ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ - ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Πολλές φορές στην πράξη παρουσιάζονται προβλήματα, που η λύση τους απαιτεί αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης. Κοινό χαρακτηριστικό των προβλημάτων αυτών είναι ότι, δίνεται μια συνάρτηση f και ζητείται να βρεθεί μια άλλη συνάρτηση F για την οποία ισχύει $F'(x) = f(x)$ σ΄ ένα διάστημα Δ.

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ΄ ένα διάστημα Δ.

Αρχική ή παράγουσα ή αντιπαράγωγος της f στο Δ ονομάζεται κάθε παραγωγίσιμη στο Δ συνάρτηση F και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

π.χ. Αν $f(x) = 3x^2$

$F(x) = x^3$

$F_2(x) = x^3 + 2$

$F_3(x) = x^3 + 7$ κ.λπ.

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν άπειρες αρχικές συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$

Θεώρημα

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$,
  είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή
  $G(x) = F(x) + c, \ c \in \mathbb{R}$

Πρέπει να γνωρίζω:

1. Αν υπάρχει μια αρχική της f υπάρχουν άπειρες αρχικές που διαφέρουν κατά c.
2. Το σύνολο όλων των αρχικών μιας συνάρτησης f σε κάποιο διάστημα Δ ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της f και συμβολίζεται $\int f(x)dx$ (εκτός ύλης)
3. Ολοκλήρωση και παραγώγιση είναι δύο έννοιες αντίστροφες, δηλαδή, αν παραγωγίσουμε το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης θα προκύψει η συνάρτηση που ολοκληρώσαμε.
4. Δεν είναι απαραίτητο η f να είναι συνεχής απλά να ορίζεται στο Δ.
5. Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση στο Δ έχει παράγουσα στο Δ.
6. Υπάρχουν ασυνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα Δ που έχουν παράγουσα σε αυτό.

π.χ. $F(x) = \begin{cases} x^2 συν\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 2xσυν\frac{1}{x} + ημ\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$1^η$ κατηγορία

Υπολογισμός Απλών Παραγουσών

<u>$1^η$ περίπτωση</u>

Η $f'(x)$ έχει παράγουσες της μορφής $f(x) + c$. Χρησιμοποιώ τους τύπους:

	f	· F
1.	0	c
2.	1	$x + c$
3.	α	$\alpha x + c$
4.	x	$\frac{x^2}{2} + c$
5.	$x^\nu,\ \nu \in \mathbb{Z}$ $\nu \neq 1$	$\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c,\ \alpha \neq -1$
6.	$\frac{1}{x^2},\ x \neq 0$	$-\frac{1}{x} + c$
7.	$\frac{1}{\sqrt{x}},\ x > 0$	$2\sqrt{x} + c$
8.	$\frac{1}{x},\ x \neq 0$	$\ln\lvert x\rvert + c$
9.	e^x	$e^x + c$
10.	$\sqrt{x}$	$\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c$
11.	$ημx$	$-συνx + c$
12.	$συνx$	$ημx + c$
13.	$\frac{1}{συν^2x},\ συνx \neq 0$	$εφx + c$
14.	$\frac{1}{ημ^2x},\ ημx \neq 0$	$-σφx + c$
15.	α^x	$\frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + c$

<u>Υποδειγματική Άσκηση 1.1.</u>

Να βρεθούν οι παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 4,\ x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = συνx - ημx + \dfrac{1}{ημ^2x} + e^x + 3^x,\ x \in (0, \dfrac{π}{2})$

iii. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 4e^x - 3x^2 + 1,\ x \in (0, +\infty)$

iv. $f(x) = \dfrac{1}{συν^2x} - \dfrac{4}{ημ^2x} - 2x + e^x - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{x},\ x \in (0, \dfrac{π}{2})$

Υποδειγματική Άσκηση 1.2.

Να βρεθούν οι παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = (x - 1)(x + 2)^2,\ x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + 4x - 6}{x^2},\ x > 0,$

iii. $f(x) = \sqrt[4]{x}\,\sqrt[6]{x},\ x > 0$

iv. $f(x) = 2xy^2,\ x,y \in \mathbb{R}$

v. $f(y) = x^3y^3,\ x,y \in \mathbb{R}$

2^{η} περίπτωση

Η f(αx + β) έχει παράγουσες της μορφής $\frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)$

Χρησιμοποιώ τους τύπους:

	f	F
1.	$(\alpha x+\beta)^{\nu}$	$\frac{1}{\alpha}\frac{(\alpha x+\beta)^{\nu+1}}{\nu+1}+c$
2.	$\frac{1}{(\alpha x+\beta)^2}$	$-\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\alpha x+\beta}+c$
3.	$\frac{1}{\sqrt{\alpha x+\beta}}$	$\frac{1}{\alpha}\cdot 2\sqrt{\alpha x+\beta}+c$
4.	$\frac{1}{\alpha x+\beta}$	$\frac{1}{\alpha}\ln\|\alpha x+\beta\|+c$
5.	$e^{\alpha x+\beta}$	$\frac{1}{\alpha}\cdot e^{\alpha x+\beta}+c$
6.	$\eta\mu(\alpha x+\beta)$	$-\frac{1}{\alpha}\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)+c$
7.	$\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)$	$\frac{1}{\alpha}\eta\mu(\alpha x+\beta)+c$
8.	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(\alpha x+\beta)}$	$\frac{1}{\alpha}\varepsilon\varphi(\alpha x+\beta)+c$
9.	$\alpha^{\kappa x+\beta}$	$\frac{1}{\kappa}\cdot\frac{\alpha^{\kappa x+\beta}}{\ln\alpha}+c$

Υποδειγματική Άσκηση 1.3.

