Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Ορισμός:

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός

Πρέπει να γνωρίζω:

1) Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (εφόσον το όριο υπάρχει)

2) Το $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{h=x-x_0}{\underset{x\to x_0, h\to 0}{=\!=}}$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

3) Το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δx

Το $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ συμβολίζεται $\Delta f(x_0)$

άρα $f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ ή $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\frac{df(x)}{dx}\,|\, x = x_0$

4) Για τα εσωτερικά σημεία x_0 του πεδίου ορισμού που αλλάζει ο τύπος της f αν

$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

τότε η f παραγωγίσιμη στο x_0.

5) Είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ (γεωμετρικά)

6) Είναι ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους που εκφράζει η f ως προς το μέγεθος που εκφράζει το x για $x = x_0$.

7) Δεν αναφέρουμε ότι $f'(x_0)$ δεν υπάρχει

8) Βασικό θεώρημα. Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D_f$ τότε είναι και συνεχής σ΄ αυτό.

Προκύπτει ότι:

i. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει

ii. Η παραγωγισιμότητα είναι ισχυρότερη έννοια της συνέχειας.

iii. Αν f δεν είναι συνεχής τότε δεν είναι παραγωγίσιμη

9) Πιθανά σημεία μη παραγωγισιμότητας είναι τα σημεία αλλαγής τύπου και τα σημεία που μηδενίζεται το υπόριζο.

π.χ.

η $f(x) = \sqrt{x-1}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

$f(x) = |x - 2|$ δεν είναι παραγωγίσιμη $x_0 = 2$

$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \geq 1 \\ x+1, & x < 1 \end{cases}$ $x_0 = 1$

$1^η$ κατηγορία

Εύρεση $f'(x_0)$ (Με τον ορισμό)

Α. Σε σημείο που δεν αλλάζει ο τύπος

1. Βρίσκω το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
2. Αν το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε βρήκα το $f'(x_0)$
3. Αν το όριο δεν υπάρχει ή το αποτέλεσμα είναι $+\infty$, $-\infty$ τότε λέμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Υποδειγματική Άσκηση 1.1.

Να βρεθεί η παράγωγος της f στο x_0 αν υπάρχει:

i. $f(x) = |x^2 - 3x|$, $x_0 = 1$, ii. $f(x) = \sqrt{x-2}$, $x_0 = 2$, iii. $f(x) = ημx + x^2$, $x_0 = 0$

Απ: (1, Δ.Υ., 1)

Πρώτα βγάζουμε το απόλυτο

Τα σημεία που μηδενίζεται το απόλυτο είναι πιθανά σημεία ασυνέχειας.

Β. Πλευρικά όρια

1. Σε σημεία που αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης ελέγχω με το «μάτι» αν η f είναι συνεχής.
2. Αν δεν είναι συνεχής αποδεικνύω την ασυνέχεια και αναφέρω αφού f δεν είναι συνεχής δεν είναι και παραγωγίσιμη.
3. Αν είναι συνεχής ελέγχω την παραγωγισιμότητα με πλευρικά όρια.

Υποδειγματική Άσκηση 1.2.

Να βρεθεί αν υπάρχει, η παράγωγος της f στο x_0 όταν:

i. $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & x<0 \\ x+1, & x\geq 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$, ii. $f(x) = \begin{cases} x^2+3\eta\mu x, & x\leq 0 \\ 3x-x^2, & x>0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

iii. $f(x) = \begin{cases} e^x+\ln x-\sigma\upsilon\nu(2\pi x), & x>1 \\ \eta\mu\dfrac{\pi x}{2}+3, & x\leq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

Απ: (1, 3, Δ.Υ.)

Βασικό !

Αν f παραγωγίσιμη σ΄ ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

$2^η$ κατηγορία

Εύρεση $f'(x_0)$ σε συναρτησιακά

Υποδειγματική Άσκηση 2.1.

Αν η f συνεχής στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) = x \cdot f(x) + ημ^2 x$

Να δείξετε ότι η g παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $g'(0) = f(0)$.

Υποδειγματική Άσκηση 2.2.

Αν $x+1 \leq f(x) \leq x^2 + x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι: i. $f(0) = 1$ ii. $f'(0) = 1$

Με κριτήριο παρεμβολής

Όταν έχω $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

1. Βρίσκω $f(x_0)$
2. Εμφανίζω το λόγο $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ διακρίνοντας περιπτώσεις αν $x > x_0$ και $x < x_0$ μεταξύ των ανισοτήτων
3. Με κριτήριο παρεμβολής βρίσκω το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Υποδειγματική Άσκηση 2.3.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x^2}{x^2-1}=2$.

Υπολογίστε: i. f(1), ii. f΄(1)

Απ: (1, 6)

Με βοηθητική συνάρτηση

Θυμήσου προηγούμενη κατηγορία

Υποδειγματική Άσκηση 2.4.

Έστω f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=2$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}\cdot f(x)-1}{x^2-1}$

αν η C_f διέρχεται από το A(1, 1).

Στο $f'(x_0)$ κρύβεται το όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

εμφανίζω $f(x_0)$

Υποδειγματική Άσκηση 2.5.

Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x\to 4}\dfrac{f(x)-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=3$

Να βρεθούν: i. f(4), ii. $f'(4)$, iii. $\lim_{x\to 4}\dfrac{2f(x)-x}{x^2-7x+12}$

Απ: (2, 1, 1)

3η κατηγορία

Εύρεση παραμέτρων

Πρέπει να γνωρίζω:

Για να βρω παράμετρο ή παραμέτρους με τη βοήθεια παραγώγου ακολουθώ την εξής διαδικασία:

1. Εξετάζω αν με τη βοήθεια της συνέχειας βρίσκω την παράμετρο ή μια σχέση παραμέτρων
2. Από τον ορισμό της παραγώγου επαληθεύω την παράμετρο που βρήκα ή βρίσκω μια νέα σχέση οπότε λύνω το σύστημα.

Υποδειγματική Άσκηση 3.1.

Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η f με

$f(x) = \begin{cases} x^2 - \lambda x - 1, & x > 1 \\ x - 1 - \lambda, & x \le 1 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

Απ: ($\lambda = 1$)

Υποδειγματική Άσκηση 3.2.

Να βρεθούν τα α, $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \pi$ με

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x < \pi \\ \alpha x + \beta, & x \geq \pi \end{cases}$$

Απ: ($\alpha=-1$, $\beta=\pi$)

$4^η$ κατηγορία

Αλλαγή μεταβλητής

Πρέπει να γνωρίζω:

1. Ισοδύναμος ορισμός για να είναι η f παραγωγίσιμη στο x_0, $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
2. Συχνά απαιτείται αλλαγή μεταβλητής.

Υποδειγματική Άσκηση 4.1.

Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε:

i. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} = -f'(x_0)$, ii. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} = 2f'(x_0)$

Υποδειγματική Άσκηση 4.2.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 να υπολογίσετε το

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-2h)}{4h^2-h}$$

Υποδειγματική Άσκηση 4.3.

Έστω η παραγωγίσιμη στο 2 συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Αν η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(3x-1), & x \le 1 \\ f(5x-3), & x > 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο 1. Να βρείτε το $f'(2)$.

Απ:

Συνάρτηση	Παράγωγος	Συνάρτηση	Παράγωγος
$f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$		
$f(x)=x^{\nu},\ x\in\mathbb{R},$ $\nu\in\mathbb{N}^{*}-\{1\}$	$f'(x) = \nu x^{\nu-1}, x\in\mathbb{R}$	$g(x) = [f(x)]^{\alpha}$	$g'(x) = \alpha\cdot[f(x)]^{\alpha-1}\cdot f'(x)$
$f(x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2},\ x\neq 0$	$g(x) = \frac{1}{f(x)}$	$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
$f(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0$	$g(x) = \sqrt{f(x)}$	$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$f(x) = \eta\mu x,\ x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ x\in \mathbb{R}$	$g(x) = \eta\mu f(x)$	$g'(x) = \sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$
$f(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$	$f'(x) = -\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$	$g(x)=\sigma\upsilon\nu f(x)$	$g'(x) = -\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$
$f(x) = \varepsilon\varphi x,$ $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$	$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x},$ $x\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$	$g(x) = \varepsilon\varphi f(x)$	$g'(x) = \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$
$f(x) = \sigma\varphi x,$ $x \neq \kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$	$f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x},$ $x\neq \kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$	$g(x) = \sigma\varphi f(x)$	$g'(x) = -\frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}$
$f(x)=\alpha^x,\ \alpha>0,\ x\in\mathbb{R}$	$f'(x) = \alpha^x \ln\alpha,\ x\in\mathbb{R}$	$g(x) = \alpha^{f(x)}$	$g'(x) = \alpha^{f(x)}\cdot\ln\alpha\cdot f'(x)$
$f(x) = e^x,\ x\in\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x,\ x\in\mathbb{R}$	$g(x) = e^{f(x)}$	$g'(x) = e^{f(x)}\ f'(x)$
$f(x) = \ln x,\ x > 0$	$f'(x) = \frac{1}{x},\ x>0$	$g(x) = \ln\lvert f(x)\rvert$	$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$f(x) = \log_{\alpha}x$	$f'(x) = \frac{1}{\ln\alpha}\ \frac{1}{x}$		

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ
1. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
2. $(c\,f(x))' = c \cdot f'(x)$
3. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
5. $[(g \circ f)(x)]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
6. $[f(x)g(x)h(x)]' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$

<u>Απλά παραδείγματα</u>

Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

1. $f(x) = 2$
2. $f(x) = -\sqrt{3}$
3. $f(x) = \ln 2$
4. $f(x) = -\alpha^2 + 1$
5. $f(x) = 3x$
6. $f(x) = -\sqrt{2} \cdot x$
7. $f(x) = \alpha \cdot x$

8. $f(x) = \ln 3 \cdot x$

9. $f(x) = (\alpha^2 + 1)x$

10. $f(x) = 3x + 1$

11. $f(x) = -6x + 7$

12. $f(x) = -ex + \ln 2$

13. $f(x) = \alpha x + \beta$

14. $f(x) = x^2$

15. $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$

16. $f(x) = 7x^6 - 6x^5 + 4x^4 + 3x^3$

17. $f(x) = 8x^6 - 6x^{-5} + 4x^3 - 3x^{-2}$

18. $f(x) = 4 \cdot x^{\frac{1}{4}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 2$

