$3^η$ Κατηγορία
Απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$

Α. $\frac{\text{ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ}}{\text{ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ}}$

Πρέπει να γνωρίζω:

Αντικαθιστώντας όπου x το x_0 μηδενίζεται ο αριθμητής και ο παρονομαστής. Τότε λέμε ότι έχουμε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$.

1. Κάνω παραγοντοποίηση σε αριθμητή – παρονομαστή (κοινός παράγοντας, ομαδοποίηση, Διακρίνουσα, Horner κ.τ.λ.)

   Ταυτότητες:
   $$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$$
   $$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$$
   $$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$$
   $$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$
   $$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$
   $$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha+\beta)^3$$
   $$\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3=(\alpha-\beta)^3$$

   Τριώνυμο
   $\Delta>0$, $\alpha(x-x_1)(x-x_2)$
   $\Delta=0$, $\alpha(x-x_1)(x-x_1)$
   $\Delta<0$, Δ.Π.

2. Εμφανίζεται ως παράγοντας το $(x-x_0)$
3. Κάνω απλοποίηση του $(x-x_0)$
4. Υπολογίζω το όριο με αντικατάσταση

(Αν έχω ξανά $\frac{0}{0}$ επαναλαμβάνω την ίδια διαδικασία)

Υποδειγματική Άσκηση 3.1

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^3+8}$ ii. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-2x-3}{x^3-x}$

iii. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x+1}$ iv. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-(\lambda+1)x+\lambda}{x-1}$

Απ: $(-\frac{1}{3}, -2, 2, 2-\lambda)$

Υποδειγματική Άσκηση 3.2

Να υπολογιστεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\lim_{x \to 3} \frac{(\kappa^2+2)x^2 - 2\kappa^2 x - 3\kappa^2 - 10x + 12}{x-3} = 2\kappa^2 - 5\kappa + 5$$

Απ: $\kappa = \frac{1}{2}$ ή $\kappa = -3$

Υποδειγματική Άσκηση 3.3

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\rho}-1}{x^{\mu}-1}$, $\rho, \mu \in \mathbb{N}^*$ ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^{\kappa}-\kappa}{x-1}$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$

Απ: i. $\frac{\rho}{\mu}$, ii. $\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}$

Β. ΡΙΖΑ

Όταν το όριο έχει τετραγωνική – κυβική ρίζα:

1. Πολλαπλασιάζω αριθμητή-παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση. Δηλαδή:

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2-\beta^2$	$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3-\beta^3$
	$(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3+\beta^3$
$(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B}) = A-B$	$(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B})((\sqrt[3]{A})^2+\sqrt[3]{A}\cdot\sqrt[3]{B}+(\sqrt[3]{B})^2)=A-B$
$(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B}) = A-B$	$(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})((\sqrt[3]{A})^2-\sqrt[3]{A}\cdot\sqrt[3]{B}+(\sqrt[3]{B})^2)=A+B$
$(A-\sqrt{B})(A+\sqrt{B}) = A^2-B$	$(\sqrt[3]{A}-B)((\sqrt[3]{A})^2+\sqrt[3]{A}\cdot B+B^2)=A-B^3$
$(A+\sqrt{B})(A-\sqrt{B}) = A^2-B$	$(\sqrt[3]{A}+B)((\sqrt[3]{A})^2+\sqrt[3]{A}\cdot B+B^2)=A+B^3$
$(\sqrt{A}-B)(\sqrt{A}+B) = A-B^2$	$(A-\sqrt[3]{B})(A^2-A\cdot\sqrt[3]{B}+(\sqrt[3]{B})^2)=A^3-B$
$(\sqrt{A}+B)(\sqrt{A}-B) = A-B^2$	$(A+\sqrt[3]{B})(A^2-A\cdot\sqrt[3]{B}+(\sqrt[3]{B})^2)=A^3+B$

2. Φεύγει η ρίζα

3. Μετά από πράξεις εμφανίζω το $(x-x_0)$ παράγοντα.

Υποδειγματική Άσκηση 3.4

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

Ιδιότητες ριζών

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{2x-4}$

ii. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x+9}-2}{x^2-1}$

iii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x^2+x-12}}$

Σπάω το κλάσμα και βρίσκω το κάθε όριο χωριστά

iv. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}}$

v. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}$

vi. **έχει νόημα το** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

όπου $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4x-5}+\sqrt{-x^2-5x+6}}{x-2015}$

Απ: $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{24}, \frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{7}}, \sqrt{6}, \frac{5}{6}\right)$

Υποδειγματική Άσκηση 4.1.

Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ με

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & \text{αν}\, x>1 \\ \dfrac{x^4-2x^2+1}{(x-1)^2}, & \text{αν}\, x<1 \end{cases}, \quad \text{αν υπάρχει}$$

Απ: $(\frac{1}{2}, 4)$

Υποδειγματική Άσκηση 4.2

Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ με

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}, & x > 2 \\ \dfrac{4x-1}{4x^2+7x-2}, & x \leq 2 \end{cases}$$

Απ: ($\frac{1}{4}$)

Υποδειγματική Άσκηση 4.3 (ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ)

Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$xf(x)-2f(x) \le x^2+3x-10,\ x\in\mathbb{R}$.

Αν $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός

να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

*Βασική έκφραση: το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει σημαίνει

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$$

Απ: 7

Β. ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

1. Βρίσκω πλευρικά όρια συναρτήσει των παραμέτρων.
2. Αφού το όριο υπάρχει απαιτώ τα πλευρικά όρια να είναι ίσα

   $(\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x))$
3. Λύνω την εξίσωση και βρίσκω την παράμετρο.

Υποδειγματική Άσκηση 4.4

Δίνεται f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}, & \text{αν } x<1 \\ x^2+\alpha^2 \cdot x-2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

Να βρεθεί η τιμή του α αν το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ υπάρχει.

Απ: ($\alpha = 2$ ή $\alpha = -2$)

Υποδειγματική Άσκηση 4.5

Δίνεται f με $f(x) = \begin{cases} 8\alpha^3x^2 - \beta x, & \alpha\nu\, x < -1 \\ \beta x + 3, & \alpha\nu\, x \geq -1 \end{cases}$

Να βρεθεί η τιμή του α, $\beta \in \mathbb{R}$ αν το $\lim_{x \to -1} f(x) = 1$.

Απ: ($\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 2$)

Υποδειγματική Άσκηση 5.1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x+5|+3|x-4|-17}{x^3-5x^2+6x}$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-2|+|x|+x^2-3x}{|x+1|-2}$

Απ: $\left(-\dfrac{1}{3}, -1\right)$

Β. ΜΗΔΕΝΙΖΕΤΑΙ ΚΑΠΟΙΟ ΑΠΟΛΥΤΟ

Πρέπει να γνωρίζω:

Όταν το x_0 μηδενίζει κάποιο απόλυτο κατασκευάζω πίνακα προσήμων και συνήθως παίρνω πλευρικά.

1. Βρίσκω τις τιμές που μηδενίζουν την παράσταση
2. Κατασκευάζω πινακάκι.
3. Επιλέγω για $x < x_0$ και $x > x_0$ κοντά στο x_0
4. Αν τα πλευρικά όρια είναι ίσα το όριο υπάρχει.

Υποδειγματική Άσκηση 5.2

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-2x|+2x-4}{x^2-x-2}$

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-3x+2|+3(x-2)}{x^2-4}$

Απ: (i. 0, $\frac{4}{3}$, δ.υ. ii. $\frac{1}{2}$, 1, δ.υ.)

Γ. ΜΕ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ

Πρέπει να γνωρίζω:

$|x\cdot y| = |x|\cdot|y|$, $x^2 = |x|^2$, $x^{2\nu}=|x|^{2\nu}$

Υποδειγματική Άσκηση 5.3

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3|x|}{|x|}$

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3|x|+2}{x^4-16}$

iii. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{|x^2-9|+|x^2-x-12|}{|x+3|+|x^2+8x+15|}$

Απ: -3, $\frac{1}{32}$, $\frac{13}{3}$

Υποδειγματική Άσκηση 6.1

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις

i. Αν $x^2 + 5 \leq f(x) \leq x^2 + 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. $|f(x) - 5x^2| \leq 2|x-2|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Απ: (9, 20)

Υποδειγματική Άσκηση 6.2 (ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ)

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f^2(x) \leq 2\eta\mu x f(x),\ x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Απ: (0)