Να βρεθούν οι παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \dfrac{4}{x-1}+\dfrac{2}{9x+2}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{6}{2x-1},\ x>1$

ii. $f(x) = \sqrt{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[4]{x-4},\ x>4$

iii. $f(x) = e^{3x-2}+e^{-x-2}+\eta\mu(-4x+1)+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(3x+2)},\ x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$

iv. $f(x) = (2x-2)^4-(4x-1)^{\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{2}(x-e)^6,\ x>1$

$3^η$ περίπτωση

Υποδειγματική Άσκηση 1.4.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i. $f(x) = e^x \cdot συνx - e^x \cdot ημx$, $x \in \mathbb{R}$ ii. $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$

iii. $f(x) = 2xημx + x^2συνx$, $x \in \mathbb{R}$ iv. $f(x) = \dfrac{συνx \cdot e^x + ημx e^x}{(συνx)^2}$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

ΓΙΝΟΜΕΝΟ - ΠΗΛΙΚΟ

- $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = (f(x) \cdot g(x))'$
- $\dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$

$2^η$ κατηγορία

Συναρτησιακά

1η περίπτωση: Αν f ορισμένη σ΄ ένα διάστημα Δ

	f	F
1.	$f'(x)$	$f(x)+c$
2.	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert + c$
3.	$f(x)f'(x)$	$\dfrac{f^2(x)}{2} + c$
4.	$f^{v}(x)\cdot f'(x)$	$\dfrac{f^{v+1}(x)}{v+1} + c,\ v \neq -1$
5.	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$2\sqrt{f(x)} + c$
6.	$e^{f(x)}\cdot f'(x)$	$e^{f(x)} + c$
7.	$\sqrt{f(x)}\cdot f'(x)$	$\dfrac{2\sqrt{f^3(x)}}{3} + c$
8.	$ημf(x)\cdot f'(x)$	$-συνf(x) + c$
9.	$συνf(x)\cdot f'(x)$	$ημf(x) + c$
10.	$\dfrac{f'(x)}{συν^2f(x)}$	$εφf(x) + c$
11.	$\dfrac{f'(x)}{ημ^2f(x)}$	$-σφf(x) + c$
12.	$α^{f(x)}f'(x)$	$\dfrac{α^{f(x)}}{\ln α} + c$

Υποδειγματική Άσκηση 2.1.

Να βρεθούν οι παράγουσες των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = (x^3 + 1)^3 \cdot 3x^2, x \in \mathbb{R}$

iii. $f(x) = \dfrac{ημx}{συν^2x}, x \in (0, \dfrac{π}{2})$

iv. $f(x) = xημx^2, x \in \mathbb{R}$

v. $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}, x \in \mathbb{R}$

vi. $f(x) = 3^{x^3} \cdot x^2, x \in \mathbb{R}$

Υποδειγματική Άσκηση 2.2.

Να βρεθούν οι παράγουσες της συνάρτησης

f με $f(x) = \begin{cases} -e^x + x, & x \leq 0 \\ \dfrac{x}{x^2+1} - 1, & x > 0 \end{cases}$

Θυμάμαι ότι η αρχική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής

$3^η$ κατηγορία

Εύρεση Τύπου Συνάρτησης

Υποδειγματική Άσκηση 3.1.

Να βρεθεί η συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ τέτοια ώστε

$f'(x) = \dfrac{2-x^2}{x}$ της οποίας η C_f διέρχεται από το $A(1, \dfrac{1}{2})$

Απ: $f(x) = 2\ln x - \dfrac{x^2}{2} + 1,\ x \in (0, +\infty)$

$f(x) = \ln x$

έχει $F(x) = x\ln x - x$

$f(x) = x \cdot e^x$

έχει $F(x) = x \cdot e^x - e^x$

Υποδειγματική Άσκηση 3.2.

Έστω f, g συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε:

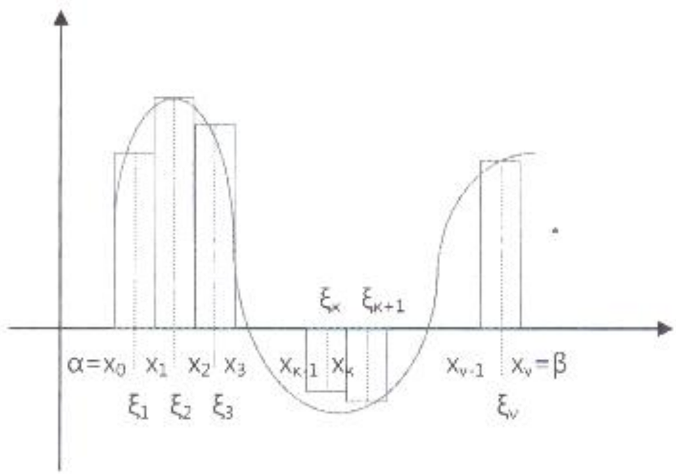
$f''(x) - g''(x) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$f'(1) = g'(1)$ και $f(2) = g(2)$

Δείξτε ότι $f(x) = g(x) + 2x^2 - 4x$, $x \in \mathbb{R}$

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] της οποίας η C_f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα [α, β] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$.

Τοποθετούμε τους αριθμούς

$x_0 = \alpha,\ x_1 = \alpha + \Delta x,\ x_2 = x_1 + \Delta x, \ldots, x_\nu = \beta$

Επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ δηλαδή σε καθένα από τα υποδιαστήματα

$[\alpha, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{\nu-1}, \beta]$ επιλέγουμε τυχαίες τιμές $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_\nu$ και σχηματίζουμε το άθροισμα:

$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \ldots + f(\xi_\nu)\Delta x$

(το οποίο ονομάζεται άθροισμα Riemann)

και συμβολίζεται σύντομα:

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$$

Το όριο του αθροίσματος S_v όταν $v \to +\infty$, δηλαδή το:

$\lim\limits_{v \to +\infty} \left(\sum\limits_{\kappa=1}^{v} f(\xi_\kappa)\Delta x \right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ

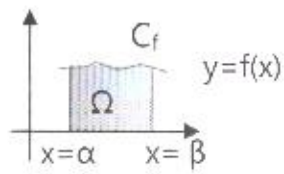
Το όριο αυτό ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β και συμβολίζεται με

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{v \to +\infty} \left[\sum_{\kappa=1}^{v} f(\xi_\kappa) \cdot \Delta x \right]$$

Πρέπει να γνωρίζω:

1. Οι αριθμοί α, β ονομάζονται όρια ολοκλήρωσης (δεν έχει την ίδια έννοια με τη γνωστή έννοια του ορίου)
2. Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ είναι πραγματικός αριθμός ενώ το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)\,dx$ είναι σύνολο συναρτήσεων.
3. Τα $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$, $\int_\alpha^\beta f(u)\,du$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα (δηλαδή, το x μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε γράμμα).
4. Ικανή συνθήκη για να είναι μια συνάρτηση f ολοκληρώσιμη σ΄ ένα διάστημα [α, β] είναι η f να είναι συνεχής σ΄ αυτό.

5. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω δηλαδή, Ε(Ω) που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.



6. Ο ορισμός επεκτείνεται και για $\alpha > \beta$ και $\alpha = \beta$ ως εξής:

   i. $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$

   ii. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$

   iii. $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = c(\beta - \alpha)$

7. Αν f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) = g(x)$ στο $[\alpha, \beta]$, <u>τότε</u>

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

το αντίστροφο δεν ισχύει.

Θεώρημα 1°

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β] και λ, μ ∈ ℝ. Τότε ισχύουν:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\lambda f(x)\,dx = \lambda\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)+g(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta}g(x)\,dx$$

και γενικά:

$$\int_{\alpha}^{\beta}(\lambda f(x)+\mu g(x))dx = \lambda\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx + \mu\int_{\alpha}^{\beta}g(x)\,dx$$

Θεώρημα 2° (Σχέση Chasles)

Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α, β, γ ∈ Δ, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma}f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta}f(x)\,dx$$

- Μπορεί το γ, να μην ανήκει στο Δ αρκεί η f να είναι συνεχής στο διάστημα αυτό.

Θεώρημα 3°

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx>0$.

4^{η} κατηγορία

Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος

Υποδειγματική Άσκηση 4.1.

Αν το $\int_1^4 f(x)\,dx = 9$, $\int_3^4 f(x)\,dx = 11$, $\int_1^8 f(x)\,dx = 13$

Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_4^3 f(x)\,dx$ ii. $\int_4^8 f(x)\,dx$ iii. $\int_1^3 f(x)\,dx$ iv. $\int_3^8 f(x)\,dx$

Απ: -11, 4, -2, 15

Υποδειγματική Άσκηση 4.2.

Αν $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$, $\int_1^3 g(x)\,dx = 2$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_1^3 (2f(x) - 6g(x))dx$ ii. $\int_1^3 (2f(x) - g(x))dx$

Απ: -2, 8

Υποδειγματική Άσκηση 4.3.

Δείξτε ότι $\int_1^e \ln t \cdot dt = \int_e^1 \ln\frac{1}{t}\, dt$

Υποδειγματική Άσκηση 4.4.

Να υπολογίσετε το κ έτσι ώστε $\int_1^{\kappa}\frac{x^2-4}{x^2+1}dx - \int_{\kappa}^{1}\frac{5}{x^2+1}dx = 3$

Απ: κ =4

$5^{η}$ κατηγορία

Υπολογισμός Απλού Ορισμένου Ολοκληρώματος

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \;\underline{\underline{F'(x)=f(x)}}\; \int_\alpha^\beta F'(x)\,dx = [F(x)]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$$

(χρήσιμο στον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος)

1. $\int_\alpha^\beta 0dx = [c]_\alpha^\beta = c - c = 0$
2. $\int_\alpha^\beta 1dx = [x]_\alpha^\beta = \beta - \alpha$
3. $\int cdx = [cx]_\alpha^\beta$
4. $\int_\alpha^\beta xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta + c$
5. $\int_\alpha^\beta x^\nu dx = \left[\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_\alpha^\beta,\ \alpha \neq -1$
6. $\int_\alpha^\beta \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_\alpha^\beta$
7. $\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x}\right]_\alpha^\beta$
8. $\int_\alpha^\beta \frac{1}{x} dx = [\ln x]_\alpha^\beta$
9. $\int_\alpha^\beta e^x dx = [e^x]_\alpha^\beta$
10. $\int_\alpha^\beta \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_\alpha^\beta$
11. $\int_\alpha^\beta ημx dx = [-συνx]_\alpha^\beta$
12. $\int_\alpha^\beta συνx dx = [ημx]_\alpha^\beta$
13. $\int_\alpha^\beta \frac{1}{συν^2x} dx = [εφx]_\alpha^\beta$
14. $\int_\alpha^\beta \frac{1}{ημ^2x} dx = [-σφx]_\alpha^\beta$

15. $\int_\alpha^\beta \alpha^x dx = \left[\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}\right]_\alpha^\beta$

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f'(\alpha x+\beta)dx = \left[\frac{1}{\alpha}f(\alpha x+\beta)\right]_\alpha^\beta}$$

1. $\int_\alpha^\beta (\kappa x+\lambda)^\nu\, dx = \left[\frac{1}{\kappa}\frac{(\kappa x+\lambda)^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_\alpha^\beta$

2. $\int_\alpha^\beta \frac{1}{(\kappa x+\lambda)^2}\, dx = \left[-\frac{1}{\kappa}\frac{1}{\kappa x+\lambda}\right]_\alpha^\beta$

3. $\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{\kappa x+\lambda}}\, dx = \left[\frac{1}{\kappa}\cdot 2\sqrt{\kappa x+\lambda}\right]_\alpha^\beta$

4. $\int_\alpha^\beta \frac{1}{\kappa x+\lambda}\cdot dx = \left[\frac{1}{\kappa}\ln|\kappa x+\lambda|\right]_\alpha^\beta$

5. $\int e^{\kappa x+\lambda}\cdot dx = \left[\frac{1}{\kappa}\cdot e^{\kappa x+\lambda}\right]_\alpha^\beta$

6. $\int_\alpha^\beta \eta\mu(\kappa x+\lambda)\, dx = \left[-\frac{1}{\kappa}\sigma\upsilon\nu(\kappa x+\lambda)\right]_\alpha^\beta$

7. $\int_\alpha^\beta \sigma\upsilon\nu(\kappa x+\lambda)\, dx = \left[\frac{1}{\kappa}\eta\mu(\kappa x+\lambda)\right]_\alpha^\beta$

8. $\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(\kappa x+\lambda)}\, dx = \left[\frac{1}{\kappa}\varepsilon\varphi(\kappa x+\lambda)\right]_\alpha^\beta$

9. $\int_\alpha^\beta \alpha^{\kappa x+\lambda}\, dx = \left[\frac{1}{\kappa}\cdot\frac{\alpha^{\kappa x+\lambda}}{\ln\alpha}\right]_\alpha^\beta$

Υποδειγματική Άσκηση 5.1.

