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $e^x(x^3+1)<1$

β. $f(f(x)) < \frac{1}{e} - 1$

γ. $e^{-x} - \frac{1}{2} < x^3 - \ln^3 2$

11.14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)= x^3 + x +2$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $f(x) < 0$	β. $f(x) < 4$
γ. $f(x) > 12$	δ. $f(f(x)) > 12$
ε. $f(x^2 - 3x + 2) < 2$	στ. $f(f(x) - 2) < f(6 - f(x)$

11.15. Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συναρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(2,-1) και B(5,2).

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $2^{f^2(x)} \leq 4\cdot 2^{f(x)}$

(Απάντ: i. f γν. αυξ., ii. $2 \leq x \leq 5$)

11.16. Να μελετήσετε το πρόσημο των τιμών των παρακάτω συναρτήσεων και να κάνετε τον σχετικό πινάκα.

i. $f(x)\frac{1}{x}\text{-}\ln x\text{-}1$

ii. $f(x)= e^x+x-1$

iii. $f(x)= x^5+x^3+x-3$

iv. $f(x)= e^x+\ln(x+1)-1$

11.17. Δίνεται η συναρτηση $f(x)= e^x+x-1$

i. Να κάνετε τον πίνακα πρόσημου των τιμών της f.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x-2)\cdot f(x-1)<0$.

(Απάντ: i. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ ii. $x \in (1, 2)$))

11.22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x^2 + 1)$.

i. Να μελετήσετε τη συναρτηση f ως προς την μονοτονία στο διάστημα $\Delta = [0, +\infty)$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - x - 6 < \ln\frac{(x+6)^2+1}{x^4+1}$, στο διάστημα $[-6,+\infty)$

11.23. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, με $A = (0,+\infty)$ και $f(x)=\frac{x}{e^x}$

i. Να αποδείξετε ότι η συναρτηση $g(x)=\frac{f(x+1)}{f(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Α.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(2x)\cdot f(x^2+1)<f(2x+1)\cdot f(x^2)$, $x>0$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\ln f(x^4+1)+\ln f(x^2) <\ln f(x^2+1)+\ln f(x^4)$, $x\neq 0$

11.24. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις όποιες ισχύουν:

- η f είναι γνησίως φθίνουσα
- $g(x)=f(x-1)-f(1-x)$

i. Να μελετήσετε τη συναρτηση gως προς τη μονοτονία

ii. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η C_g βρίσκεται πάνω από το άξονα x΄x

iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2-1)+f(1-2x)<f(2x-1)+f(1-x^2)$

11.25. Δίνεται η συναρτηση $f(x)=\sqrt{x}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συναρτηση $g(x)=f(x+1)-f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2+2)+f(x+3)>f(x^2+1)+f(x+4)$

11.26. Δίνεται η συναρτηση $f(x)=3^x+3x^2$ καθώς και η συναρτηση $F: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $F(x)=f(x+1)-f(x)$.

i. Να αποδείξετε ότι η συναρτηση F είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $f(x^2+1)+f(x^4)>f(x^4+1)+f(x^2)$

β. $f(x^2+1)+f(x+2)>f(x^2)+f(x+3)$

11.27. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $3(x^2-x) > (x+1)^3-(x^2+1)^3$

ii. $\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x}>\ln\frac{3x}{x^2+2}$

iii. $(x-2)(x+1) < e^x-e^{x^2-2}$

11.28. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $f(x^2)+f(-x) > f(-x^2)+f(x)$

ii. $f(2x^2+1)-f(x^2+2) < \ln\frac{2x^2+1}{x^2+2}$

11.29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x-x$. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(2x+4)+f(x^2) < f(2x+3)+f(x^2+1),\ x>0.$$

11.30. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $e^x+x>1$

ii. $x^5+x^3+2x>4$

iii. $\ln\frac{1}{x} < x-1$

iv. $3^x+4^x>7$

11.31. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{e^{2x}+x-1}$

ii. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{e^x}-x-1\right)$

iii. $f(x) = \sqrt{\ln x+x-1}$

iv. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+x-2}}$

11.32. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

- η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- $(f\circ g)(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, (1).

i. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Να λύσετε την ανίσωση g(2f(x2-2)-f(x)) > x.

11.33. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$
- $f(x+y) = f(x)+f(y)$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

i. Να βρείτε την τιμή f(0)

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή

iii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

iv. Να λύσετε την ανίσωση f(x2) < $\frac{f(3x)-f(1)}{2}$

11.34. Δίνεται η συνάρτηση f: A → $\mathbb{R}$, με A = (0, +∞), για την οποία ισχύει: $f(x)-f(y) = 2\ln\frac{x}{y}+x-y$, για κάθε $x,y\in A$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Αν, επιπλέον, ισχύει ότι η f(1)+f(e)= 5+e, τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln\left(\frac{x^4+1}{x^2+1}\right)$ < x2-x4

11.35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$, $x>0$.

i. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)}{x}$, για κάθε $x>0$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f \nearrow A$, με $A=[1,+\infty)$

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)\frac{f(x)}{x}$. Να αποδείξετε ότι $h \searrow B$, με $B = (0, 1]$

iv. δ. Να λύσετε την ανίσωση $x2 \cdot f\left(\frac{1}{x^2}\right)>f\frac{1}{2}$.