19. $f(x) = 2 \cdot x^2 - 3x^{-4} + x^{\frac{1}{3}} - 4x^{-\frac{1}{4}}$

20. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{x^7}$

21. $f(x) = 2\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^3}$

22. $f(x) = 3ημx - 4συνx + \ln 3$

23. $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\ln x - 7$

24. $f(x) = x^{-3} + συνx - 2ημx + εφx$

25. $f(x) = x^{-6} - 2εφx - 4σφx + εφ\frac{\pi}{7}$

26. $f(x) = e^{x} - \ln x + ημx + ημ^{2}θ$

27. $f(x) = -3εφx - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$

28. $f(x) = (x + 1) \cdot \ln x$

29. $f(x) = x^{2} \cdot \ln x$

30. $f(x) = x^{3} \cdot ημx$

31. $f(x) = x^{2} \cdot e^{x}$

32. $f(x) = x^{3} \cdot \ln x$

33. $f(x) = \sqrt{x}\,(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$

34. $f(x) = (1 + \eta\mu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x) - \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

35. $f(x) = x^3 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

36. $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x-3}$

37. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

38. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

39. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

40. $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{e^x}$

41. $f(x) = \dfrac{\eta\mu x \cdot e^x}{\ln x}$

42. $f(x) = \dfrac{(x+1)e^x}{x^2+1}$

43. $f(x) = e^{x^2+1}$

44. $f(x) = e^{-x^3+2}$

45. $f(x) = \ln(x^2 + 7)$

46. $f(x) = \ln(x^6 + x^2 + 1)$

47. $f(x) = ημ(x - 2)$

48. $f(x) = ημ(2x - 7)$

49. $f(x) = συν(e^x + 1)$

50. $f(x) = εφ(e^x + 1)$

51. $f(x) = εφ(συνx)$

52. $f(x) = σφ(\ln x)$

53. $f(x) = σφ(συνx)$

54. $f(x) = \sqrt{e^x + 4}$

55. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

56. $f(x) = (x - 1)^3$

57. $f(x) = (x^2 + x)^4$

58. $f(x) = ημ^3x$

59. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^4 x$

60. $f(x) = \sigma\varphi^2 x$

61. $f(x) = 2\varepsilon\varphi^3 x$

62. $f(x) = \ln^4 x$

63. $f(x) = -2\ln^3 x$

64. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$

65. $f(x) = e^{\sqrt{e^x+2}}$

66. $f(x) = \ln(\sqrt{e^2 + x})$

67. $f(x) = \ln(x + 2)^2$

68. $f(x) = ημ(\sqrt{x^3 + α})$

69. $f(x) = ημ(\ln(x^2 + e^x))$

70. $f(x) = συν(e^{x^2+1})$

71. $f(x) = συν(ημ(x^2 + 1))$

72. $f(x) = εφ(\ln(x^4 + 1))$

73. $f(x) = εφ(ημ(x^2 - 1))$

74. $f(x) = ημ^2x^2$

75. $f(x) = \ln^3\sqrt{x^2+1}$

76. $f(x) = (x^6 + \sqrt{x^2+1})^2$

Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις να βρεθεί παράγωγος της h

$h(x) = f(x + 2) - f(x^2 + 1) + g(x + e^x)$

$h(x) = f(-x - 2) + g(ημx) + 2f(e^x + 1)$

$h(x) = f(e^x + 2) + g(συνx) - 2f(ημx)$

$h(x) = συνf(x) + 2ημg(x)$

$h(x) = συνg((x + 2)) + ημ(h(x - 2))$

Παραγωγίστε τις σχέσεις:

$f(ημx) + 2f(συνx) + 4x = 2$

$f(ημx) + g(συνx) + 2x - 3 = f(συνx)$

$5^{η}$ κατηγορία

Συναρτήσεις Πολλαπλού Τύπου

Πρέπει να γνωρίζω:

1. Βρίσκω την παράγωγο στα ανοικτά διαστήματα δικαιολογώντας την παραγωγισιμότητα με κανόνες παραγώγισης.
2. Ελέγχω την παραγωγισιμότητα, με τον ορισμό, στα σημεία που αλλάζει ο τύπος και στα κλειστά άκρα των διαστημάτων.

Θυμάμαι!

i. Στην παράγωγο σε σημείο ελέγχω πρώτα τη συνέχεια
ii. Πιθανά σημεία που η f δεν είναι παραγωγίσιμη είναι τα σημεία που μηδενίζεται το απόλυτο -υπόριζο και τα σημεία αλλαγής τύπου.

Υποδειγματική Άσκηση 5.1.

Να βρεθεί η παράγωγος της f, όπου αυτή ορίζεται.

i. $f(x) = \begin{cases} 2x^2+3x, & x<0 \\ 12\sqrt{x}+6x, & x\geq 0 \end{cases}$, ii. $f(x) = \begin{cases} \ln x+e^{2x}, & x>1 \\ 2x^3+7x, & x\leq 1 \end{cases}$,

iii. $f(x) = \begin{cases} x^2+\eta\mu x, & x\leq 0 \\ x^3+x, & x>0 \end{cases}$

Υποδειγματική Άσκηση 5.2.

Να βρεθεί η παράγωγος όπου ορίζεται

i. $f(x) = |x-1| + x^2$, ii. $f(x) = |x-2| + x^3$

Υποδειγματική Άσκηση 5.4. (Ρίζα)

Να υπολογίσετε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

ii. $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$

iii. $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

$6^{η}$ κατηγορία

$h(x) = f(x)^{g(x)}$

Σε συναρτήσεις που η βάση και ο εκθέτης έχουν μεταβλητή

1. Γράφω τη συνάρτηση με τη βοήθεια λογαρίθμων

   $h(x) = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot \ln f(x)}$

2. Παραγωγίζω με τη βοήθεια σύνθεσης

   $h'(x) = (e^{g(x)\cdot \ln f(x)})' = e^{g(x)\cdot \ln f(x)} \cdot (g(x)\cdot \ln f(x))' =$

   $e^{g(x)\cdot \ln f(x)} \cdot (g'(x)\cdot \ln f(x) + g(x)\cdot (\ln f(x))') =$

   $e^{g(x)\cdot \ln f(x)}\cdot(g'(x)\cdot \ln f(x) + g(x)\cdot \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x))$

3. Επιστρέφω στην αρχική

   $h'(x) = f(x)^{g(x)}\cdot(g'(x)\cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)})$

Υποδειγματική Άσκηση 6.1.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^x$, $x > 0$, ii. $f(x) = x^{x^2}$, $x > 0$

iii. $f(x) = (\eta\mu x)^{\ln x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, iv. $f(x) = (\ln x)^x$, $x > 1$

$7^{η}$ κατηγορία

Συναρτησιακά

Πρέπει να γνωρίζω:

Παραγωγίζουμε αφού πρώτα δικαιολογήσουμε την παραγωγισιμότητα.

Υποδειγματική Άσκηση 7.1.

Αν η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 2$ αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$g(x) = f(x^2+2x) + f(ημx)$ είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί η $g'(0)$.

Υποδειγματική Άσκηση 7.2.

Έστω f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει: $f(1+x) + f(1-x) = x^2 + 1$

Να δείξετε ότι $f''(1) = 1$

Υποδειγματική Άσκηση 7.3.

Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ που διέρχεται από το A(1, 2). Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f^3(x) + f(x) = 4x + 6$

i. Να βρεθεί η $f'(1)$, ii. Να δείξετε ότι f' παραγωγίσιμη

Υποδειγματική Άσκηση 7.4.

Έστω f περιττή, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

i. η C_f διέρχεται από το $O(0, 0)$, ii. $f''(0) = 0$,

iii. Τι παρατηρείτε για την $f'(x)$ και την $f''(x)$

Υποδειγματική Άσκηση 7.5.

(Παραγώγιση σχέσης δύο μεταβλητών)

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(xy) = f(x) + f(y) + x^2y^2 - x^2 - y^2$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ ισχύει:

$xf'(x) - yf'(y) = 2(x^2 - y^2)$

Παραγωγίζουμε ως προς x θεωρώντας το x μεταβλητή και το y σταθερά.

Υποδειγματική Άσκηση 7.6.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x$

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε την $(f^{-1})'(3)$

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ "1-1" και παραγωγίσιμη. Τότε και η αντίστροφη της $f^{-1}: f(A) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in f(A)$ με την προϋπόθεση ότι

$f'(f^{-1}(x_0)) \neq 0$

Για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι:

$f^{-1}(f(x))=x.$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση:

$(f^{-1}(f(x))' = (x)' \Leftrightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)=1$

$8^η$ κατηγορία

Από παραγωγίσιμη στο x_0 παραγωγίσιμη στο Α

Υποδειγματική Άσκηση 8.1.

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με ιδιότητα $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ να δείξετε ότι η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$

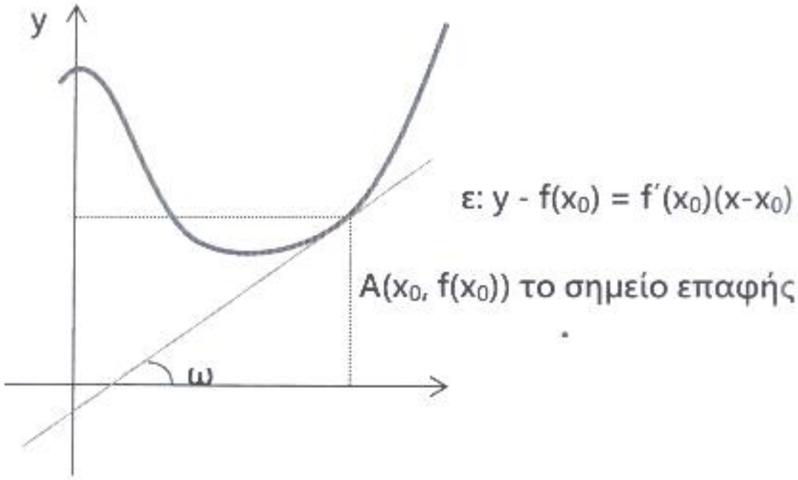
Υποδειγματική Άσκηση 8.2.