Να υπολογιστούν τα ορισμένα ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 (3x^2 + 6x + 1)dx$ ii. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} (e^x + x)dx$

iii. $\int_1^2 (x^2 - \frac{1}{x} + 1)dx$ iv. $\int_1^2 \frac{x^2 + x + 1}{x}dx$ v. $\int_1^3 (x-2)^2 dx$

Απ: i. 5, ii. $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\ln 6$, iii. $\frac{10}{3} - \ln 2$, iv. $\frac{5}{2} + \ln 2$, v. $\frac{2}{3}$

Υποδειγματική Άσκηση 5.2.

Να υπολογιστούν τα ορισμένα ολοκληρώματα:

i. $\int_1^4 (1+x)\sqrt{x}\,dx$

ii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x)dx$

iii. $\int_1^{\ln 3} \frac{2e^x - xe^x}{x^3}\,dx$

iv. $\int_0^1 ((x-1)^2 + \sqrt{x+1}\,)dx$

v. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x+1}\right)dx$

vi. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3}}\,dx$

Απ: i. $\frac{14}{3} + \frac{62}{5}$, ii. $\frac{\pi}{2}$, iii. $\frac{-3}{\ln^2 3} + e$, iv. $\frac{4\sqrt{2}-1}{3}$, v. $\ln 5$

$6^η$ κατηγορία

Μέθοδος Παραγοντικής Ολοκλήρωσης

Σε ολοκλήρωμα με γινόμενο δύο συναρτήσεων που η αρχική της μίας υπολογίζεται σχετικά εύκολα εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g(x)dx \underline{\underline{F'(x)=f(x)}} \int_{\alpha}^{\beta} F'(x)\, g(x)dx = [F(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} F(x)\cdot g'(x)dx$$

όπου f, g΄ συνεχείς στο [α, β].

Πρέπει να γνωρίζω:

1. Μπορώ να εφαρμόσω παραγοντική περισσότερες από μία φορά.
2. Όταν έχω γινόμενο:
   - πολυωνυμική εκθετική βρίσκω αρχική εκθετικής
   - πολυωνυμική τριγωνομετρική βρίσκω αρχική τριγωνομετρικής
   - πολυωνυμική λογαριθμική βρίσκω αρχική πολυωνυμικής
   - εκθετική x τριγωνομετρική βρίσκω αρχική της πιο απλής. (επιστρέφω στο αρχικό).
3. Σε περιπτώσεις που έχουμε μια συνάρτηση βάζουμε τη μονάδα και εφαρμόζουμε παραγοντική.
4. Πολλές φορές εφαρμόζουμε κατευθείαν παραγοντική όταν είναι της μορφής

   $$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\, g(x)dx$$

   όπου f΄,g΄ συνεχείς στο [α, β].

Υποδειγματική Άσκηση 6.1.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int_1^2 e^x x\,dx$ ii. $\int_0^\pi (x^2+1)\eta\mu x\,dx$ iii. $\int_0^1 (x+1)e^{2x}dx$

iv. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$ v. $\int_1^{e^2} \ln x\,dx$

Απ: i. e^2 ii. $\pi^2 - 2$ iii. $\frac{3e^2}{4} - \frac{1}{4}$ iv. $-\frac{2}{e} + 1$ v. $e^2 + 1$

Υποδειγματική Άσκηση 6.2.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int_0^{\pi} \eta\mu x \cdot e^x dx$ ii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{-x} dx$

Απ: i. $\dfrac{e^{\pi}+1}{2}$, ii. $\dfrac{e^{-\frac{\pi}{2}}+1}{2}$

7^{η} κατηγορία

Μέθοδος Αντικατάστασης

Σε περιπτώσεις σύνθετων συναρτήσεων χρησιμοποιούμε την μέθοδο της αντικατάστασης. Δηλαδή:

1. Εντοπίζω τη συνάρτηση που θα θέσω:

   Συνήθως:

   Θέτω $u = \ln x$, e^x, τριγωνομετρική, βάση μεγάλου εκθέτη, υπόριζο, παρονομαστής, ρίζα κ.λπ., δηλαδή, $u = g(x)$
2. Βρίσκω $du = g'(x) \cdot dx$
3. Λύνω ως προς dx και αντικαθιστώ.
4. Αλλάζω τα όρια του ολοκληρώματος.
5. Πέτυχε η αντικατάσταση όταν στο νέο ολοκλήρωμα δεν υπάρχει x και είναι πιο απλό.
6. Σε ολοκλήρωμα που έχει μόνο ένα x συνήθως ακολουθώ την εξής διαδικασία:

   Θέτω $u = g(x)$ λύνω ως προς x δηλαδή $x = \varphi(u)$

   και μετά $dx = \varphi'(u) \cdot du$.

Υποδειγματική Άσκηση 7.1.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ ii. $\int_2^3 \frac{1}{(2x-3)^5}\,dx$ iii. $\int_0^1 x\,(2x-1)^6 dx$

iv. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+3}\,dx$ v. $\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+2}}\,dx$

Απ: $\frac{1}{2}, \frac{10}{81}, \frac{1}{7}, \ln\frac{4}{3}, -2+2\sqrt{3}$

Υποδειγματική Άσκηση 7.2.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int_1^e \frac{1}{x(\ln x+3)}dx$ ii. $\int_1^2 \frac{x+3}{(x^2+6x)^4}dx$ iii. $\int_0^1 x^2 \cdot e^{x^3+3}dx$

iv. $\int_4^9 e^{\sqrt{x}}dx$ v. $\int_{\ln 4}^{\ln 3} \frac{\ln 2}{2^x-1}dx$ vi. $\int_2^7 \frac{\sqrt{x+2}-1}{(x+2)+\sqrt{x+2}}dx$

Απ: i. $\ln\frac{4}{3}$, ii. $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{7^3}-\frac{1}{16^3}\right)$, iii. $\frac{1}{3}(e^4-e^3)$, iv. $4e^3-2e^2$,

v. $-\ln 6+\ln(2^{\ln 3}-1)+\ln 8-\ln(2^{\ln 4}-1)$, vi. $2+4\ln\frac{3}{4}$

8^{η} κατηγορία

Τριγωνομετρικά

Χρειάζεται να γνωρίζω βασικούς τριγωνομετρικούς τύπους

1. $ημ^2x + συν^2x = 1$

2. $ημ2x = 2ημxσυνx$

3. $συν2x = συν^2x - ημ^2x = 2συν^2x - 1 = 1 - 2ημ^2x$

4. $2ημασυνβ = ημ(α - β) + ημ(α + β)$

5. $2συνασυνβ = συν(α - β) + συν(α + β)$

6. $2ημαημβ = συν(α - β) - συν(α + β)$

7. $συν^2x = \frac{συν2x+1}{2}$

8. $ημ^2x = \frac{1-συν2x}{2}$

Υποδειγματική Άσκηση 8.1.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^5 x \, dx =$

ii. $\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x \, \sigma\upsilon\nu^2 x dx =$

iii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^5 x \cdot \eta\mu^2 x dx =$

iv. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu^7 x dx =$

v. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} dx =$

vi. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$

vii. $\int_0^3 \frac{1}{9+x^2} dx =$

viii. $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2} \, dx =$

Απ: i. $\frac{8}{15}$, ii. $\frac{4}{15}$, iii. $\frac{8}{105}$, iv. $-\frac{1}{40}$, v. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, vi. π, vii. $\frac{\pi}{12}$, viii. 2π