11.36. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $e^x f(x)+e^y f(x)y < e^x f(y)+e^y f(x)$, για κάθε $x,y \in \mathbb{R}$, με $x\neq y$, (1).
- $f(x) >0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Θεωρούμε, επιπλέον, τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Να λύσετε την ανίσωση $\ln\frac{f(x^2)}{f(x+2)} < x^2-x-2$, $x \in \mathbb{R}$.

11.37. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(1,3) και B(0,2).

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f.

ii. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $f(f(x)-1) < 3$ β. $f(f(x^2)-3 > 2$

12. Εξίσωση με Μονοτονία

12.1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $5x^5 + 3e^x = 3$ ii. $\frac{2}{x} = 1 + 2\ln(x - 1)$

iii. $e^{3-x} - 1 = 4\ln(x - 2)$ iv. $3^x + 4^x = 5^x$

(Απάντ.: i. x = 0 ii. x = 2 iii. x = 3 iv. x = 2)

12.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία y = 1.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $(3|x| + 1)^2 - (2|x| + 3)^2 > \ln\frac{2|x|+3}{3|x|+1}$

(Απάντ.: i. γν. αύξουσα ii. $x \in (0, 1)$ iii. x > 2 ή x < -2)

12.3. Δίνεται ότι η συνάρτηση f ορισμένη και είναι γνήσια αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Να λύσετε την εξίσωση $f(\sqrt{x})+f(x^2)= f(x)+ f(x^3)$.

(Απάντ: x = 1)

12.4. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $e^x+ x=1$ ii. $3x +\ln x=3$

iii. $2^x+x =11$ iv. $x^5+ x^7=2$

v. $3^x+4^x=25$ vi. $5^x +6^x+7^x=8^x+10^x$

vii. $e^x+\ln x =e$ viii. $\frac{1}{x} - \ln x=1$

(Απάντ: i. x = 0, ii. x = 1, iii. x = 3, iv. x = 1, v. x = 2, vi. x = 1, vii. x = 1, viii. x = 1)

12.5. Δίνεται f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{-x}-x$

α. Να μελετήσετε τη μονοτονία της.

β. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2-1}+x^2 < 2$.

γ. Για κάθε α,β ,με α < β, να δείξετε ότι $\dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\alpha-\beta} < e^{\alpha+\beta}$

(Απάντ: i. f γν. φθιν στο $\mathbb{R}$, ii. (-1, 1))

13. Απόδειξη Ανισότητας με Μονοτονία

13.1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g γνησίως αύξουσα. Έστω ότι οι C_f και C_g τέμνονται στην αρχή των αξόνων.

i. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g

ii. Αν για τη συνάρτηση h είναι $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x > 0$ να δείξετε ότι η C_h είναι κάτω από τον άξονα x΄x, όταν $x \in (0, +\infty)$

13.2. Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x - 1}$, $x \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

13.3. Έστω οι συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(g(x)) < g(f(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

13.4. Αν f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιττή και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με $(f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$.

13.5. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, γνήσια φθίνουσα με την ιδιότητα $2f^2(x^2) - 2xf(6x - 8) \leq 4 - 3x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

13.6. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $f\left(\frac{2x+3f(x)}{5}\right) = x$, να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

13.7. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, με $f(0) = 1$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, με $g(1) = 0$, τότε να αποδείξετε τις ανισότητες:

i. $f(x^2+1) > 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
ii. $f(-x^2+x-1) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
iii. $f(x^2+y^2-2xy) > 1$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, με $x \neq y$.
iv. $g(x^2-4x+5) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
v. $g\left(x+\frac{1}{x}-1\right) < 0$, για κάθε $x > 0$, με $x \neq 1$
vi. $g\left(\sqrt{x^2+1}-x+1\right) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

13.8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
ii. Για κάθε $x > 0$, με $x \neq 1$, να αποδείξετε ότι
$\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2x} < \ln(x^2+1) - \ln 2x$.