Υποδειγματική Άσκηση 6.3

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$\frac{f^2(x)-6f(x)}{x+3} \leq x - 3$ για κάθε $x > -3$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Απ: (3)

Υποδειγματική Άσκηση 6.4 (ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ)

Αν για την f ισχύει: $3x-2-x^2 \leq f(x) \leq x^2-x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρεθεί:

i. $f(1)$

ii. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

iii. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Απ: (0, 0, 1)

Υποδειγματική Άσκηση 6.6

Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,

$x_0 > 0$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ να αποδειχθεί ότι:

i) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g^2(x)+f^2(x)}{g(x)+f(x)} = 0$

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g^3(x)+f^3(x)}{g(x)+f(x)} = 0$

Απ:

Υποδειγματική Άσκηση 6.7

Έστω συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f^5(x) + f(x) = x$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο της f στο $x_0 = 0$.

Απ: (0)

7^{η} Κατηγορία
Αλλαγή Μεταβλητής

Υποδειγματική Άσκηση 7.1

Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2-\sqrt{x}}$

ii. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}-2}{x-2}$

Απ: (1, $\frac{5}{6}$)

Υποδειγματική Άσκηση 7.2

Έστω ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Να δείξετε ότι:

i. Αν η f άρτια, τότε $\lim\limits_{x \to -x_0} f(x) = \ell$

ii. Αν η f περιττή, τότε $\lim\limits_{x \to -x_0} f(x) = -\ell$

Υποδειγματική Άσκηση 7.3

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

i. $f(x+y) = f(x)+f(y)$ για κάθε x, y $\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to 0} f(x)=0$.

ii. $f(xy) = f(x)+f(y)$ για κάθε x, y $\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to 1} f(x)=0$ $(x_0 \neq 0)$

Υποδειγματική Άσκηση 7.4

i. Αν $\lim\limits_{x\to 2} f(3x-1)=7$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

ii. Αν $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}=2$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(3x)}{x}$

Απ: i. 7, ii. 6

Υποδειγματική Άσκηση 7.5

Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$

και $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(2-x)}{f(x)} = \ell$, $\ell > 0$. Να βρείτε τον αριθμό ℓ.

Απ: ($\ell = 1$)

Α. ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$

Όταν έχω (συνx-1)
κάνω συζυγή

Υποδειγματική Άσκηση 8.1

Να υπολογιστούν τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x^2+2x}$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\eta\mu x}-\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{1+x}-1}$ iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-\eta\mu x}{x+\sigma\upsilon\nu x-1}$

v. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\eta\mu x}{x}$ v. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x\text{-}1}{x^2}$

Απ: $(1, \frac{1}{2}, 1, -1, -1)$

Β. ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

i. Αποδεικνύεται θέτοντας $u = αx$, $x \to 0$, $u \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημαx}{αx}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{συναx-1}{αx}=0$$

ii. Όταν το τριγωνομετρικό όριο δεν τείνει στο 0 δηλαδή,

$x \to x_0$, θέτουμε $u = x - x_0$, $x \to x_0$, $u \to 0$

Υποδειγματικ ή Άσκηση 8.2

Να υπολογιστούν τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ3x}{3x}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ4x}{x}$ iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ6x}{ημ2x}$

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{εφ3x}{εφx}$ v. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ3x\cdot ημ5x}{x^2}$ vi. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ5x}{\sqrt{5x+4}-2}$

Απ: (1, 4, 3, 3, 15, 4)

Υποδειγματική Άσκηση 8.3

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x^2-2x}$ $\quad\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\eta\mu(x+1)}{x^2-1}$ $\quad\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}}{x-1}$

Απ: $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2})$

Γ. ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Όταν έχω όριο της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot ημ(\frac{α}{x})$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot συν(\frac{α}{x})$

με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ τότε:

Α. Αν η f διατηρεί πρόσημο

i. Γράφω $-1\le ημ(\frac{α}{x})\le 1$

ii. Πολλαπλασιάζω με f(x), $-f(x)\le f(x)\,ημ(\frac{α}{x})\le f(x)$

iii. Εφαρμόζω Κ.Π.