9η κατηγορία

Εύρεση Ορισμένου Ολοκληρώματος

Πολυώνυμο

Πολυώνυμο

1η περίπτωση

Ο ΑΡΙΘΜΗΤΗΣ ΕΙΝΑΙ Ή ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΓΙΝΕΙ Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ

ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f'(x)}{f(x)}dx = [\ln|f(x)|]_{\alpha}^{\beta}$$

Υποδειγματική Άσκηση 9.1.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int_{1}^{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$ ii. $\int_{0}^{1}\frac{3x^2-4x+2}{x^3-2x^2+2x+7}dx$

iii. $\int_{-1}^{0}\frac{x-2}{x^2-4x+10}dx$ iv. $\int_{-1}^{1}\frac{6x^2+4x-6}{x^3+x^2-3x+5}$

v. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sigma\varphi x\,dx$ vi. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\varphi x\,dx$

Απ: i. $\ln\frac{7}{3}$ ii. $\ln\frac{8}{7}$ iii. $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$ iv. -2ln2 v. $\frac{1}{2}\ln 3$ vi. ln2

2η περίπτωση

ΒΑΘΜΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΗ < ΒΑΘΜΟΣ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ

Ακολουθώ την εξής διαδικασία:

1. Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη στο [α, β]

2. Παραγοντοποιώ τον παρονομαστή

3. Απαιτώ η ρητή συνάρτηση να διασπάται σε άθροισμα απλών ρητών συναρτήσεων.

   - Αν $\frac{P(x)}{(x-p_1)(x-p_2)} = \frac{A}{x-p_1} + \frac{B}{x-p_2}$
   - Αν $\frac{P(x)}{(x-p_1)(x-p_2)(x-p_3)} = \frac{A}{x-p_1} + \frac{B}{x-p_2} + \frac{\Gamma}{x-p_3}$
   - Αν $\frac{P(x)}{(x-p_1)(x-p_2)^2} = \frac{A}{x-p_1} + \frac{B}{x-p_2} + \frac{\Gamma}{(x-p_2)^2}$
   - Αν $\frac{P(x)}{(x-p_1)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)} = \frac{A}{x-p_1} + \frac{Bx+\Gamma}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$

4. Με απαλοιφή παρονομαστών και ισότητα πολυωνύμων βρίσκουμε τα Α, Β, Γ, Δ, ...

5. Κατά την ολοκλήρωση χρησιμοποιώ:

$$\int_\alpha^\beta \frac{A}{x-p_1}dx = [A\ln|x-p_1|]_\alpha^\beta$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{A}{(x-p_1)^2}dx = -[\frac{1}{x-p_1}]_\alpha^\beta$$

Υποδειγματική Άσκηση 9.2.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 \frac{4}{x^2-4}dx$ ii. $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-5x+6}dx$ iii. $\int_{-2}^{-1} \frac{6x+8}{x^3-6x^2+8x}dx$

Απ: i. $-\ln 3$ ii. $16\ln 2 - 9\ln 3$ iii. $4\ln\frac{5}{2} + 9\ln\frac{2}{3}$

3η περίπτωση

ΒΑΘΜΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΗ ≥ ΒΑΘΜΟΣ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ

Ακολουθώ την εξής διαδικασία:

1. Εκτελώ την Ευκλείδεια διαίρεση
2. Γράφω την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) = \Pi(x) \cdot Q(x) + U(x)$
3. Διαιρώντας με τον παρονομαστή καταλήγουμε:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \Pi(x) + \frac{U(x)}{Q(x)}$$

4. Βρίσκω το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας συχνά την 1η -2η περίπτωση

Υποδειγματική Άσκηση 9.3.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2}dx$ ii. $\int_{-1}^0 \frac{x^2-3x+5}{x^2-4x+3}dx$ iii. $\int_0^1 \frac{x+5}{x+8}dx$

Απ: i. $-\frac{5}{2}+4\ln 3-3\ln 2$ ii. $\frac{5}{2}\ln 3-\frac{7}{2}\ln 2+1$ iii. $1-6\ln 3+9\ln 2$

$10^{η}$ κατηγορία

Σε συνάρτηση Πολλαπλού Τύπου

Υποδειγματική Άσκηση 10.1. (Πολλαπλού Τύπου)

Αν $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \le 1 \\ x-1, & x>1 \end{cases}$ να υπολογιστεί το $\int_0^2 f(x)\,dx$

Απ: $-\dfrac{1}{6}$

Ελέγχω τη συνέχεια στο $[α, β]$

Υποδειγματική Άσκηση 10.2. (Απόλυτο)

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^4 |9-x^2|\,dx$

Απ: $\frac{64}{3}$

$11^{η}$ κατηγορία

Βασικές αντικαταστάσεις - Άρτια - Περιττή - Περιοδική - Αντίστροφη

Υποδειγματική Άσκηση 11.1.

i. Αν η f περιττή και συνεχής, τότε ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$

ii. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α. $\int_{-2}^{2} \frac{x^{15}\eta\mu^{2}x}{2+\sigma\upsilon\nu x}\,dx$

β. $\int_{-1}^{1} \frac{\sigma\upsilon\nu x(1-e^{x})}{1+e^{x}}\,dx$

Υποδειγματική Άσκηση 11.2.

i. Αν f άρτια και συνεχής τότε ισχύει

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx \quad \text{(ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΡΤΙΑΣ)}$$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x}\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x}\,dx$$

Απ: $I = 2$

Υποδειγματική Άσκηση 11.3.

i. Να αποδείξετε ότι για τη συνεχή f ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)dx$$

ii. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α. $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{e^x+1}dx$

β. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^6 x}{\eta\mu^6 x+\sigma\upsilon\nu^6 x}dx$

Απ: ii. α. $\frac{1}{3}$ β. $\frac{\pi}{4}$

Υποδειγματική Άσκηση 11.4.