Δίνεται συνάρτηση f: από το $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x+y) = f(x) \cdot συνy + f(y)συνx$ (1)

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ



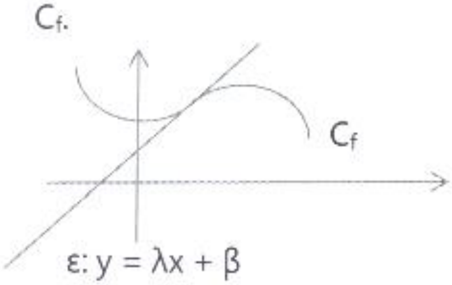
Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης (ή αλλιώς κλίση) τον αριθμό $f'(x_0)$.

Επομένως, η εφαπτομένη αυτή έχει εξίσωση:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Πρέπει να γνωρίζω:

1. Το $f'(x_0)$ εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$
2. Η εφαπτομένη ορίζεται στο x_0 όταν είναι παραγωγίσιμη στο x_0
3. Προφανώς αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 δεν ορίζεται η εφαπτομένη στο x_0
4. Υπάρχουν σημεία (καμπής) στη C_f που η εφαπτομένη διαπερνά τη C_f.



$9^{η}$ κατηγορία

Εύρεση εφαπτομένης που γνωρίζω

το σημείο επαφής

Πρέπει να γνωρίζω:

1. Βρίσκω $f(x_0)$
2. Βρίσκω $f'(x_0)$ (Από την $f'(x)$ ή από ορισμό)
3. Αντικαθιστώ την εξίσωση της εφαπτομένης

   $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Υποδειγματική Άσκηση 9.1.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f,

με $f(x) = e^{1-x} - x \cdot \ln x$, στο $x_0 = 1$

Απ: $y = -2x + 3$

Υποδειγματική Άσκηση 9.2.

Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{στο } A(1, f(1))$$

Υποδειγματική Άσκηση 9.3.

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x^3)=3x^4+1$. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(1,f(1))$

Απ: $y = 4x$

$10^η$ κατηγορία

Εύρεση εφαπτομένης που δε γνωρίζω

το σημείο επαφής

1. Αναφέρω «Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής»
2. Βρίσκω $f(x_0)$ (συναρτήσει του x_0)
3. Βρίσκω $f'(x)$, $f'(x_0)$ (συναρτήσει του x_0)
4. Λύνω εξίσωση ως προς x_0 ανάλογα με τα δεδομένα
   i. Αν $ε//ε_1$: $Ax + By + Γ = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = λ_1 \Leftrightarrow f'(x_0) = -\frac{A}{B}$
   ii. Αν $ε \perp ε_1$: $Ax + By + Γ = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot λ_1 = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{B}{A}$
   iii. Αν $ε//x'x \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$
   iv. Αν η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) $λ \Leftrightarrow f'(x_0) = λ$
   v. Αν η ε σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία $\hat{ω} \Leftrightarrow f'(x_0) = εφ\hat{ω}$
   vi. Αν η ε διέρχεται από το $B(x_1, y_1)$ θα επαληθεύουν οι συντεταγμένες του B την εξίσωση
   $y_1 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$
5. Βρίσκω το x_0 και αντικαθιστώ στο $f(x_0)$, $f'(x_0)$ και στην εξίσωση εφαπτομένης.

Υποδειγματική Άσκηση 10.1.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. έχει συντελεστή $\lambda = 2$, ii. σχηματίζει με τον x΄x γωνία $45°$

iii. είναι παράλληλη με την $\varepsilon_1: 3x+y-1 = 0$, iv. είναι παράλληλη με τον x΄x

Απ: ($y = 2x - \frac{5}{2}$, $y = x$, $y = -3x$, $y = \frac{3}{2}$)

Υποδειγματική Άσκηση 10.2.

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f με $f(x) = x^2$ που διέρχονται από το $M(2, 3)$.

Απ: ($y = 6x - 9$, $y = 2x - 1$)

Υποδειγματική Άσκηση 10.3.

(Θέμα πανελληνίων εξετάσεων)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Απ: ($y = \lambda \cdot e \cdot x$)

Υποδειγματική Άσκηση 10.4.

Αν $g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x + 2$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_g που διέρχεται από το $A(1, -1)$

Υποδειγματική Άσκηση 10.5.(Ύπαρξη εφαπτομένης)

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 - \ln x$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f, διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

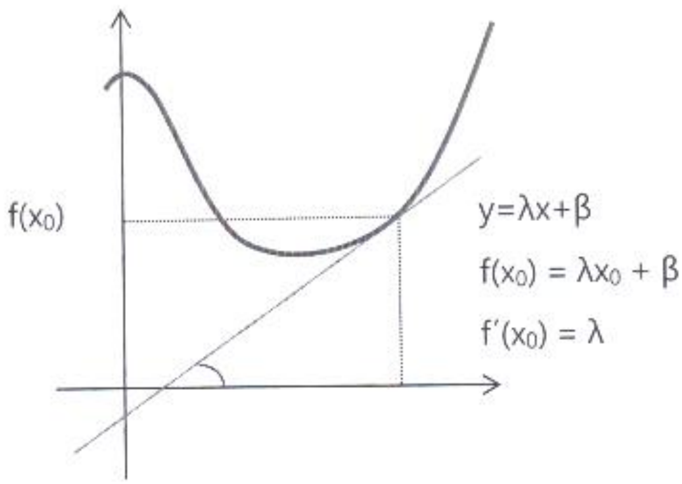
11^{η} κατηγορία

Όταν ε εφάπτεται στη C_f

Α. Για να δείξω ότι η ευθεία ε εφάπτεται στη C_f αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $x_0 \in D_f$

1. Αναφέρω «έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής»
2. Για να εφάπτεται πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} f(x_0) = \lambda x_0 + \beta \\ f'(x_0) = \lambda \end{cases} \quad \text{(Χ.Ι.)}$$



3. Αν βρω το x_0 εφάπτεται στη C_f

   Αν καταλήξω σε αδύνατο δεν εφάπτεται.

Β. Όταν γνωρίζω ότι εφάπτεται και ψάχνω παραμέτρους απαιτώ να ισχύουν

$$\begin{cases} f(x_0) = \lambda x_0 + \beta \\ f'(x_0) = \lambda \end{cases}$$ και λύνω το σύστημα

Υποδειγματική Άσκηση 11.1.

Αποδείξτε ότι η ευθεία $y = 3x - 2$ εφάπτεται στη C_f με: $f(x) = x^3$

Απ: M(1,1)

Υποδειγματική Άσκηση 11.2.

Έστω $f(x) = \alpha \cdot \ln x + \beta x^2 + 3$, να βρεθούν οι πραγματικοί α, β ώστε η

$y = 2x + 4$ να εφάπτεται στη C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

Απ: $\alpha = -4$, $\beta = 3$

Υποδειγματική Άσκηση 11.3.

Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = 9x - 14$ να εφάπτεται της C_f με

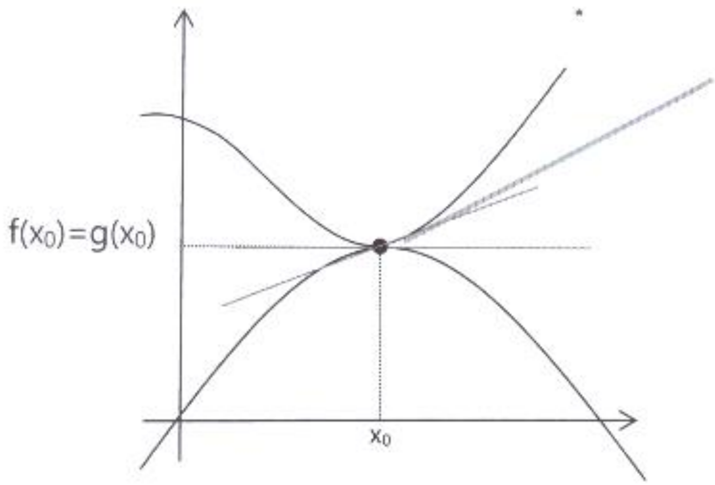
$f(x) = x^3 - 3\alpha x + 2$

Απ: $\alpha = 1$, $x_0 = 2$

$12^η$ κατηγορία

Κοινή εφαπτομένη

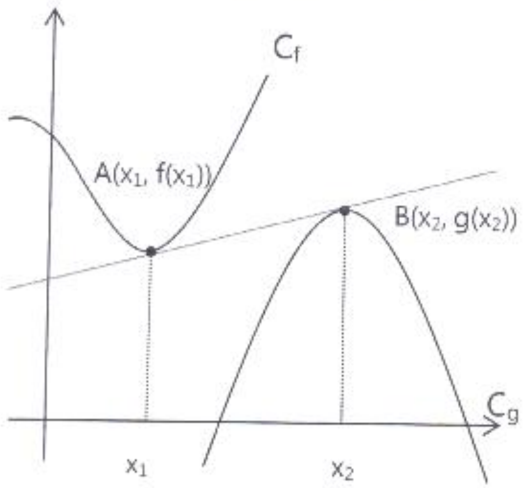
Α. ΜΕ ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ



$$f(x_0) = g(x_0) = \lambda x_0 + \beta$$

$$f'(x_0) = g'(x_0) = \lambda$$

Β. ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ



Βρίσκω την εφαπτομένη

- για τη C_f

  Έστω $A(x_1, f(x_1))$ το σημείο επαφής

  $\varepsilon: y - f(x_1) = f'(x_1)(x-x_1) \Leftrightarrow$

  $y = f'(x_1)\cdot x - f'(x_1)\cdot x_1 + f(x_1)$

- για τη C_g

  Έστω $B(x_2, g(x_2))$ το σημείο επαφής

  $\varepsilon: y - g(x_2) = g'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow$

  $y = g'(x_2)x - g'(x_2)x_2 + g(x_2)$

Για να ταυτίζονται $\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2 \end{cases}$

Υποδειγματική Άσκηση 12.1.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x^2 + \beta x + 2$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

Απ: $\alpha = 0$, $\beta = -1$

Υποδειγματική Άσκηση 12.2.

Να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες των C_f, C_g των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ αντίστοιχα.

Απ: $y = 4x-4$

Υποδειγματική Άσκηση 12.3.