13.9. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, με $A = (1, +\infty)$ και $f(x) = \frac{1}{x} - 2x$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο A.
ii. Για κάθε $x > 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2x} < 2(x^2-x+1)$

13.10. Δίνεται η συνάρτηση f: A→ℝ, με A = (0, +∞) και $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{x}$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

ii. Για κάθε α, β ∈ με α <β να αποδείξετε ότι: $\sqrt[\alpha]{1+\dfrac{1}{\alpha}} > \sqrt[\beta]{1+\dfrac{1}{\beta}}$

13.11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - e^{-x}$

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{e^x} - \dfrac{1}{e^{x^2+1}} > \ln\dfrac{x}{x^2+1}$, για κάθε x >0.

iii. Για κάθε x , y >0 , με x <y , να αποδείξετε ότι $3\ln x + e^{-x^3}$

iv. Για κάθε x >0 , να αποδείξετε ότι:

α. $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) > \dfrac{1}{e^{x+1}} - \dfrac{1}{e^x}$ β. $\ln\dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{e^{2x}} - \dfrac{1}{e^{3x}}$

13.12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

iii. Για κάθε $\alpha \geq 0$, να αποδείξετε ότι ισχύει $2\sqrt{\alpha+1} > \sqrt{\alpha} > \sqrt{\alpha+2}$

13.13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2^x$.

i. Να μελετήσετε τη μόνοτονία της συνάρτησης f.

ii. Έστω α, β >0 , με α + β=1 . Να αποδείξετε ότι για κάθε x, y ∈ ℝ, με x < y, ισχύει: $f(x) < f(\alpha x + \beta y) < f(y)$.

13.14. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R}^{*} \to \mathbb{R}$,

με $g(x) = \dfrac{f(2x+1) - f(x+1)}{x}$, όπου $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι $g(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^{*}$.

13.15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 8x$.

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία .

ii. Για κάθε $x > 1$, να αποδείξετε ότι $f(x^3) + f(2^x) > f(x^2) + f(2)$.

iii. Για κάθε $x < 0$, να αποδείξετε ότι $f(3^x) + f(5^x) < f(2^x) + f(4^x)$

13.16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

iii. Για κάθε $x \neq 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) + f(3x) > f(2x) + f(4x)$

iv. Για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $f(e^x) + f(e^{2x}) > f(e^{3x}) + f(e^{4x})$

13.17. Δίνεται η συναρτηση $f(x) = x - 1 + \ln x$

i. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f.

ii. Να βρείτε το πρόσημο των τιμών f(x) για τις διαφορές τιμές του $x \in (0, +\infty)$.

iii. Αν $0 < x_1 < x_2$, τότε να αποδείξετε ότι $f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) \cdot f\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right) < 0$.

(Απάντ: i. f γν. αυξ. στο $(0, +\infty)$, ii. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$)

14. Μέγιστο - Ελάχιστο

14.1. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή καθεμίας από τις παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = 4 + |x - 1|$ ii. $f(x) = 3 - \frac{1}{2+\sqrt{x-2}}$

iii. $f(x) = (\ln x - 1)^2 - 7$ iv. $f(x) = x^2 - 6x + 4$

(Απάντ.: i. 4 ii. $\frac{5}{2}$ iii. -7 iv. -5)

14.2. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή καθεμίας από τις παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = 2 - |x + 1|$ ii. $f(x) = \frac{4}{x^2+3}$

iii. $f(x) = 4 - \sqrt{x^2+1}$ iv. $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

(Απάντ.: i. 2 ii. $\frac{4}{3}$ iii. 4 iv. -2)

14.3. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2^{1+x} + 2^{1-x} + \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Μ(1, 14).

i. Να δείξετε ότι $\alpha = 9$

ii. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του f.

14.4. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(5, 1). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) + 2f(x) + 4$ έχει ελάχιστο, το οποίο και να βρείτε.

(Απάντ: $g(-5) = 3$)

14.5. Δίνεται περιττή συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο M(3, -1). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{2f(x)}{1+f^2(x)}$ έχει ελάχιστο το -1 και μέγιστο το 1.

14.6. Να βρεθούν τα ακρότατα κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις:

i. $v(x) = 1 - \sqrt{2x-3}$

ii. $g(x) = 4 - |x - 2|$

iii. $t(x) = 4 - (x^3 - 4x)^4$

iv. $r(x) = x^2 - 4x + 5$

v. $f: [-1, 4) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x - 1$

vi. $\varphi(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν} \quad x \leq 2 \\ 3x-1 & \text{αν} \quad x > 2 \end{cases}$

14.7. Να βρεθούν τα ακρότατα κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις

i. $f(x) = 1 - 2\ln(x - 1)$, $x \in [2, 3]$

ii. $f: [-1, 4) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x - 1$

14.8. Να βρεθούν τα ακρότατα κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = x^2 - 4x + 5$

ii. $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 3$

14.9. i. Να δείξετε ότι $x + \frac{1}{x} \geq 2$ αν $x > 0$

ii. Έστω $f(x) = (9 + \sqrt{80})^x + (9 - \sqrt{80})^x$. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο.

14.10. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(0) = 1$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{2f(x)}{1+f^2(x)}$ έχει μέγιστη τιμή το 1.

ii. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$\Phi(x) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}} + 2013.$

(Απάντ: ii. $\Phi(10) = 2014$)

14.11. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση

$f(x) = x^2 - (\lambda + 1)x + 2$ να έχει ελάχιστο το -2.

(Απάντ: $\lambda = -5$ ή $\lambda = 3$)

14.12. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$|2f(x)-1| \leq 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από τα σημεία Α(1,-1) και Β(5,2), τότε να βρείτε τα ακρότατα της f.