Δίνεται $f(x) = e^x + x^3,\ x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1" και να βρείτε το $D_{f^{-1}}$.

ii. Να υπολογίσετε $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$

Απ: ii. $\frac{7}{4}$

Υποδειγματική Άσκηση 11.5.

i. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής και περιοδική με περίοδο Τ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει

α. $\int_T^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$

β. $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_0^{T} f(x)\,dx$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 2}$, με $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$.

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{\pi}^{3\pi} \frac{2}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 2}\,dx + \int_0^{2\pi} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 2}\,dx$$

Απ: ii. β. 2π

$12^{η}$ κατηγορία

Αναγωγικός Τύπος

Υποδειγματική Άσκηση 12.1.

Αν $I_ν = \int_0^1 \frac{t^{2ν+1}}{1+t^2}\,dt,\ ν \in \mathbb{N}$

i. Να υπολογίσετε το άθροισμα $I_ν + I_{ν+1}$

ii. Να υπολογίσετε τα I_0, I_1, I_2

Απ: i. $\frac{1}{2ν+2}$ ii. $\ln\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}(1-\ln2)$, $\frac{1}{2}(\ln2 - \frac{1}{2})$

$13^η$ κατηγορία

Εύρεση Τιμής - Τύπου Συνάρτησης με τη βοήθεια ορισμένου ολοκληρώματος

Υποδειγματική Άσκηση 13.1.

Έστω f με f'' συνεχή, για την οποία ισχύει:

$$\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))\,ημx\cdot dx = 2$$

Αν $f(\pi) = 1$, να υπολογίσετε το $f(0)$.

Απ: $f(0) = 1$

Υποδειγματική Άσκηση 13.2.

Δίνεται f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής για την οποία ισχύει

$f(x) = 12x^2 - 2x\int_0^1 f(t)\,dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x) = 12x^2 - 4x$, $x \in \mathbb{R}$

Υποδειγματική Άσκηση 13.3.

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [1, 3] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$\int_1^3 f^2(x)\,dx = 6\int_1^3 x\,f(x)\,dx - 78$ Να βρείτε:

i. $\int_1^3 9x^2\,dx$ ii. τον τύπο της f

Απ: i. 78, ii. $f(x) = 3x$, $x \in [1, 3]$

Υποδειγματική Άσκηση 13.4.

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\int_{f(x)}^{f'(x)-2} e^{t^2}dt = 0$ και $f(0) = 1$. Να βρεθεί η συνάρτηση f.

Απ: $f(x) = 2 - e^x$, $x \in \mathbb{R}$

$\int_\alpha^\beta f(t)dt$ με $f(t) > 0$

- $\alpha < \beta$ ισχύει $\int_\alpha^\beta f(t)dt > 0$
- $\alpha > \beta$ ισχύει $\int_\alpha^\beta f(t)dt < 0$
- $\alpha = \beta$ ισχύει $\int_\alpha^\beta f(t)dt = 0$

$14^{η}$ κατηγορία

Απόδειξη Ανισοτήτων

- f συνεχής στο [α, β] και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$
- f συνεχής στο [α, β] και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0$
- f συνεχής στο [α, β] και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0$
- f συνεχής στο [α, β] από Θ.Μ.Ε.Τ. $\mu \leq f(x) \leq M$ τότε $\mu(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \leq M(\beta - \alpha)$

<u>$1^{η}$ περίπτωση</u>

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$

1. Θεωρούμε f(x), με $x \in [\alpha, \beta]$
2. Αποδεικνύω ότι $f(x) \geq 0$ χρησιμοποιώντας μονοτονία - ακρότατα - κτίσιμο στο [α, β]
3. Χρησιμοποιώ το θεώρημα: f συνεχής στο [α, β] και $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$

<u>$2^{η}$ περίπτωση</u>

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0$

1. Θεωρούμε f(x), $x \in [\alpha, \beta]$
2. Αποδεικνύω $f(x) \geq 0$ χρησιμοποιώντας μονοτονία - ακρότατα - κτίσιμο και $f(x_0) > 0$ για κάποια τιμή του x
3. Χρησιμοποιώ το θεώρημα f συνεχής στο [α, β] και $f(x) \geq 0$ με $f(x_0) > 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0$

<u>$3^η$ περίπτωση</u>

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$

1. Γράφω την ανισότητα

   $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx \geq 0 \Leftrightarrow$

   $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx \geq 0$

2. Θέτω $h(x) = f(x) - g(x)$
3. Εφαρμόζω την περίπτωση (1) για την h.

<u>$4^η$ περίπτωση</u>

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \leq \kappa$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq \kappa$

1. Θέτω f
2. Βρίσκω μονοτονία - ακρότατα στο [α, β]
3. Αποδεικνύω ότι $f(x) \geq f(x_0)$ ή $f(x) \leq f(x_0)$
4. Από το θεώρημα έχουμε:
   - $f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0$ οπότε $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - f(x_0))dx \geq 0$
   - $f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) - f(x) \geq 0$

     οπότε $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x_0) - f(x))dx \geq 0$ και καταλήγω στο ζητούμενο

<u>$5^η$ περίπτωση</u>

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx + \kappa$

1. Γράφω την ανισότητα

   $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]dx \geq \kappa \Leftrightarrow$

   $\int_{\alpha}^{\beta} (h(x)) \geq \kappa$

2. Εφαρμόζω την περίπτωση (3) για την h.

6η περίπτωση

$\kappa \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \leq \lambda$

1. Θέτω f(x)
2. Από Ο.Μ. και Ο.Ε. καταλήγω

   $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$
3. Χρησιμοποιώ το θεώρημα
   - $f(x_1) \leq f(x) \Leftrightarrow f(x) - f(x_1) \geq 0$ ǫπότε

     $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) - f(x_1))dx \geq 0$
   - $f(x) \leq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_2) - f(x) \geq 0$ οπότε

     $\int_{\alpha}^{\beta} f(x_2) - f(x))dx \geq 0$ και καταλήγω στο ζητούμενο

Υποδειγματική Άσκηση 14.1.