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = f\left(-\frac{1}{x}\right) + xf(-x)$. Αν η ευθεία ε: $y = 2x+1$ εφάπτεται στη C_f στο $x_1=1$, να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο $x_2=-1$.

13η κατηγορία

Εύρεση παραμέτρων

Υποδειγματική Άσκηση 13.1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta \ln x + \beta$. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(1, 3) έχει κλίση 5.

Απ: $\alpha = 1$, $\beta = 2$

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Έστω δύο μεταβλητά μεγέθη x και y, τα οποία συνδέονται με μια σχέση της μορφής $y = f(x)$. Αν η f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

Πρέπει να γνωρίζω:

1. Ο ρυθμός μεταβολής αναφέρεται σε συναρτήσεις οι οποίες περιγράφουν φυσικά μεγέθη.
2. Έχει μονάδα μέτρησης που είναι: $\dfrac{\text{μονάδα μέτρησης f}}{\text{μονάδα μέτρησης x}}$
3. Αν το πρόσημο είναι θετικό το μέγεθος αυξάνεται.
   Αν το πρόσημο είναι αρνητικό το μέγεθος μειώνεται.
4. Σε όλες τις ασκήσεις προσπαθούμε να βρούμε τη σχέση που συνδέει τα μεγέθη του προβλήματος.
5. $V_{σφ} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$
   $E_{σφ} = 4\pi r^2$

$14^{η}$ κατηγορία

Ευθύγραμμη κίνηση

Υποδειγματική Άσκηση 14.1.

Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση στον κατακόρυφο άξονα δίνεται από τον τύπο $x(t)= -t^3+12t^2-36t$ όπου το t (σε sec) και το x (σε m) και $0 \le t \le 10$.

i) Να βρείτε την μέση ταχύτητα του σημείου στο χρονικό διάστημα [2,3].

ii) Να βρείτε την στιγμιαία ταχύτητα του σημείου για t=3sec.

iii) Να βρείτε την στιγμιαία επιτάχυνση του σημείου για t=2sec.

iv) Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;

v) Να βρείτε πότε το σημείο ανεβαίνει, πότε κατεβαίνει και να παραστήσετε σχηματικά την κίνηση του σημείου.

vi) Να βρείτε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 8 sec.

$15^η$ κατηγορία

Γεωμετρία

Υποδειγματική Άσκηση 15.1.

Η πλευρά $α(t)$ (σε cm) τη χρονική στιγμή $t > 0$ (σε s) ενός τετραγώνου δίνεται από τη σχέση: $α(t) = t^2 + 2t + 3$

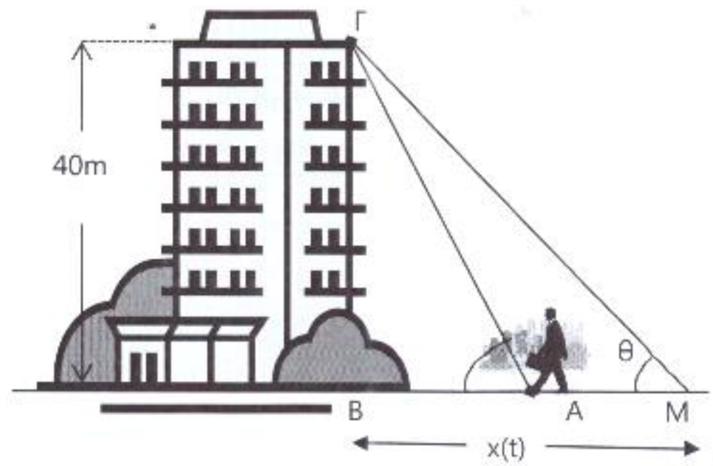
Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου, τη χρονική στιγμή που η πλευρά του είναι 11cm.

16^{η} κατηγορία

Γωνία - Σκάλα

Υποδειγματική Άσκηση 16.1.

Ένας άντρας πλησιάζει ένα κτίριο ύψους 40m με ταχύτητα 2m/s. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ=ΒΑΓ τη χρονική στιγμή που ο άνδρας απέχει 30m από τη βάση του κτιρίου.



$17^η$ κατηγορία

Κίνηση σε καμπύλη

Υποδειγματική Άσκηση 17.1.

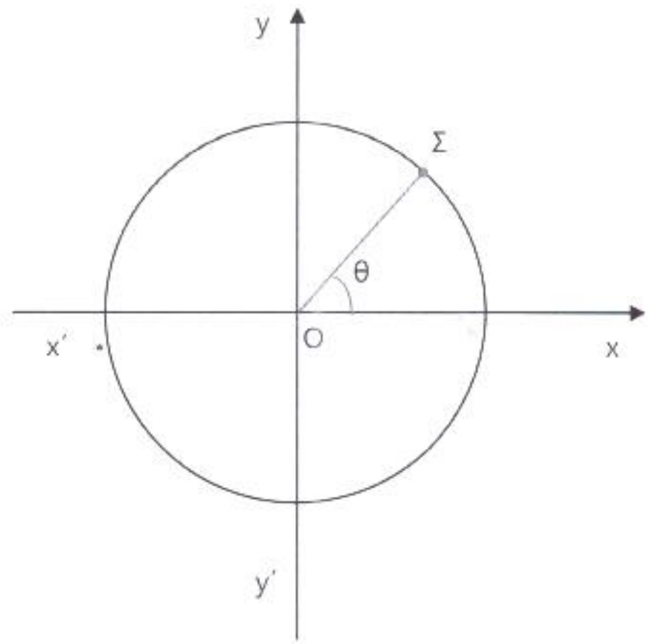
Ένα κινητό Μ κινείται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $y = \frac{x^3+2}{6}$.

i. Τη χρονική στιγμή που το κινητό βρίσκεται στο σημείο A(-2, -1), η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες/s. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του κινητού τη στιγμή που διέρχεται από το σημείο A.

ii. Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού είναι πάντα θετικός. Να βρείτε σε ποια σημεία της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι οκταπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης.

Υποδειγματική Άσκηση 17.2

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy είναι σχεδιασμένος ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$. Ένα σώμα κινείται πάνω στον παραπάνω κύκλο. Τη χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{3}, 1)$ του κύκλου, η τετμημένη του σώματος μειώνεται με ρυθμό 4 μονάδες/s. Τη χρονική στιγμή αυτή να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:



i. της τεταγμένης του σώματος

ii. της απόστασης του σώματος από το σημείο $M(5\sqrt{3}, 0)$

iii. της γωνίας θ =ΣOx.

$18^{η}$ κατηγορία

Οικονομία

Υποδειγματική Άσκηση 18.1

Μια βιομηχανία κατασκευάζει κάθε ημέρα x τεμάχια ενός προϊόντος. Το κόστος παραγωγής των x τεμαχίων είναι:

$K(x) = 6x^2 + 100x - 20$€

ενώ η τιμή πώλησης κάθε τεμαχίου του προϊόντος είναι:

$0{,}4x^2 - 21x + 640$€

i. Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός

ii. Να βρείτε το μέσο κόστος, το οριακό κόστος και το οριακό κέρδος, όταν η βιομηχανία κατασκευάζει 600 τεμάχια προϊόντος κάθε ημέρα.

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Αν μια συνάρτηση f είναι:

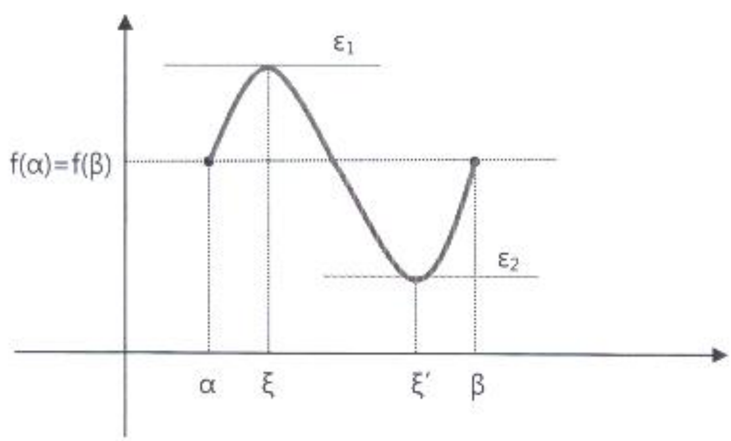
- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
- παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$f'(\xi) = 0$

Γεωμετρική ερμηνεία

Ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.



Πρέπει να γνωρίζω:

1. Όπως και το θεώρημα Bolzano, το θεώρημα Rolle είναι ένα υπαρξιακό θεώρημα.
2. Το θεώρημα Rolle μας εξασφαλίζει ότι μηδενίζεται η f΄ και ότι η C_f έχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη παράλληλη στο x΄x.
3. Αν $f'(x) \neq 0$ η f είναι "1-1" (Απόδειξη)

19^{η} κατηγορία

Εφαρμογή – Συμπέρασμα θ. Rolle

Υποδειγματική Άσκηση 19.1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 1$

i. Να εξεταστεί αν για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [-2, 2].

ii. Αν ναι, να εφαρμοστεί το θεώρημα Rolle.

Υποδειγματική Άσκηση 19.2.

Να εξεταστεί αν για τις παρακάτω συναρτήσεις εφαρμόζεται το θ. Rolle στο αντίστοιχο διάστημα και αν ναι, να εφαρμοστεί και να βρεθούν τα ξ.

i. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$, $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$

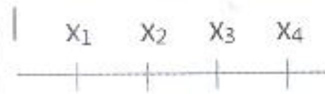
iii. $f(x) = x^3$, $x \in [-1, 2]$, iv. $f(x) = \begin{cases} x+5, & -2 \le x < 0 \\ x^2-1, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$, $x \in [-2, 2]$

Υποδειγματική Άσκηση 19.3.