14.13. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$e^{f^2(x)-5f(x)+4} \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από τα σημεία Α(0,1) και Β(4,4), τότε να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

14.14. Θεωρούμε τη συνάρτηση f: $A \to \mathbb{R}$, με $A = [0,4]$ η οποία έχει ελάχιστο ίσο με m και μέγιστο ίσο με M. Να αποδείξετε οτι:

$$m \le \frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6} \le M.$$

14.15. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x)= 3(x-1)^2+1$

ii. $f(x)= 2-3|x-1|$

iii. $f(x)= \sqrt{x-2}+1$

iv. $f(x)= \sqrt{x^2-2x+10}$

v. $f(x)=\dfrac{e^{x^2}+2}{3}$

vi. $f(x)= \ln(x^2+e)+2$

vii. $f(x)= \sqrt[3]{(x-4)^2+1}$

viii. $f(x)= \dfrac{4}{2+(x-1)^2}$

14.16. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = |ημx-x|+x^2+1$, αν είναι γνωστό ότι η ισότητα $ημx=x$ ισχύει μόνο για $x =0$

14.17. Δίνεται η συνάρτηση f: $A \to \mathbb{R}$, με $A = (0, 1)$ και $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x}$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μέγιστο το -4, όταν $x = \dfrac{1}{2}$

14.18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+2}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι: $-1 \le f(x) \le 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί -1, 1 είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f αντιστοίχως.

14.19. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- η C_f διέρχεται από τα σημεία A(1, -2) και B(4, 3)
- $f^2(x) - f(x) - 6 \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i. η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο στο $\mathbb{R}$

ii. ισχύει: $|f(x_1)-f(x_2)| \leq 5$, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

14.20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)= \dfrac{2x+1}{x^2+2}$

i. Να αποδείξετε ότι $-\dfrac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να εξετάσετε αν οι τιμές $-\dfrac{1}{2}$ είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f αντίστοιχα.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x^2+2)^2 = 2x + 1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

15. 1-1

15.1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1:

i. $f(x) = 4e^{x-2} - 1$

ii. $f(x) = \ln\dfrac{x-3}{x+3}$

iii. $f(x) = \dfrac{2\ln x-4}{5}$

iv. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

v. $f(x) = \dfrac{2-x}{x+3}$

vi. $f(x) = \dfrac{\ln x-1}{\ln x+2}$

15.2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1. (Με μονοτονία).

i. $f(x) = 4x^5 + 2x^3 + x - 1$

ii. $f(x) = 3e^x + 2\ln x - 1$

iii. $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x - x^5$

iv. $f(x) = \dfrac{2}{x} - \ln x$

(Απάντ.: i. γν. αύξουσα ii. γν. αύξουσα iii. γν. φθίνουσα iv. γν. φθίνουσα)

15.3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

ii. Να εξετάσετε αν η f είναι 1 - 1.

(Απάντ.: i. A(-1, 0) B(2, 0))

15.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+\alpha}{x^2+1}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο M(-1, 1).

i. Να βρείτε τον αριθμό α.

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y.

iii. Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1.

(Απάντ.: i. $\alpha = -1$ ii. $A(0, -\frac{1}{2})$)

15.5. Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι 1-1:

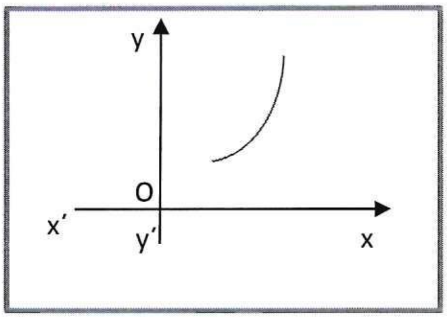
i. $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \alpha\nu\, x \le 0 \\ x^2+2, & \alpha\nu\, x > 0 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} x+1, & \alpha\nu\, x < 3 \\ 1+\sqrt{x-3}, & \alpha\nu\, x \ge 3 \end{cases}$

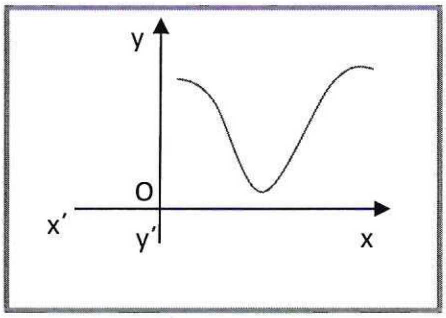
(Απάντ: i. ναι, ii. όχι)

15.6. Να εξετάσετε αν οι επόμενες καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις 1-1 συναρτήσεων:

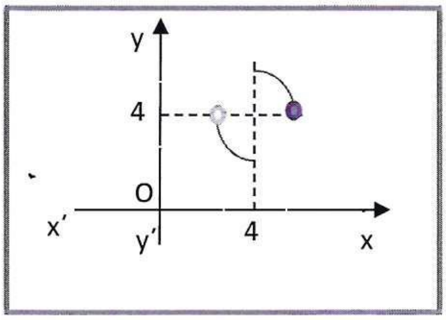
i.