Β. Αν η f δεν διατηρεί πρόσημο (σε κάθε περίπτωση)

i. Γράφω $|f(x)\,ημ(\frac{α}{x})| = |f(x)|\,|ημ(\frac{α}{x})| \le |f(x)|$

ii. $|f(x)\,ημ(\frac{α}{x})|\le |f(x)| \Leftrightarrow -|f(x)|\le f(x)\,ημ(\frac{α}{x})\le|f(x)|$

Υποδειγματική Άσκηση 8.5

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}[(x^4+x^2)ημ\frac{1}{x}]$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}(|x|συν\frac{1}{x})$

Απ: (0, 0)

Υποδειγματική Άσκηση 8.6

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2}\cdot συν\dfrac{3}{x}\right)$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}(ημx\cdot συν\dfrac{1}{x})$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx-x^2ημ\dfrac{1}{x}}{ημx+x}$

Απ: $(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2})$

Υποδειγματική Άσκηση 8.10

Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$f^2(x) + 2 \leq \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 2f(x), \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Απ: (1)

Υποδειγματική Άσκηση 9.1

Έστω συ νάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{3x^2+6x}=6$.

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

Απ: (0)

Υποδειγματική Άσκηση 9.2

Έστω συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x+5}{x-2}=3$.

Να βρεθεί:

i. το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

ii. το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\cdot f(x)+6}{x-2}$

Απ: (-3, 5)

Υποδειγματική Άσκηση 9.3

Αν $\lim\limits_{x\to 3}[f(x)(2x^2 - 7x + 3)] = 4$ και $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{g(x)}{x-3}\right] = 7$

να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 3}[f(x)\cdot g(x)]$.

Απ: $\left(\dfrac{28}{5}\right)$

Αντικαθιστώ τους τύπους της f,g στο ζητούμενο όριο ή χρησιμοποιώ ιδιότητες ορίων

Υποδειγματική Άσκηση 9.4

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x \to 2}(f(x) - x^2 + 3x) = 3$ και $f(x) \neq 1$ κοντά στο 2. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

ii. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{f^2(x)+3} - 2f(x)}{f(x)-1}$ (Αλλαγή μεταβλητής)

Απ: $(1, -\frac{3}{2})$

Υποδειγματική Άσκηση 9.5 (ειδική περίπτωση με κ.π.)

Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ισχύει $\lim\limits_{x \to 2}(f^3(x) + f(x)) = 0$. Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$

10^{η} Κατηγορία

Γενικές

Υποδειγματική Άσκηση 10.1

Αν το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=3$ και $|g(x)-1|\le|f(x)|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|g(x)-3|-2}{g^2(x)-g(x)}$

(Αλλαγή μεταβλητής)

Απ: 0, 1, -1

Υποδειγματική Άσκηση 10.2 (ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ)

Δίνεται f π υ ορίζεται κοντά στο x_0 οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f^2(x) = 0$

Να αποδείξετε ότι :

i. $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$ ii. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Υποδειγματική Άσκηση 10.3 (ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ)

Δίνονται f,g π ου ορίζονται κοντά στο x_0 .

Αν $\lim\limits_{x\to x_0}[(f^2(x)+g^2(x))]=0$

Να αποδείξετε ότι :

i. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ ii. $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

Υποδειγματική Άσκηση 10.4 (ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ)

Αν ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} (f^2(x) + g^2(x) - 2f(x) + 4g(x)) = -5$

να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και ii. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

Απ: (i.1, ii. -2)

Υποδειγματική Άσκηση 10.5 (ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ)

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ τέτοια,

ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$ και $f^2(x) = 2x\cdot f(x) - \eta\mu^2 x$ κοντά στο 0.

i. Να βρεθεί ο ℓ.

ii. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Απ: (i. 1, ii. 0)

Υποδειγματική Άσκηση 10.6

Έστω μια σ υνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$f^3(x)+2x^2f(x)=3\eta\mu^3 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\alpha$ Τότε:

α. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$

β. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}$, ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(f(x))}{x}$ και iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x^2-x)}{x^2-3x+2}$

Απ: β. i. 1, ii. 1, iii. -1

Υποδειγματική Άσκηση 10.7

Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$. Να βρείτε τα:

i. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)+f(2x)}{x}$

ii. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 f(x)+x f^2(x)}{f^3(x)+x^3}$

iii. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)+\text{συν}x-1}{f(x)+\text{ημ}x}$

Απ: i. 6, ii. $\frac{2}{3}$, iii. $\frac{2}{3}$

Υποδειγματική Άσκηση 10.8

Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-1}{h} = 3$. Να βρείτε το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h}$