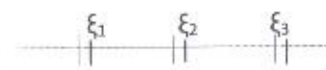
(Διαδοχικές εφαρμογές Rolle)

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f(0) = f(1) = f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

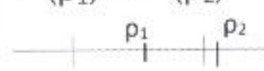
$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)$



$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3)$



$f''(\rho_1) = f''(\rho_2)$



$\xi_1 \in (x_1, x_2)$

$\xi_2 \in (x_2, x_3)$

$\xi_3 \in (x_3, x_4)$

$\rho_1 \in (\xi_1, \xi_2)$

$\rho_2 \in (\xi_1, \xi_3)$

20^{η} κατηγορία

Εύρεση Παραμέτρων

Πρέπει να γνωρίζω:

1. Χρησιμοποιώ f(α) = f(β)
2. Συνέχεια σε σημεία αλλαγής τύπου
3. Παραγωγισιμότητα σε σημεία αλλαγής τύπου

Υποδειγματική Άσκηση 20.1.

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x, & -1 \le x < 0 \\ x^3 + \gamma, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ώστε για την f να ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [-1, 1].

Υποδειγματική Άσκηση 20.2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - 3x + 1, & \alpha\nu\ x < 0 \\ x^2 + \beta x - \gamma, & \alpha\nu\ x \geq 0 \end{cases}$, με α, β, γ $\in \mathbb{R}$, για την οποία εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο [-1, 1]

i. Να βρείτε τις τιμές των α, β και γ

ii. Να βρείτε το σημείο $x_0 \in (-1, 1)$ για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Απ: i. $\alpha = -5$, $\beta = -3$, $\gamma = -1$ ii. $x_0 = -\frac{3}{10}$

$21^η$ κατηγορία

Αντιπαραγώγιση σε συναρτησιακή σχέση

Πρέπει να γνωρίζω:

1. Τύπους αντιπαραγώγισης

Συνάρτηση f	Αρχική F
1	x
α	αx
x	$\frac{x^2}{2}$
$x^ν$	$\frac{x^{ν+1}}{ν+1}$
ημx	-συνx
συνx	ημx
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$, x > 0	lnx
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$f'g + fg'$	$f \cdot g$
$e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$e^{f(x)}$
$f'(g(x)) \cdot g'(x)$	$f(g(x))$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$f(x) \cdot f'(x)$	$\frac{f^2(x)}{2}$

2. Ειδικές περιπτώσεις

i. $f'(x) + \kappa f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$e^{\kappa x} \cdot f'(x) + e^{\kappa x} \cdot \kappa \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$(e^{\kappa x} \cdot f(x))' = 0$

Εφαρμόζω Rolle στην $h(x) = e^{\kappa x} \cdot f(x)$

ii. $\kappa f(x) + xf'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\kappa x^{\kappa-1} f(x) + x^{\kappa} f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$(f(x) \cdot x^{\kappa})' = 0$

Εφαρμόζω Rolle στην $h(x) = f(x) \cdot x^{\kappa}$

iii. $xf'(x) - \kappa f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$x^{\kappa} f'(x) - \kappa x^{\kappa-1} f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{x^{\kappa} \cdot f'(x) - \kappa x^{\kappa-1} f(x)}{x^{2\kappa}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x^{\kappa}}\right)' = 0$$

Εφαρμόζω Rolle στην $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^{\kappa}}$

iv. $f'(g) + g'(x) \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$e^{g(x)} \cdot f'(x) + e^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\left(e^{g(x)} \cdot f(x)\right)' = 0$

Εφαρμόζω Rolle στην

$h(x) = e^{g(x)} \cdot f(x)$

Υποδειγματική Άσκηση 21.1.

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [1, 3], f παραγωγίσιμη στο (1, 3), με $f(1) - f(3) = -24$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ με $f'(\xi) - 6\xi = 0$.

1. Στη θέση του ξ βάζω x.
2. Με τη βοήθεια της αντιπαραγώγισης βρίσκω την αρχική
3. Μπορώ να πολλ/ζω-διαιρώ!!!

Υποδειγματική Άσκηση 21.2.

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$, $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = (3 - \xi) \cdot f'(\xi)$.

Υποδειγματική Άσκηση 21.3.

Έστω f συνεχής στο [2, 3], f παραγωγίσιμη στο (2, 3) με $9f(2) = 4f(3)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ με $f'(\xi) = \dfrac{2f(\xi)}{\xi}$

Υποδειγματική Άσκηση 21.4.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ τέτοια ώστε $0 < f(x) < 4$ για κάθε $x \in [0, 2]$ και $f'(x) \neq 2$ για κάθε $x \in [0, 2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 2)$ ώστε $f(\xi) = 2\xi$.

$22^η$ κατηγορία

Ύπαρξη ρίζας της $f'(x) = 0$ με γνωστή f

<u>Υποδειγματική Άσκηση 22.1.</u>

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = (x - 2)\ln x$. Να δείξετε ότι:

i) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(ξ, f(ξ))$, να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

ii) Η εξίσωση $x^x = e^{2-x}$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (1, 2).

Υποδειγματική Άσκηση 22.2.

Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

i. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1,1)$.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 1)$.

$23^{η}$ κατηγορία

Ύπαρξη ρίζας σε εξίσωση

Υποδειγματική Άσκηση 23.1.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ f παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{\pi}{2})$ $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$. Να δείξετε ότι $f'(x)\cdot ημx=1-f(x)\cdot συνx$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

$24^{η}$ κατηγορία

Το πολύ ν -ρίζες

<u>Υποδειγματική Άσκηση 24.1.</u>

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x + λ = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο (2, 3).

- Αναφέρω «Έστω ότι έχει δύο ρίζες τις $x_1, x_2 \in (α, β)$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1)=f(x_2)=0$
- Εφαρμόζω Rolle στο $[x_1, x_2]$
- Από το συμπέρασμα προκύπτει άτοπο.
- Ομοίως για περισσότερες ρίζες με διαδοχικά Rolle

Υποδειγματική Άσκηση 24.2.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x^2 = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ δύο ρίζες.

25η κατηγορία

Ακριβώς ν -ρίζες

Υποδειγματική Άσκηση 25.1.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x = ημx + 1$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα, η οποία ανήκει στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

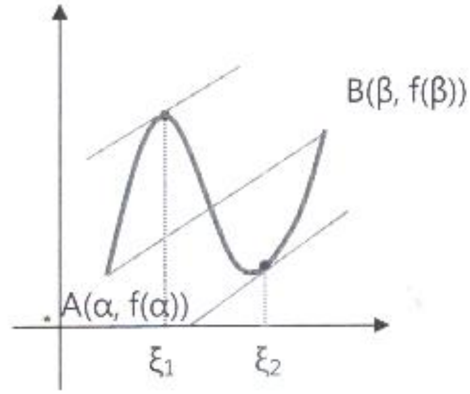
Θ.Μ.Τ.

Αν μία συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

  τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

  $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$



Γεωμετρική ερμηνεία

Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ με $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

Πρέπει να γνωρίζω:

1. Με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. βρίσκω μια τιμή για την f΄
2. Αν $f(\alpha) = f(\beta)$ προκύπτει Rolle

$26^η$ κατηγορία

Εφαρμογή - Απόδειξη Σχέσεων

Υποδειγματική Άσκηση 26.1.

Δίνεται f(x) = $\begin{cases} 2x^2+5x+6, & αν\, x \le -1 \\ 3x^2+7x+7, & αν\, x > -1 \end{cases}$.

i. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα [-3,1]

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (-3, 1)$, ώστε $f'(ξ)=2$ και στη συνέχεια να βρείτε μια τιμή του ξ που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση.

Υποδειγματική Άσκηση 26.2.

$(f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \ldots + f'(\xi_\nu) = c)$

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [1, 5] και παραγωγίσιμη στο (1, 5) με $5f(1) = f(5) = 2$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 5)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \frac{4}{5}$.

- Χωρίζω το [α, β] σε ν ισομήκη διαστήματα πλάτους $\frac{\beta-\alpha}{\nu}$
- Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. σε κάθε διάστημα χωριστά

  [α, β] σε δύο: $[\alpha, \alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}]$, $[\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}, \beta]$

  [α, β] σε τρία:

  $[\alpha, \alpha+\frac{\beta-\alpha}{3}]$, $[\alpha+\frac{\beta-\alpha}{3}, \alpha+2\frac{\beta-\alpha}{3}]$, $[\alpha+2\frac{\beta-\alpha}{3}, \beta]$

Υποδειγματική Άσκηση 26.3.

$\kappa_1 f'(\xi_1) + \kappa_2 f'(\xi_2) + \dots + \kappa_\nu f'(\xi_\nu) = \lambda$

Έστω f συνεχής στο [1, 6] f παραγωγίσιμη στο (1, 6), f(1) = f(6)

Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 6)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = 0$

1. $\delta = \beta - \alpha$
2. $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_\nu$
3. $\delta_1 = \frac{\kappa_1}{\kappa} \cdot \delta,\ \delta_2 = \frac{\kappa_2}{\kappa}\delta,\ \dots,\ \delta_\nu = \frac{\kappa_\nu}{\kappa}\delta$
4. $[\alpha,\ \alpha+\delta_1],\ [\alpha+\delta_1,\ \alpha+\delta_1+\delta_2],\ \dots$
   $[\alpha+\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_{\nu-1},\ \beta]$

27^{η} κατηγορία

Συνδυασμός Θεωρημάτων

Υποδειγματική Άσκηση 27.1.

Δίνεται f συνεχής στο [0, 1] f παραγωγίσιμη στο (0, 1) με f(0) = 1 και f(1) = 0. Να δείξετε ότι:

i. υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$

ii. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 1)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 1$

Υποδειγματική Άσκηση 27.2.

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f(-5)=-2$ και $f(1) = 4$.Να αποδείξετε ότι:

i. υπάρχει $x_0 \in (-5, 1)$, ώστε $f(x_0) = 1$

ii. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-5, 1)$, διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε:

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2$$

Υποδειγματική Άσκηση 27.3.

Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f(1) = \alpha + 2\beta$, $f(2) = 2\alpha + 3\beta$ και $f(3) = 3\alpha + 4\beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$, ώστε $f''(\xi) = 0$.

Υποδειγματική Άσκηση 27.4.

Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία Α(1, 7) και Β(2, 1). Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x - 6y + \sqrt{7} = 0$

$28^{η}$ κατηγορία

Απόδειξη ανισοτήτων

Υποδειγματική Άσκηση 28.1.

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [0, 2] με $f(0) = 3$ και για κάθε $x \in (0, 2)$ ισχύει $-2 \le f'(x) \le 3$. Δείξτε ότι $-1 \le f(2) \le 9$

Η ανισότητα της $f'(x)$ θα με οδηγήσει στην ανισότητα των τιμών της f.