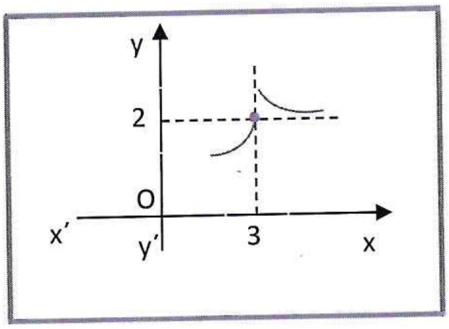
ii.



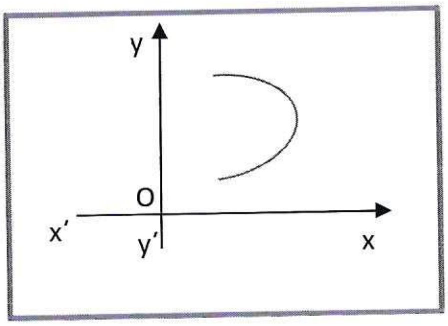
iii.



iv.



v.



(Απάντ: i. ναι, ii. όχι, iii. ναι, iv. ναι, v. δ.ο.)

15.7. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$(x - 2)f(x - 3) - (x - 3)f(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}\{-3\}$.

i. Να βρείτε τις τιμές f(0) και f(2)

ii. Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1.

15.8. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$(f \circ f)(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

i. η f είναι περιττή ii. η f είναι 1-1

15.9. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$(f \circ f)(x) - f(x) + f^3(x) = 3x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

15.10. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$(f \circ f)(x) - f(x) = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Να βρείτε το f(1).

(Απάντ.: ii. f(1) = 1)

15.11. Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις, είναι 1-1 και ποιες όχι:

i. $f(x) = 2\ln x - 3$

ii. $f(x) = 3e^{x-1} + 2$

iii. $f(x) = x(x - 3)(x - 4) + 2004$

(Απάντ: i. ναι, ii. ναι, iii. όχι)

15.12. Δίνεται η συνάρτηση f: $[1, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f(f(x)) = 2x^2 - 4x + 2$, για κάθε $x \in [1, +\infty)$. Να δείξετε ότι f είναι 1-1.

15.13. Αν η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα

$(f \circ f)(x) + 3f(x) - x^{2003} = 0$, $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι είναι 1-1.

15.14. Να αποδειχθεί ότι δεν είναι 1-1 η συνάρτηση f αν ισχύει

$6f(x^2) - f^2(x) \geq 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

15.15. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι 1-1 η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & \text{αν} \quad x<0 \\ x+\lambda-8 & \text{αν} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

(Απάντ: $\lambda \geq 12$)

15.16. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι αν $B \subseteq f(A)$ και η $g \circ f$ είναι 1-1 τότε η g είναι 1-1.

15.17. Δίνεται ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι 1-1. Να αποδείξετε ότι η $F(x) = f^3(x) + 2f(x) - 3$ είναι 1-1.

15.18. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $(f \circ f)(x) = x^2 - 5x + 9$ και $g(x) = x^2 - xf(x) + 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $f(3) = 3$ και ότι η g δεν είναι 1-1.

16. Εξισώσεις με 1-1

16.1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $e^x = 1 - x^7$ ii. $\ln(x - 1) = 2 - x$

iii. $3^x = 5 - 2x$ iv. $e^x + 2 = \sqrt{8+\sqrt{1-x}}$

(Απάντ.: i. x = 0 ii. x = 2 iii. x = 1 iv. x = 0)

16.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2e^x$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $2(e^{x^3-1} - e^{4x-1}) = (4x - 1)^5 - (x^3 - 1)^5$

(Απάντ.: ii. x = 0 ή x = 2 ή x = -2)

16.3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $(e^x + \sqrt{x})^3 + e^x = (\sqrt{x} + 1)^3 + 1$

(Απάντ.: ii. x = 0)

16.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\ln\dfrac{\sqrt{x}+1}{x^2+1} = x^2 - \sqrt{x}$

(Απάντ.: ii. x = 0 ή x = 1)

16.5. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Να λύσετε την εξίσωση:

$f(2x^3 + x) - f(4 - x) = 0$

(Απάντ.: ii. x = 1)

16.6.

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει:

$(fof)(x) = (x - 2)f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Να βρείτε την τιμή f(3)

iii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x + 1 - f(|x|-1)) - f(x - 2) = 0$

(Απάντ.: ii. f(3) = 3 iii. x = 4 ή x = -4)

16.7.

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$(f \circ f)(x) - f(x) = -x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

ii. Να βρείτε την τιμή f(2)

iii. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(4 - f(|x| - 1)) = 2$

(Απάντ.: ii. f(2)=2 iv. x = 3 ή x = -3)

16.8.