Απ: 12

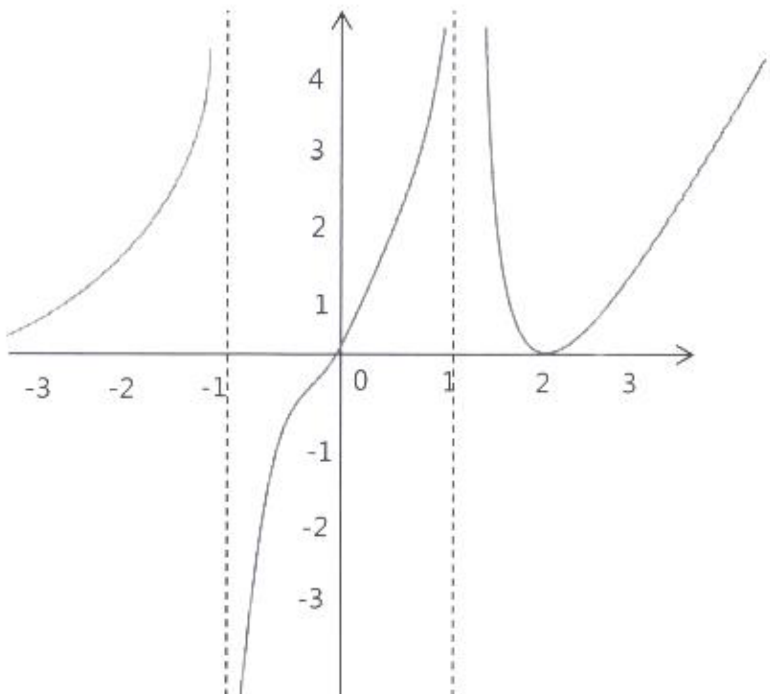
Υποδειγματική Άσκηση 11.1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ iii. $\lim\limits_{x\to -1} |f(x)|$ iv. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)}$

v. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{f(x)}$ vi. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{f^2(x)}$ vii. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ viii. $\lim\limits_{x\to 1} [-f(x)]$

ix. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{f(x)}$ x. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{f^3(x)}$



Υποδειγματική Άσκηση 11.2

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

ii. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2}$ ii. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^4}$ iii. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{(x+1)^{2\nu}}$

iv. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{|x|}$ v. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{|x-1|}$ vi. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$

vii. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1}$ viii. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2}$ ix. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{-x+1}$

Απ: $+\infty$, $+\infty$, $+\infty$, $+\infty$, $+\infty$, $+\infty$, $-\infty$, $+\infty$, $-\infty$

Υποδειγματική Άσκηση 11.3

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\eta\mu x}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\eta\mu x}$ iii. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x-1}$

iv. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1-\eta\mu x}$ v. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\ln x}$ vi. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\ln x}$

Απ: $+\infty$, $-\infty$, $-\infty$, $+\infty$, $+\infty$, $-\infty$,

Υποδειγματική Άσκηση 11.4

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{x^4-x^2}$ ii. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+|x+1|+|x^2+3x+4|}{|x^3-x|}$

iii. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{x^2+2x}{\sigma\upsilon\nu x+1}$ iv. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x+1}{e^x+x-1}$ v. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2-\eta\mu^2 x}$

Απ: $(-\infty, +\infty, +\infty, +\infty)$

Υποδειγματική Άσκηση 11.5

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$ ii. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-x} - \dfrac{4}{1-x^2}\right)$ iii. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\etaμ2x+2x}{συνx}$

iv. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{x^2+3x}{\ln x-1}$ v. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ vii. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$

viii. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ iv. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-9}{x^2-1}$

Απ: Δ.Υ.

$12^{η}$ Κατηγορία

Όριο με Βοηθητική Συνάρτηση

Υποδειγματική Άσκηση 12.1

Δίνεται $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to 1}[xf(x) + \sqrt{x+3} - 2] = +\infty$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Απ: $+\infty$

Υποδειγματική Άσκηση 12.2

Αν $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2f(x)-3x}{3f(x)-2} = -\infty$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Απ: $\frac{2}{3}$

Υποδειγματική Άσκηση 12.3

Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x\to4}|x-4|f(x) = 1$. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to4} f(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{f^2(x)-3f(x)+4}{2f^3(x)+1}$

Απ: i) $+\infty$, ii) 0

Υποδειγματική Άσκηση 13.1

Έστω $f(x) = \dfrac{x^2-(\alpha-5)x-3\alpha}{x^2-9}$. Να βρεθεί ο α ώστε η f να έχει στο $x_0=3$ όριο πραγματικό αριθμό και να βρεθεί η τιμή του ορίου.