Υποδειγματική Άσκηση 28.2.

Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = 0$ να δείξετε ότι

$f'(1) < f(1) < f'(0)$

Η μονοτονία της f' μας
δίνει ανισότητα την $f'(x)$
δηλαδή,
για $x \in (\alpha, \beta)$ και $f' \nearrow [\alpha, \beta]$
$f'(\alpha) < f'(x) < f'(\beta)$
Όμοια $f' \searrow$ στο $[\alpha, \beta]$

Υποδειγματική Άσκηση 28.3.

Αν η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο [α, β] να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

Υποδειγματική Άσκηση 28.4.

Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} < \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta < \frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$

- Φέρνουμε την ανισότητα στη μορφή $\kappa < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < \lambda$
- Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, \beta]$, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$: $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$
- Ξεκινώ $\alpha<\xi<\beta$ καταλήγω $\kappa<f'(\xi)<\lambda$ με ανισότητα με την f′ ή μονοτονία f′ ή κτίσιμο καταλήγουμε στο ζητούμενο

Υποδειγματική Άσκηση 28.5.

(με άκρα [x, x+1])

Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, για $x \in (0, +\infty)$

Υποδειγματική Άσκηση 28.6. (με άκρα [α, x])

Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει $1 + x < e^x < 1 + ex$

Υποδειγματική Άσκηση 28.7.

Αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) < x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι

$f(4) - f(2) < 6$

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ.Μ.Τ.

Σταθερή Συνάρτηση

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν:

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Ίσες παραγώγους

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ

Αν:

- οι f, g συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό x του Δ,

  τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

  $f(x) = g(x) + c$

Πρέπει να γνωρίζω:

1. Τα θεωρήματα εφαρμόζονται σε ένα διάστημα Δ και όχι σε ένωση διαστημάτων
2. Αν μια συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ τότε ισχύει $f(x)=c,\ c \in \mathbb{R}$
3. Βοηθάει να δείξουμε ότι $f(x) = g(x)$

$29^{η}$ κατηγορία

Σταθερή συνάρτηση

Υποδειγματική Άσκηση 29.1.

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$f''(x) + f(x) = 0 \qquad (1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι η g με $g(x) = f^2(x) + [f'(x)]^2$ είναι σταθερή.

Αποδεικνύω ότι:

- f συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$
  για κάθε x
  εσωτερικό του Δ.

$30^{η}$ κατηγορία

Εύρεση συνάρτησης

Υποδειγματική Άσκηση 30.1

Αν μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$f'(x) = 2f(x)(x+1)$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$

Δείξτε ότι:

i) η $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{x^2+2x}}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

ii) να βρεθεί ο τύπος της f.

g σταθερή

ισχύει

$g(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$

το c θα το βρω

από κάποια τιμή

Υποδειγματική Άσκηση 30.2.

Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, f, g, τέτοιες ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = g(0) = 1$
- $f'(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ και $g'(x) = -\dfrac{1}{f(x)}$

i) Δείξτε ότι $f(x)g(x) = 1$

ii) Προσδιορίστε τους τύπους των f, g

Υποδειγματική Άσκηση 30.3.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) - ημx = xσυνx$ να βρεθεί η f.

- Χωρίζω τα f και την παράσταση του x
- Αντιπαραγώγιση
- Πόρισμα ίσων παραγώγων

Υποδειγματική Άσκηση 30.4.

f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) + 2f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και $f(0) = 2$ να βρεθεί ο τύπος της f.

Θυμήσου ειδικές περιπτώσεις

Υποδειγματική Άσκηση 30.5.

Αν για την παραγωγίσιμη f στο $\mathbb{R}$ ισχύει $xf'(x) = x \cdot e^x + x^2e^x$ και $f(0) = 0$ να βρεθεί η f.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Μονοτονία Συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Τοπικό Μέγιστο

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ λέγεται τοπικό μέγιστο της f.

Τοπικό Ελάχιστο

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ λέγεται τοπικό ελάχιστο της f.

Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f είναι:

- τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η f′ μηδενίζεται.
- τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη
- τα άκρα του διαστήματος Δ (εφόσον το Δ είναι κλειστό σε κάποιο από αυτά).

Ειδικότερα τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η f′ μηδενίζεται ή η f δεν είναι παραγωγίσιμη, ονομάζονται κρίσιμα σημεία της f.

Θεώρημα - Κριτήριο τοπικών ακροτάτων

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

- Αν ισχύει $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.
- Αν ισχύει $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

$31^{η}$ κατηγορία

Εύρεση Μονοτονίας - Ακροτάτων

<u>Υποδειγματική Άσκηση 31.1.</u>

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία - ακρότατα

i. $f(x) = e^{x} + x^{3} + x$

ii. $f(x) = x + συνx - 2$

iii. $f(x) = x^{3} - 3x^{2} + 3x + 1$

iv. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

v. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

vi. $f(x) = e^{x^2-2x+2}$

Υποδειγματική Άσκηση 31.2. (Σε διάστημα)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία - ακρότατα τις συναρτήσεις

i. $f(x) = x\ln x$

ii. $f(x) = x^2(2\ln x - 5) - 4x(\ln x - 3)$

iii. $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}, x \in [0, +\infty)$

iv. $f(x) = \sqrt{2}\,x + 2συνx,\ x \in [0, 2\pi]$

Υποδειγματική Άσκηση 31.3. (Με τη βοήθεια f΄, $f^{(2)}$)

x		x_0	
f΄΄(x)	+		+
f΄(x)	↗ −	0	↗ +
f	↘		↗

Ε

x		x_0	
f΄΄(x)	−		−
f΄(x)	↘ +	0	↘ −
f	↗		↘

Μ

x		x_0	
f΄΄(x)	+		−
f΄(x)	↗ −	0	↘ −
f	↘		↘

$f'(x_0) \leq 0$

x		x_0	
f΄΄(x)	−		+
f΄(x)	↘ +	0	↗ +
f	↗		↗

$f'(x_0) \geq 0$

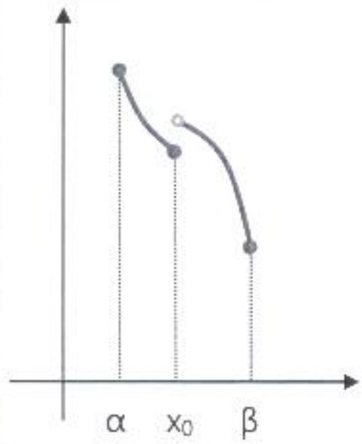
Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία - ακρότατα τις συναρτήσεις

i. $f(x) = 4x - 3x^2 - 4ημx + 1$

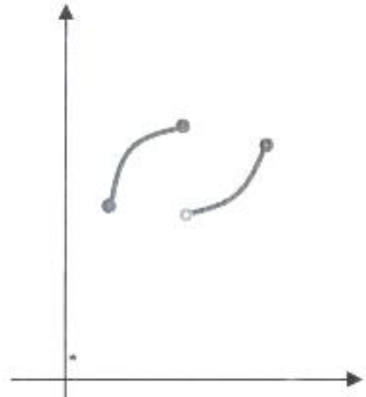
ii. $f(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2 + x + 2$

iii. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-2}$

Υποδειγματική Άσκηση 31.4. (Σε πολλαπλού τύπου)

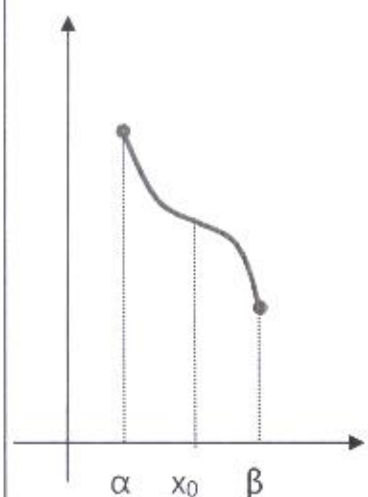


$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$



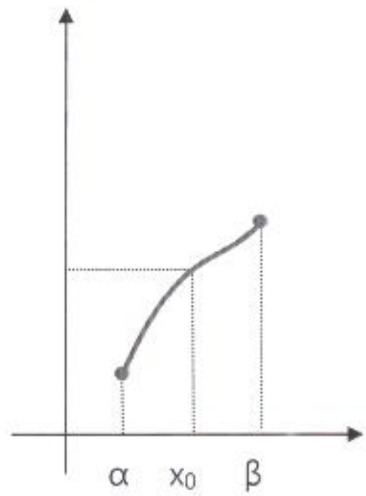
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

Η f δεν είναι ↗ στο [α, β]



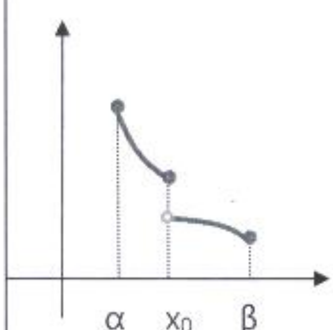
f συνεχής στο x_0

f ↘ στο [α, β]



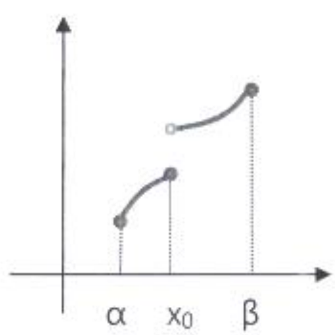
f συνεχής στο x_0

f ↗ στο [α, β]



$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

f ↘ στο [α, β]



$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

f ↗ στο [α, β]

Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, & x \leq 1 \\ 3 - x^2, & x > 1 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} x^2+4x+1, & x<0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$

iii. $g(x) = \begin{cases} e^x - x, & x \le 0 \\ x^2 - 2x + 2, & x > 0 \end{cases}$

ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν:

- η f παρουσιάζει τοπικό ή ολικό ακρότατο στο x_0
- το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ
- η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0

τότε ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$

32^{η} κατηγορία

Θεώρημα FERMAT

Υποδειγματική Άσκηση 32.1.

Να βρεθούν οι τιμές του μ ώστε η f με $f(x) = \mu x^3+6x^2+2\mu x+\mu^2$ με $\mu \in \mathbb{R}^*$ να μην παρουσιάζει ακρότατα.