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x + 3e^{x-2}$, καθώς και συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$(g \circ f)(x) = 8 - 3e^{x-2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1

ii. Να βρείτε το f(2)

iii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(f(|x| - 3) + e^x - 1) - f(e^x + 1) = 0$

(Απάντ.: ii. f(2)=2 iii. x = 5 ή x = -5)

16.9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - x - \ln x$

i. Να μελετήσετε την μονοτονία της f.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(1)$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $x + \ln x > 1$

(Απάντ: i. f γν. φθιν., ii. $x = 1$, iii. $x > 1$)

16.10. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $e^{x-1} + \ln x = 2 - x$

ii. $x^7 + x^5 + 3x^3 + x = 6$

(Απάντ: i. $x = 1$, ii. $x = 1$)

16.11. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ με

$$\ln(\lambda^2 + 1) - \ln|2\lambda - 4| = (2\lambda - 4)^4 - (\lambda^2 + 1)^2.$$

(Απάντ: $\lambda=1$ ή $\lambda = 3$)

16.12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $(f \circ f)(x) = x^2 - 5x + 9$ και $g(x) = x^2 - 5x + 9$ και $g(x) = x^2 - xf(x) + 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 3$ και η g δεν είναι 1-1.

16.13. Δίνεται η $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x > 0$

i. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f

ii. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right] \text{ στο } [2, +\infty)$$

(Απάντ: i. f γν. αύξουσα, ii. $x = 1$ ή $x = 2$)

16.14. Αν είναι $x + e^x = y + e^y$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε

i. Να αποδείξετε ότι $x = y$

ii. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 3x + 2 = e^{3x} - e^{x^2+2}$

(Απάντ: ii. $x = 1$ ή $x = 2$)

16.15. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $e^\alpha - e^\beta = \beta^3 - \alpha^3$ τότε $\alpha = \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

16.16. Αν $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3} - 2^x$ τότε:

i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Να λύσετε την εξίσωση $3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x = 3 \cdot 6^x$

(Απάντ: $x = 1$)

16.17. Αν $f(x) = e^x + x^3 + x + 1$ τότε

i. Να δείξετε ότι είναι 1-1

ii. Να λύσετε την εξίσωση

$$e^{x^2-x} + (x^2 - x)^3 + x^2 - 2x = e^{x+3} + (x + 3)^3 + 3$$

(Απάντ: $x = -1$ ή $x = 3$)

16.18. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) + 3e^{f(x)} = x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδειχτεί ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

ii. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $g(x) = x + 3e^x$.

iii. Να υπολογίσετε το f(1)

iv. Να βρείτε το πρόσημο της f.

(Απάντ: ii. g γν. αύξουσα, ii. 0, iii. $f(x) > 0$ για $x > 0$)

16.19. Έστω συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, που είναι γνήσια μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία (-1, -1) και (1, 2).

i. Να αποδείξετε ότι είναι γνήσια αύξουσα

ii. Να λύσετε τις ανισώσεις $f(2x - 1) > -1$ και $f(1- x) < 2$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) = 2$

iv. Πόσες ρίζες μπορεί να έχει η εξίσωση $f(x) = 2014$.

(Απάντ: ii. $x > 0$, $x > 0$, iii. $x = 1$ ή $x = -1$, iv. το πολύ μία)

16.20. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)= x^5 + x^3 +x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνήσια αύξουσα.

ii. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f^5(x) + f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $h(x) = 3$ και να υπολογίσετε το $f(3)$.

(Απάντ: iii. $x = 1$, $f(3) = 1$)

16.21. Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + f(x)= 0$ για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(h(x))$ όπου $h(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$. Τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η g είναι περιττή.

ii. Να αποδείξετε ότι η h είναι γνήσια φθίνουσα στο (-1, 1)

iii. Να λύσετε την εξίσωση

$h(e^x) + h(e^{2x}) = h(e^{11x}) + h(e^{111x})$ στο (-1, 1)

(Απάντ: iii. $x = 0$)

17. Εύρεση Αντίστροφης

17.1. Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$ ii. $f(x) = 3 + \sqrt{x-2}$ iii. $f(x) = 1 + \ln(x - 3)$

(Απάντ.: i. $D_{f^{-1}} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3-x}$ ii. $D_{f^{-1}} = [3, +\infty)$ $f^{-1}(x) = (x - 3)^2 + 2$

iii. $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ $f^{-1}(x) = e^{x-1} + 3$)

17.2. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 2, & αν\, 0 < x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & αν\, x \geq 1 \end{cases}$$

(Απάντ.: $f^{-1}(x) = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -2 \\ x^2+1, & x \geq 0 \end{cases}$)

17.3. Δίνεται η συνάρτηση $f: [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ με: $f(x) = x^2 - 4x + 5$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Να βρείτε την f^{-1}

(Απάντ.: ii. $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$, $D_{f^{-1}} = [1, +\infty)$)

17.4. Δίνεται η συνάρτηση $f: (-\infty, 4] \to \mathbb{R}$ με: $f(x) = x^2 - 8x + 10$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Να βρείτε την f^{-1}

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με τους άξονες.