Απ: 4, $\frac{7}{6}$

Υποδειγματική Άσκηση 13.2 (ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ)

Να βρεθούν οι τιμές των α, β $\in \mathbb{R}$ ώστε το όριο

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\alpha-1)x^2+x+\beta}{x^2-1} = 2$$

Απ: $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = -\frac{5}{2}$

ορόσημο άθμονον

Υποδειγματική Άσκηση 13.3

Αν $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+4}{x^2+\alpha x+1} = +\infty$, να βρεθεί η τιμή του α

Απ: -2

Υποδειγματική Άσκηση 13.4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^4+2}{\alpha x^2+\beta x+2}$. Να βρεθούν οι α, β $\in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$.

Απ: $\alpha = 1$, $\beta = -3$

$14^{η}$ Κατηγορία

Παραμετρικά Όρια

Δουλεύω όπως σε όλα τα όρια ανάλογα με την απροσδιοριστία

Υποδειγματική Άσκηση 14.1

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρεθεί

το όριο στο $x_0 = 3$ της f με $f(x) = \dfrac{2x-\lambda}{x^2-6x+9}$

Απ: $\begin{cases} -\infty, & \lambda>6 \\ Δ.Υ., & \lambda=6 \\ +\infty, & \lambda<6 \end{cases}$

$15^{η}$ Κατηγορία

Εύρεση Ορίου **όταν $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$**

Α. ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

Βρίσκω το όριο του μεγιστοβάθμιου

Υποδειγματική Άσκηση 15.1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x + 3)$

ii. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 1)$

iii. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3 - 2x^2 - 4x - 2)$

iv. $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^5 - 3x - 1)$

v. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - x)(-x - 1)$

vi. $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(6) - f(2))x^2 + 2x + 1$ με f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Απ: $(+\infty, +\infty, -\infty, +\infty, -\infty, +\infty)$

Β. ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

Βρίσκω το όριο του πηλίκου των μεγιστοβάθμιων όρων

Υποδειγματική Άσκηση 15.2

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+1)(x-3)}{x^2-6x+1}$ ii. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(2x^2+3)(x-1)}{(x^3+1)(x+1)}$

iii. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x}{x+2} - \dfrac{x^3+1}{x^3+2x}\right)$ iv. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3+1}{x^2+1} - \dfrac{x^2-1}{x+1}\right)$

Απ: (1, 0, 0, 0)

Γ. ΡΙΖΕΣ

1. Βγάζω κοινό παράγοντα το μεγιστοβάθμιο όρο
2. Γράφω τη ρίζα σε γινόμενο ριζών
3. Φεύγει η ρίζα και γίνεται απόλυτο
4. Αν $x \to +\infty$, $|x| = x$

   $x \to -\infty$, $|x| = -x$

5. Βρίσκω το όριο από το γινόμενο.

Υποδειγματική Άσκηση 15.3

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ ii. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{4x^2 + 3x - 2}$

iii. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^4 + 2x^2 - 3}$ iv. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2x^4 - 3x^2 - 5}$

Απ: $(+\infty, +\infty, +\infty, +\infty)$

Υποδειγματική Άσκηση 15.4

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{4x^2+2x}\right)$ ii. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{9x^2+2x} + \sqrt{4x^2-4}\right)$

iii. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3x-2}}{x-2}$ iv. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2-4x-5}}{7x^2-8x+9}$

Απ: ($+\infty$, $+\infty$, 1, 0)

Υποδειγματική Άσκηση 15.5

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-2} - \sqrt{x^3+2x+1}\right)$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{-x^3-x^2-1}\right)$

Απ: $(-\infty, -\infty)$

Υποδειγματική Άσκηση 15.6

Όταν έχω απροσδιοριστία ($\infty - \infty$) χρησιμοποιώ συζυγή παράσταση όπως για $x \to x_0$