Υποδειγματική Άσκηση 32.2.

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + \alpha \ln x - \beta x$ παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$ με τιμή 5

Απ: $\alpha = -6$, $\beta = -4$

Υποδειγματική Άσκηση 32.3.

Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f, στο $\mathbb{R}$ ισχύει

$$6f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 18x - 12 \qquad (1)$$

δείξτε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Υποδειγματική Άσκηση 32.4.

Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ τέτοια ώστε να ισχύει $f^3(x) + x^3 = 3x \cdot f(x)$, για κάθε $x > 0$. Αν για $x = x_0$ παρουσιάζει ακρότατο, να βρεθεί η τιμή του x_0.

Υποδειγματική Άσκηση 32.5.

Αν για κάθε $x > -1$ ισχύει $\alpha^x \geq 1 + \ln(x + 1)$ να δείξετε ότι $\alpha = e$.

Υποδειγματική Άσκηση 32.6.

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1) = 1$ και

$2f(x) - x^2 \le 2\ln x + 1$ για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f

στο $A(1, 1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 3$

Υποδειγματική Άσκηση 32.7.

Δίνεται συνάρτηση $f:[0, 3] \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(1) < f(0) < f(3) < f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

33η κατηγορία

Σύνολο τιμών - Πλήθος ριζών

Υποδειγματική Άσκηση 33.1.

Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος ριζών των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} - \sqrt{1-x}$

ii. $f(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$

iii. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x}$

iv. $f(x) = \sqrt{-x^2 - 4x + 5}$

v. $f(x) = \begin{cases} x^2-4x+3, & \alpha\nu\ 1 \le x < 3 \\ x^2-2x-3, & \alpha\nu\ 3 \le x \le 5 \end{cases}$

Υποδειγματική Άσκηση 33.2.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + e^x = 1 - x$ έχει μοναδική ρίζα.

Υποδειγματική Άσκηση 33.3

Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3-3x^2-9x-λ=0$ για τις διάφορες τιμές του λ.

$34^{η}$ κατηγορία

Επίλυση Εξισώσεων - Ανισώσεων

Υποδειγματική Άσκηση 34.1

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $x^2 + 6\ln x = 4x - 3$

ii. $x^2 + x + 5 = 5e^x$

Υποδειγματική Άσκηση 34.2

Να λύσετε την εξίσωση $x\ln x = 2x - e$.

Υποδειγματική Άσκηση 34.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\ln\frac{x^2+5}{2x^2+1} = x^2 - 4$

Υποδειγματική Άσκηση 34.4

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3e^x + x^3 = 3x^2 - 3x$ έχει μοναδική λύση, η οποία ανήκει στο διάστημα $(-1, 0)$.

Υποδειγματική Άσκηση 34.5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + συνx$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

ii. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $2συνx < π - 2x$

β. $συν(|x| - 1) - συν(3|x| - 7) < 2|x| - 6$

$35^η$ κατηγορία

Απόδειξη Ανισοτήτων

<u>Υποδειγματική Άσκηση 35.1.</u>

Δείξτε ότι $x \cdot ημx + συνx > 1$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Υποδειγματική Άσκηση 35.3.

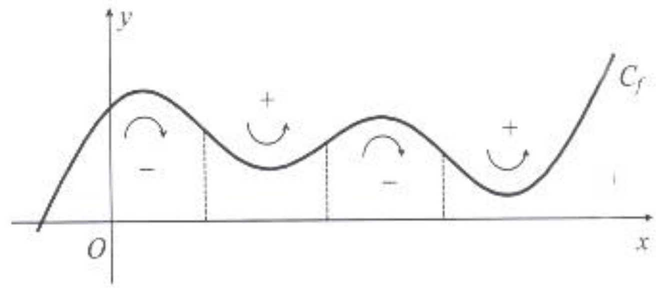
Να δείξετε ότι $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x)$, $x > 0$

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

Έστω συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Τότε:

- Η C_f στρέφει τα **κοίλα προς τα πάνω** ή f είναι **κυρτή** στο Δ, όταν η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.
- Η C_f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή f είναι **κοίλη** στο Δ, όταν η f′ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Γραφικά:



ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Τότε:

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα άνω) στο Δ.
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο Δ.
- Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει
- Αν γνωρίζουμε f κυρτή τότε f′ ↗
- Αν γνωρίζουμε f κοίλη τότε f′ ↘

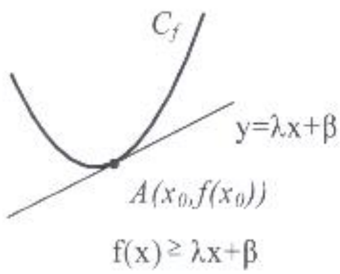
ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

Η κυρτότητα μιας συνάρτησης μπορεί να μας δώσει τη σχετική θέση της εφαπτομένης της σε οποιοδήποτε σημείο της γραφικής της παράστασης.

ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ:

- Αν η f στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο Δ τότε η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της γραφικής της παράστασης βρίσκεται κάτω από την C_f και έχει μοναδικό κοινό σημείο με αυτήν το σημείο επαφής.

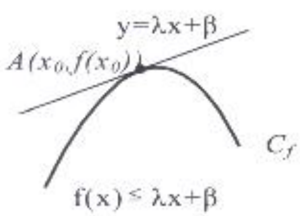
Γραφικά:



Το "=" ισχύει για $x = x_0$.

- Αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ (κοίλη), τότε η εφαπτομένη σε οποιαδήποτε σημείο της C_f βρίσκεται πάνω απ' αυτήν και έχει μοναδικό κοινό σημείο το σημείο επαφής.

Γραφικά:



Το "=" ισχύει για $x=x_0$.

ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΜΠΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ:

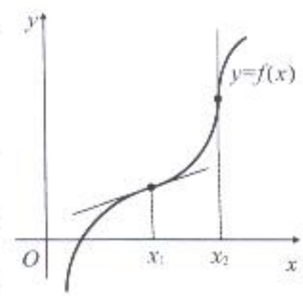
Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α, β) εκτός ίσως της $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Τότε αν:

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

  τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της C_f.

Παρατηρήσεις

1. Εκατέρωθεν του σημείου καμπής η f'' αλλάζει πρόσημο.
2. Αν το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f τότε το x_0 ονομάζεται θέση σημείου καμπής.
3. Στο σημείο καμπής η εφαπτομένη της C_f «διαπερνάει» την γραφική παράσταση.
4. Αν συνδέσουμε τη μονοτονία της f' με την κυρτότητα και το σημείο καμπής της f τότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι $x = x_0$ είναι η θέση του ακρότατου για την f'.



Για τον εντοπισμό των σημείων καμπής ισχύει:

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε $f''(x_0) = 0$.

- Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει

37η κατηγορία

Εύρεση Κυρτότητας - Σημείων Καμπής

Υποδειγματική Άσκηση 37.1.

Να μελετηθούν ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής οι παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$

ii. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{x^3}$

iii. $f(x) = e^{-x^2}$

Υποδειγματική Άσκηση 37.2.

Να δείξετε ότι η $f(x) = x^2(3\ln x - x - 2)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(0, +\infty)$

$38^η$ κατηγορία

Κυρτότητα - Εφαπτομένη

Υποδειγματική Άσκηση 38.1.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$, $x>0$.

i. Να βρείτε τα διαστήματα που η f είναι κυρτή – κοίλη

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(e, f(e))$

iii. Να δείξετε ότι $2\sqrt{ex}\ln x \leq 3x-e$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$

Υποδειγματική Άσκηση 38.2.

Δίνεται f με $f(x) = x^5 + x^3 + 3ημx,\ x \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής.

ii) Βρείτε την εφαπτομένη στο σημείο καμπής.

iii) Δείξτε ότι $x^5 + x^3 + 3ημx \geq 3x$ για κάθε $x \geq 0$

39$^{\eta}$ κατηγορία

Συναρτησιακά

Υποδειγματική Άσκηση 39.1.

Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$2x^2 + e^x + f^2(x) = 4x + 3$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δείξτε ότι η C_f δεν έχει κανένα σημείο καμπής.

Υποδειγματική Άσκηση 39.2.

Έστω f παραγωγίσιμη (-2, 2) τέτοια ώστε:

$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$ (1) για κάθε $x \in (-2, 2)$

i. Δείξτε ότι $f(x) \neq 1$, για κάθε $x \in (-2, 2)$

ii. Αποδείξτε ότι η f δύο φορές παραγωγίσιμη

iii. Αποδείξτε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

$40^{η}$ κατηγορία

Εύρεση Παραμέτρων

<u>Υποδειγματική Άσκηση 40.1.</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = α^2x^4 - 4αx^3 + 6(2α - 1)x^2 - 4x + 11$, με $α \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του α η C_f έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 1$

Υποδειγματική Άσκηση 40.2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 + \lambda x^3 + (3\lambda - 9)x^2 - 7x + 4$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ, η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

$41^{η}$ κατηγορία

Κυρτότητα - Θ.Μ.Τ.