(Απάντ.: ii. $D_{f^{-1}} = (-6, +\infty)$, $f^{-1}(x) = 4 - \sqrt{6+x}$ iii. $A(0, 4-\sqrt{6})$ $B(10, 0)$)

17.5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-1} - 1$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Να βρείτε την f^{-1}

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με τους άξονες.

(Απάντ.: $f^{-1}(x) = \ln\frac{x+1}{2} + 1$ $D_{f^{-1}} = (-1, +\infty)$)

17.6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = 2f^{-1}(x) + 1$. Να βρείτε τη συνάρτηση g^{-1}.

(Απάντ.: $D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = 2x$)

17.7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha \neq 0$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν ισχύει ότι: $f(x) = f^{-1}(x) + 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(Απάντ.: $\alpha = 1$, $\beta = \frac{3}{2}$)

17.8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha - e^x}{1+e^x}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\ln 3, -\dfrac{1}{2}\right)$.

i. Να βρείτε τον αριθμό α.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

iii. Να βρείτε την f^{-1}

iv. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι περιττή.

(Απάντ.: i. $\alpha = 1$ iii. $D_{f^{-1}} = (-1, 1)$, $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{1-x}{x+1}$)

17.9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \ln(x - 2)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Να ορίσετε την αντίστροφη της f

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με την ευθεία $y = 3$.

(Απάντ.: ii. $D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$, $f^{-1}(x) = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$ iii. $\Sigma(\ln 3, 3)$)

17.10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha - x}{1 + x}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Μ(-3, -2), τότε:

i. να βρείτε τον αριθμό α

ii. να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

iii. να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

(Απάντ.: i. $\alpha = 1$ iii. $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$)

17.11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3x + \alpha}{x + 1}$, με $\alpha \in \mathbb{R} - \{3\}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη για κάθε $\alpha \neq 3$

ii. Αν ισχύει $(f \circ f)(-2) = 1$, τότε να βρείτε:

α. τον αριθμό α β. τη συνάρτηση f^{-1}

(Απάντ.: ii. α. 11 β. $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{3\}$ $f^{-1}(x) = \frac{x - 11}{3 - x}$)

17.12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha}{1 - x}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\dfrac{3}{2}, -2\right)$.

i. Να βρείτε τον αριθμό α.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

iii. Να βρείτε τις συναρτήσεις f o f και f^{-1} και να εξετάσετε αν είναι ίσες.

(Απάντ.: i. $\alpha = 1$)

17.13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\dfrac{\alpha-\sqrt{x}}{\alpha+\sqrt{x}}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\dfrac{1}{4}, -\ln 3\right)$.

i. Να βρείτε τον αριθμό α και το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

iii. Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

(Απάντ.: i. $\alpha = 1$ iii. $D_{f^{-1}} = (-\infty, 0]$ $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{-e^x+1}{e^x+1}\right)^2$)

17.14. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = e^x + 1$ και $g(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την f^{-1}

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι περιττή

iii. Να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f^{-1}$

(Απάντ.: i. $f^{-1}(x) = \ln(x-1)$ $D_{g\circ f^{-1}} = (1, 2) \cup (2, +\infty)$ $gof^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-2}$)

17.15. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{1}{x}$ και $g(x) = x + 2$.

i. Να αποδείξετε ότι οι f και g είναι αντιστρέψιμες.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση $h = f \circ g$

iii. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις h^{-1} και $g^{-1} \circ f^{-1}$ είναι ίσες.

(Απάντ.: ii. $h(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $D_h = (0, +\infty)$, iii. $D_{h^{-1}} = D_{g^{-1}\circ f^{-1}} = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, $\dfrac{1}{x} - 2$)

17.16. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση: $f^3(x) + 2f(x) + x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

iii. Να ορίσετε την f^{-1}

(Απάντ.: iii. $f^{-1}(x) = -x^3 - 2x,\ x \in \mathbb{R}$)

17.17. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση: $(f \circ f)(x) - 3f(x) = x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Να βρείτε τον τύπο της $f^{-1}(x)$ σε συνάρτηση με την $f(x)$.

(Απάντ.: ii. $f^{-1}(x) = f(x) - 3x + 4,\ D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$)

17.18. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f^3(x) + xf(x) - 1 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

iii. Να βρείτε την αντίστροφη της f.

(Απάντ.: iii. $f^{-1}(x) = -x^2 + \dfrac{1}{x},\ D_{f^{-1}} = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$)

18. Εξισώσεις - Ανισώσεις με Αντίστροφη

18.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

ii. Να βρείτε το $f^{-1}(-3)$

iii. Να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}(f(x^2 - 5) + 15) = 2$

(Απάντ.: ii. -1 iii. x = 2 ή x = -2)

18.2. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(2) = 10$ και $(f \circ f)(x) = 3x - 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

ii. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$

iii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(f^{-1}(|x| - 2) - 5) = 2$

(Απάντ.: ii. 5 iii. x = 3 ή x = -3)

18.3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{1-x} - x$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(1 - x) > x$.