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2-6x+2} - \sqrt{4x^2-3}\right)$

ii. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+6x} - \sqrt{x^2+x+1}\right)$

iii. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2+x}\right)$

iv. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{9x^2+x+2} + 3x\right)$

v. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{49x^2+x} + \sqrt{4x^2-2x+16} - 9x\right)$

vi. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x - 1 + \sqrt{4x^2-4x+3}\right)$

Απ: $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{3}{7}, 0\right)$

Δ. ΑΠΟΛΥΤΟ

1. Βρίσκω το όριο της παράστασης του απόλυτου
2. Διώχνω το απόλυτο χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο $+\infty$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο $+\infty$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) > 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο $-\infty$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) < 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο $-\infty$

3. Βρίσκω το όριο

Υποδειγματική Άσκηση 15.7

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x^2-6x+10|-x}{x^2-|x+1|+7}$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x^2+3x-5|-x^2}{\sqrt{x^2-3x+7}}$

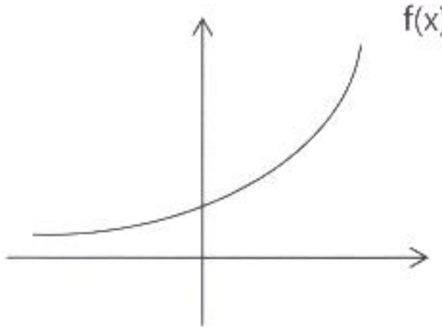
Απ: (1, -3)

Ε. ΕΚΘΕΤΙΚΗ - ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ

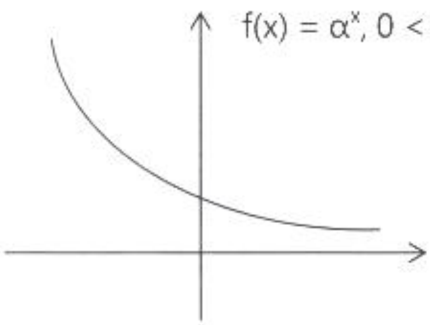
1. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων δυνάμεων γράφω κάθε εκθετική στη μορφή α^x.
2. Αν $x \to +\infty$ βγάζω κοινό παράγοντα την εκθετική με τη μεγαλύτερη βάση

   Αν $x \to -\infty$ βγάζω κοινό παράγοντα την εκθετική με τη μικρότερη βάση.
3. Κάνω πράξη μεταξύ των δύο κοινών παραγόντων.
4. Υπολογίζω το όριο με τη βοήθεια των εκθετικών ορίων:

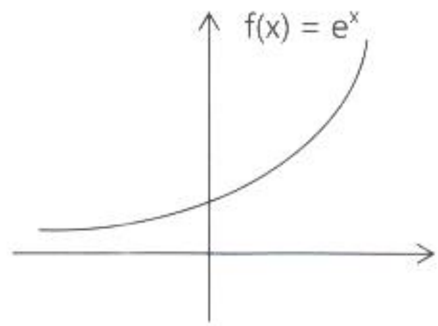
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = \begin{cases} +\infty, & \alpha\nu\ \alpha>1 \\ 0, & \alpha\nu\ 0<\alpha<1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = \begin{cases} +\infty, & \alpha\nu\ 0<\alpha<1 \\ 0, & \alpha\nu\ \alpha>1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$



$f(x) = \alpha^x,\ \alpha > 1$



$f(x) = \alpha^x,\ 0 < \alpha < 1$



$f(x) = e^x$

Υποδειγματική Άσκηση 15.8

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2^x+3^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$ ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x-2^x+\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]$ iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\pi^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)$

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}[(\pi-3)^x+(e-2)^x]$ v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x+2^{x+1}}{3^x+2^x}$ vi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5^{x+1}+2^{x+3}}{3^x+4^{x+1}}$

vii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}-e^{2x}}{e^x-3}$ viii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1}+3^x}{3^{-x}+1}$

ix $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{-x^2+3}{x+5}}$ x. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^2-2x}{x}}$

Απ: 1, +∞, -∞, +∞, 0

Υποδειγματική Άσκηση 15.9

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x$ ii. $\lim\limits_{x\to 0} (\log x + \ln x)$ iii. $\lim\limits_{x\to+\infty} [\ln(x^3+3x)-2\ln(x-2)]$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty} [\ln(2^x+1)-x]$ v. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{6\ln^2 x-5\ln x+4}{3\ln^2 x+2\ln x-1}$