Να αποδείξετε ότι:

i. $\int_1^3 (f^2(x)-4f(x)+4)\,dx \geq 0$

ii. $\int_{-1}^1 (e^x - x - 1)\,dx \geq 0$

Υποδειγματική Άσκηση 14.2.

Να αποδείξετε ότι:

i. $\int_1^3 (f^2(x)dx > 4 \int_1^3 f(x)\,dx - 8$ με $f(2) = 3$

ii. $\int_1^3 (\ln x - x + 1)\,dx < 0$

Υποδειγματική Άσκηση 14.3.

Να αποδείξετε ότι $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$

και $\int_1^2 x^x \, dx \geq e - 1$

Υποδειγματική Άσκηση 14.4.

Δείξτε ότι: $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\sigma\upsilon\nu^2 x)dx \le \frac{\pi}{4}\cdot\ln 2$

Υποδειγματική Άσκηση 14.5.

Δείξτε ότι $2 \le e^4 \int_0^2 e^{x^3-3x^2}\,dx \le 2e^4$

Υποδειγματική Άσκηση 14.6.

Να αποδείξετε ότι:

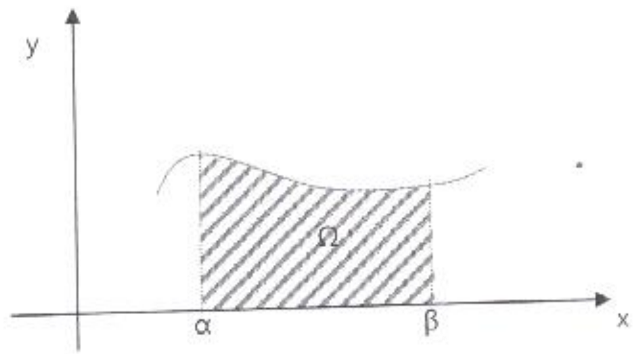
$$\int_1^2 \left(\frac{x^2 \cdot e^{x^2}}{1+x^2} \right) dx \geq \frac{7}{3}$$

1. βασικές ανισότητες $\ln x \leq x - 1$
   όπου x το e^x: $e^x \geq x + 1$
2. $|ημx| \leq |x|$
3. για $x \geq 0$: $ημx \leq x$
4. η εξίσωση $ημx = x \Leftrightarrow x = 0$

ΕΜΒΑΔΑ

1η περίπτωση

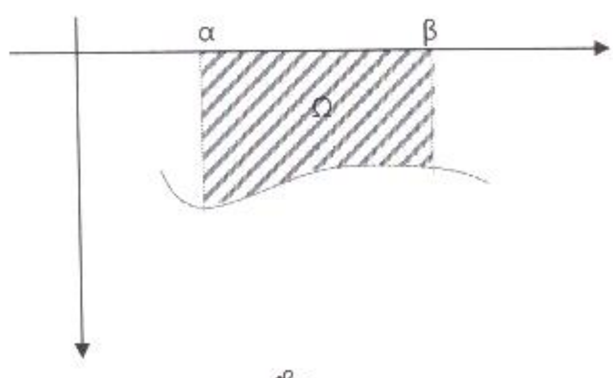
Αν $f(x) \geq 0$ το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται μεταξύ της C_f, x΄x και των ευθειών $x = \alpha$, $x = \beta$.



Δηλαδή $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

2η περίπτωση

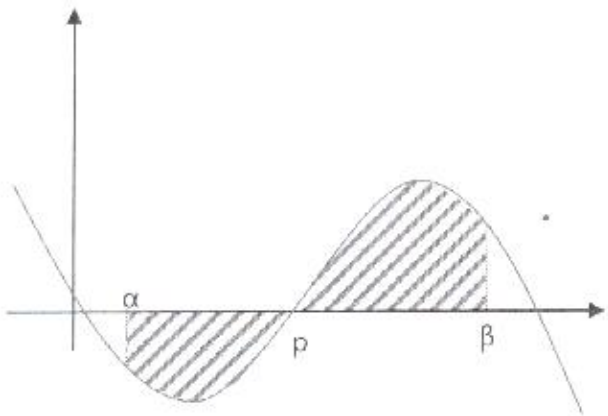
Αν $f(x) \leq 0$ το $-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται μεταξύ της C_f, x΄x και των ευθειών $x = \alpha$, $x = \beta$.



Δηλαδή, $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

3η περίπτωση

Σε κάθε περίπτωση το $\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f, τον x΄x και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$.



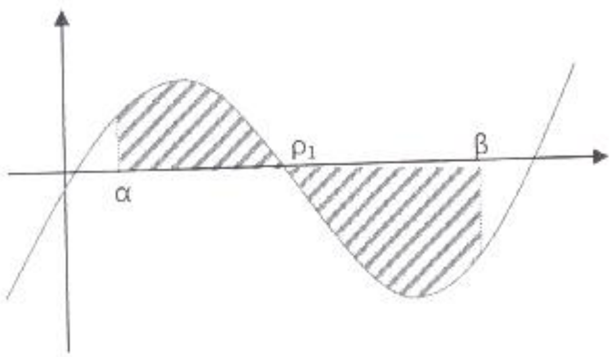
$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx \overset{\pi.\chi.}{=} \int_{\alpha}^{\rho}|f(x)|dx + \int_{\rho}^{\beta}|f(x)|dx$$

$$= -\int_{\alpha}^{\rho}f(x)\,dx + \int_{\rho}^{\beta}f(x)\,dx$$

$20^{η}$ κατηγορία

C_f, $x'x$, $x = α$, $x = β$ ή

$0 \leq y \leq |f(x)|$ και $α \leq x \leq β$



$E(Ω) = \int_{α}^{β}|f(x)|dx$

Για να βρω το εμβαδόν:

1. Λύνω $f(x) = 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$

2. Κατασκευάζω πίνακα προσήμου

3. Επιλέγοντας το κατάλληλο διάστημα σπάω το ολοκλήρωμα με τα κατάλληλα πρόσημα

   π.χ.

   $E(Ω) = \int_{α}^{β}|f(x)|dx = \int_{α}^{ρ}|f(x)|dx + \int_{ρ}^{β}|f(x)|dx$

   $= \int_{α}^{ρ}f(x)\,dx - \int_{ρ}^{β}f(x)\,dx$

Υποδειγματική Άσκηση 20.1.

