

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (a, β) .

M.10

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Αν $\int_a^b f(x)dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$

Να χαρακτηρίσετε τον παρακάτω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή.

M.2

Αν η πρόταση είναι αληθής να την αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

M.3

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

i. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η

$(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

ii. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 , και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

iii. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για

κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

iv. Αν $a > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

v. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.

M.10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της **M.5**

B2. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει τρία σημεία καμπής δύο από τα οποία είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο. **M.5**

B3. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f . **M.5**

B4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στη C_f και την ευθεία $y = \frac{1}{2}x$. **M.5**

B5. Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. **M.5**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει ότι :

- $f(1) = 2$ και $f'(1) = 0$
- $xf(x) \geq \eta\mu x$ για κάθε $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

- i. $f(0) = 1$ **M.5**
- ii. Υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 1$ και επίσης $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **M.5**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Στη συνέχεια να λυθεί η ανίσωση $f'(f(x) - 1) \leq 0$. **M.5**

Γ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και $g(x) = 2^x$ έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία. **M.6**

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $H(x) = (f(x) + f'(x))e^x$, τους άξονες $x'x$, $\psi'\psi$ και την $x=1$. **M.4**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x & , x \leq 0 \\ (e^x - 1) \ln x, & x > 0 \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

M.4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία.

M.6

Έστω ότι $f''(x) > 0$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι : αν $1 \leq a < \beta < \gamma$ τότε $\frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} < \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$.

M.5

Δ4. Να δείξετε ότι:

i. $f(x^2) > (x+1)f(x), x > 1$.

M.5

ii. $\int_1^4 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx > 2 \int_1^2 (x+1)f(x) dx$.

M.5