Απ: $+\infty$, $-\infty$, $+\infty$, $-\infty$, 2

Ζ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ

Εννοείται ότι το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \eta\mu x$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$ δεν υπάρχει

Υποδειγματική Άσκηση 15.10

Όταν έχω μηδενική · φραγμένη

Χρησιμοποιώ κριτήριο παρεμβολής

Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3}$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x}$

Απ: (0, 0)

Υποδειγματική Άσκηση 15.11

Όταν έχω ∞ · φραγμένη:

Χρησιμοποιώ αλλαγή μεταβλητής

1. Θέτω $h = \dfrac{\alpha}{x}$, αφού $x \to +\infty$, $h \to 0^+$ με $h > 0$

   , αφού $x \to -\infty$, $h \to 0^-$ με $h < 0$

2. Λύνω ως προς $x = \dfrac{\alpha}{h}$

3. Αντικαθιστώ το x και υπολογίζω το όριο

Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 \cdot \eta\mu\dfrac{1}{x}$

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 \sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}$

Απ: $+\infty$, $-\infty$

Υποδειγματική Άσκηση 15.12

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\eta\mu x}{x^2+1}$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} \eta\mu\left(\dfrac{\pi x^2-x+1}{2x^2+x-1}\right)$ iii. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + 2\eta\mu x)$

Απ: i. 0, ii. 1, iii $+\infty$

16^{η} Κατηγορία

Συναρτησιακά Όρια - Όρια με βοηθητική συνάρτηση

Ακολουθώ την ίδια διαδικασία όπως για $x \to x_0$

Υποδειγματική Άσκηση 16.1

Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)\sqrt{9x^2+3} + 4x - 3) = 1$

τότε να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Απ: $(-\frac{4}{3})$

ορόσημο άθμιονον

Υποδειγματική Άσκηση 16.2

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-x]=\dfrac{3}{2}$ και για κάθε $x>0$ ισχύει

$g(x)\le f(x)+x-2\le\sqrt{x^2+3x}$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Απ: $\left(\frac{7}{2}\right)$

Υποδειγματική Άσκηση 16.3

Έστω οι συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ και

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f^4(x)+g^4(x)}{f^2(x)+g^2(x)} = 0$

ορόσημο άθμονον

$17^{η}$ Κατηγορία

Παραμετρικά Όρια

1. Εφαρμόζω τη διαδικασία του κοινού παράγοντα
2. Καταλήγω σε γινόμενο και παίρνω περιπτώσεις.
3. Βρίσκω το όριο για τις τιμές που μηδενίζονται οι μεγιστοβάθμιοι
4. Βρίσκω το όριο των μεγιστοβάθμιων για τις διάφορες τιμές του μ.
5. Παίρνω τις περιπτώσεις για τον μεγιστοβάθμιο
6. Παίρνω περιπτώσεις και για τη βάση $α > 1$ ή $0<α<1$ ή $α =1$

Υποδειγματική Άσκηση 17.1

Να υπολογιστούν τα όρια για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων:

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\mu x^3 + 2x^2 + 2x + 1)$

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+1} + \mu x)$

iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\mu-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\mu x^2 - 5x + 6}$

iv) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5 \cdot 3^x - 2\alpha^x)$

Απ: i) $+\infty$, αν $\mu \geq 0$, $-\infty$, αν $\mu < 0$, ii) $+\infty$, αν $\mu < 1$ $-\infty$ αν $\mu > 1$ 0, αν $\mu = 1$

iii) $+\infty$, αν $\mu \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ $-\infty$, αν $\mu \in (0, 1)$ 2, αν $\mu = 1$

iv) $+\infty$, αν $\alpha \leq 3$ και $-\infty$, αν $\alpha > 3$

18η Κατηγορία

Εύρεση παραμέτρων

Υποδιγματική Άσκηση 18.1

Να βρείτε τις τιμές των α, β ∈ ℝ ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\alpha-2)x^2+(3\alpha-2\beta)x+7}{(\beta+3)x-13} = 1$$

Απ: $\alpha = 2$, $\beta = 1$