Υποδειγματική Άσκηση 41.1.

i. Έστω f: $\Delta \to \mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \Delta$$

ii. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln x$, με $x > 0$

α. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

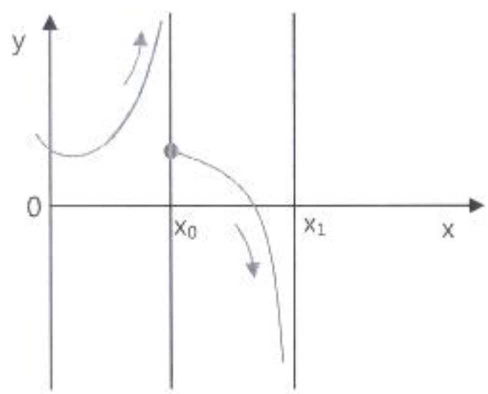
β. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta}{\alpha+\beta} \geq \ln\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ για κάθε $\alpha, \beta > 0$

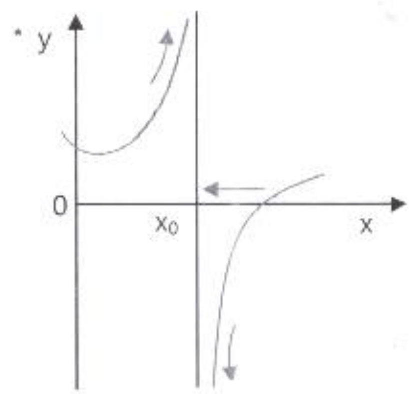
ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Ορισμός 1: ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Γραφική απεικόνιση κατακόρυφων ασύμπτωτων





Ορισμός 2: ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

Η ευθεία $y = \beta$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ όταν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$. Αντίστοιχα θα είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ όταν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 3: ΠΛΑΓΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ ή ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

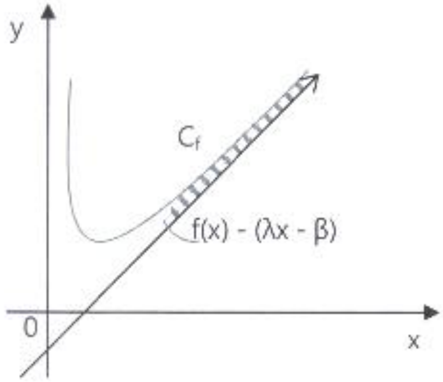
Ορίζουμε την ευθεία $y = \lambda x+\beta$ ως ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αν: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)] = 0$ ή $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)] = 0$ αντίστοιχα.

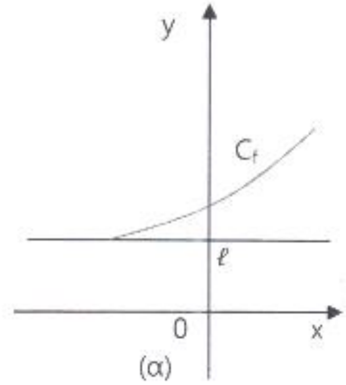
Η $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}^*$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$ ή

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}^*$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$

Γραφική απεικόνιση πλάγιας – οριζόντιας ασύμπτωτης





42^{η} κατηγορία

Εύρεση Ασύμπτωτων

Α. Εύρεση κατακόρυφης ασύμπτωτης

Κατακόρυφες ασύμπτωτες αναζητώ στα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης ή στα σημεία όπου η συνάρτηση δεν είναι συνεχής. (Όχι στα $\pm\infty$).

Η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

Β. Εύρεση οριζόντιας ασύμπτωτης

Για να προσδιορίσουμε τις οριζόντιες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης f αρκεί να βρούμε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (Αρκεί το πεδίο ορισμού της να έχει άκρο το $+\infty$ ή το $-\infty$).

Αν κάποιο από τα παραπάνω όρια είναι πραγματικός αριθμός, έστω β τότε η ευθεία $y = β$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

Γ. Εύρεση οριζόντιας – πλάγιας ασύμπτωτης

Για να βρούμε τις πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f στο $+\infty$, εφόσον το $+\infty$ είναι άκρο του πεδίου ορισμού της, κάνουμε τα εξής:

1. Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda$.
   - Αν $\lambda = \pm\infty$ δεν έχουμε ούτε οριζόντια, ούτε πλάγια ασύμπτωτη. Άρα σταματάμε.
   - Αν $\lambda \neq 0$, ίσως έχουμε πλάγια ασύμπτωτη. Άρα προχωράμε στο βήμα 2.
   - Αν $\lambda = 0$, ίσως έχουμε οριζόντια ασύμπτωτη. Άρα προχωράμε στο βήμα 3.
2. Για $\lambda\neq 0$ υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x] = \beta$
   - Αν το β **δεν είναι πραγματικός αριθμός** ($\pm\infty$), τότε η C_f **δεν** έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
   - Αν το β **είναι πραγματικός αριθμός**, τότε η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση: $y = \lambda x + \beta$.

Με τον ίδιο τρόπο εξετάζουμε αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$, αν βεβαίως το $-\infty$ είναι άκρο του πεδίου ορισμού της.

3. Για $\lambda=0$ υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\beta$.
   - Αν το β δεν είναι πραγματικός αριθμός ($\pm\infty$), τότε η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
   - Αν το β είναι πραγματικός αριθμός, τότε η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = \beta$.

* Αντίστοιχα δουλεύουμε και στο $-\infty$.

Υποδειγματική Άσκηση 42.1.

Να βρεθούν οι κατακόρυφες ασύμπτωτες, εφόσον υπάρχουν, των συναρτήσεων:

i. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-2}$, ii. $h(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, iii. $\varphi(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ x^2+1, & x\le 0\end{cases}$

Υποδειγματική Άσκηση 42.2

Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις οριζόντιες ασύμπτωτες των:

i. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$, ii. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

Υποδειγματική Άσκηση 42.3.

Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$, ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

Υποδειγματική Άσκηση 42.4.

Έστω f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} [xf(x) - x^2 + 2x] = 1$. Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

43^{η} κατηγορία

Εύρεση παραμέτρων

<u>Υποδειγματική Άσκηση 43.1.</u>

Έστω $f(x) = \sqrt{x^2 + \lambda x + 4\lambda^2} + \mu x$

Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = 2x+3$ να είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Υποδειγματική Άσκηση 43.2.

Να βρεθούν οι τιμές των α, β αν $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-4x+3}{x^2-4}-\alpha x-\beta\right)=2$

Υποδειγματική Άσκηση 43.3.

Έστω συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Να βρεθούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x)$

ii) Να βρεθεί ο $\mu \in \mathbb{R}$ όταν $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mu f(x)+4x}{xf(x)-2x^2+3x} = 1$

ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

Θεώρημα 1°: Απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0 \in R\cup\{-\infty,+\infty\}$ **και υπάρχει** το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Θεώρημα 2°: Απροσδιοριστία $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $(-\infty)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ ή $(-\infty)$, $x_0 \in R\cup\{-\infty,+\infty\}$ **και υπάρχει** το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Οι κανόνες του L' Hospital απλουστεύουν τον υπολογισμό των ορίων στις απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Παρατηρήσεις

1. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει πάντοτε:
   Δηλαδή, αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, δε σημαίνει ότι οπωσδήποτε υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.
2. Το θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί περισσότερες από μια φορές.
3. Τα πιο πάνω θεωρήματα ισχύουν και για τον υπολογισμό πλευρικών ορίων.
4. Δεν είναι απαραίτητο οι συναρτήσεις f, g να είναι παραγωγίσιμες αρκεί να υπάρχουν οι f', g' γύρω από το x_0.
5. Χρειάζεται προσοχή στην εφαρμογή των θεωρημάτων στα συναρτησιακά όρια. Θα πρέπει να γνωρίζουμε την παραγωγισιμότητα f, g και τη συνέχεια των f', g' η οποία μπορεί να δοθεί με μια επιπλέον παράγωγο από αυτήν που τελικά χρειαζόμαστε. Αν δηλαδή γνωρίζουμε την ύπαρξη της f'' τότε η f' θα είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, οπότε $\lim_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0)$.

$44^{η}$ κατηγορία

Εύρεση ορίου

Υποδειγματική Άσκηση 44.1. $\left(\frac{0}{0}\right)$

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-ημx}{x^3}$, ii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-συνx}$, iii. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$, iv. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{3}{x}-\frac{3}{ημx}\right)$

Υποδειγματική Άσκηση 44.2 $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+e^x}{x^2+e^x}$, ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

Υποδειγματική Άσκηση 44.3. ($0\cdot\infty$)

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(2-x^2)$, ii. $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln x)$

Υποδειγματική Άσκηση 44.4. ($\infty - \infty$)

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - e^x)$, ii. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \cdot e^x - x^2)$, iii. $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x + \ln x - x^2)$

Υποδειγματική Άσκηση 44.5. (0^0, ∞^0)

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x \to 0^-} (x^x)$, ii. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)^{\frac{1}{x}}$

45^{η} κατηγορία

Συναρτησιακά

Υποδειγματική Άσκηση 45.1.

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = f'(0) = 0$ και

$$f''(0) = 2 \text{ και η } g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

i) Να βρείτε το $g'(0)$

ii) Να δείξετε ότι η g' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Υποδειγματική Άσκηση 45.2.

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη.

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x+\alpha h) - f'(x)}{h} = \alpha f''(x) \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}^*$$

ii. Επιπλέον αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+4h) - 2f(x+2h) + f(x)}{h^2} = 24x - 8$$

και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση

$y = 5x - 8$, τότε να βρείτε:

α. τις τιμές $f'(1)$ και $f(1)$ β. τον τύπο της f.

$46^{η}$ κατηγορία

Μελέτη - χάραξη γραφικής παράστασης

Πρέπει να γνωρίζω:

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f.
2. Εξετάζουμε αν η f είναι άρτια ή περιττή ή περιοδική με σκοπό να αναγνωρίσουμε τυχόν συμμετρίες.
3. Εντοπίζουμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες.
4. Εξετάζουμε την f ως προς τη συνέχεια, παραγωγισιμότητα.
5. Προσδιορίζουμε την f΄ και μελετάμε την f ως προς τη μονοτονία και ακρότατα.
6. Προσδιορίζουμε την f΄΄ και μελετάμε την f ως προς την κυρτότητα και εντοπίζουμε τα σημεία καμπής της C_f.
7. Συγκεντρώνουμε τα συμπεράσματα κυρτότητας – μονοτονίας σ΄ έναν πίνακα που ονομάζεται πίνακας μεταβολών της f.
8. Βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της C_f (κατακόρυφες, οριζόντιες πλάγιες), εφόσον υπάρχουν. Με αυτόν τον τρόπο ελέγχουμε και την συμπεριφορά της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της.
9. Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τοποθετούμε αρχικά τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες (εφόσον υπάρχουν), τα ακρότατα, τα σημεία καμπής και τέλος σχεδιάζουμε τις ασύμπτωτες.

Υποδειγματική Άσκηση 46.1.

Να μελετήσετε τη συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$

και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

Υποδειγματική Άσκηση 46.2.

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

για την οποία ισχύει $f(e) = e^2$ και:

$f'(x) \cdot x - 2f(x) = x^2$ για κάθε $x > 0$

i. Να βρείτε τον τύπο της f.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

v. Να σχεδιάσετε τη C_f

vi. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x^2}}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.