(Απάντ.: ii. x<1)

18.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\alpha e^x + 1)$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(2ln2, 2ln3).

i. Να βρείτε τον αριθμό α.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

iii. Να ορίσετε την f^{-1}

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < f^{-1}(\ln 7)$

(Απάντ.: i. α = 2 iii. $f^{-1}(x) = \ln\frac{e^x - 1}{2}$, $D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$ iv. x < 0)

18.5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -2x^3 - 3x + 1$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(f(x^2 - 4)-22) < 2$

(Απάντ.: ii. $-2<x<2$)

18.6. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$(f \circ f)(x) + f(x) = 3x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(3) = 8$

i. Να βρείτε το $f(8)$

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

iii. Να βρείτε το $f^{-1}(3)$

iv. Να λύσετε την εξίσωση: $f(f^{-1}(x^2 - 4x)-3) = 3$

(Απάντ.: i. -3 iii. 5 iv. $x = 1$ ή $x = 3$)

18.7. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(2, 6) και Β(4, 3).

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

ii. Να εξηγήσετε γιατί ορίζεται η f^{-1}.

iii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(f^{-1}(x^2 - 5x) + 2) = 3$

iv. Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(f(x^2 - x) - 3) < 4$

(Απάντ.: i. γν. φθίνουσα iii. $x = -1$ ή $x = 6$ iv. $-1 < x < 2$)

18.8. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f^3(x) + 2f(x) + x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(-9x + 15) = x - 1$.

(Απάντ.: ii. $f^{-1}(x) = -x^3 - 2x,\ x \in \mathbb{R}$ iii. $x = 2$ ή $x = -2$ ή $x = 3$)

18.9. Έστω συνάρτηση f ώστε να ισχύει $f(f(f(x))) = 2x - 7$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δίνεται ακόμη ότι $f(1) = 3$, $f(3) = 9$. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 9$.

18.10. Έστω η f με $f(x) = \ln x + x - 1$

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(e + 1)$

iii. Να λύσετε την εξίσωση $\ln\dfrac{2\lambda^2+1}{\lambda^2+5} = 4 - \lambda^2$.

(Απάντ: ii. $x = e$, iii. $\lambda = 2$ ή $\lambda = -2$)

19. C_f και $C_{f^{-1}}$

19.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 1$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

(Απάντ.: ii. Α(2, 2))

19.2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -x^3 - x + 12$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(f(|x| - 1) + 8) < 1$

(Απάντ.: ii. Α(2, 2), iii. $x \in (-3, 3)$)

19.3. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση: $2f^3(x) + f(x) = x + 16$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

ii. Να ορίσετε την f^{-1}

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = x$.

(Απάντ.: $f^{-1}(x) = 2x^3 + x - 16$, $x \in \mathbb{R}$ iii. Α(2, 2))

19.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 + x + 3$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}

20. Επαναληπτικές Ασκήσεις

20.1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^{2011} + 5x - 7$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

Απάντ: ii. $x = 1$, iii. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$

(ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ)

20.2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να ορίσετε την f^{-1}.

Απάντ: i. $A = [\ln 2, +\infty)$, ii. $[3, +\infty)$, iii. $f^{-1}(x) = \ln(2 + \left(\frac{y-3}{4}\right)^2)$, $D_{f^{-1}} = [3, +\infty)$

(ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ)

20.3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2\ln(\sqrt{x-1} + 1) + 3$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1"

iii. Να ορίσετε την f^{-1}

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1 + x) = 2$

Απάντ: i. $A = [1, +\infty)$, iii. $f^{-1}(x) = (e^{\frac{x-3}{2}} - 1)^2 + 1$, $D_{f^{-1}} = [3, +\infty)$, iv. $x = 2\ln 2 + 2$

(ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ)

20.4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^{2011} + 2x - 5$, $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα τη $x = 1$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της f.

Απάντ: iii. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

(ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ)

20.5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(3e^x + 1) - 2$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να ορίσετε την f^{-1}

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < f^{-1}(\ln 5-2) - 2$.

Απάντ: i. $\mathbb{R}$, ii. $f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{e^{x+2}-1}{3}\right)$ $D_{f^{-1}} = (-2, +\infty)$

(ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ)

20.6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -2x^3 - 3x - 1$.

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 2$

iv. Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x + 1$

Απάντ: i. f γν. φθιν, iii. $x = -23$, iv. $x \leq -1$

(ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ)

20.7. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \ln\dfrac{x+2}{2-x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της fog.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f αν ισχύει: $(f\circ g)(x) = x$.

iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

Απάντ: i. $(-2, 0) \cup (0, 2)$, ii. $f(x) = \dfrac{2e^x - 2}{e^x + 1}$

(ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ)

20.8. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f\circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = 5$.

i. Να βρείτε το f(5).

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.