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον x΄x και τις αντίστοιχες ευθείες

i. $f(x) = x^2-x-2$, $\quad x = -2,\ x = 3$

ii. $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $\quad x = 3$ και y΄y

Απ: i. $\frac{11}{3}$, ii. $\frac{22}{3}$

Υποδειγματική Άσκηση 20.2.

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2+2, & \text{αν } x \leq 0 \\ e^x+1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής

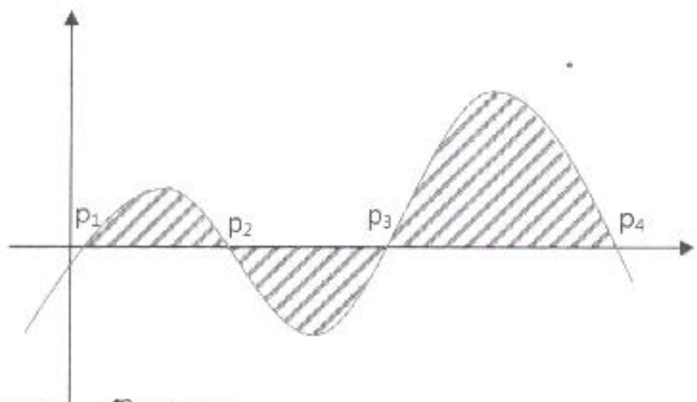
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = -1, x = 1.

Απ: ii. $e + \frac{8}{3}$ τ.μ.

21^{η} κατηγορία

C_f, $x'x$ ή

$0 \leq y \leq |f(x)|$



$E(\Omega) = \int_{p_1}^{p_\kappa} |f(x)|dx$

p_κ: η μεγαλύτερη ρίζα

p_1: η μικρότερη ρίζα

Για να βρω το εμβαδόν

1. Λύνω $f(x) = 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$
2. Κατασκευάζω πίνακα προσήμου
3. Το διάστημα είναι από τη μικρότερη ρίζα στη μεγαλύτερη

Υποδειγματική Άσκηση 21.1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$.

Απ: $\frac{37}{12}$ τ.μ.

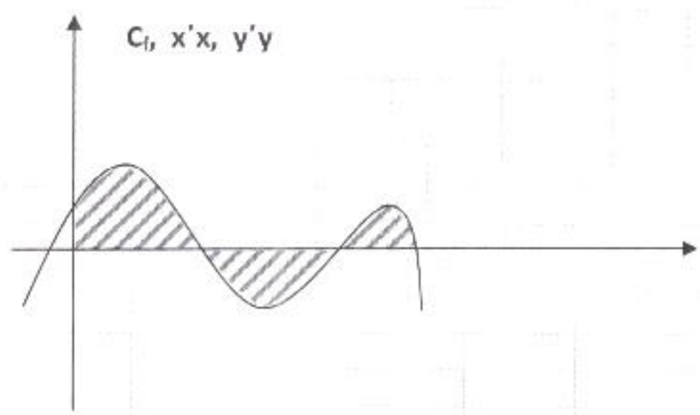
$22^{η}$ κατηγορία

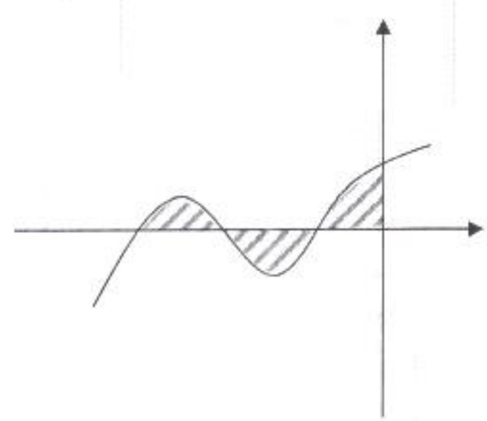
Συνδυασμός Περιπτώσεων

<u>Υποδειγματική Άσκηση 22.1</u> C_f, x΄x, y΄y

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τον άξονα y΄y.

Απ: $\frac{8}{3}$ τ.μ.





Υποδειγματική Άσκηση 22.2 $C_f, C_g, x = \alpha, x = \beta$

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = 1 - x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τη C_g και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$.

Απ: $\dfrac{e^2 - e + 1}{2}$ τ.μ

Γραφικά:

C_f, C_g;

1.Αν έχω τις γραφικές παραστάσεις χρησιμοποιώ τη σχετική τους θέση.

2. Αλγεβρικά θέτω $h(x) = f(x|) - g(x)$ και βρίσκω πρόσημο

Υποδειγματική Άσκηση 22.3 C_f, C_g

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + x$ και $g(x) = x^2 + 3x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και C_g.

Απ: $\frac{37}{12}$τμ

Υποδειγματική Άσκηση 22.4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

α. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ευθεία (ε) και τους άξονες x΄x και y΄y.

Απ: α. $y = 2x - 2$, β. $\frac{5}{3}$ τ.μ.

Από την κυρτότητα της C_f μπορώ να έχω τη σχετική θέση της εφαπτομένης ή ασύμπτωτες

Υποδειγματική Άσκηση 22.5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x^3 - 9x^2 + 13x - 5}{x^2 - 3x + 2}$. Να βρείτε:

α. την ασύμπτωτη ευθεία (ε) της C_f στο $+\infty$.

β. το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 3$ και $x = \lambda$, όπου $\lambda > 3$.

γ. το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$

Απ: α. $y = 2x - 3$ β. $\ln\dfrac{2\lambda - 4}{\lambda - 1}$ γ. $\ln 2$

Υποδειγματική Άσκηση 22.6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$, με $x > 0$, $g(x) = \sqrt{x}$, με $x \geq 0$ και $h(x) = \frac{3x-4}{4}$, $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και C_h.

Απ: $-\ln 2 + \frac{13}{6}$ τ.μ.

Υποδειγματική Άσκηση 22.7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$ και έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία $y = 4$. Να βρείτε οριζόντια ευθεία $y = \lambda^2$, με $\lambda > 0$, που να χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Απ: $y = \sqrt[3]{16}$

Υποδειγματική Άσκηση 22.8

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + x - 2$, $x \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$ και τους άξονες x΄x και y΄y

Απ: $\frac{5}{4}$ τ.μ.

Υποδειγματική Άσκηση 22.9

Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x - συνx$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = \pi + 1$.

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των C_f και $C_{f^{-1}}$

Απ: β. $\frac{\pi^2}{2} + \pi$, γ. 4